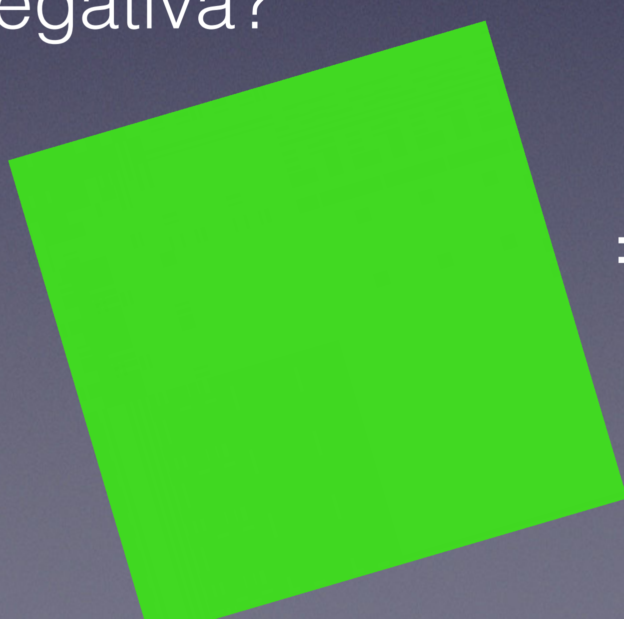
Cuaterniones

Fundamentos Matemáticos
Máster en Programación de Videojuegos
Profesor: José María Benito

Números complejos

- Número complejo aparece en cálculo espontáneamente cuando intentamos resolver esta ecuación:
  - $i^2=-1$
- ¿Cuál es el valor del lado de un cuadrado de area negativa?



$=-1?$

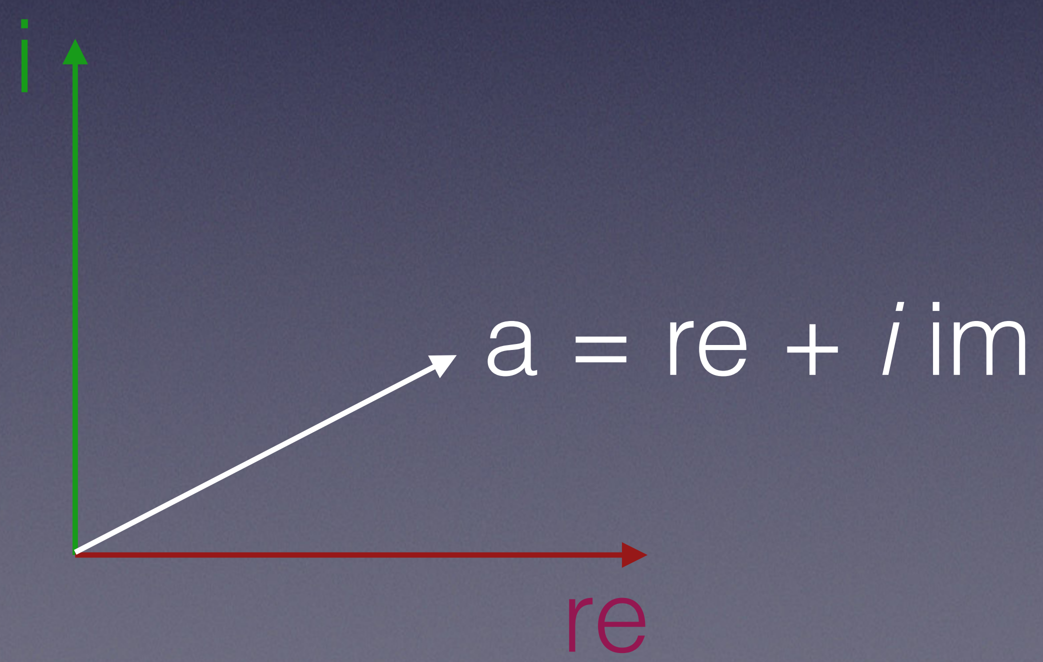
Números complejos

- ¿Cuál es el valor del lado de un cuadrado negativo?
  - $i=\sqrt{-1}$

$=\sqrt{-1}$

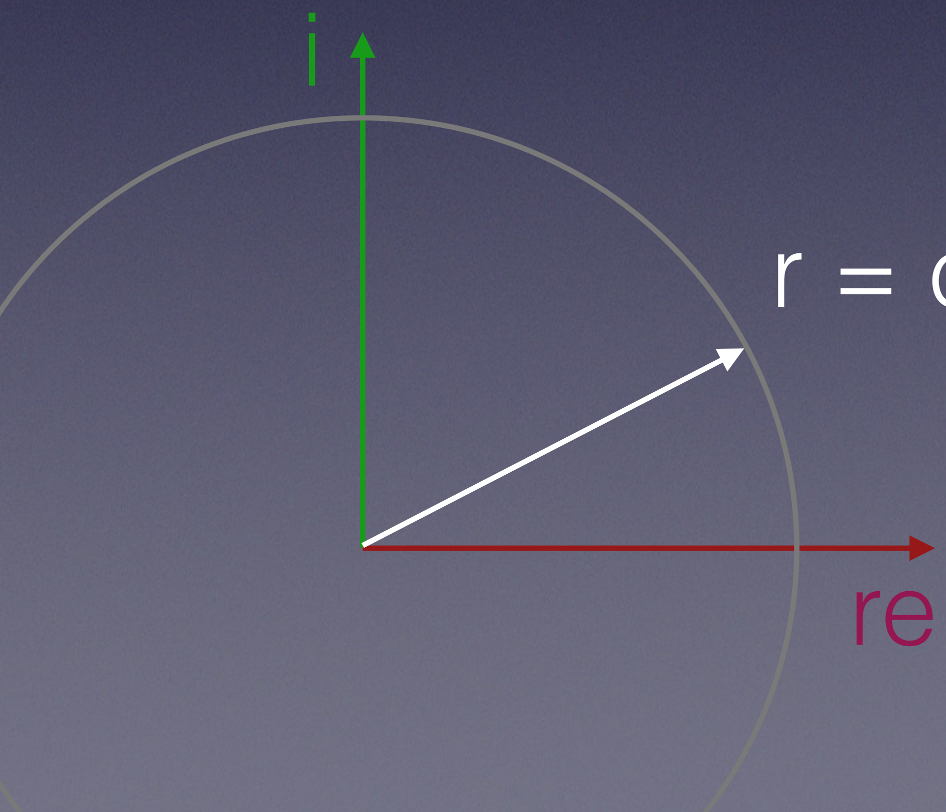
Números complejos

- Este número no es real, lo denominamos imaginario, y decimos que está en otra dimensión.



Rotaciones

- Podemos usar el eje nuevo (i) para rotar en 2D



$r = \cos\theta + i \sin\theta$

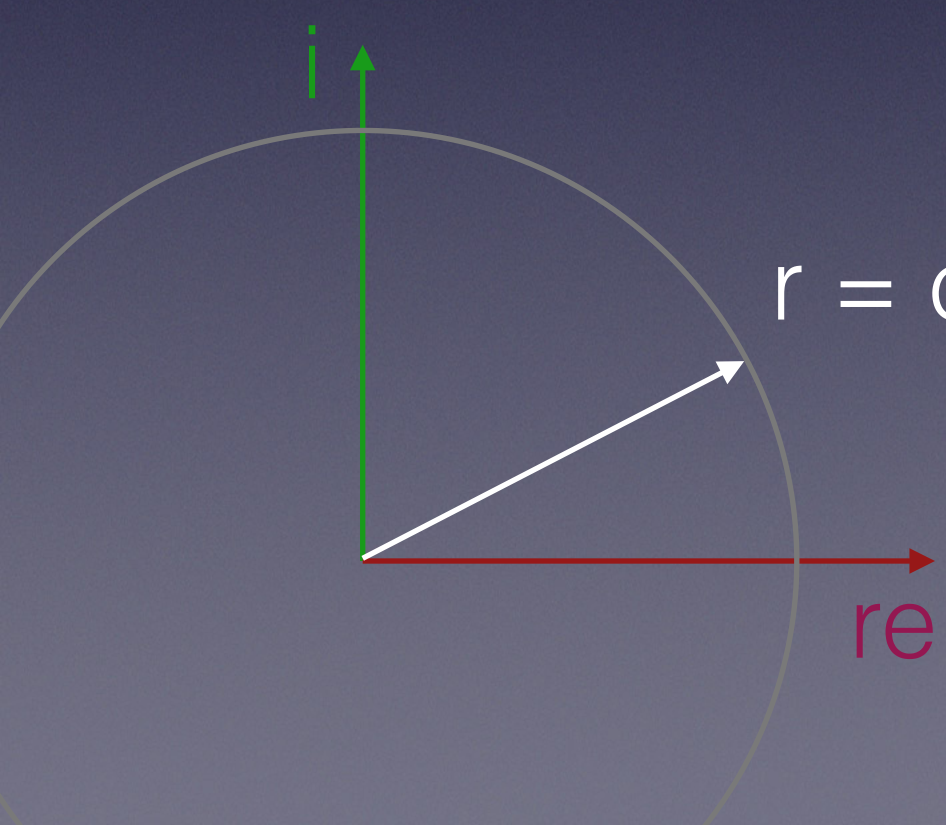
Rotaciones

- Podemos usar el eje nuevo (i) para rotar en 2D

$r = \cos\theta + i \sin\theta$

$a = x + iy$

Ejercicio ¿a*r?



$r = \cos\theta + i \sin\theta$

Rotaciones

$$r = \cos\theta + i\sin\theta$$

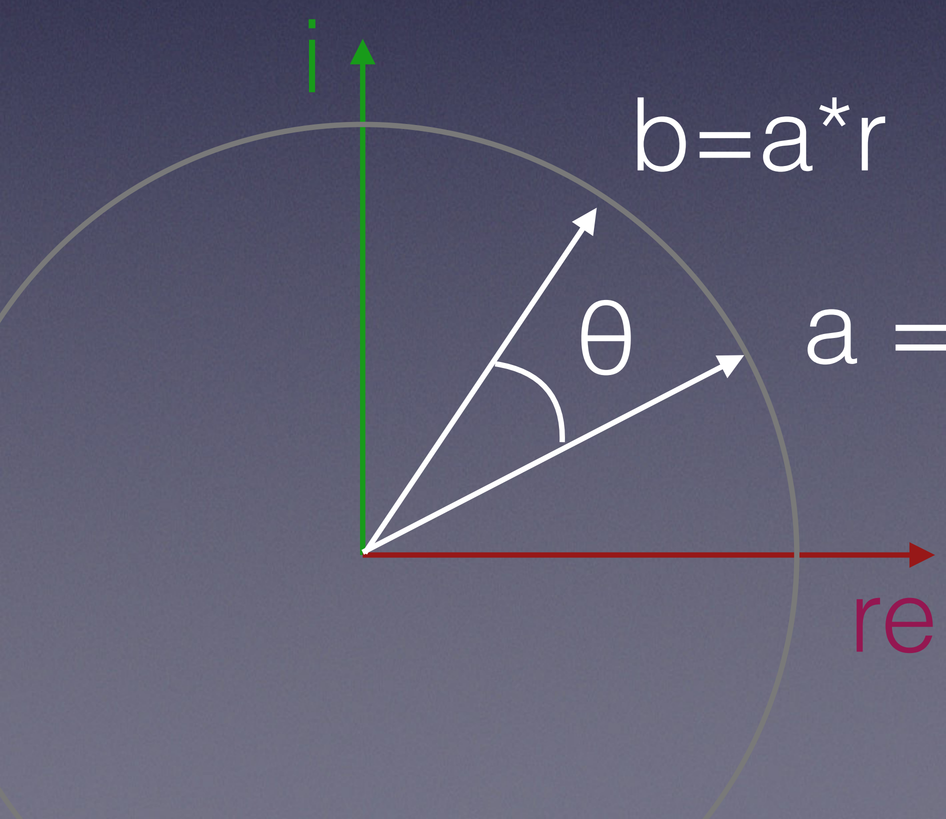
$$a = x + iy$$

- Podemos usar el eje nuevo (i) para rotar en 2D

$a*r$

$=(x + i\, y)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$=(x\cos\theta - y\sin\theta) + i\,(x\sin\theta + y\cos\theta)$



$b = a*r$

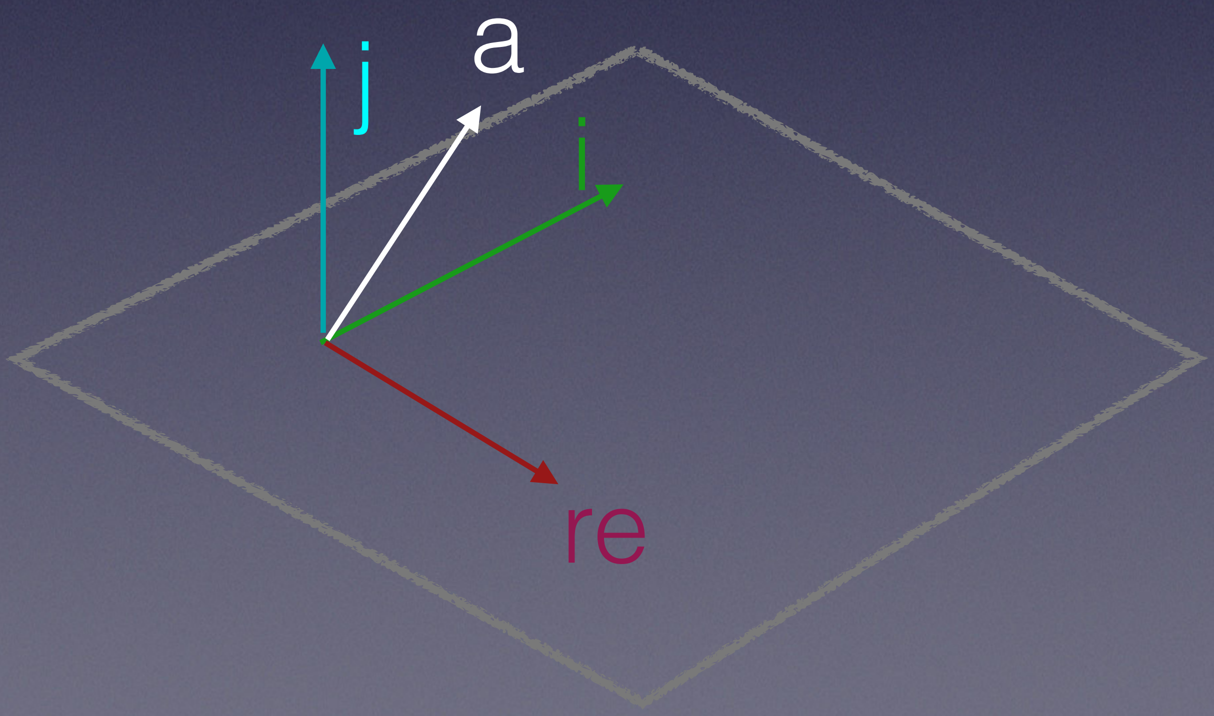
$a = x + iy$

es idéntico a…

$$\begin{bmatrix} b(0) \\ b(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(0) \\ a(1) \end{bmatrix}$$

Rotaciones

- Y si añadimos otro número imaginario (j), ¿podemos rotar en 3D?



Rotaciones

- Hamilton estudió añadir un número complejo adicional de la forma:
    - z = a+ib+jc
- Pero se dio cuenta de que un conjunto de este tipo no es cerrado con la operación de multiplicación (ij). Si existiera, entonces:

$$
\begin{aligned}
ij &= a + ib + jc \\
i^2 j &= ia + i^2 b + ijc \quad \text{(multiply } i \text{ on both sides)} \\
-j &= ia - b + ijc \\
-j &= -b + ia + (a + ib + jc)c \quad (\because ij = a + ib + jc) \\
-j &= -b + ia + ac + ibc + jc^2 \\
-j &= (ac - b) + i(a + bc) + jc^2 \\
0 &= (ac - b) + i(a + bc) + j(c^2 + 1)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore ac - b = a + bc = c^2 + 1 = 0
$$

$$
\text{but } c^2 + 1 \neq 0
$$

no hay número real c que cumpla esa condición (http://www.songho.ca)

Cuaterniones

- Hamilton se dio cuenta de que era necesario un número complejo de 4 valores para sus propósitos:
  - $q = s + i\,x + j\,y + k\,z$
- ahora es fácil ij=0+i0+j0+k1
- Y con ello inventó los quaterniones.

Cuaterniones

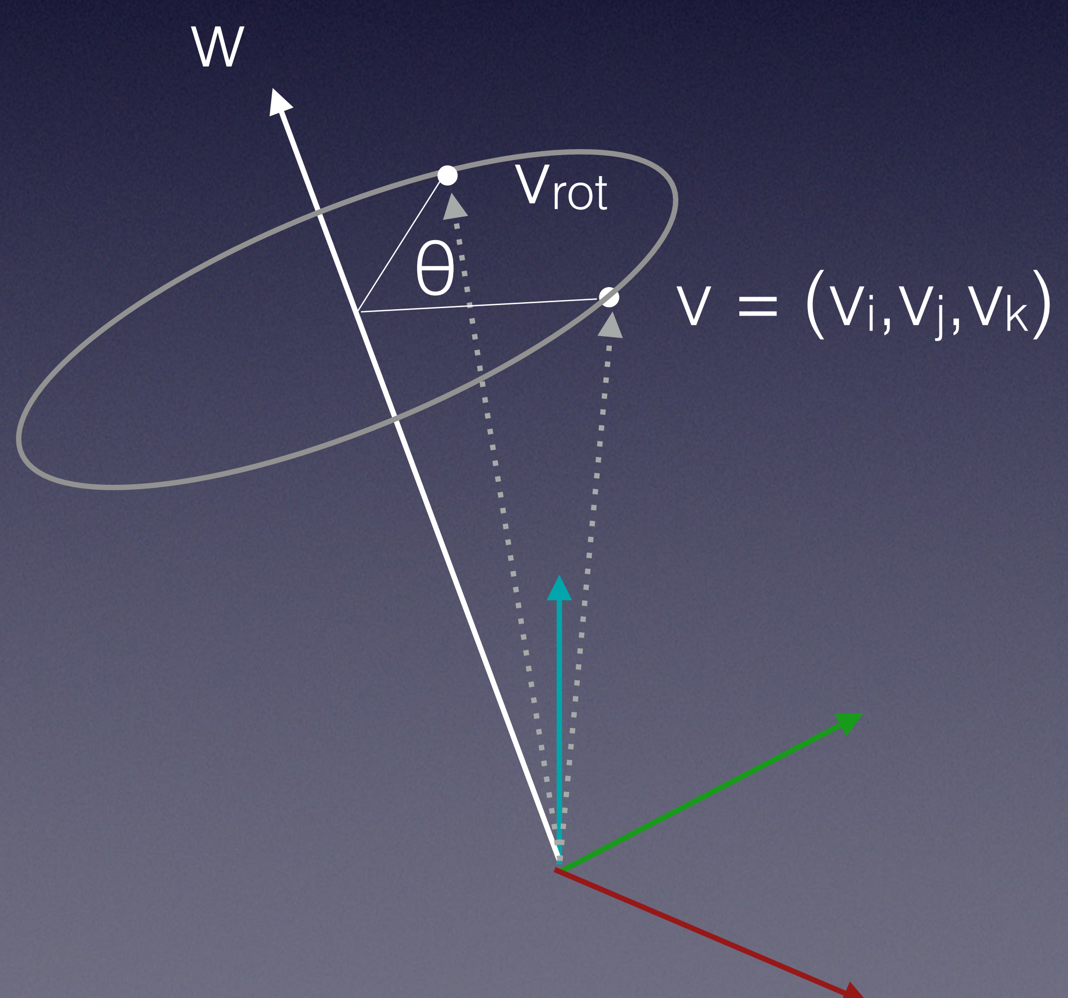
- Fijáos que la multiplicación de números complejos es igual que el producto vectorial:

- ij = k

ejercicio, sacar todas las combinaciones con la mano derecha

Olinde Rodrigues

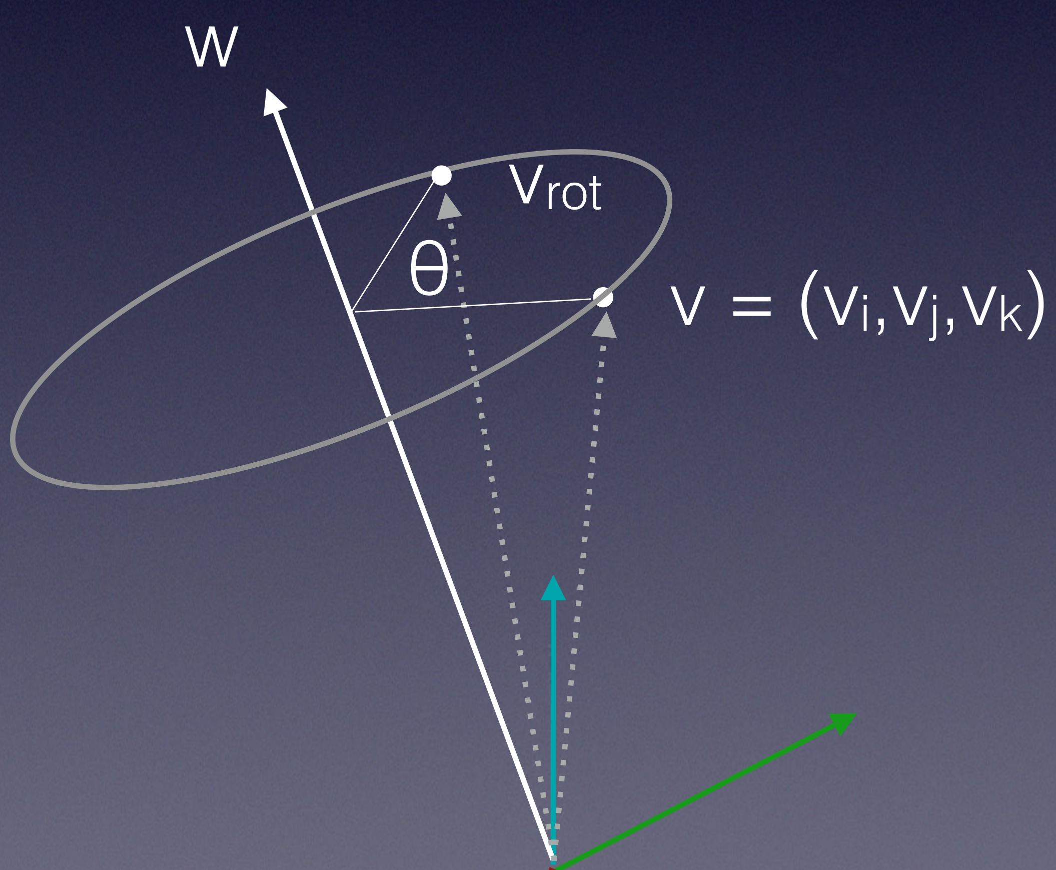
- Describió la fórmula que lleva su nombre para realizar una rotación utilizando un eje (w) y un ángulo (θ):

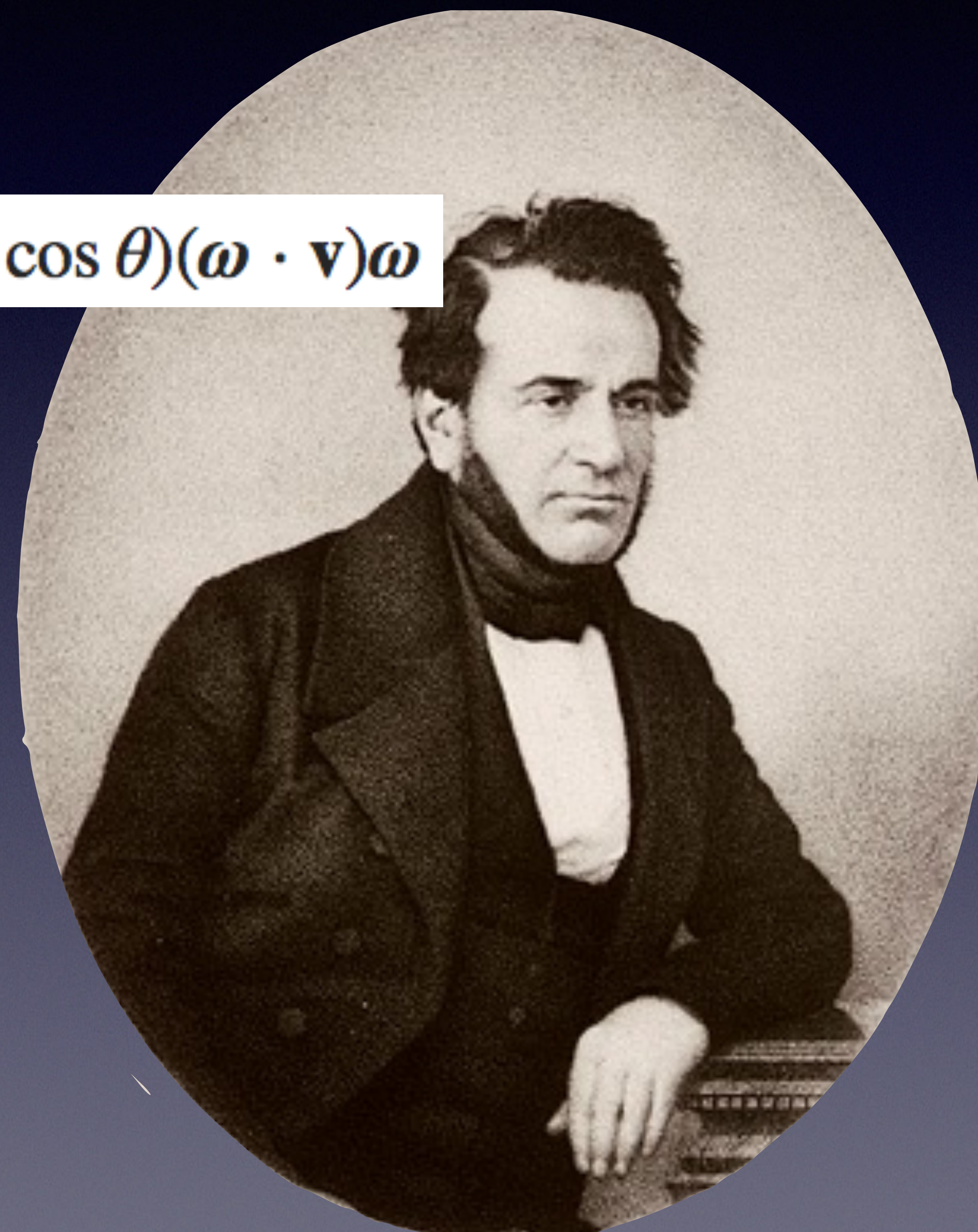


Olinde Rodrigues

- Su resultado es el siguiente:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{rot}} = (\cos\theta)\mathbf{v} + (\sin\theta)(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}) + (1-\cos\theta)(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v})\boldsymbol{\omega}$$

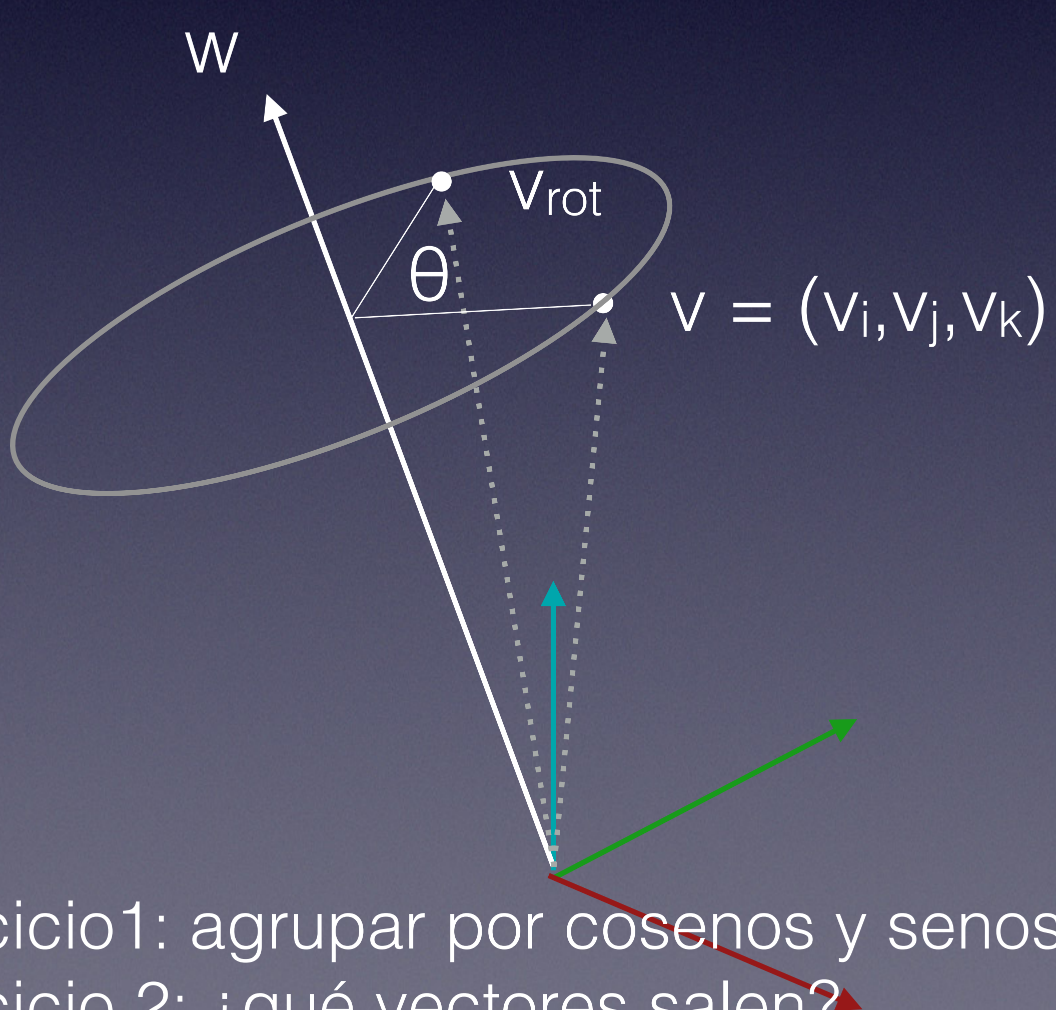


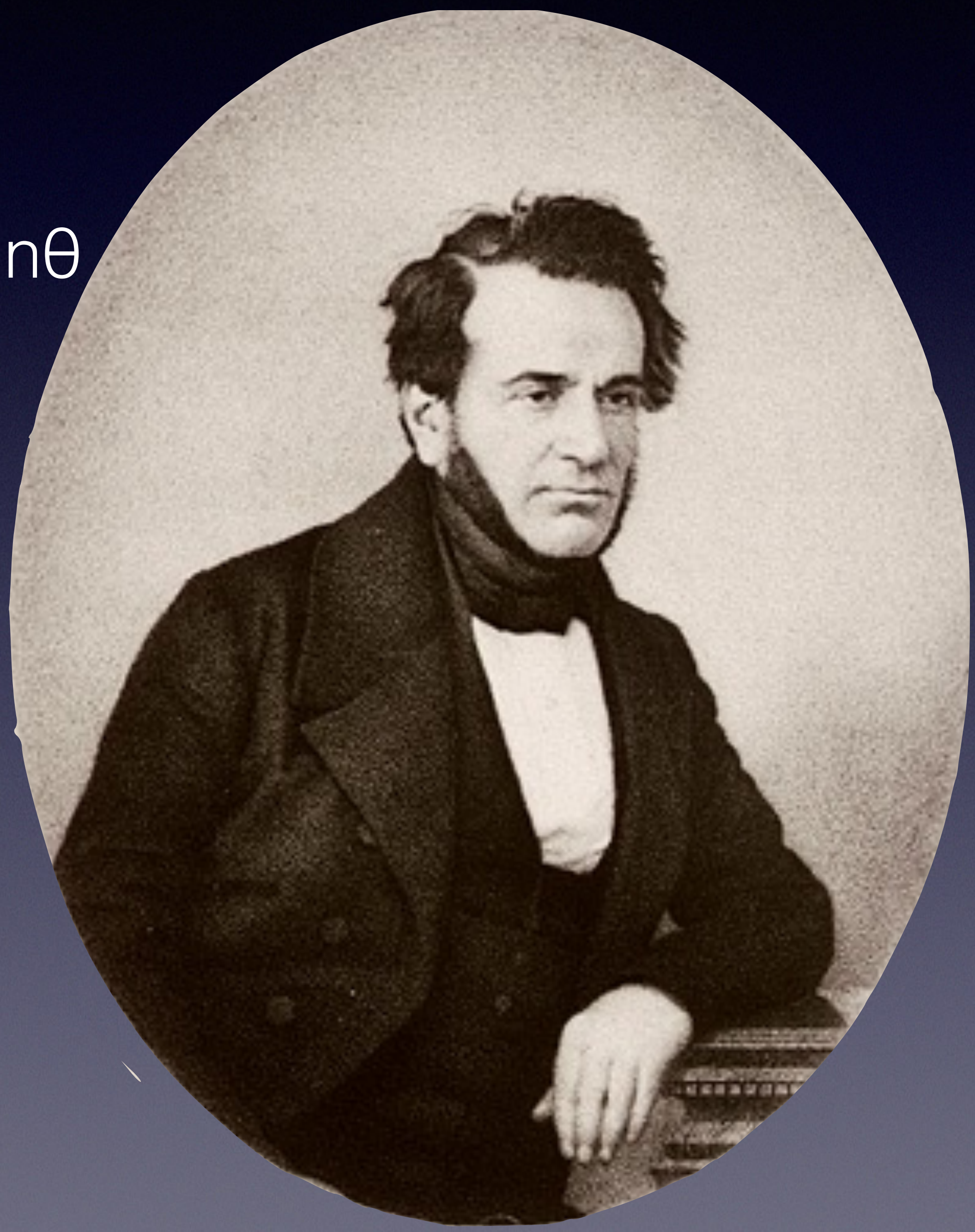


Ejercicio1: agrupar por cosenos y senos
Ejercicio 2: ¿qué vectores salen?

Olinde Rodrigues

- Su resultado es el siguiente:
- vrot =(w·v)w+(v-(w·v)w)cosθ+(w x v)sinθ





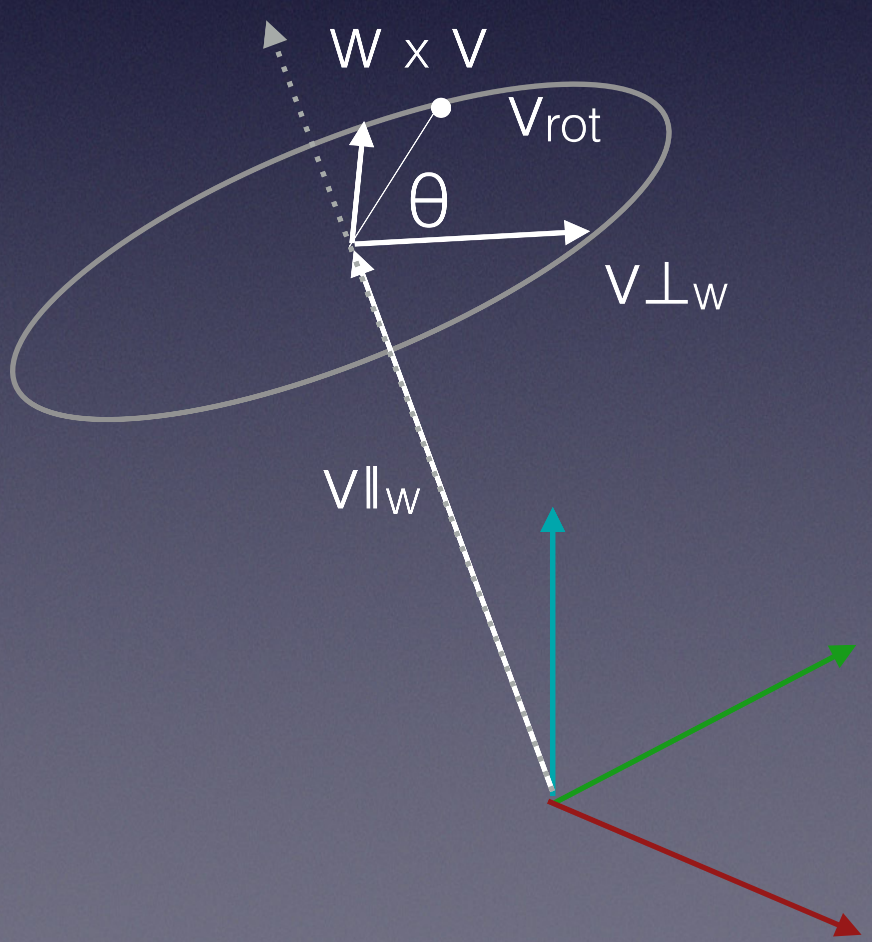
Ejercicio1: agrupar por cosenos y senos
Ejercicio 2: ¿qué vectores salen?

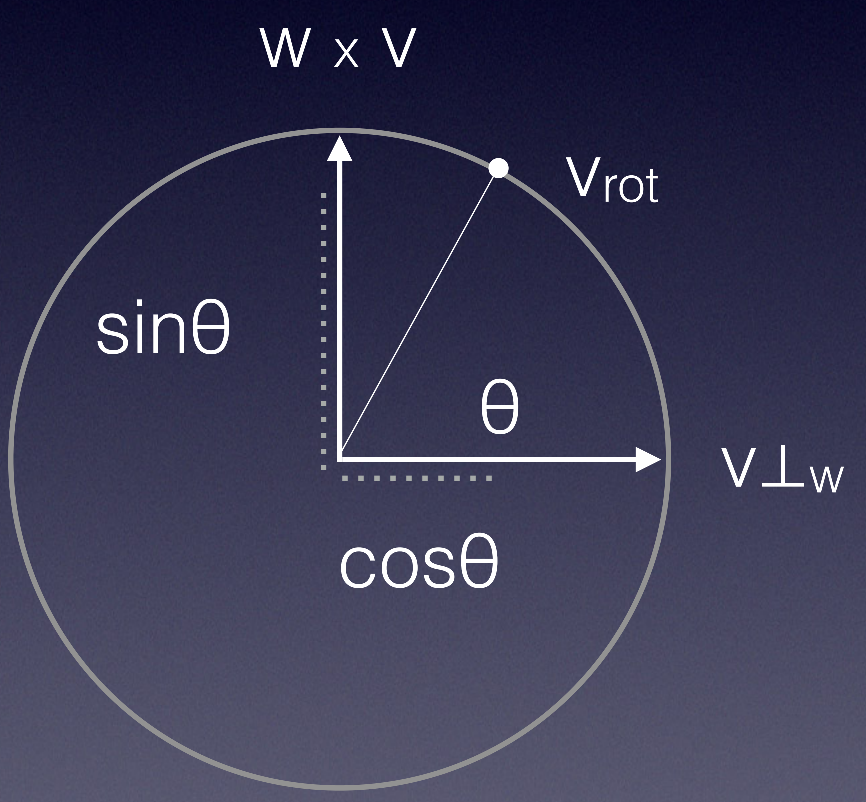
Olinde Rodrigues

- Su resultado es el siguiente:

- $v_{rot} = (w \cdot v)w + (v - (w \cdot v)w)\cos\theta + (w \times v)\sin\theta$

$$= v_{\parallel w} + v_{\perp w}\cos\theta + (w \times v)\sin\theta$$

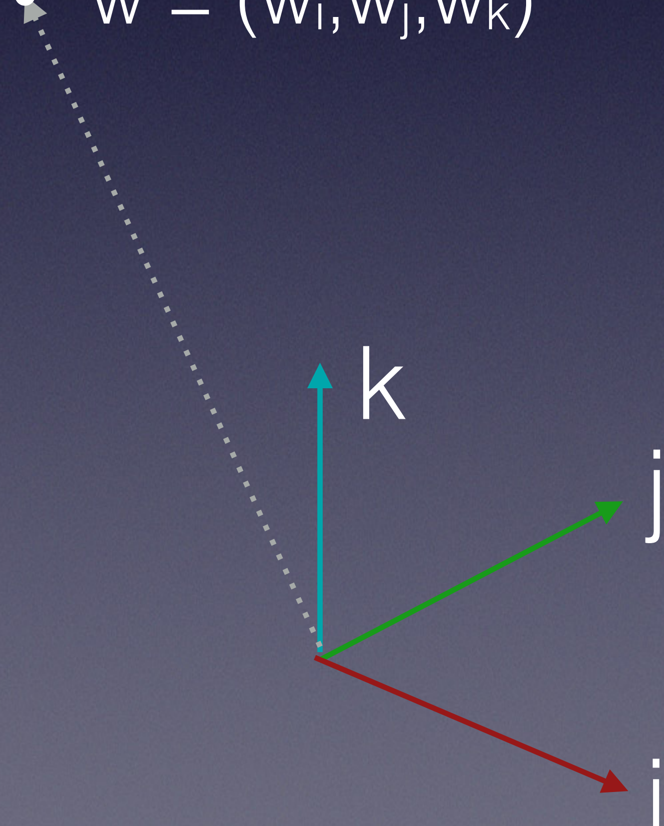




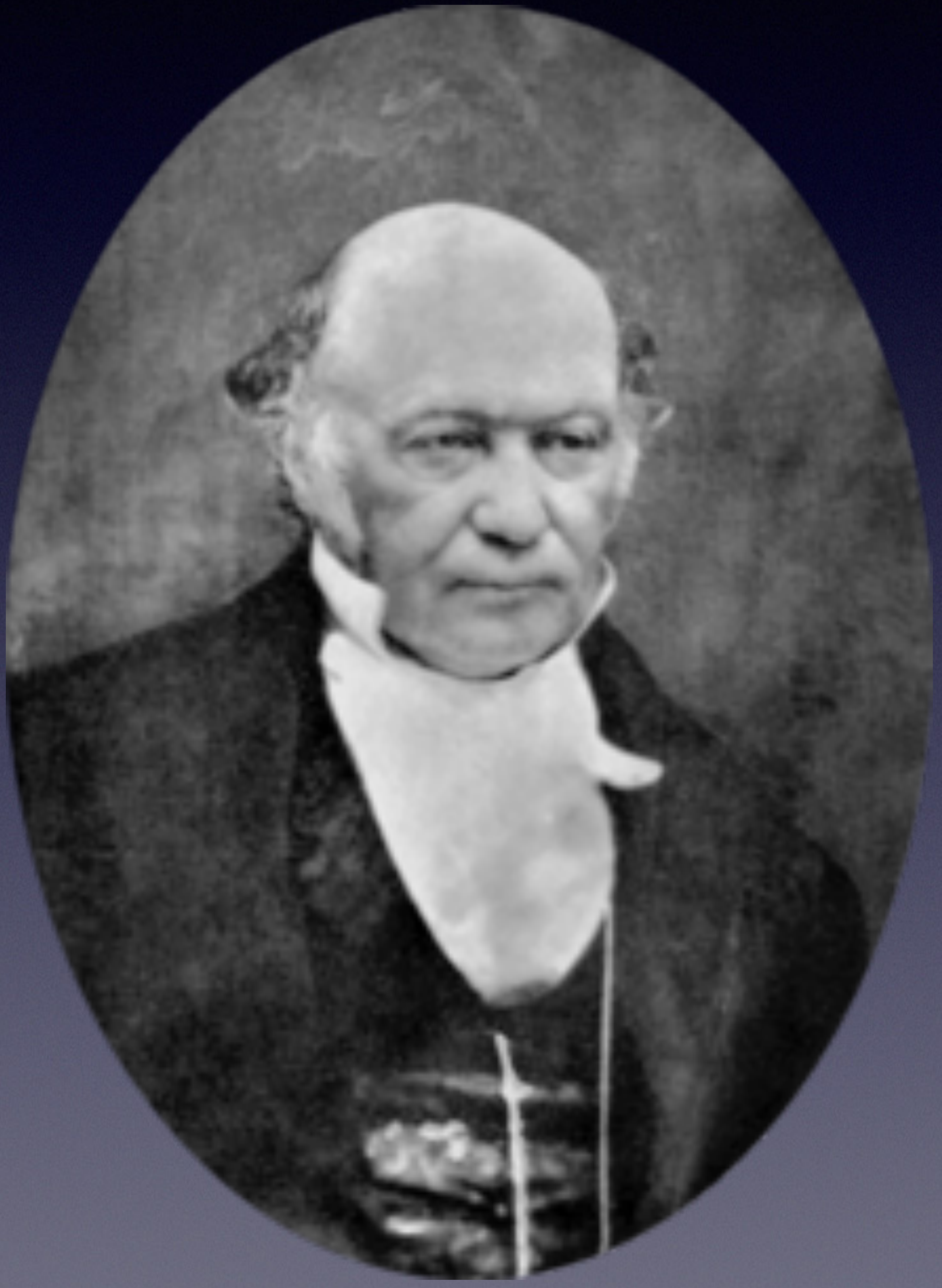
Cuaterniones

- Si consideramos i,j,k como una base (similar a x,y,z), podemos definir un vector u en esa base:

$w = (w_i, w_j, w_k)$



¿w como eje de rotación?



Cuaterniones

- Si consideramos i,j,k como una base (similar a x,y,z), podemos definir un vector u en esa base:

$$q = s + i\,x + j\,y + k\,z$$

$$q = s + w_{ijk}$$

¿por qué θ/2?

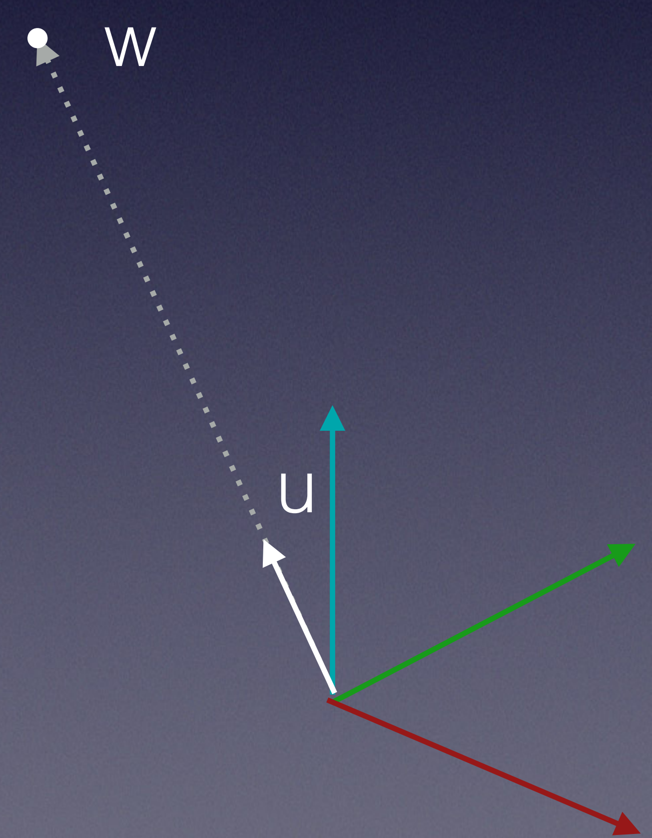
si hacemos

$$s = \cos(\theta/2)$$

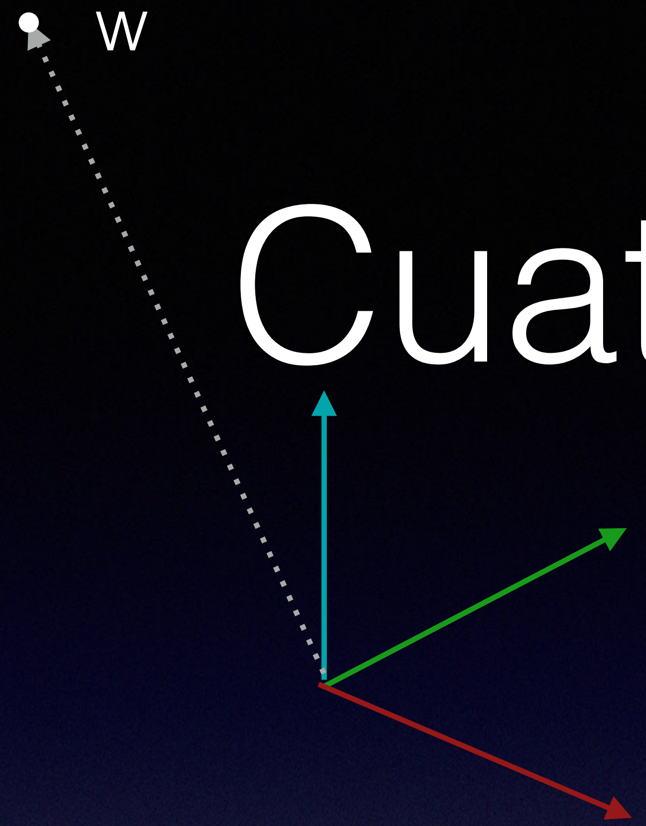
$$w_{ijk} = \sin(\theta/2)\, u_{ijk}$$

donde $u = u_{ijk}$ es eje de rotación y $|u_{ijk}| = 1$, entonces

$|q|=1$ (cuaternio rotación unitario)



¿w como eje de rotación?



Cuaternión=Rodrigues

u vector unitario

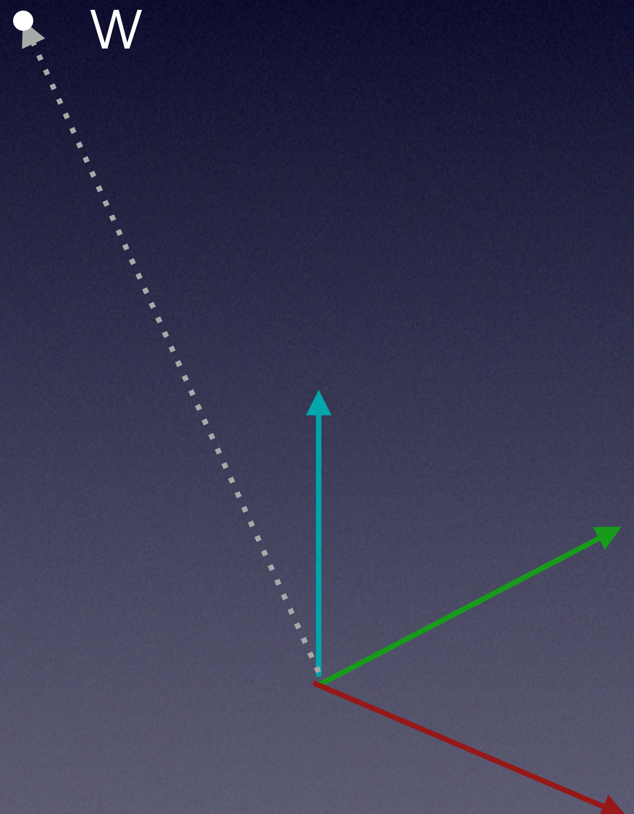
w

$$\vec{v'} = q\vec{v}q^{-1} = \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \vec{u}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\vec{v}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \vec{u}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

yields the vector $\vec{v}$ rotated by an angle α around the axis $\vec{u}$. Expanding out, we have

$$\begin{aligned}
\vec{v'} &= \vec{v}\cos^2\frac{\alpha}{2} + (\vec{u}\vec{v} - \vec{v}\vec{u})\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \vec{u}\vec{v}\vec{u}\sin^2\frac{\alpha}{2} \\
&= \vec{v}\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2(\vec{u}\times\vec{v})\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - (\vec{v}(\vec{u}\cdot\vec{u}) - 2\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v}))\sin^2\frac{\alpha}{2} \\
&= \vec{v}(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}) + (\vec{u}\times\vec{v})(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}) + \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v})(2\sin^2\frac{\alpha}{2}) \\
&= \vec{v}\cos\alpha + (\vec{u}\times\vec{v})\sin\alpha + \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v})(1-\cos\alpha) \\
&= (\vec{v} - \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v}))\cos\alpha + (\vec{u}\times\vec{v})\sin\alpha + \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v}) \\
&= \vec{v}_\perp\cos\alpha + (\vec{u}\times\vec{v}_\perp)\sin\alpha + \vec{v}_{\|}
\end{aligned}$$

Algoritmo del Cuatenión



Pasos:

1 Obtener cuaternión de alguna forma. Por ejemplo de eje (normalizado) y ángulo:

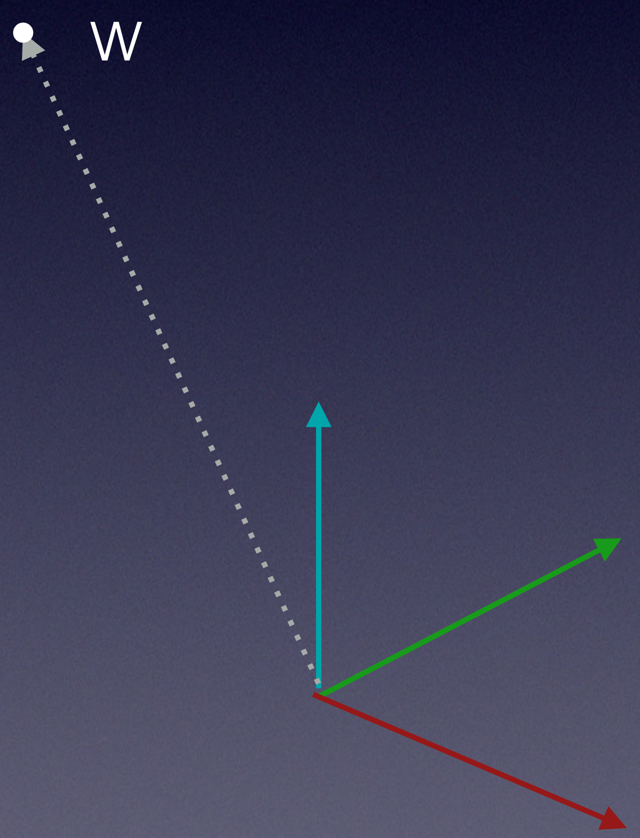
```
public void set(AxisAngle4d a1) {
  double s = Math.sin(a1.angle/2);
  x = a1.x * s;
  y = a1.y * s;
  z = a1.z * s;
  w = Math.cos(a1.angle/2);
}
```

2 Multiplicar vector por cuaternión

$$v_{rot} = qvq^*$$

donde el vector v es tratado como un cuaternión con s = 0
Nota: Normalmente q se convierte a matriz A y se multiplica Av

Referencias: multiplicar

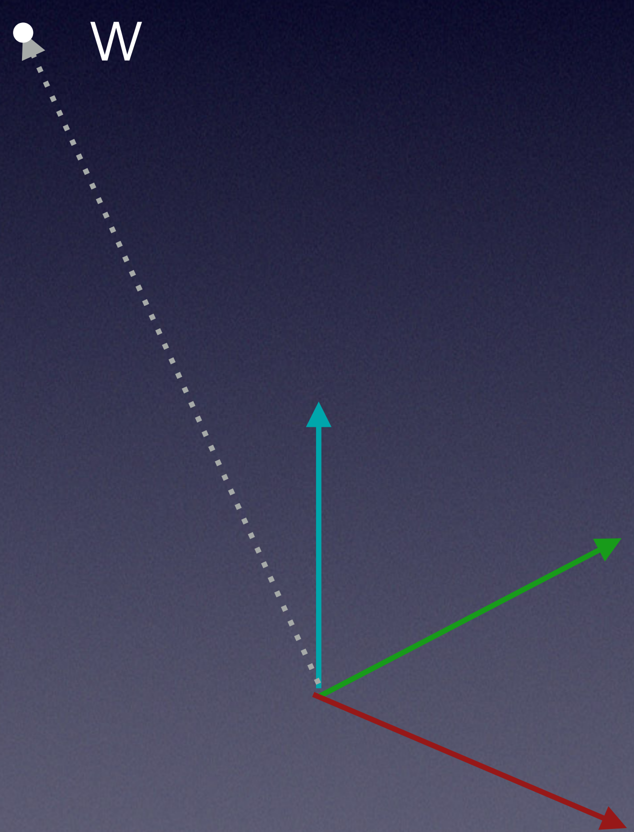


2. Multiplication

If $p = [s, v], \quad q = [s', v'], \quad \text{then } pq = [ss' - v \cdot v', \;\; v \times v' + sv' + s'v]$

$$\begin{aligned}
pq &= [s, v][s', v'] \\
&= (s + ix + jy + kz)(s' + ix' + jy' + kz') \\
&= ss' + isx' + jsy' + ksz' + is'x - xx' + kxy' - jxz' + \\
&\qquad js'y - kyx' - yy' + iyz' + ks'z + jzx' - izy' - zz' \\
&= ss' - (xx' + yy' + zz') + i(yz' - zy') + isx' + is'x + \\
&\qquad j(zx' - xz') + jsy' + js'y + k(xy' - yx') + ksz' + ks'z \\
&= ss' - v \cdot v' + i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx') + \\
&\qquad s(ix' + jy' + kz') + s'(ix + jy + kz) \\
&= [ss' - v \cdot v', \; v \times v' + sv' + s'v]
\end{aligned}$$

Referencias: conjugado



5. Conjugate

Quaternion congugate is defined by negating the vector part of the quaternion.

If $q = [s, v]$, then $q^* = [s, v]^* = [s, -v]$

$$
\begin{aligned}
(q^*)^* &= q \\
(p+q)^* &= p^* + q^* \\
(pq)^* &= q^* p^* \\
qq^* &= q^* q
\end{aligned}
$$

Note that the multiplication of a quaternion and its conjugate is commutative.