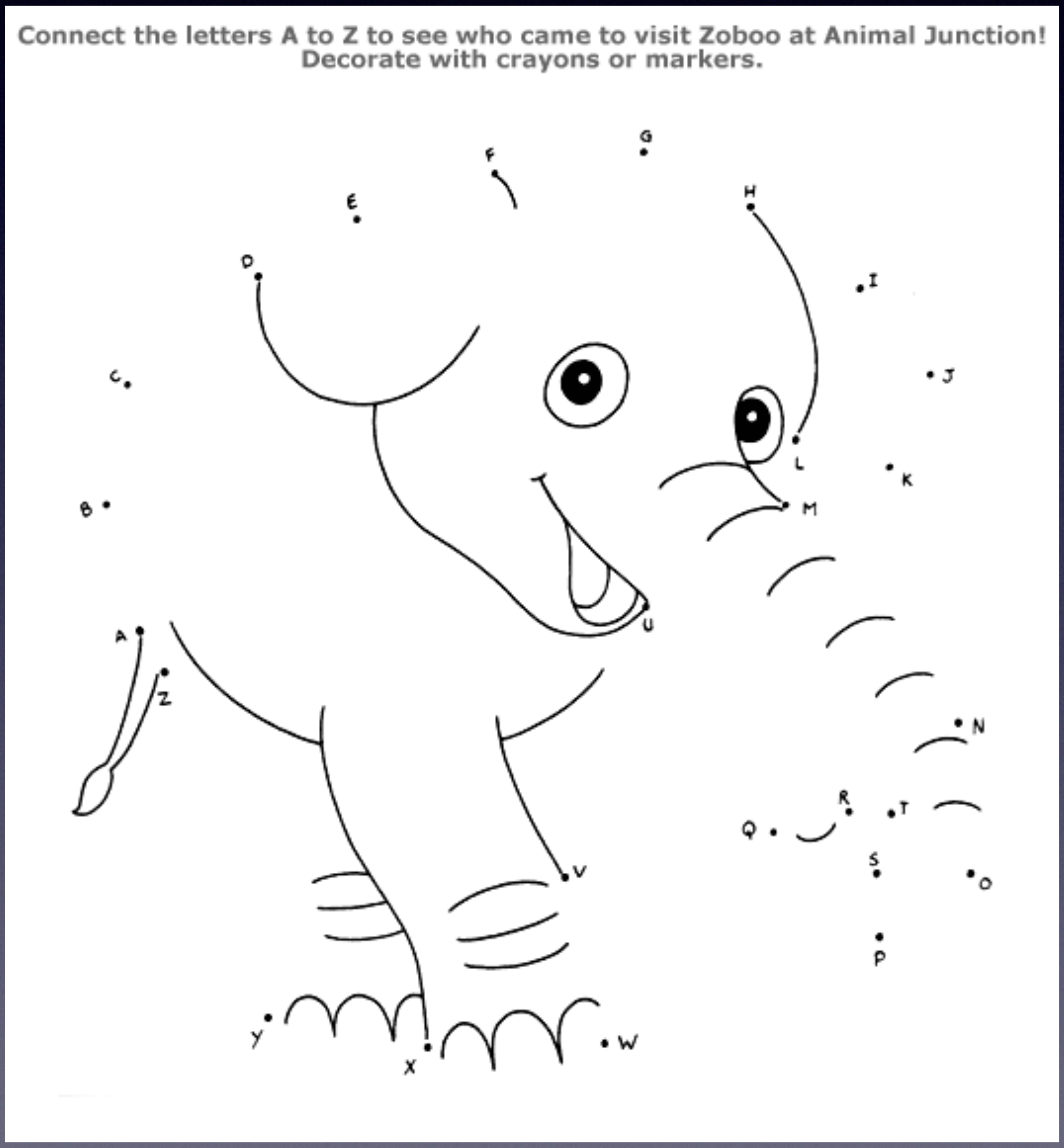
Interpolación

Fundamentos Matemáticos
Máster en Programación de Videojuegos
Profesor: José María Benito

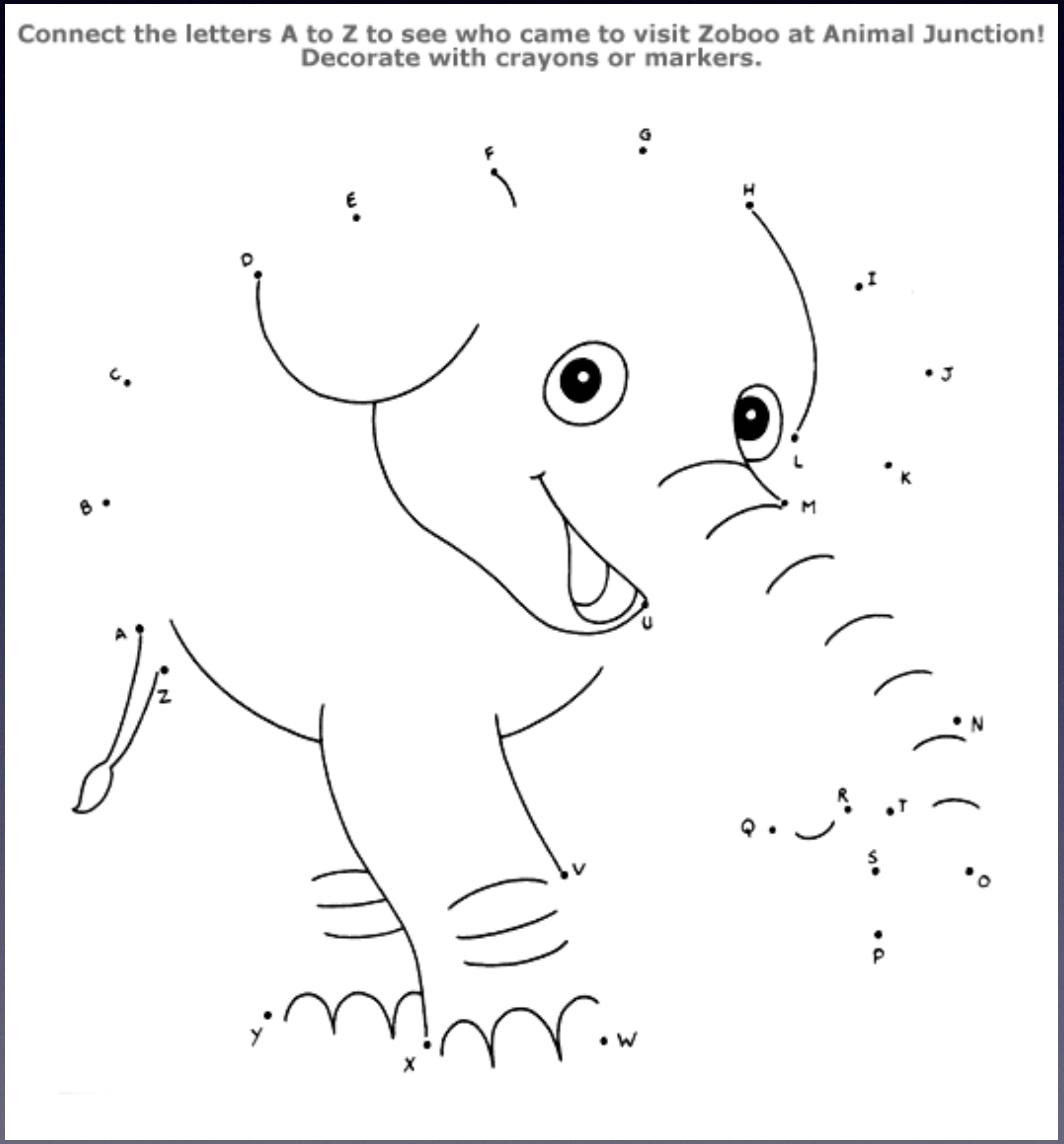
Qué es y para qué sirve

- Método matemático de reconstrucción de valores:
    - Utilizar valores conocidos para definir los valores intermedios.
- Parecido al juego de unir los puntos.
- Fundamentalmente sirve para ahorrar datos.

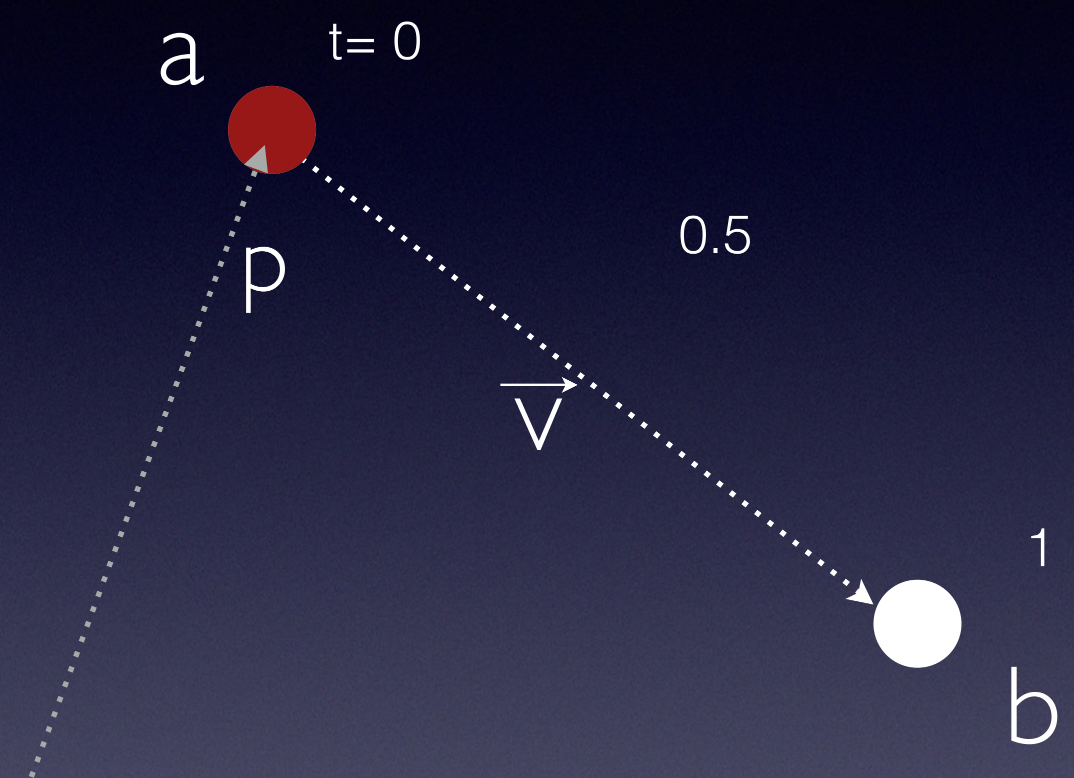


Dónde hay interpolación

- En muchos ámbitos de videojuegos:
  - posiciones
  - ángulos
  - animaciones
  - color
  - sonido
  - en general señales …



Interpolación Lineal



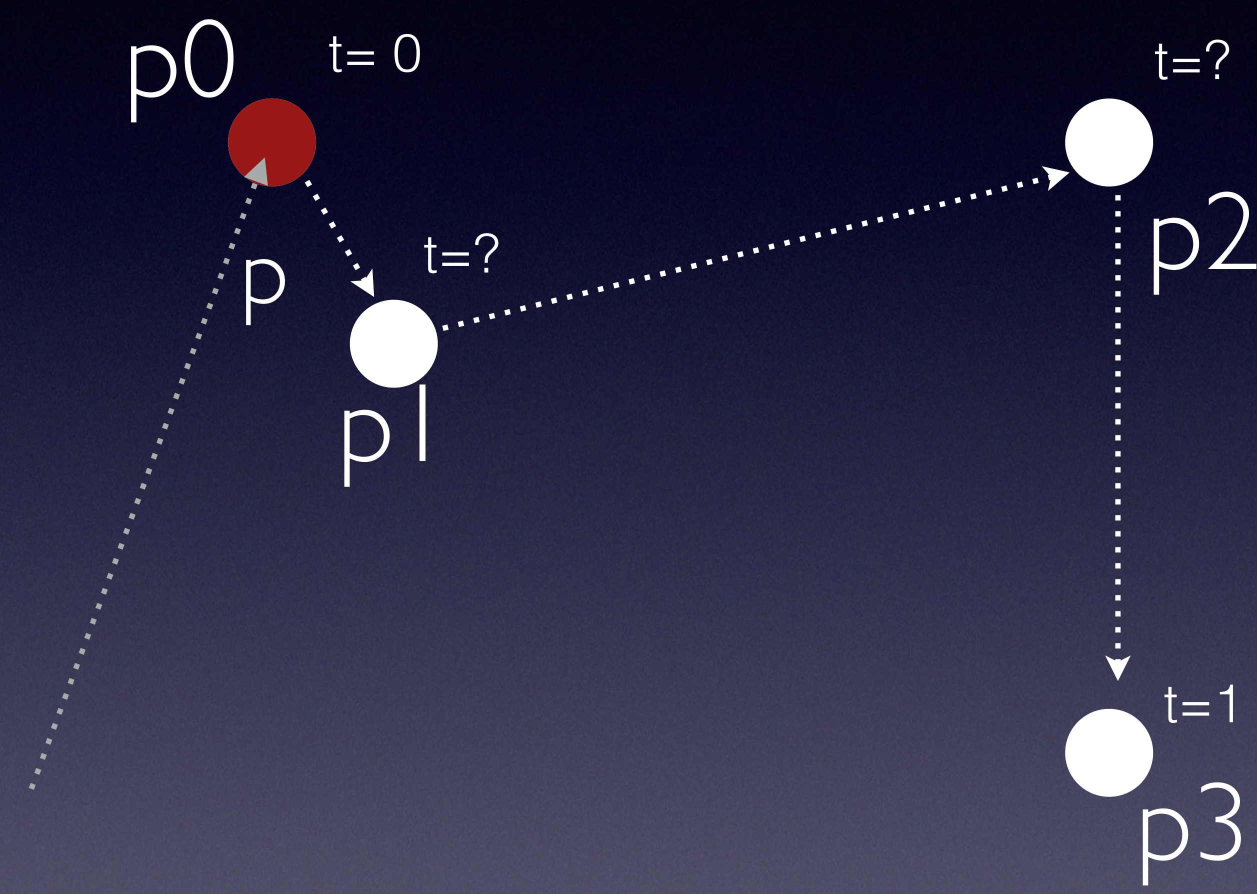
- También conocida como LERP (Linear intERPolation).
- Se utiliza ecuaciones paramétricas (es decir con parámetro t):

$$p=lerp(a,b,t)=a + t(b-a) = a + t\,v$$

$$p=(1-t)a + t\,b$$

Ejercicio

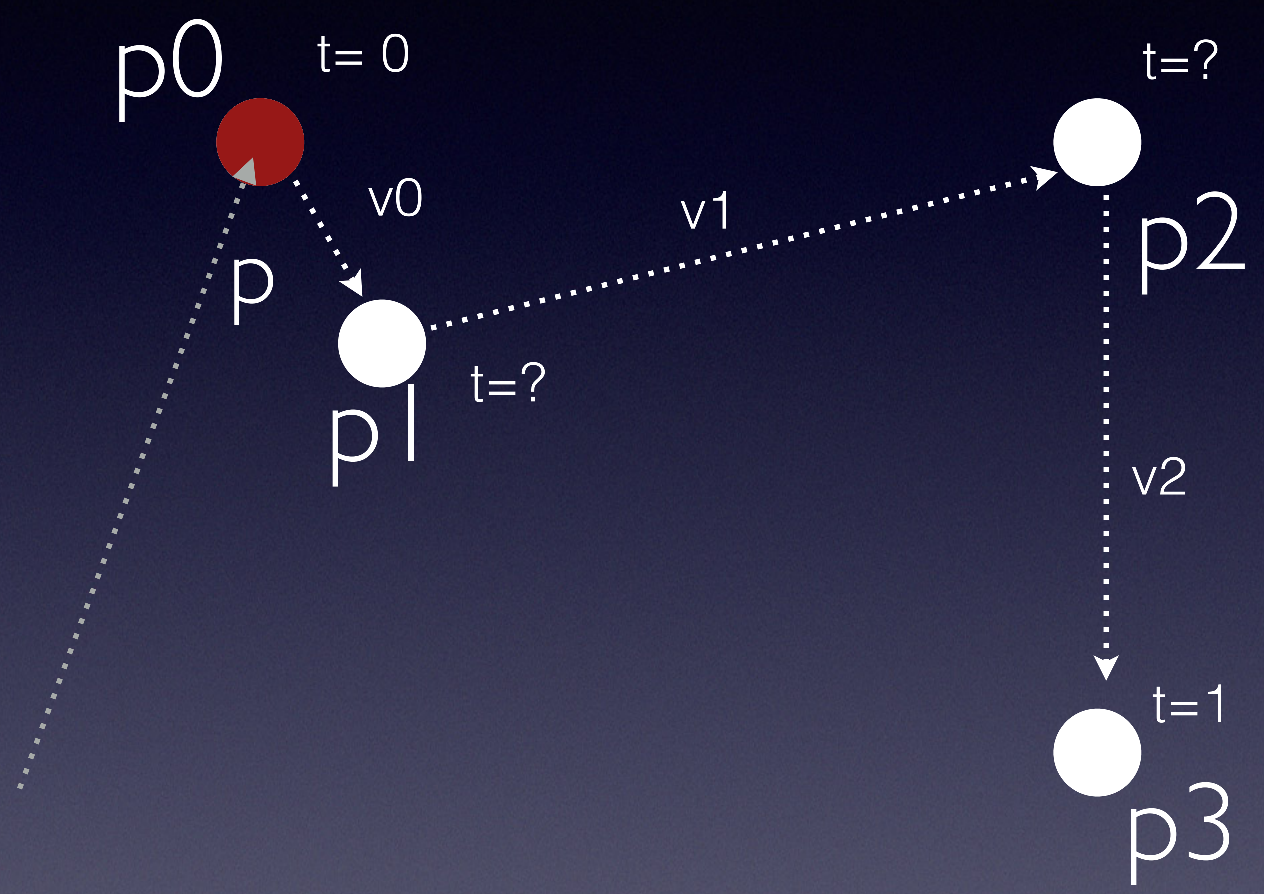
- Dada una serie de puntos {p0,p1,p2,…,pn}:
    - t(0,1) → lerp (p0,p1,t)
    - t1(1,2) → lerp (p1,p2,t)
    - t2(2,3) → lerp (p2,p3,t)
- Punto avanza con diferentes velocidades. ¿Como obtener avance homogéneo?
    1. Calcular rangos de cada tramo
    2. Calcular lerp de cada tramo



$$p = a + t(b-a)$$

Respuesta 1

1. Distancia total d = d0+d1+d2 =|v0|+|v1|+|v2|
    1. interpolamos con s ∈ (0,d)
2. s0 (0,d0)
3. s1 (d0, d0+d1)
4. s2 (d0+d1,d)



p=a + t(b-a)

Respuesta 2

1. si $s \in (0, d0) \rightarrow t = s/d0$

   $\rightarrow$ lerp (p0,p1,t)

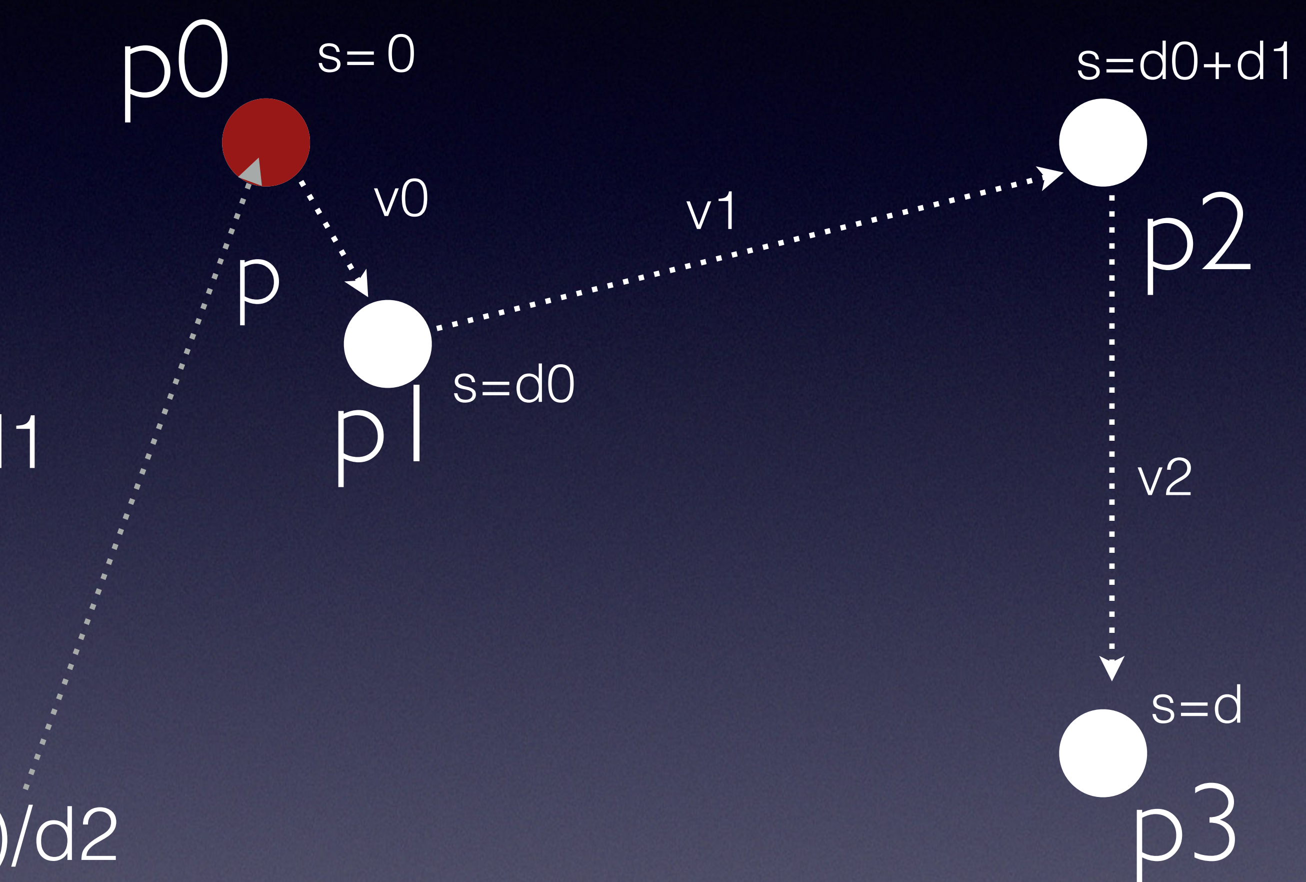
2. si $s \in (d0, d0+d1) \rightarrow t = (s-d0)/d1$

   $\rightarrow$ lerp (p1,p2,t)

3. si $s \in (d0+d1, d) \rightarrow t = (s-d0-d1)/d2$

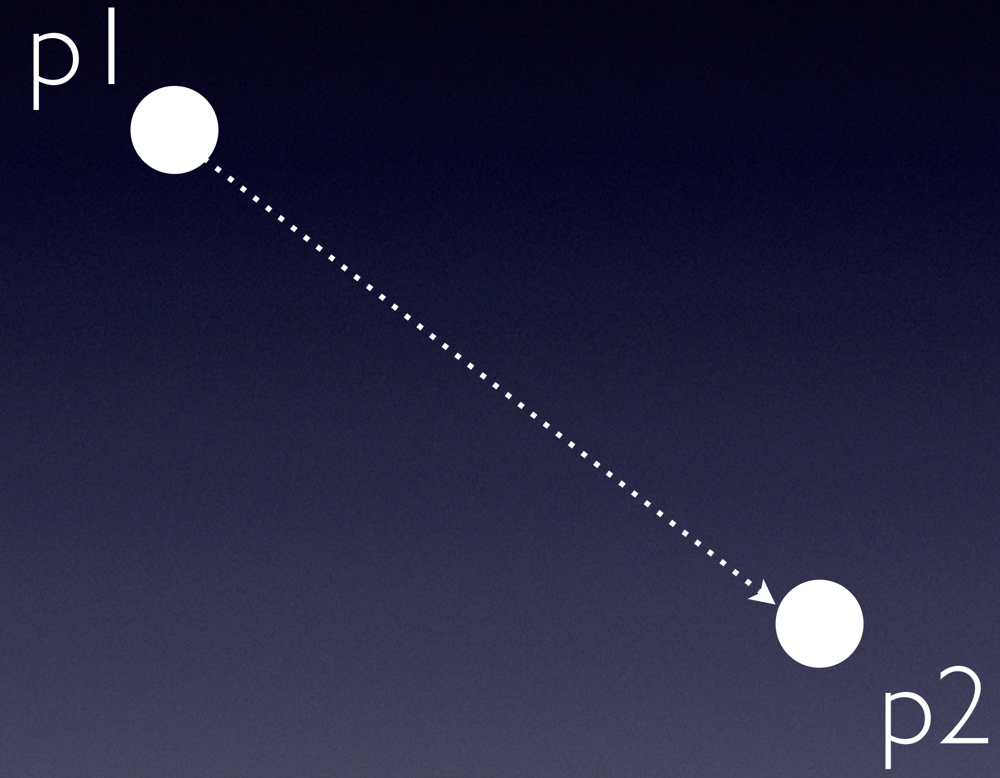
   $\rightarrow$ lerp (p1,p2,t)

Conseguimos que $t \in (0,1)$



$$\text{lerp}(a,b,t) = a + t(b-a)$$

Interpolación Lineal



- Volviendo a la fórmula:

$$p=(1-t)P1 + t\ P2$$

- Es de la forma

$$p=\boldsymbol{\alpha}_1 P1 + \boldsymbol{\alpha}_2\ P2$$

donde $\boldsymbol{\alpha}_1$ y $\boldsymbol{\alpha}_2$ suman 1

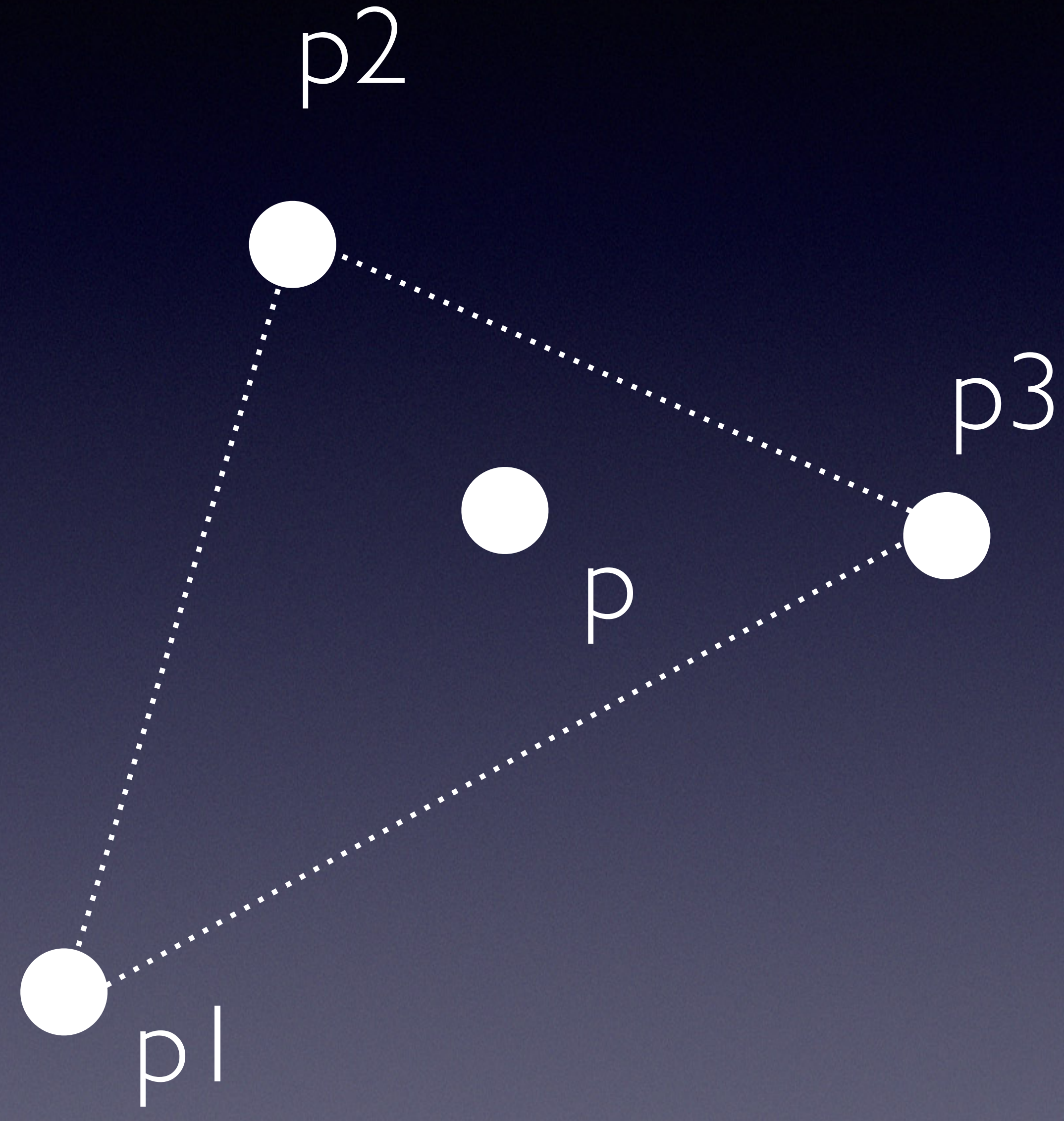
Interpolación Lineal

- Puede haber más:

$$p = \boldsymbol{\alpha}_1 P1 + \boldsymbol{\alpha}_2 P2 + \boldsymbol{\alpha}_3 P2$$

donde $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_2 = 1$

Se denomina *combinación afín*.
Vectores + puntos se denominan *espacio afín*.



Coordenadas Baricéntricas

- $U = P2-P1$
- $V = P3-P1$

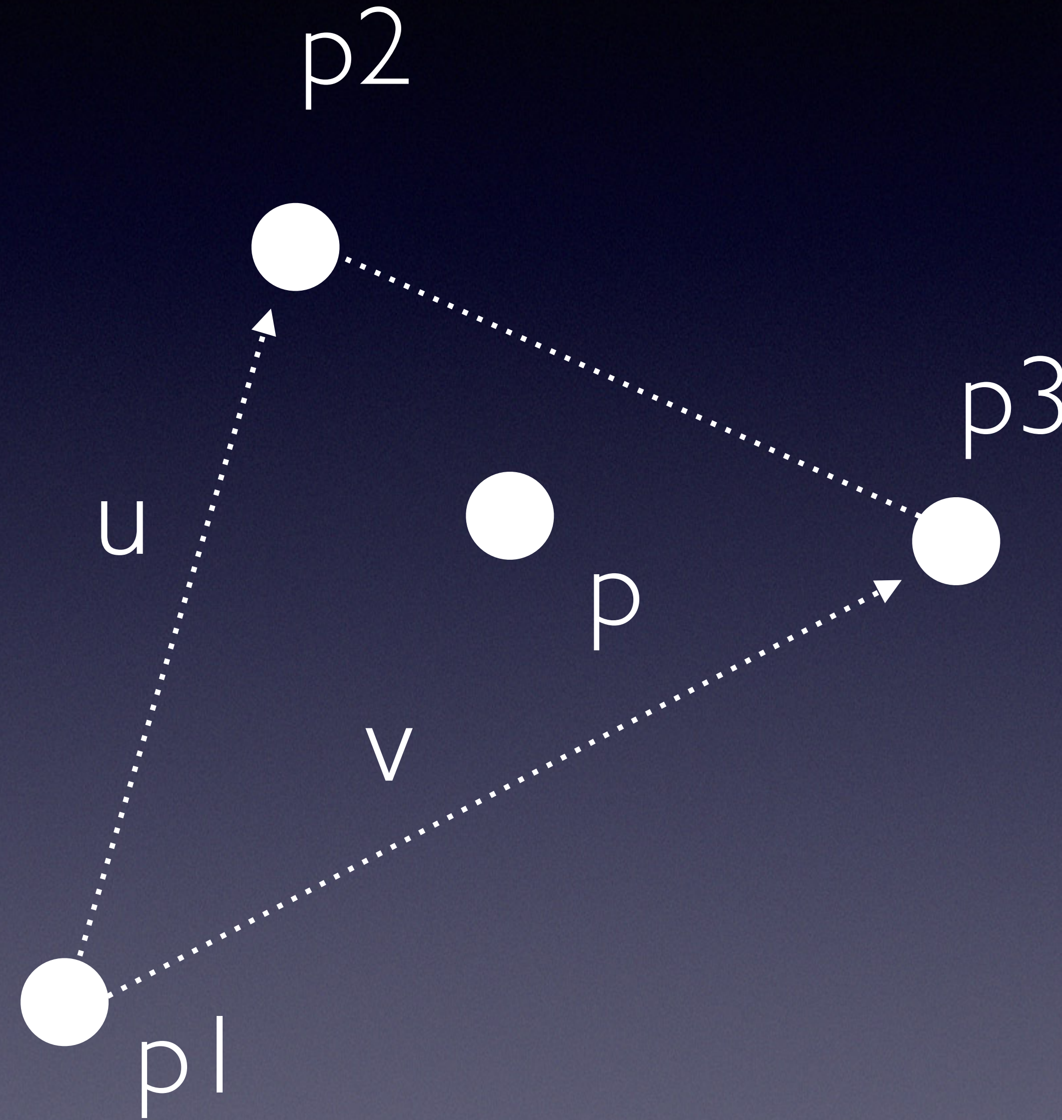
$p=P1+tU+sV$ donde $t+s <= 1$

$p=P1+t(P2-P1)+s(P3-P1)$

$p=P1+tP2-tP1+sP3-sP1$

$p=P1-tP1-sP1+tP2+sP3$

$p=P1(1-t-s)+tP2+sP3$



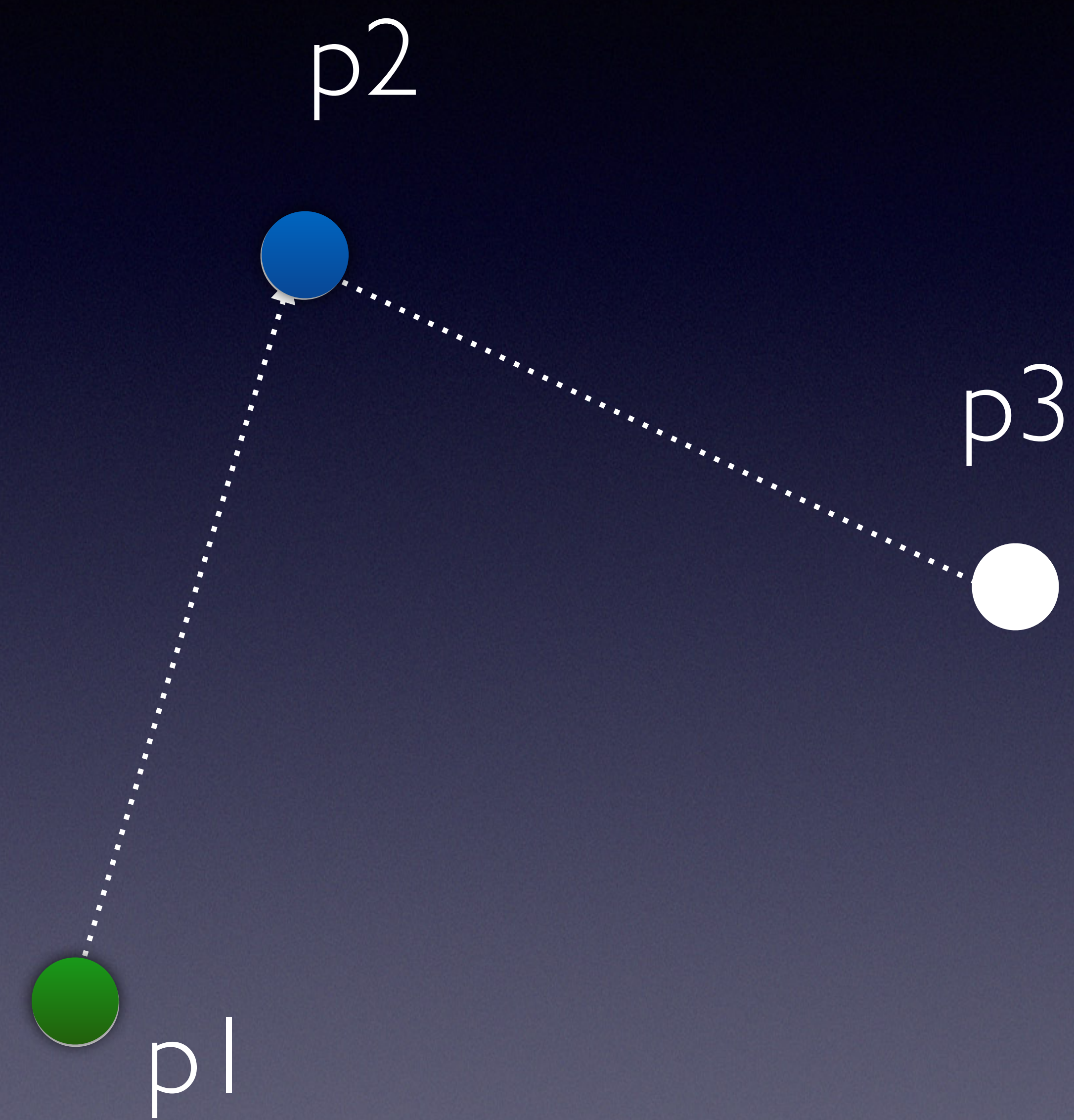
$p=\alpha_1 P1 + \alpha_2 P2 + \alpha_3 P2$

donde $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 = 1$

Ejercicio: Probar P1+0.5U+0.5V

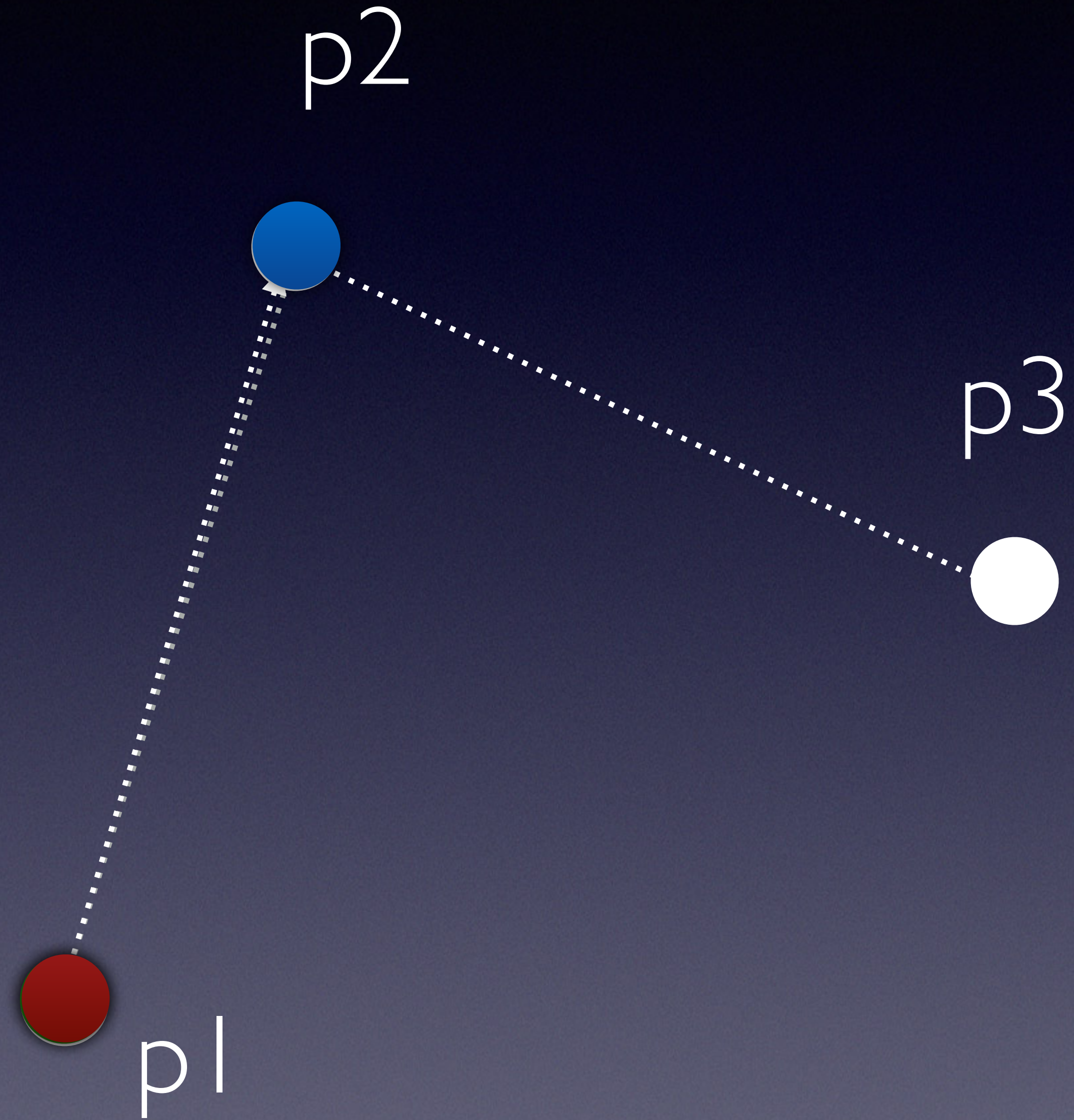
Curvas (grado 2)

- Hemos visto lerp $=(1-t)P1+tP2$
- ¿Qué pasa si interpolamos dos segmentos a la vez?
  - PA$=(1-t)P1+tP2$
  - PB$=(1-t)P2+tP3$



Curvas (grado 2)

- ¿Qué pasa si interpolamos los puntos interpolados?
  - PA=(1-t)P1+tP2
  - PB=(1-t)P2+tP3
- PAB=(1-t)PA+tPB



Ejercicio: sustituir PA y PB en PAB

Curvas (grado 2)

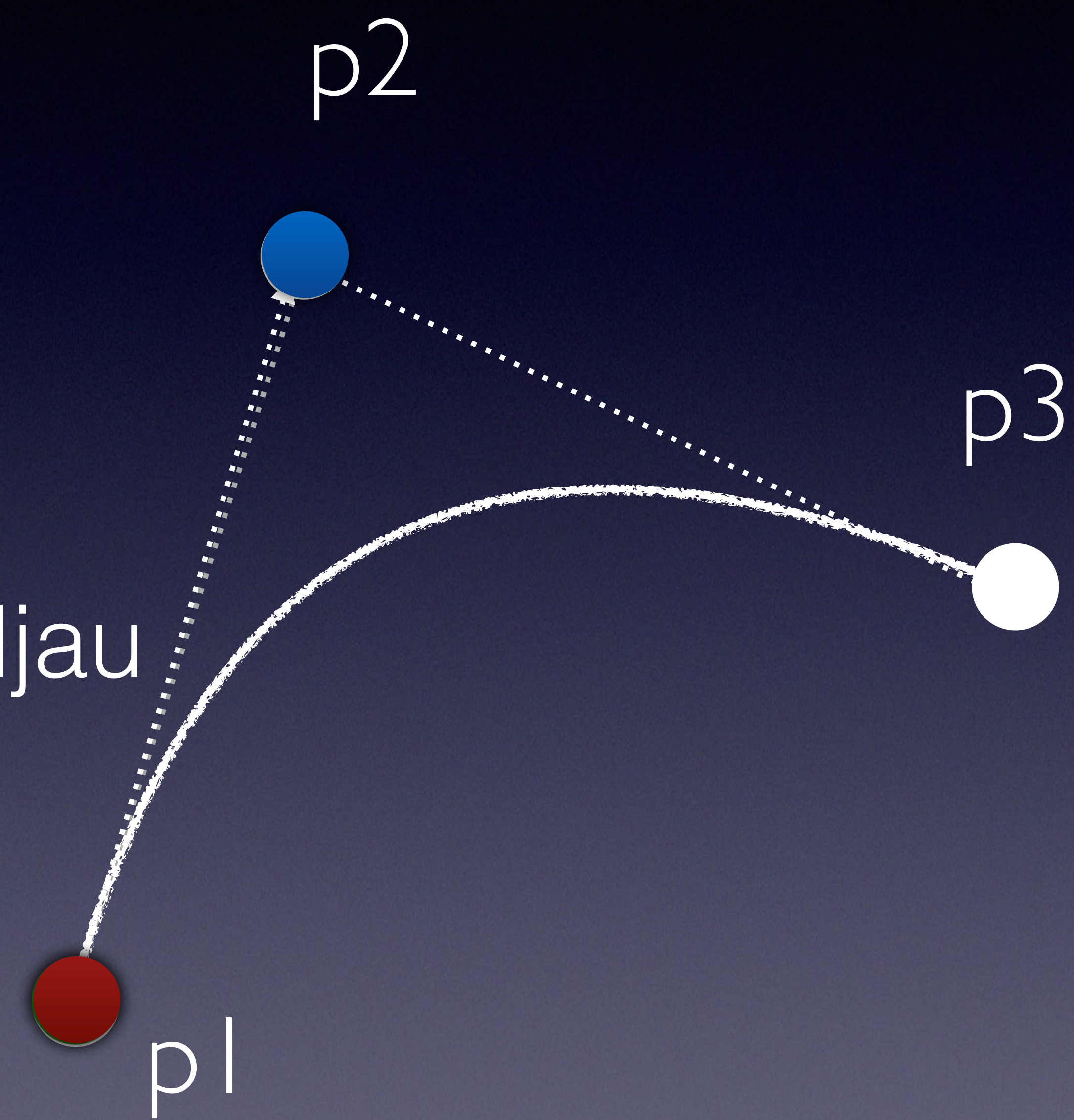
- ¿Qué pasa si interpolamos los puntos interpolados?
  - $PA=(1-t)P1+tP2$
  - $PB=(1-t)P2+tP3$
- $PAB=(1-t)PA+tPB$

Casteljau

$$PAB=(1-t)((1-t)P1+tP2)+t((1-t)P2+tP3)$$
$$=(1-t)^2P1+t(1-t)P2+t(1-t)P2+t^2P3$$

$$\boxed{=(1-t)^2P1+2t(1-t)P2+t^2P3}$$

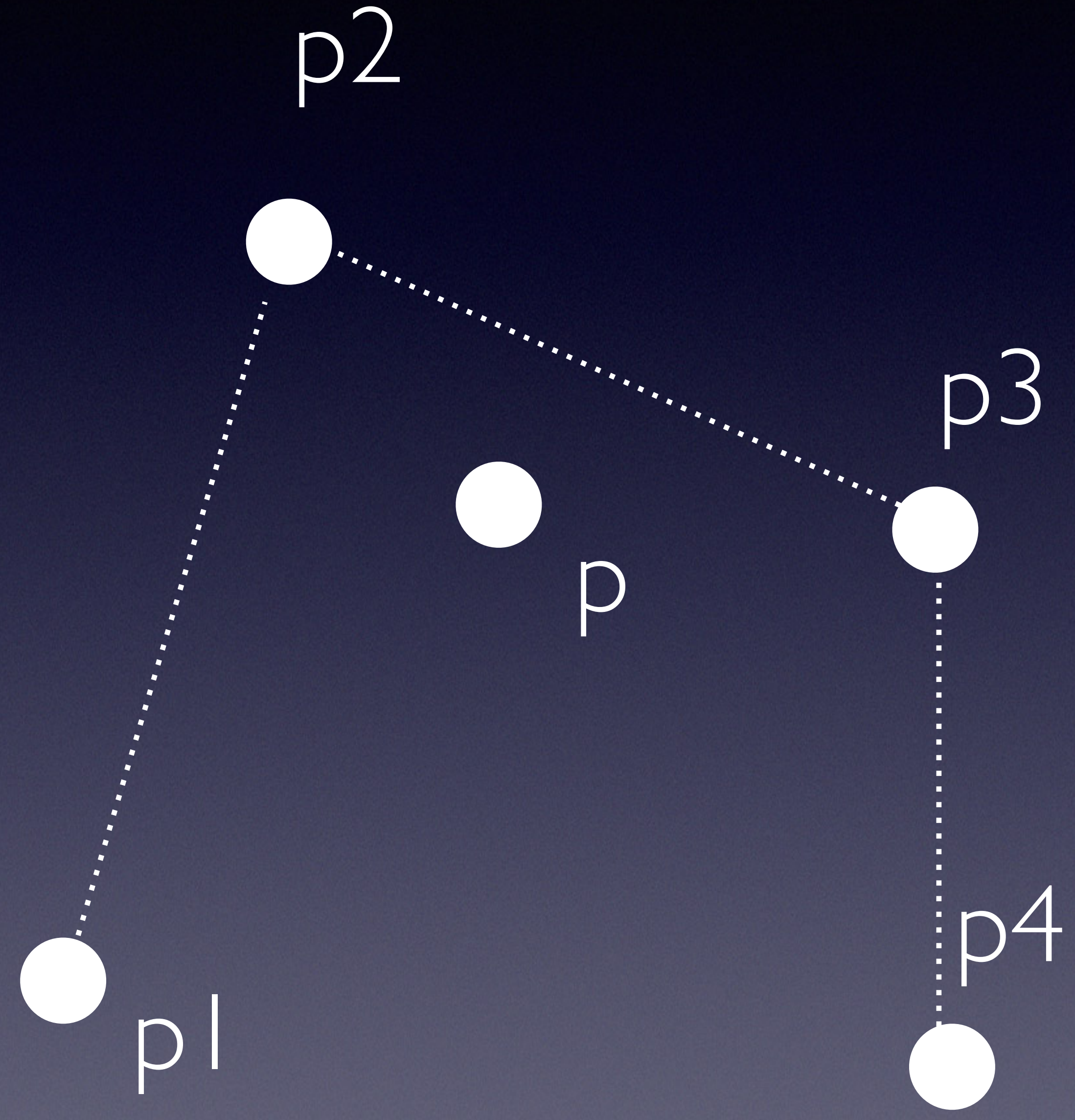
Bezier



Curvas (grado 3)

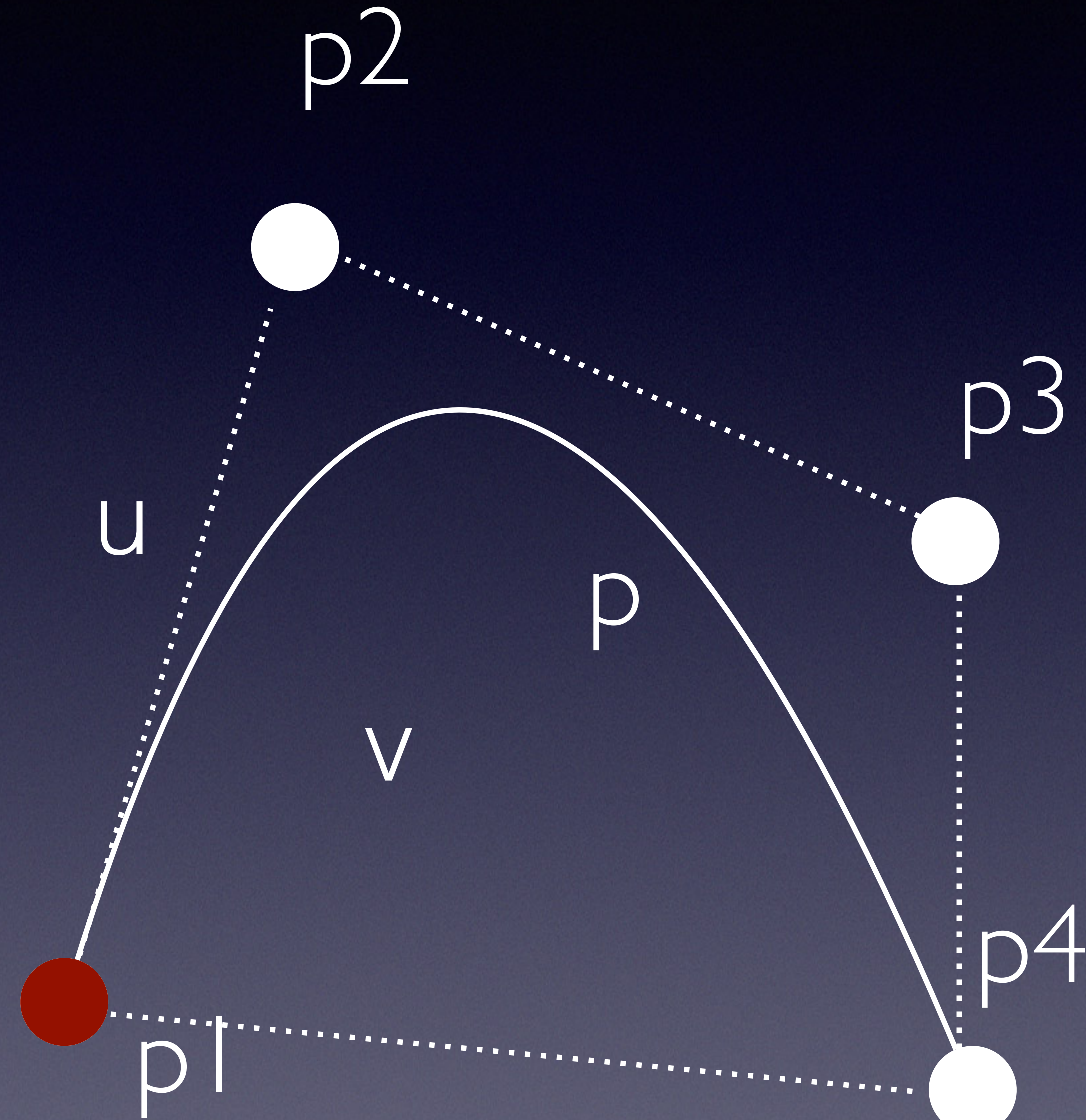
- Hemos visto lerp $=(1-t)P1+tP2$
- $(1-t), t$ (línea)
- $(1-t)^2, 2t(1-t), t^2$ (parábola)
- Vamos a probar:
- $(1-t)^3, 3t(1-t)^2, 3t^2(1-t), t^3$

- Ejercicio: Monta el polinomio con los cuatro puntos y describe el resultado



Respuesta

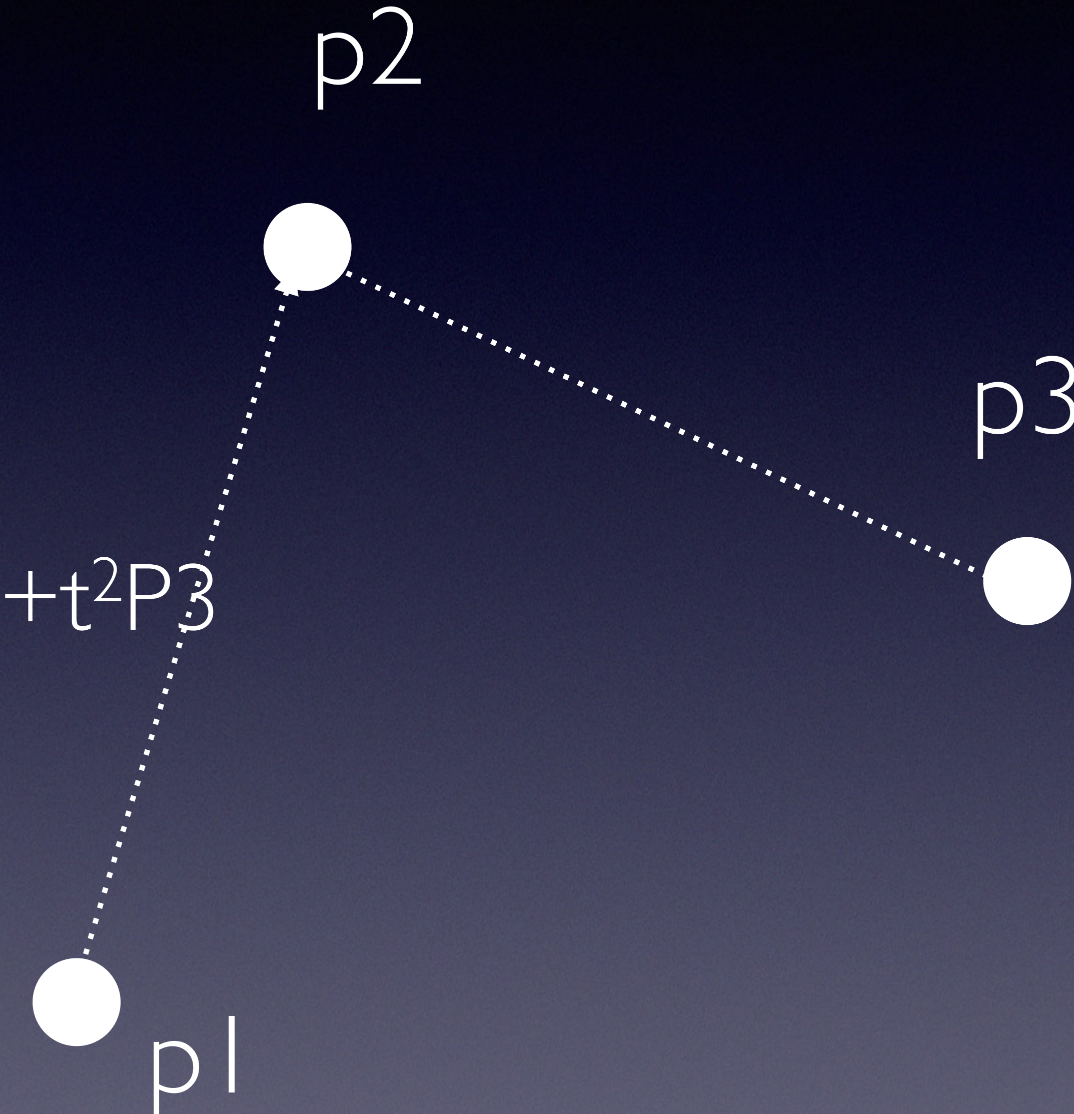
$(1-t)^3P1+3t(1-t)^2P2+3t^2(1-t)P3+t^3P4$



Curvas (grado 2)

- Hemos visto lerp $=(1-t)P1+tP2$
  - $(1-t), t$
- Ahora parabola: $((1-t)^2P1+2t(1-t)P2+t^2P3$
  - $(1-t)^2, 2t(1-t), t^2$

- Ejercicio: sumar polinomios.

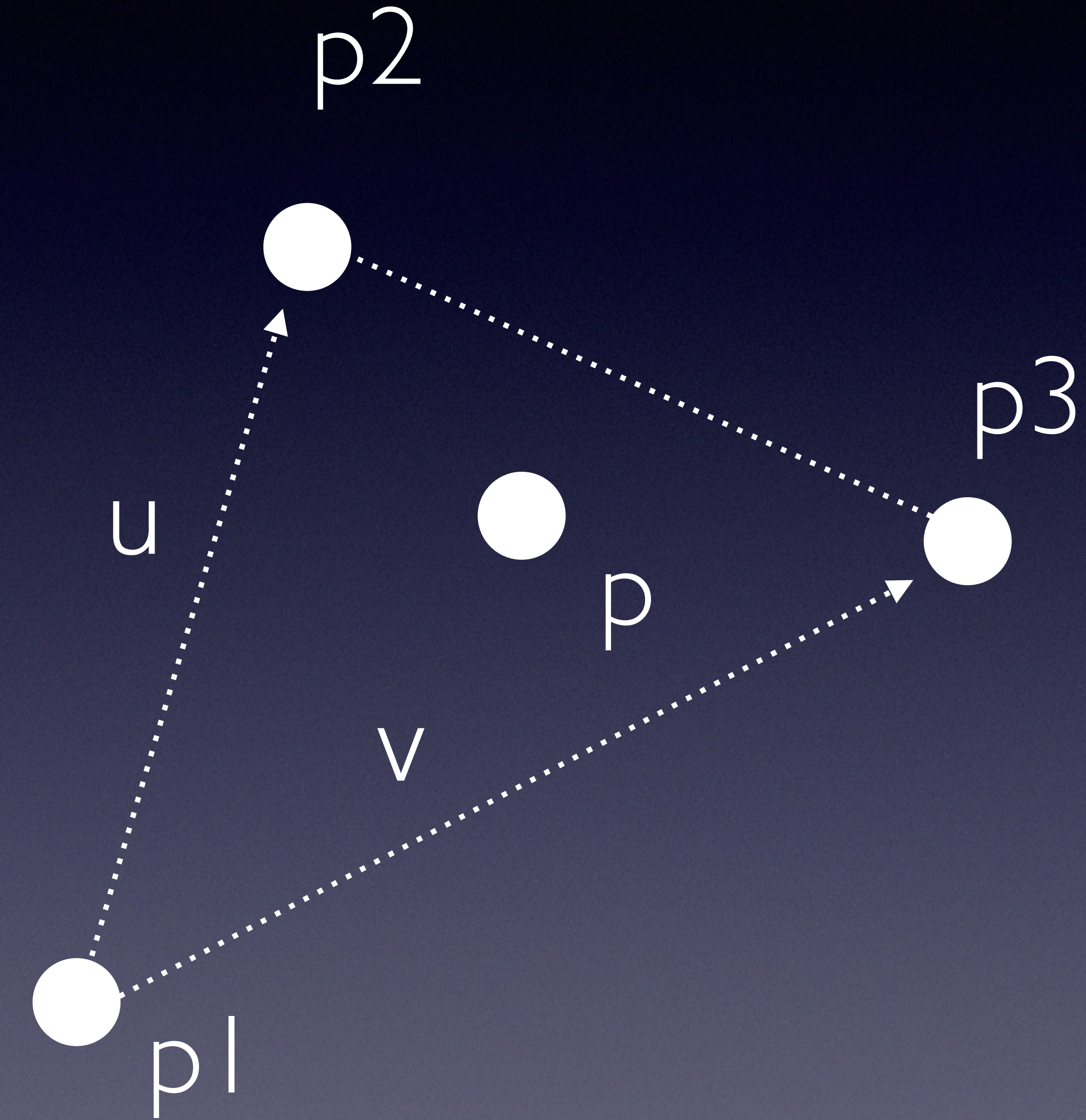


Respuesta

$$
\begin{array}{rll}
 & (1-t)^2 & 1-2t+t^2 \\
+ & 2t(1-t) & 2t-2t^2 \\
 & t^2 & t^2 \\
\hline
 & & =1
\end{array}
$$

$$(1-t)^2\,P1+2t(1-t)P2+t^2P3$$

$$\boxed{\begin{array}{c} p=\boldsymbol{\alpha}_1P1 + \boldsymbol{\alpha}_2\,P2 + \boldsymbol{\alpha}_3\,P2 \\ \text{donde } \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_2 = 1 \end{array}}$$

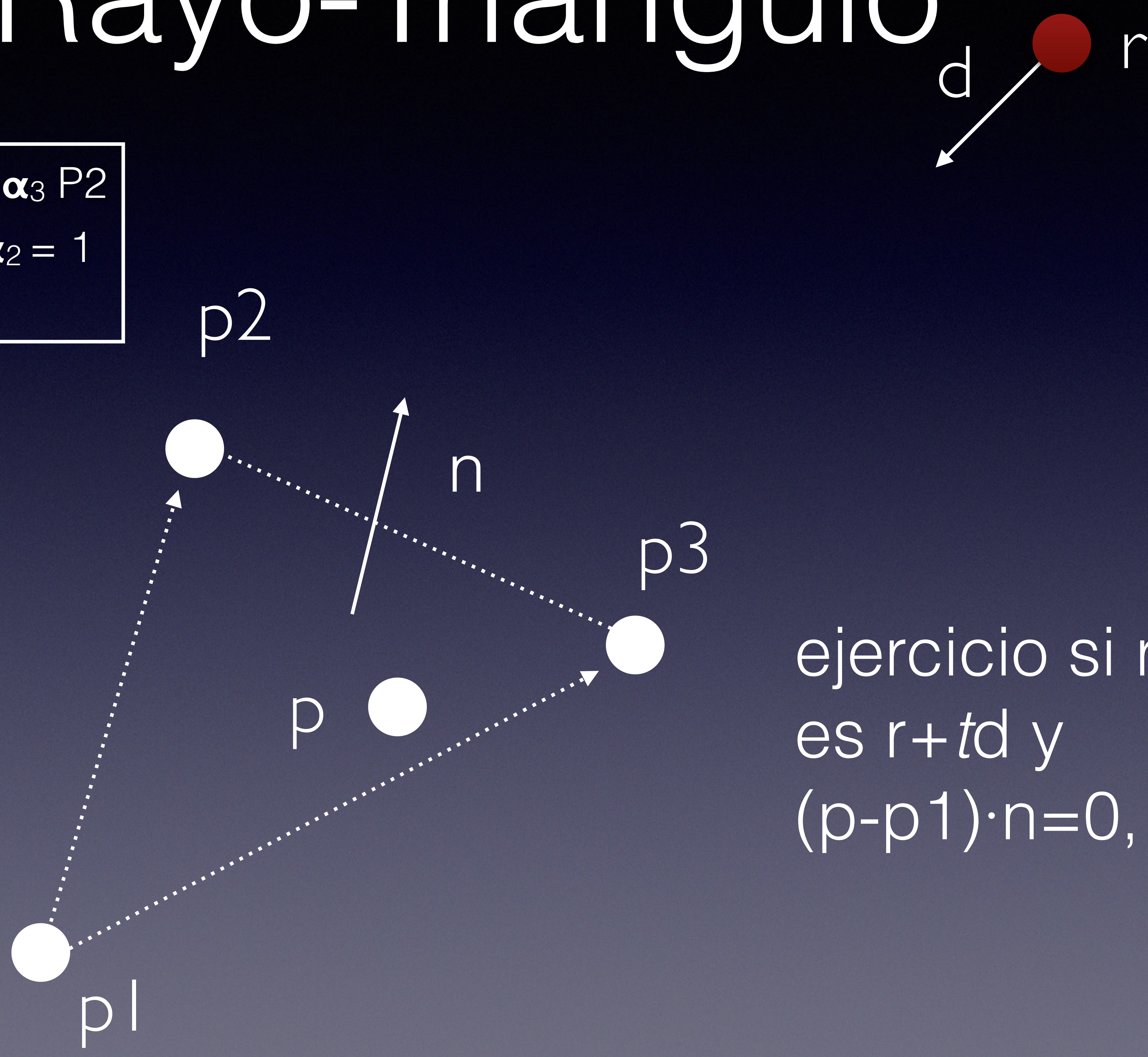


Ejercicio: ¿qué pasa en $t=0$ y $t=1$?, y para $t \in (0,1)$

Rayo-Triángulo

$p = \boldsymbol{\alpha}_1 P1 + \boldsymbol{\alpha}_2 P2 + \boldsymbol{\alpha}_3 P2$

donde $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_2 = 1$

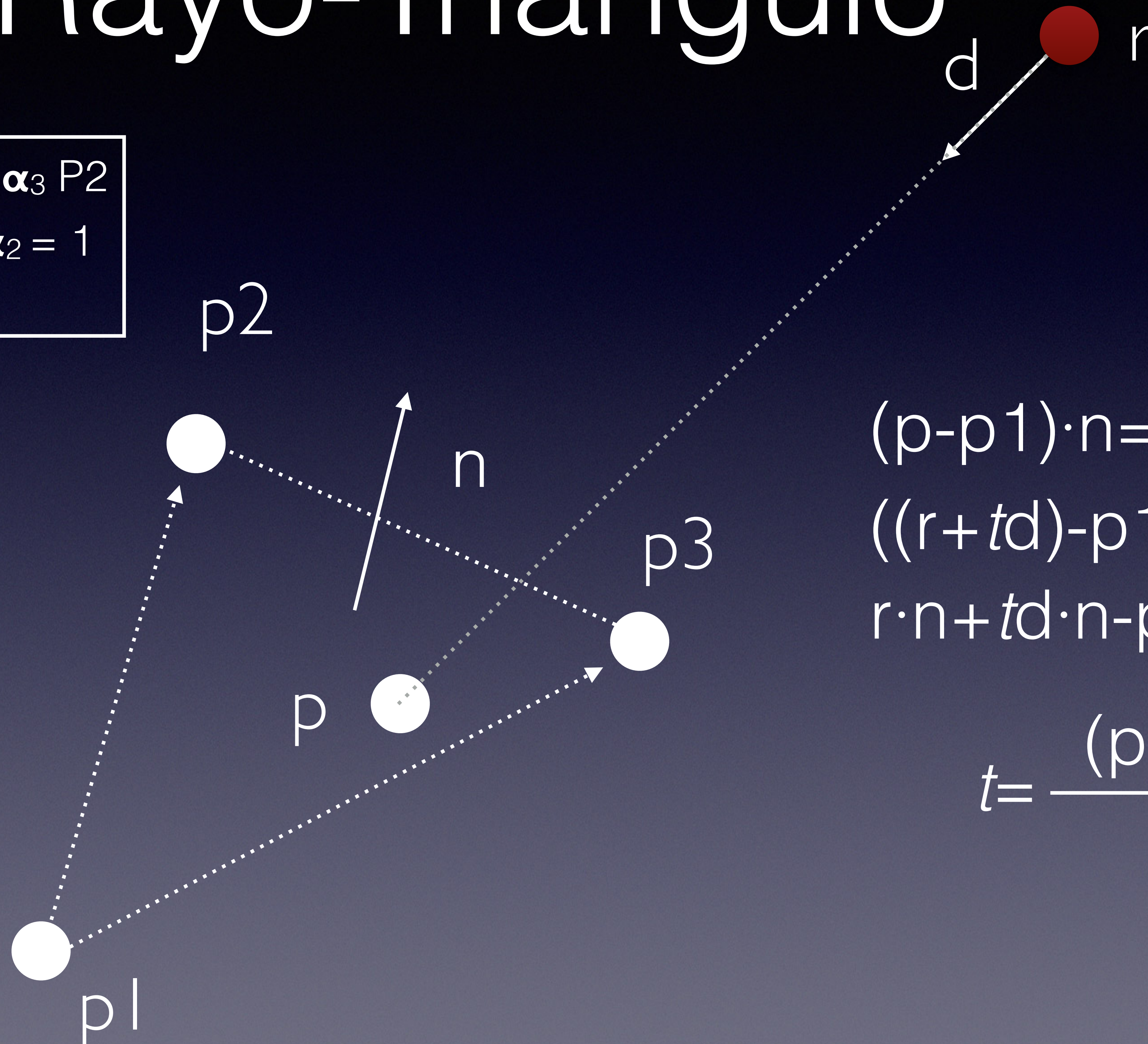


ejercicio si rayo es $r+td$ y $(p-p1)\cdot n=0$, ¿t?

Rayo-Triángulo

$p = \boldsymbol{\alpha}_1 P1 + \boldsymbol{\alpha}_2 P2 + \boldsymbol{\alpha}_3 P2$

donde $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_2 = 1$



$(p - p1) \cdot n = 0$

$((r + td) - p1) \cdot n = 0$

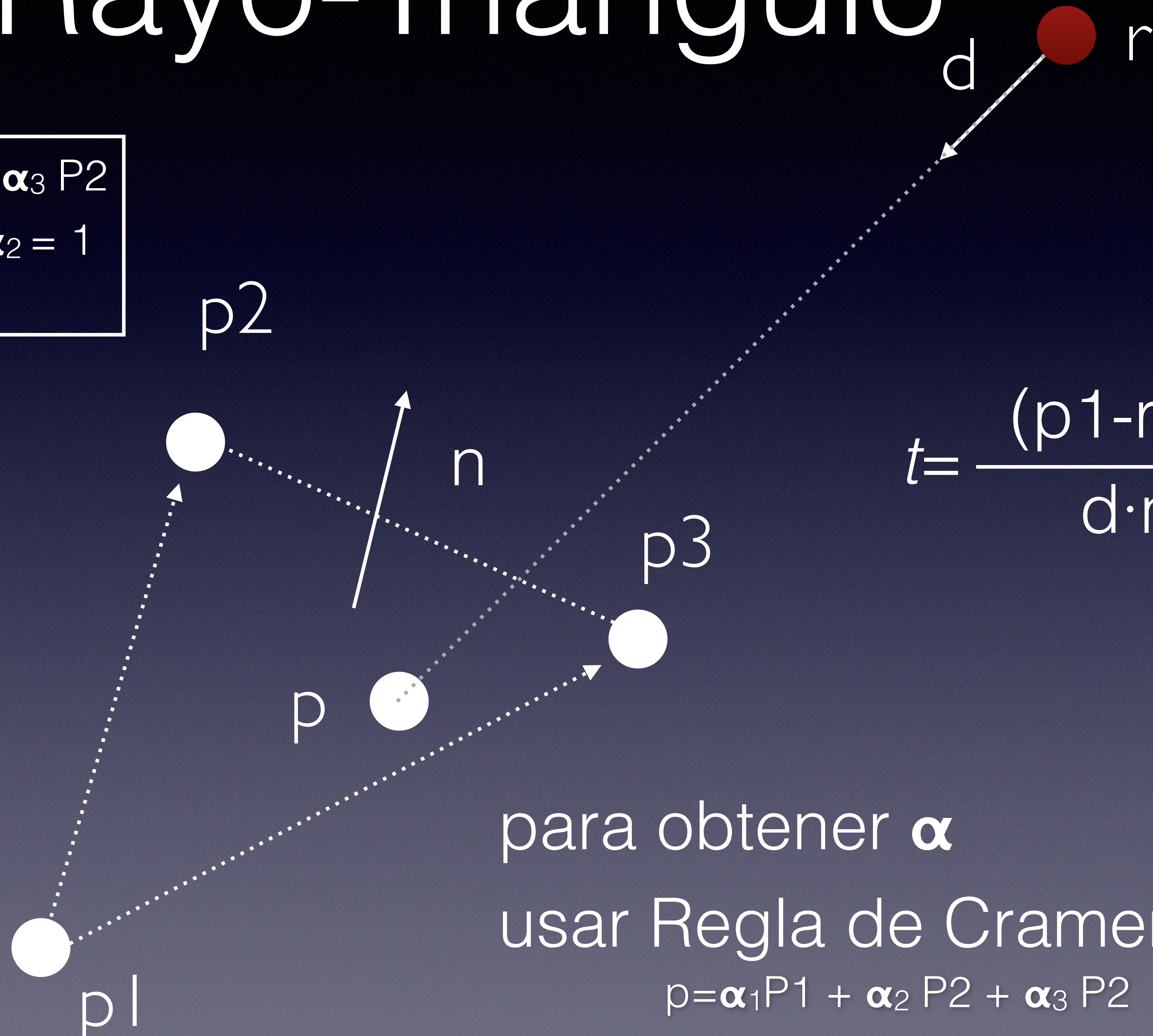
$r \cdot n + td \cdot n - p1 \cdot n = 0$

$$t = \frac{(p1 - r) \cdot n}{d \cdot n}$$

Rayo-Triángulo

$p = \boldsymbol{\alpha}_1 P1 + \boldsymbol{\alpha}_2\, P2 + \boldsymbol{\alpha}_3\, P2$

donde $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_2 = 1$



$$t = \frac{(p1-r)\cdot n}{d\cdot n}$$

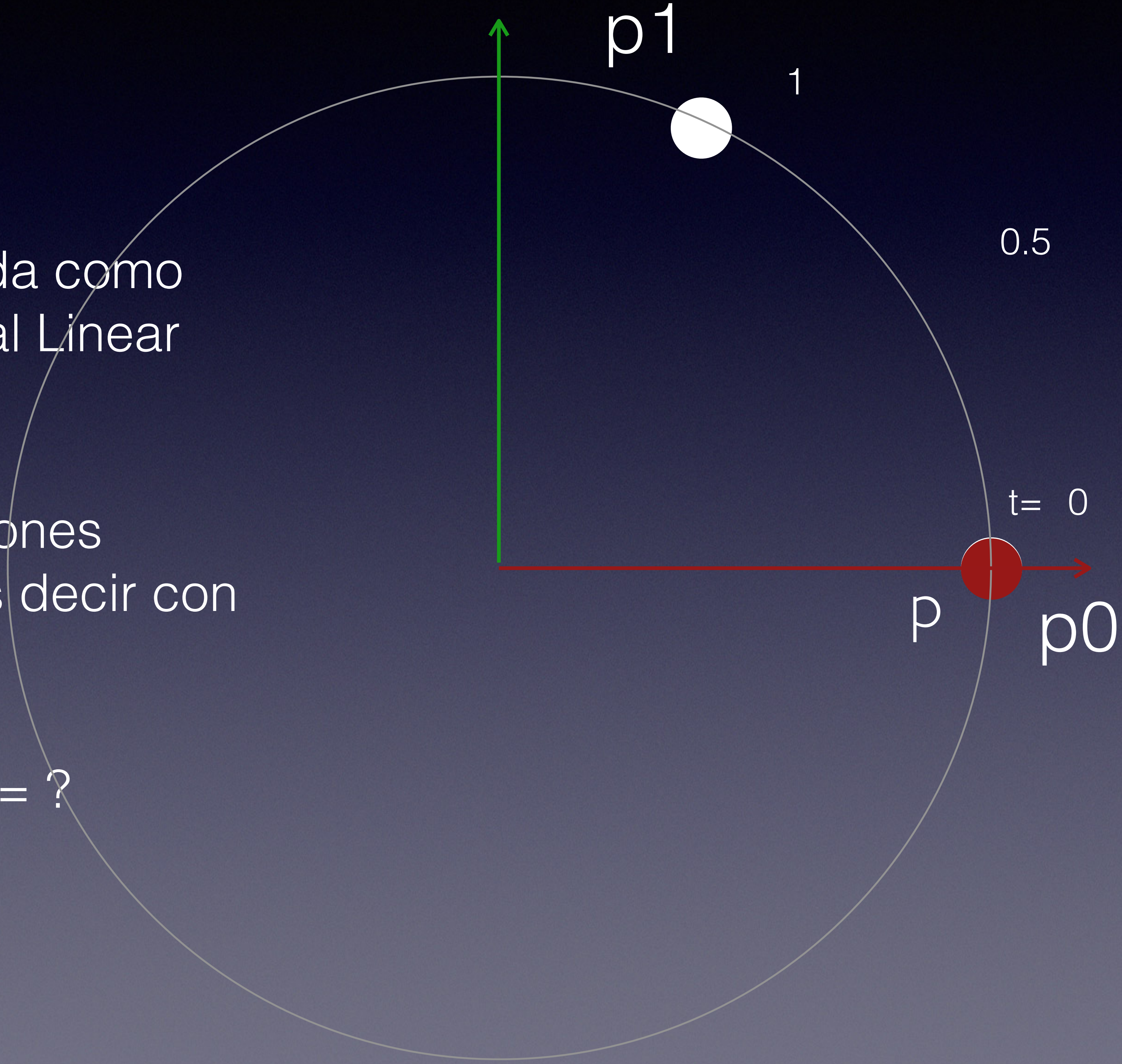
para obtener $\boldsymbol{\alpha}$

usar Regla de Cramer:

$p = \boldsymbol{\alpha}_1 P1 + \boldsymbol{\alpha}_2\, P2 + \boldsymbol{\alpha}_3\, P2$

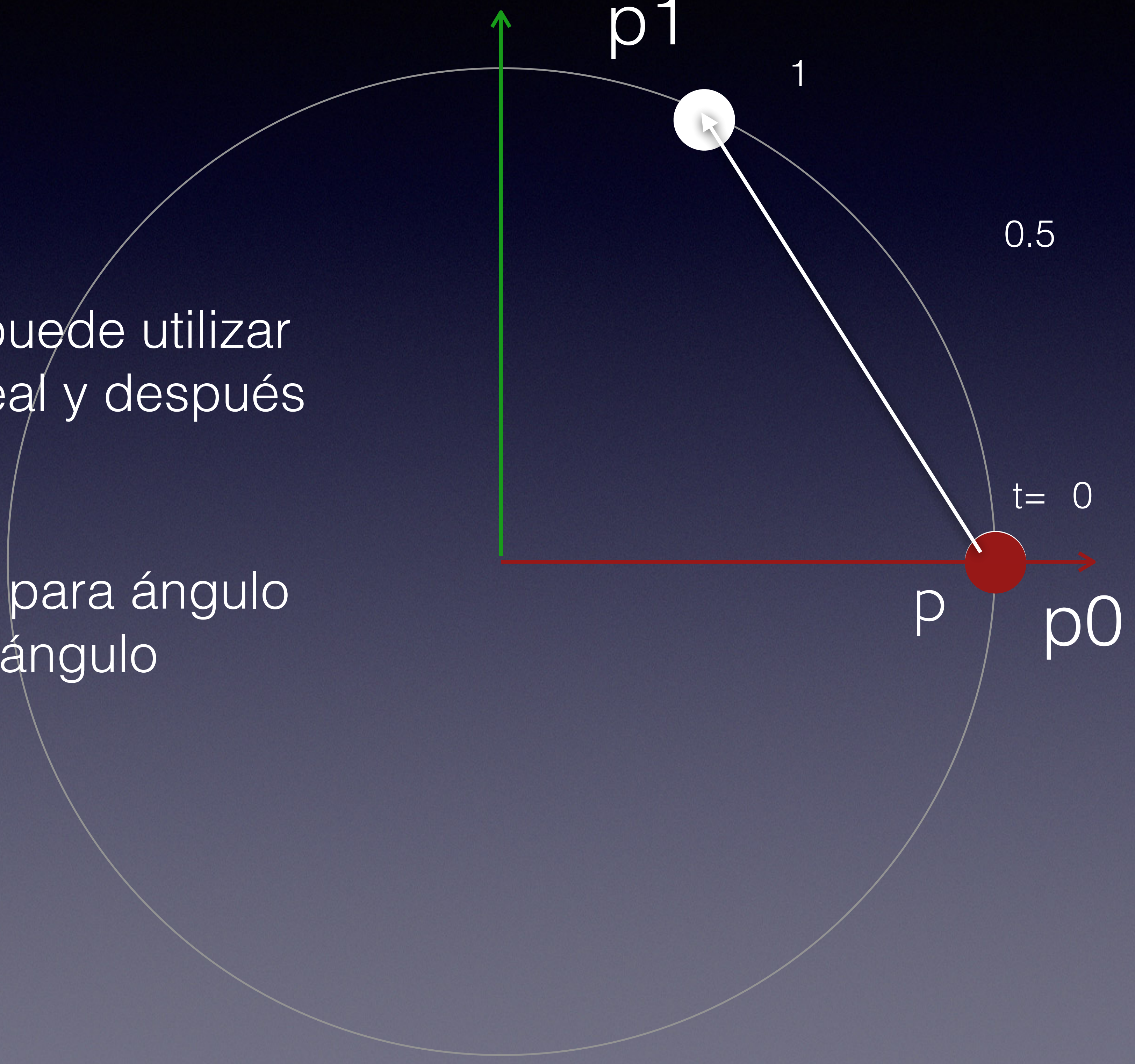
3 ecuaciones 3 incognitas

Interpolación Esférica



- También conocida como SLERP (Spherical Linear IntERPolation)
- Se utiliza ecuaciones paramétricas (es decir con parámetro t):
    - slerp(p0,p1,t) = ?

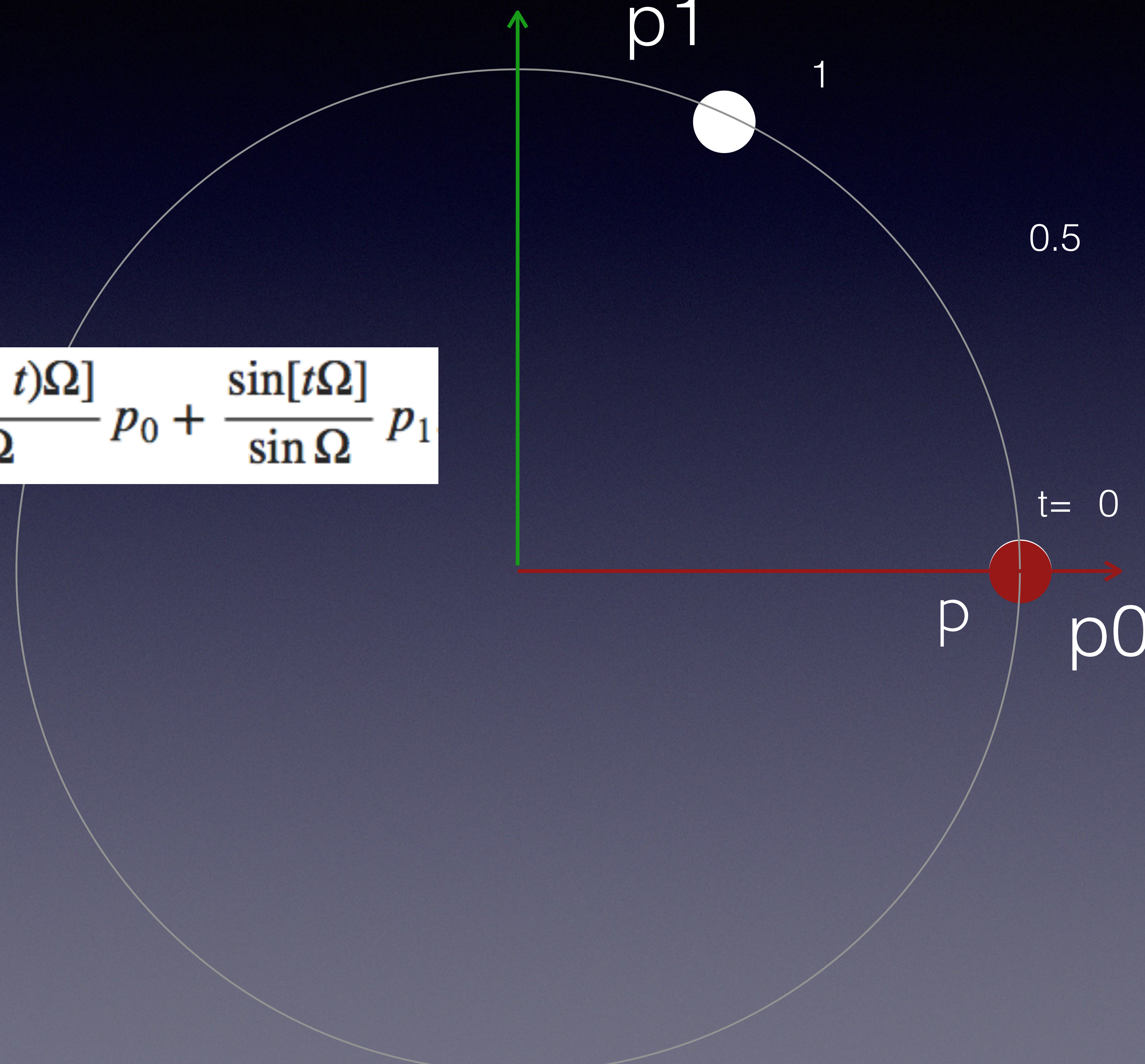
Interpolación Lineal



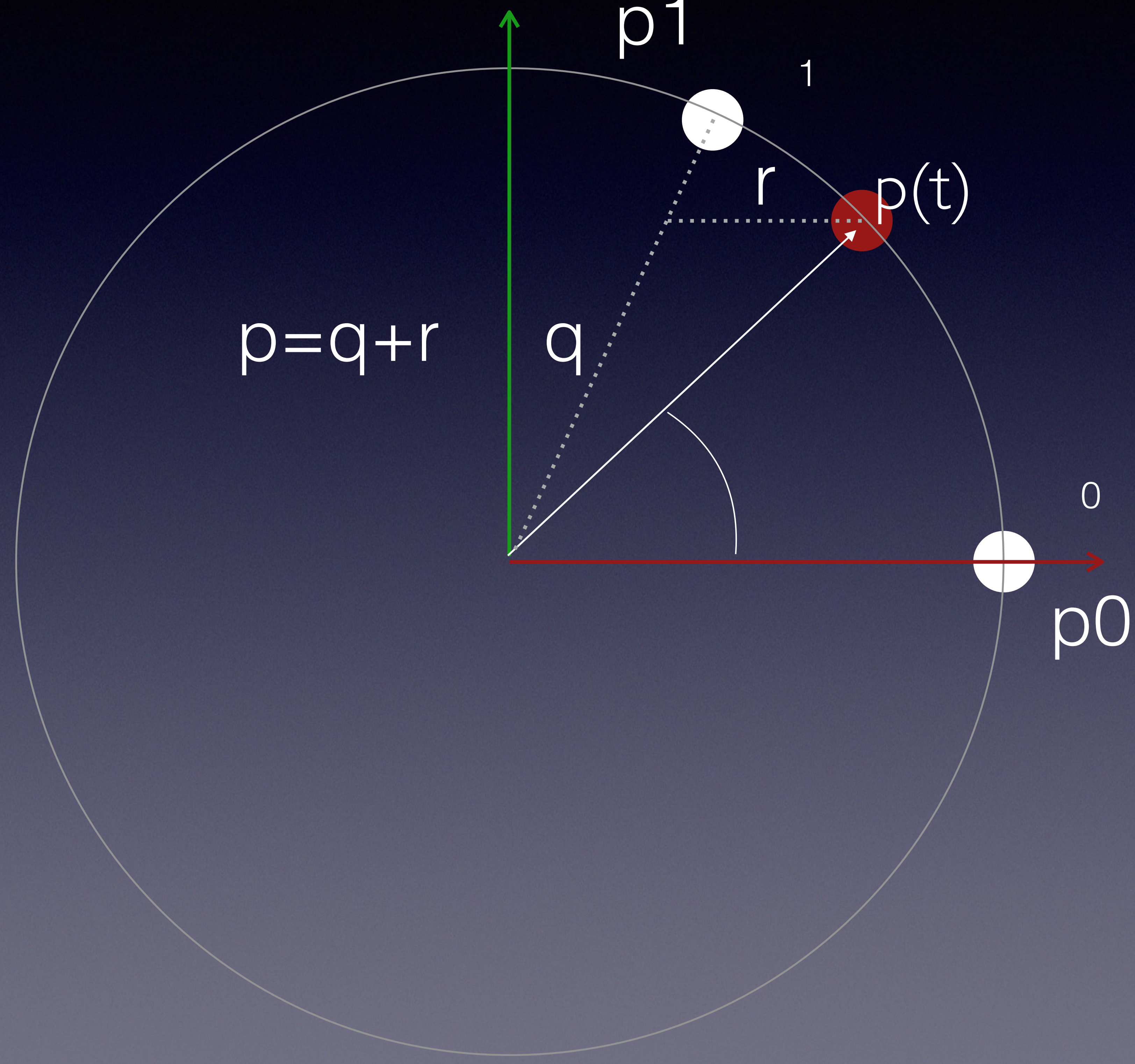
- ¿Por qué no se puede utilizar interpolación lineal y después normalizar?
- Ejercicio: probar para ángulo pequeño (20º) y ángulo amplio (175º)

SLERP

$$\mathrm{Slerp}(p_0, p_1; t) = \frac{\sin[(1-t)\Omega]}{\sin\Omega} p_0 + \frac{\sin[t\Omega]}{\sin\Omega} p_1$$



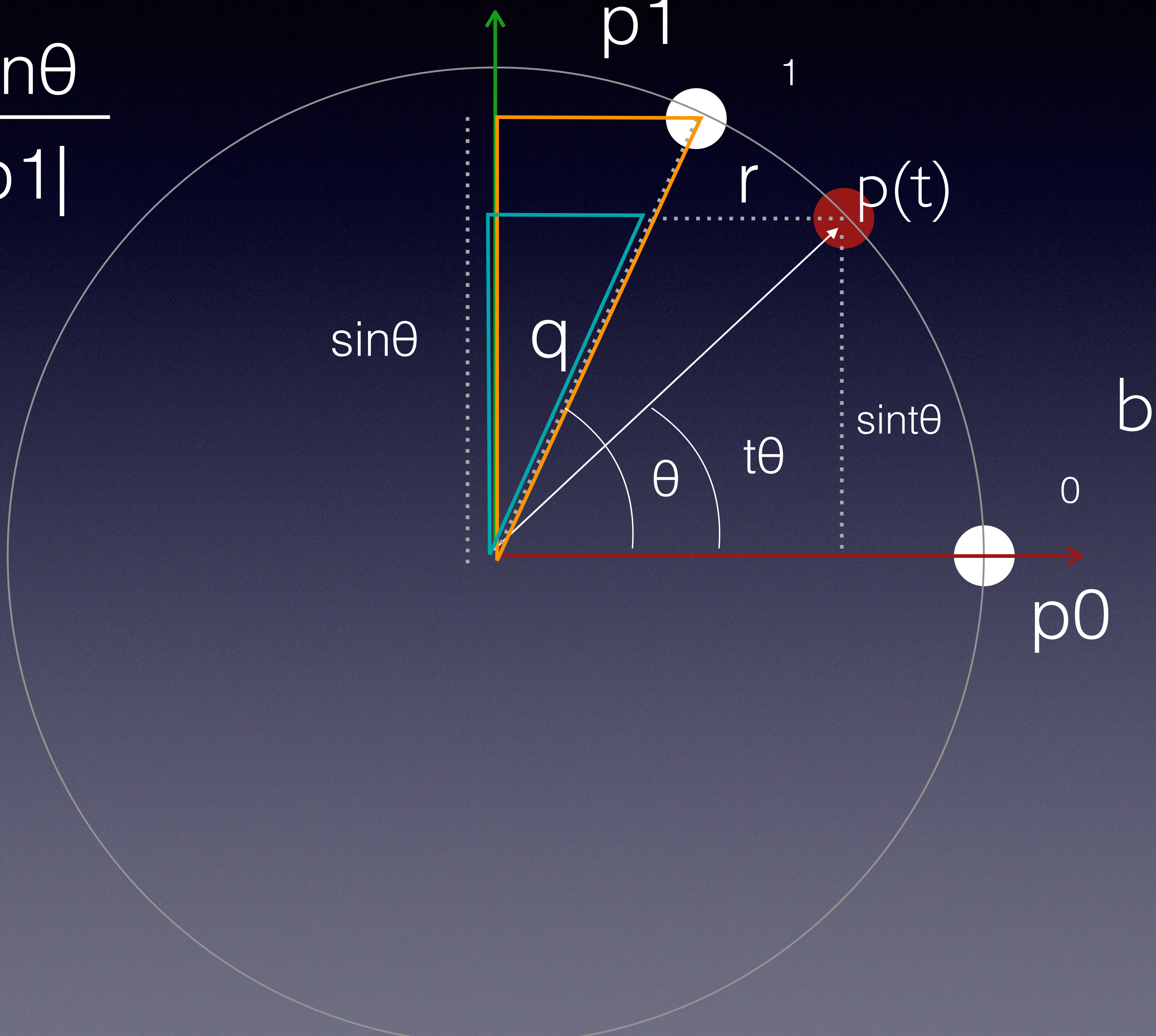
SLERP



SLERP

$$\frac{\sin t\theta}{|q|} = \frac{\sin\theta}{|p1|}$$

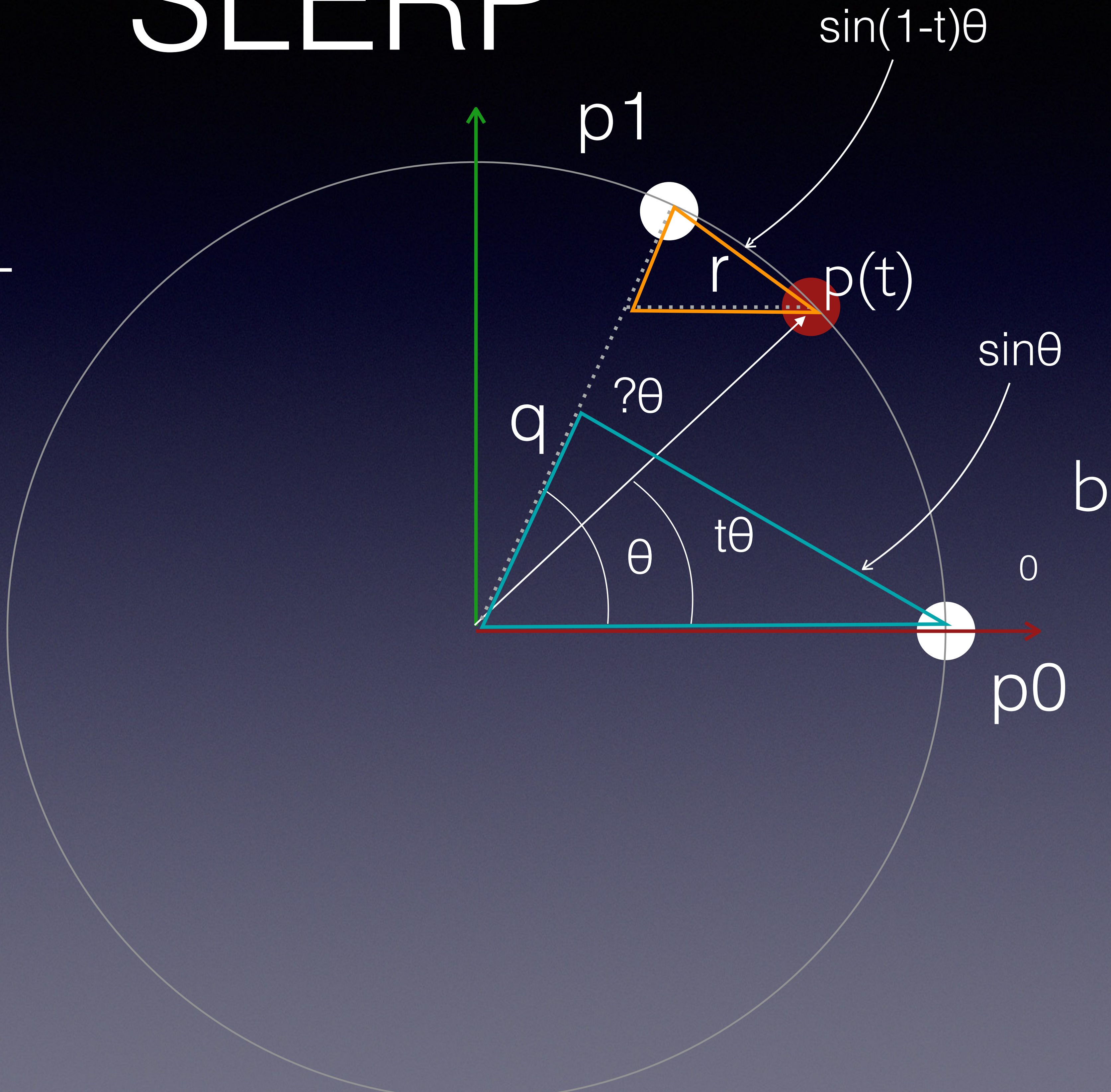
$$|q| = \frac{\sin t\theta}{\sin\theta}|p1|$$



SLERP

$$\frac{\sin(1-t)\theta}{|r|} = \frac{\sin\theta}{|p0|}$$

$$|r| = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin\theta}\,|p0|$$

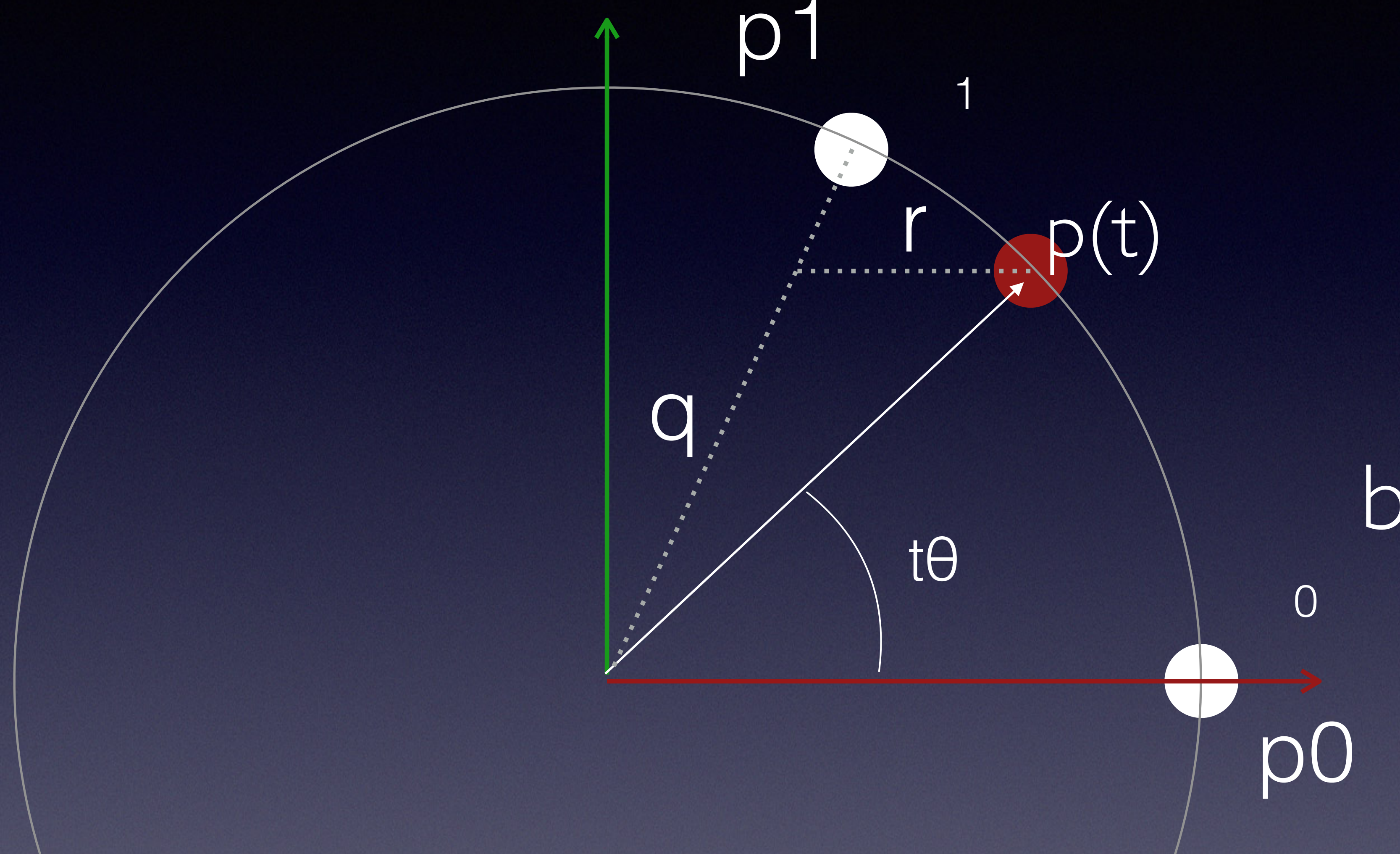


SLERP

$$|r| = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin\theta}\,|p0|$$

$$|q| = \frac{\sin t\theta}{\sin\theta}\,|p1|$$

$$p = r+q$$



$$\mathrm{Slerp}(p_0, p_1; t) = \frac{\sin\,[(1-t)\Omega]}{\sin\Omega}\,p_0 + \frac{\sin[t\Omega]}{\sin\Omega}\,p_1$$

se puede utilizar con cuaterniones unitarios