Métodos Estadísticos Bayesianos con R

Criterio Óptimo

Gibrán Peniche

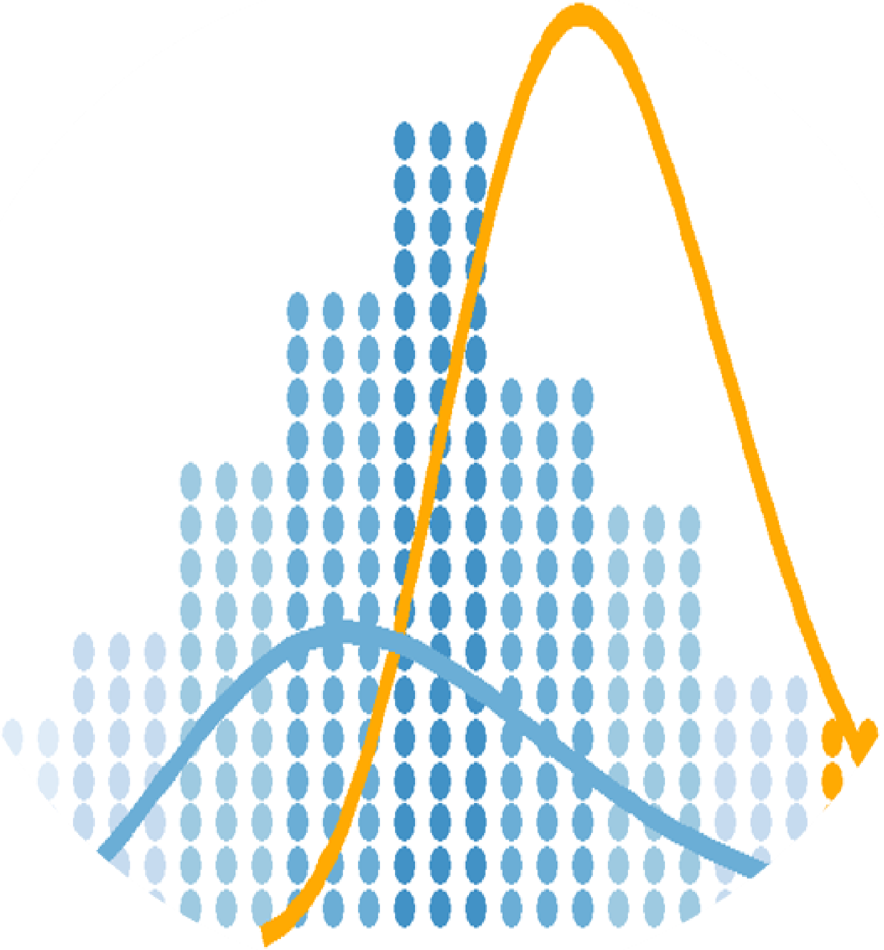
v. 0.0.1

2020-06-25

jgpeniche

PenicheGibran

jgpeniche@gmail.com



La sesión pasada

Formalizamos el problema de Decisión

- $(\mathbb{D}, \mathbb{C}, \mathcal{E}, \prec)$

Árboles de decisión

Axiomas de Coherencia

1. Axioma de Comparabilidad
2. Axioma de Transitividad
3. Axioma de Sustituibilidad
4. Axioma de Eventos de Referencia

Agenda

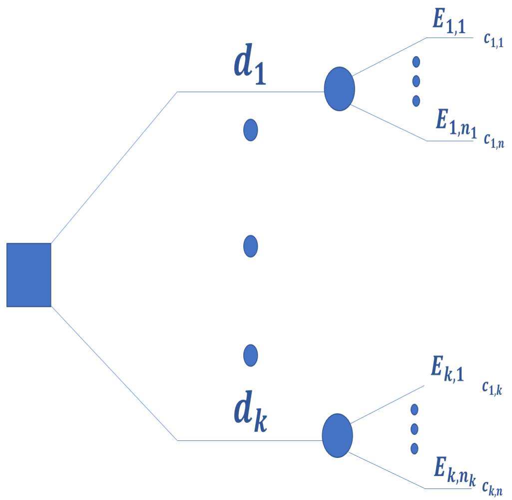
1. Criterio Óptimo de Decisión

1

Resolviendo el problema de Decisión

Resolviendo el problema de Decisión

Sea $(\mathbb{D}, \mathbb{C}, \mathcal{E}, \prec)$ un problema de decisión en **ambiente de incertidumbre** que enfrenta el *tomador de decisiones*



¿Cómo resolvemos el problema?

Paso 1

'Amplificamos' $\mathbb{D}$

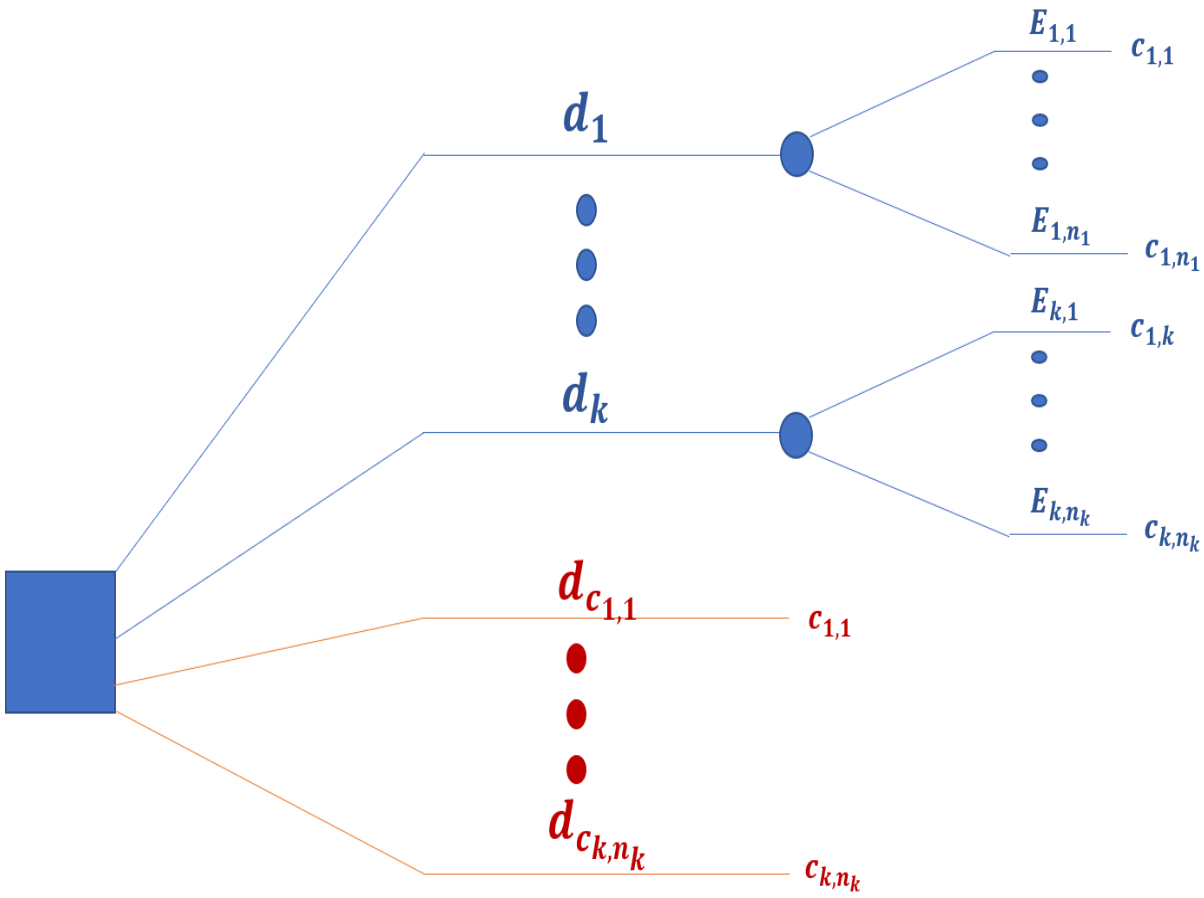
Amplificando $\mathbb{D}$

Comenzamos por definir $\mathbb{D}_1$.,. $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{D}_1$ donde añadimos las opciones **ficticias** de la forma $d_c = \{c|\Omega\}$ $\forall\ c\ \epsilon\ \mathbb{C}$

Estas son una colección de opciones que conducen a la consecuencia c de forma *segura*

En otras palabras estas opciones son **ciertas**

OJO: Esta colección de opciones **NO** está disponible para el tomador de decisiones



d_1
d_k
$d_{c_{1,1}}$
$d_{c_{k,n_k}}$
$E_{1,1}$
$c_{1,1}$
E_{1,n_1}
c_{1,n_1}
$E_{k,1}$
$c_{1,k}$
E_{k,n_k}
c_{k,n_k}
$c_{1,1}$
c_{k,n_k}

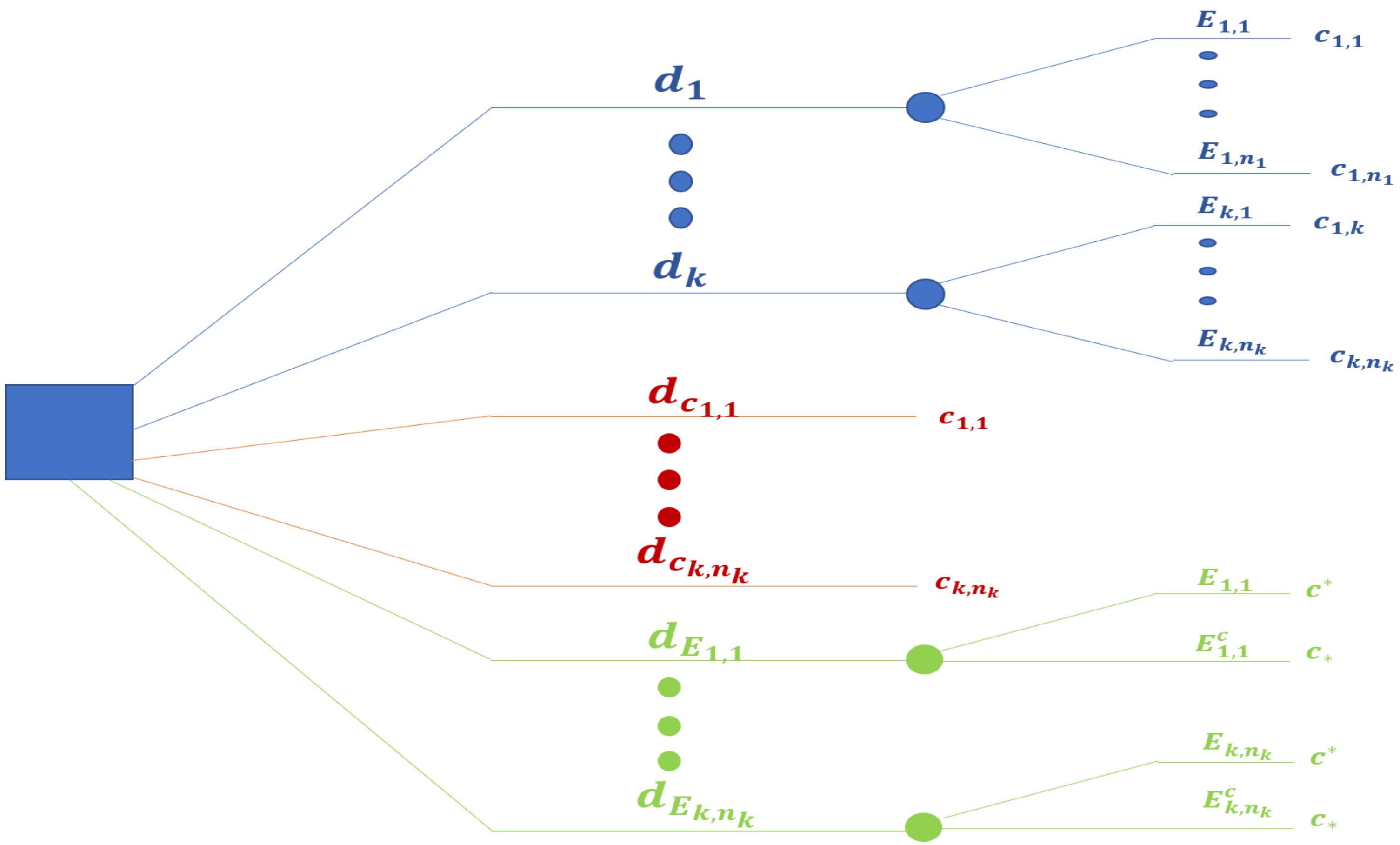
Paso 2

Amplificamos $\mathbb{D}_1$

Amplificando $\mathbb{D}_1$

Definimos $\mathbb{D}_2$.,. $\mathbb{D}_1 \subseteq \mathbb{D}_2$ donde añadimos las opciones **ficticias** de la forma $d_E = \{c_* | E^c, c^* | E\} \; \forall \; E \; \epsilon \; \mathcal{E}$

Estas son una colección de opciones *binarias* del 'tipo volado' que solo conducen al cielo o al infierno


d_1
d_k
$d_{c_{1,1}}$
$d_{c_{k,n_k}}$
$d_{E_{1,1}}$
$d_{E_{k,n_k}}$
$E_{1,1}$
$c_{1,1}$
E_{1,n_1}
c_{1,n_1}
$E_{k,1}$
$c_{1,k}$
E_{k,n_k}
c_{k,n_k}
$c_{1,1}$
c_{k,n_k}
$E_{1,1}$
c^*
$E^c_{1,1}$
c_*
E_{k,n_k}
c^*
E^c_{k,n_k}
c_*

3

Amplificamos $\mathbb{D}_2$

Amplificando $\mathbb{D}_2$

Definimos $\mathbb{D}_3$.,. $\mathbb{D}_2 \subseteq \mathbb{D}_3$ donde añadimos las opciones **ficticias** de la forma $d_R = \{c_* | R^c, c^* | R\}$ $\forall$ R $\subseteq I$

Estamos ante un 'abuso' de notación ya que orginalmente definimos (Axioma IV) las regiones en términos de un evento aleatorio z

Sin embargo, para aliviar la notación definimos $d_{R_z} = d_R$

Nuestro árbol ahora se ve así

Algunas observaciones

- Tenemos ahora tantas ramas en nuestro arbol como regiones R en I que es infinita no-numerable

A pesar de esto, por construcción, todos nuestros axiomas siguen aplicando en nuestro conjunto amplificado $\mathbb{D}_3$

- Notamos que podemos expresar a la opción d_i en términos de las consecuencias y los eventos inciertos como $d_i = \{c_{i,1}|E_{i,1}, \ldots, c_{i,n_i}|E_{i,n_i}\}$

- Para resolver nuestro problema nosostros andamos buscando $d^* \in \mathbb{D}$ (no en $\mathbb{D}_3$) .,. $d \preceq d^* \; \forall \; d \in \mathbb{D}$

¡Resolvamos el problema!

Pero antes...

Un axioma técnico

V

DENSIDAD

Axioma de Densidad

> El conjunto de opciones d_R, con $R \subseteq I$, es *densa* respecto de la relación de preferencia en $\mathbb{D}_3$
>
> Esto es $\forall d \epsilon \mathbb{D}_3 \; \exists \; d_R \; .,. \; d \sim d_R$

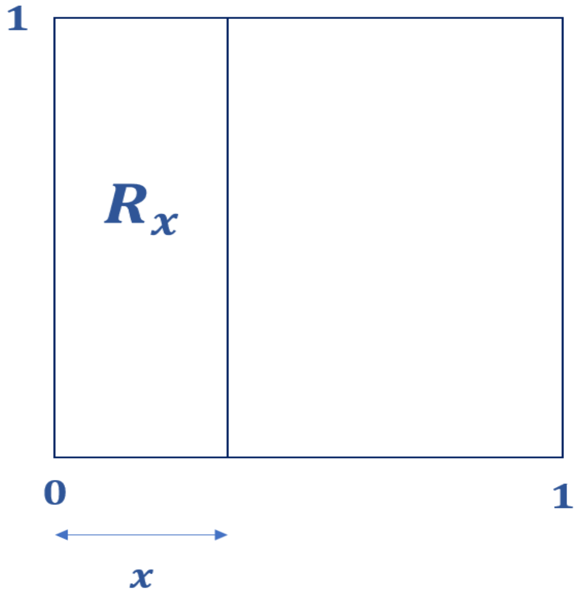
Esto lo que quiere decir es que podemos encontrar una **equivalencia** entre las opciones y las regiones en R para medir preferencias

Algunas consecuencias del Axioma 5

Ahora, gracias al axioma V sabemos que podemos encontrar una región lo suficientemente **creible** .,. *nos de lo mismo* que una opción **segura**, esto es:

> $$\implies \{c|\Omega\} \sim \{c_*|R^c, c^*|R\}$$
>
> $\forall\ c \in \mathbb{C}$ y $R \subseteq I$ Más aún, podemos encontrar siempre una región .,.
>
> $$\implies d_E = \{c_*|E^c, c^*|E\} \sim \{c_*|R^c, c^*|R\} = d_R$$
>
> $\forall\ E \in \mathcal{E}$ y $R \subseteq I$

Más consecuencias del Axioma 5



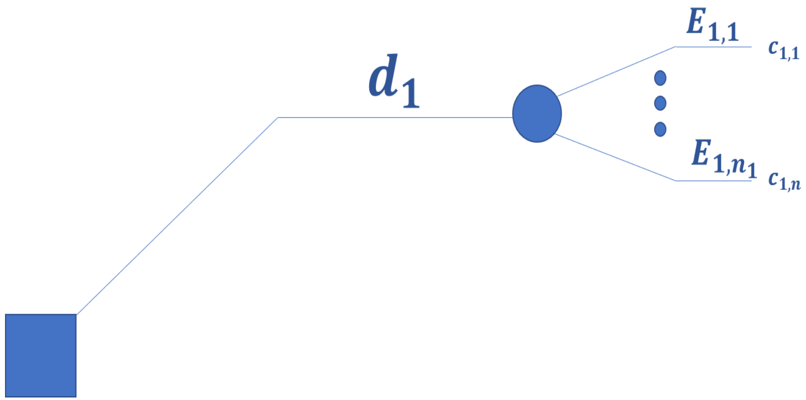
Como estamo en el cuadrado unitario $Area(R_x) = x \cdot 1 = x $ $\therefore$

- $Area(R_x) = 0 \iff x = 0 \iff d_{R_0} = \{c_* | \Omega\} = c_*$
- $Area(R_x) = 1 \iff x = 1 \iff d_{R_1} = \{c^* | \Omega\} = c^*$

Resolvamos el problema

Resolviendo el problema de decisión

Consideremos $d \,\epsilon\, \mathbb{D} \subseteq \mathbb{D}_3$.,. $d = \{c_1|E_1, \ldots, c_k|E_k\}$



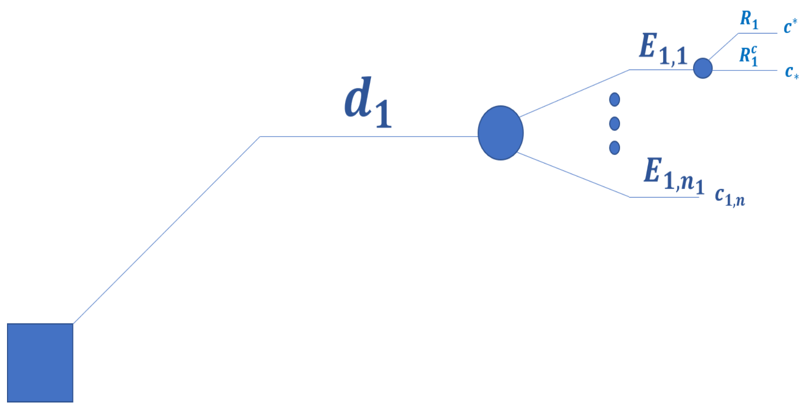
Sabemos que $\exists\, R_1 \subseteq I$.,. $c_1 \sim R_1$ ($c_1 \sim \{c_*|R^c, c^*|R\}$ y $Area(R_1) = u_0(c_1)$)

Resolviendo el problema de decisión

Partiendo de $d_1 = \{c_1|E_1, c_2|E_2, \ldots, c_k|E_k\}$ sea

$$d^{(1)} = \{d_{R_1}|E_1, c_2|E_2, \ldots, c_k|E_k\} = \{[c_*|R_1^c, c^*|R_1]|E_1, c_2|E_2, \ldots, c_k|E_k\}$$

Lo que estamos haciendo es sustituir una de las ramas originales del evento E_1 por una rama *tipo volado* equivalente, graficamente tenemos lo siguiente

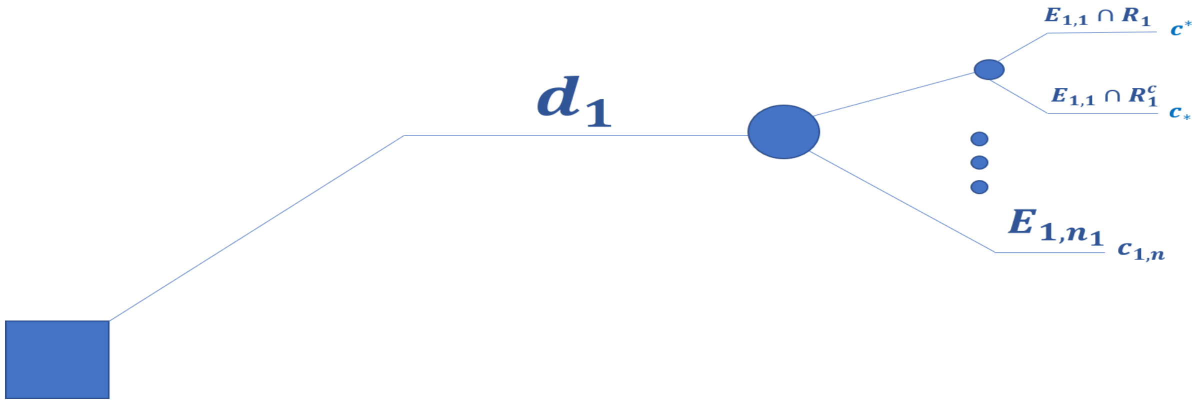


Resolviendo el problema de decisión

Si ocurre E_1 ó $E_1^c \longrightarrow d$ y $d^{(1)}$ son igualmente preferibles

$\Longrightarrow$ por **AIII** (Sustituibilidad) $d_1 \sim d^{(1)}$ (OJO: $d \neq d^{(1)}$)

Además, notamos que:



$$\Longrightarrow d^{(1)} = \{c_*|E_1 \cap R_1^c, c^*|E_1 \cap R_1, c_2|E_2, \ldots, c_k|E_k\}$$

Resolviendo el problema de decisión

Analogamente $\exists\ R_2 \subseteq I$.,. $c_2 \sim \{c_*|R_2^c, c^*|R_2\}$

Repitiendo el procedimiento anterior definimos
$d^{(2)} = \{c_*|E_1 \cap R_1^c, c^*|E_1 \cap R_1, c_*|E_2 \cap R_2^c, c^*|E_2 \cap R_2, \ldots, c_k|E_k\}$

Por **AIII** $d^{(2)} \sim d^{(1)}$ pero $d^{(1)} \sim d_1$ y por **AII** (Transitividad) $d^{(2)} \sim d_1$

Realizando el mismo procedimiento k - veces, obtenemos

$$d^{(k)} = \{c_*|E_1 \cap R_1^c, c^*|E_1 \cap R_1, c_*|E_2 \cap R_2^c, c^*|E_2 \cap R_2, \ldots, c_*|E_k \cap R_k^c, c^*|E_k \cap R_k\}$$

$$= \{[c_*|R_1^c, c^*|R_1]|E_1, \ldots, [c_*|R_k^c, c^*|R_k]|E_k\}$$

$$= \{c_*|A^c, c^*|A\}$$

Resolviendo el problema de decisión

Donde $A = \cup_{i=1}^{k}(R_i \cap E_i)$

Más aún $A_j = \cup_{i=1}^{k_j}(R_{j,i} \cap E_{j,i}) \; \forall \; j = 1, .., k$

¿Bajo qué condiciones $d_1 \sim d_1^{(k)} \prec d_2^{(k)} \sim d_2$?

¿Bajo qué condiciones $d_1 \sim d_1^{(k)} \prec d_2^{(k)} \sim d_2$?

${c | A_1^c, c^|A_1 } = d_1^{(k)} \prec d_2^{(k)} = {c | A_2^c, c^|A_2 } $ $\iff$ A_1 es **más** *creible* que A_2

Esto se debe a que estamos comparando decisiones binarias del tipo volado

$\iff$

$$P(A_1|H) < P(A_2|H) = P(A_1) < P(A_2)$$

¿Bajo qué condiciones $d_1 \sim d_1^{(k)} \prec d_2^{(k)} \sim d_2$?

Pero

$$P(A_j) = P[\cup_{i=1}^{k_i=1}(E_{j,i} \cap R_{j,i})]$$

$$= \sum_{i=1}^{k_i} P(E_{j,i} \cap R_{j,i})$$

Por probabilidad condicional

$$\sum_{i=1}^{k_i} P(E_{j,i} \cap R_{j,i}) = \sum_{i=1}^{k_i} P(E_{j,i})P(R_{j,i}|E_{j,i})$$

Por independencia y Axioma III

¿Bajo qué condiciones $d_1 \sim d_1^{(k)} \prec d_2^{(k)} \sim d_2$?

Por otro lado sabemos que $P(R_{j,i}) = A(R_{j,i})$

Pero, por definición, $A(R_{j,i}) = u_o(c_{j,i})$ (pues $c_{j,i} \sim R_{j,i}$)

$$\therefore d_1 \prec d_2$$

$$\iff P(A_1) < P(A_2)$$

$$\iff \sum_{i=1}^{k_1} P(E_{1,i})P(R_{1,i}) < \sum_{i=1}^{k_1} P(E_{2,i})P(R_{2,i})$$

$$\iff \sum_{i=1}^{k_1} P(E_{1,i})u_0(c_{1,i}) < \sum_{i=1}^{k_1} P(E_{2,i})u_0(u_{2,i})$$

$$d_1 \prec d_2 \iff$$

$$\mathbb{E}\{u_0(d_1, E)\} < \mathbb{E}\{u_0(d_2, E)\}$$

TEO

Dados los axiomas de coherencia la *decisión óptima* en $\mathbb{D}$ es la que maximiza la utilidad (canónica) esperada

¡Resolvamos el problema de decisión!

Del teorema anterior se desprende lo siguiente

- Toda forma de incertidumbre se debe y se puede cuantificar con una función de probabilidad subjetiva
- La preferencia de toda consecuencia se debe y se puede cuantificar con una función de utilidad
- El algoritmo para resolver el problema de decisión es el siguiente
    1. Asignar la probabilidad subjetiva de todo evento incierto reelevante en el problema
    2. Asignar la utilidad canónica de toda consecuencia en el problema
    3. Maximizar la utilidad esperada

¿Cuál es el problema de inferencia?

Escoger d_θ que conduzca a θ en el espacio parametral Θ que maximice la utilidad esperada asociada al problema

¿Qué hemos logrado hasta ahora?

Hasta ahora nuestro algoritmo de 3 pasos se ocupa de colecciones finitas de $(\mathbb{D}, \mathbb{C}, \mathcal{E})$

Sin embargo, el problema de inferencia generalmente involucra un conjunto infinito y posiblemente no numerable de elementos en el espacio de opciones

A pesar de esto sabemos que u_0 siempre va a existir, va a estar acotada y el problema es equivalente a encontrar el supremo

Para esto podemos aproximar el conjunto finito numerable de $E_{i,j}$ mediante un *familia paramétrica* $\mathcal{F}$

¿Qué sigue?

1. Hablar del problema de inferencia

1. Definir la correspondencia entre utilidad y pérdida

2. Estimación puntual

3. Modelos conjugados