Métodos Estadísticos Bayesianos con R

Problemas de Decisión

Gibrán Peniche

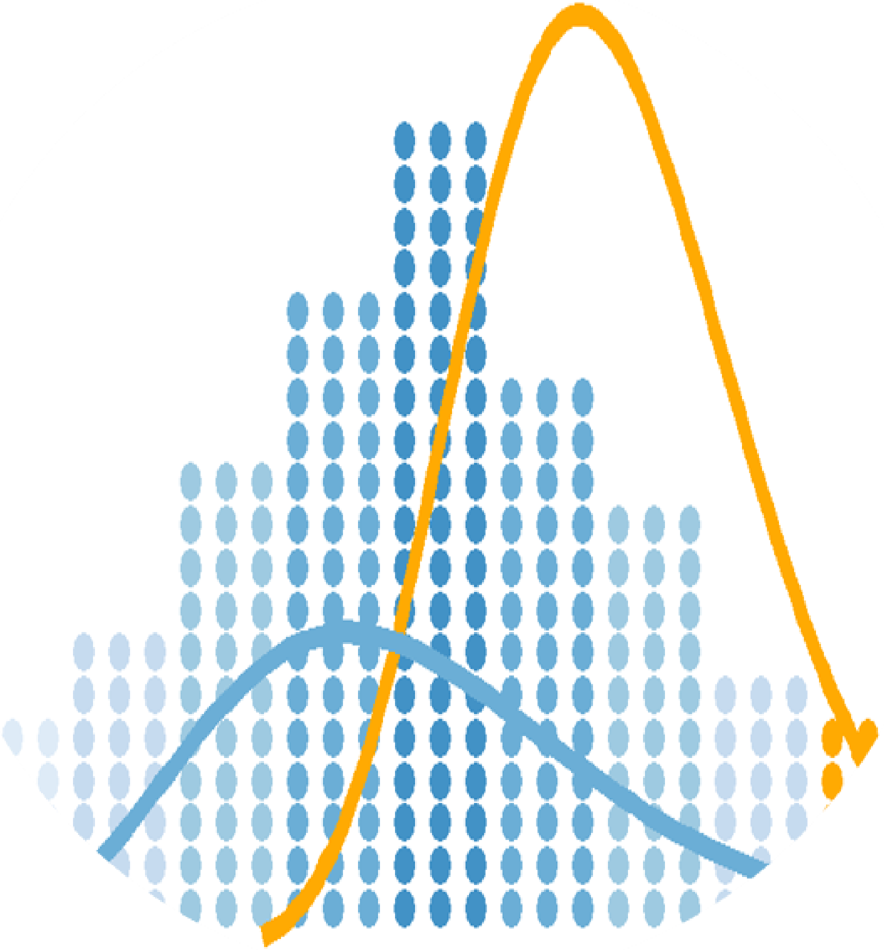
v. 0.0.1

2020-06-15

jgpeniche

PenicheGibran

jgpeniche@gmail.com



La sesión pasada

Platicamos sobre la finalidad de la inferencia

Expusimos algunos de los problemas de la estadística frecuentista

Concluimos que la estadística bayesiana no es una serie de técnicas, es una Teoría de Inferencia

Agenda

1. ¿Qué es un problema de decisión?
2. Criterios de decisión
3. Teoría de decisión
4. Utilidad canónica
5. Probabilidad subjetiva

Algunos problemas de decisión...

¿Qué platillo ordenar a la hora de la comida?

¿Qué alcohol comprar para la fiesta?

¿Qué ropa ponerse?

¿A qué hora levantarse en domingo?

Formalizando el problema de decisión

Formalizando el problema de decisión

¿Cómo formalizariamos matemáticamente el problema de decisión?

- Un conjunto de *opciones* $\mathbb{D} = \{d_1, \ldots, d_k\}$ que debe ser **exhaustivo** y **excluyente**
- Un conjunto de consecuencias $\mathbb{C} = \{c_1, \ldots, c_k\}$ a través de las cuales podemos evaluar la i-ésima decisión. Esto implica que para cada decisión hay **una y solo una** consecuencia ($d_i \to c_i$)

Cabe resaltar que una condición necesaria para la *existencia* del problema de decisión es que exista una **una relación de preferencia** entre las consecuencias

- Una relación binaria $\prec$ (o bien $\sim$) que indica que consecuencia es más *preferida* (*igualmente preferida*) que otra

De esta manera nuestra definición *parcial* de un problema de decisón es la siguiente:

$$(\mathbb{D}, \mathbb{C}, \prec)$$

Y un agente al que llamaremos el **tomador de decisiones**

Un problema sin incertidumbre

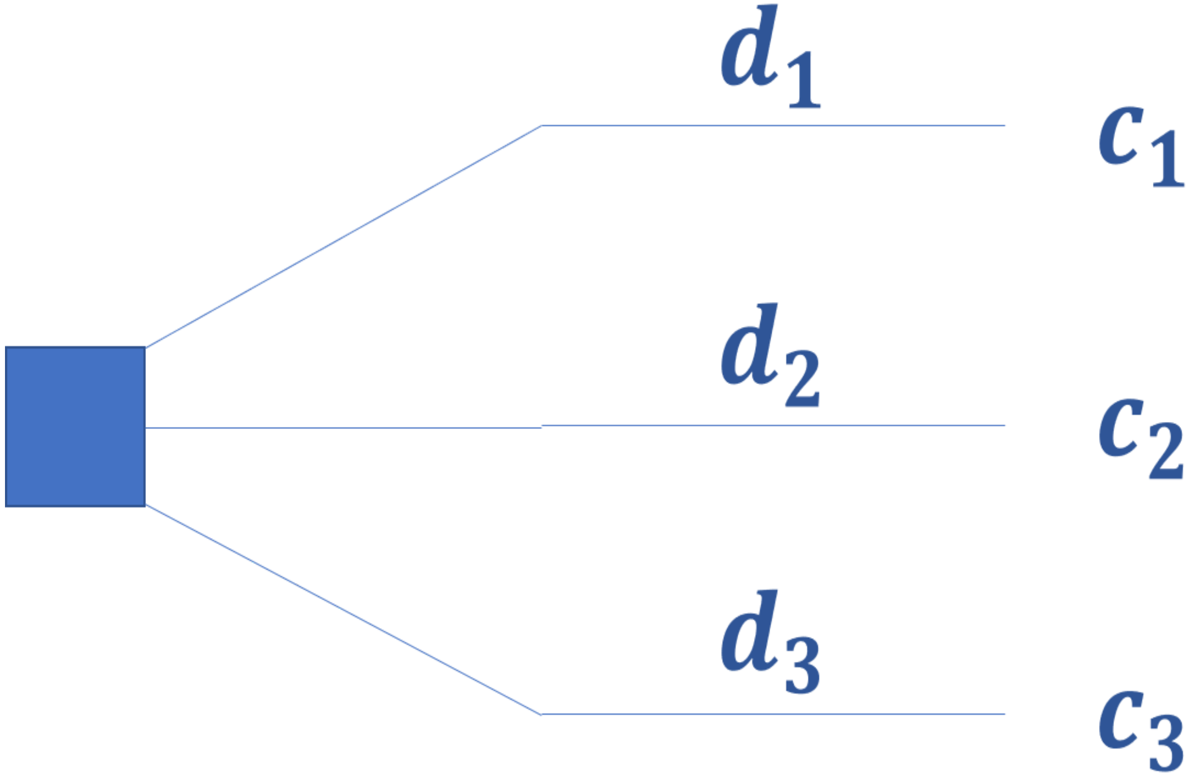
Problema:

El tomador de decisiones debe de elegir **uno y solo un** elemento de $d_i \epsilon \mathbb{D}$ evaluandolo **a través de su consecuencia** $c_i \epsilon \mathbb{C}$

Si, en particular, nos enfrentaramos a un problema de decisión dónde hubiera **certidumbre** alrededor de todas las consecuencias la cosa es fácil:

1. Identificar la consecuancia más preferida
2. Identificar la opción que conduce a dicha consecuencia
3. Elegir esa opción

A la representación visual de nuestro problema, se le conoce como *arbol de decisión* y en el caso de no incertidumbre se ve de la siguiente manera:


d_1
c_1
d_2
c_2
d_3
c_3

¡Break!

Robert O. Schlaifer

- Era autoridad en esclavitud griega y motores de aviones en el siglo XIX
- Solo tomó una curso de matemáticas a nivel licenciatura en su vida
- Apasionado de resolver problemas prácticos
- Interesado en teoría de negocios: "Under uncertainty, the business man is forced, in effect, to gamble.."
- Publicó *Probability and statistics for business decisions*, un libro de decisiones de negocios desde el punto de vista bayesiano
- Inventó los árboles de decisión

Un problema con incertidumbre

En nuestro día a día casi nunca tenemos certeza sobre las consecuencias del conjunto $\mathbb{C}$

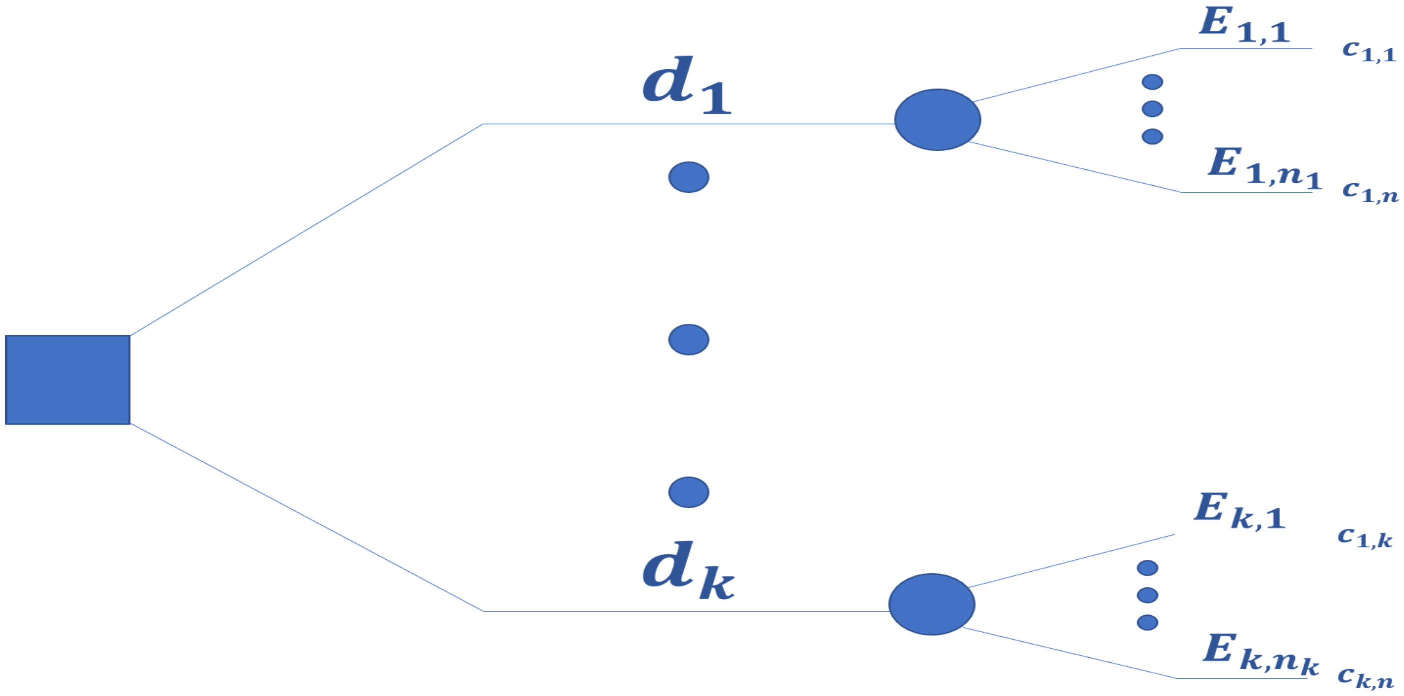
La mayoría de las veces tenemos que enfrentarnos al problema de decisión, en el mejor de los casos, con poca información de lo que puede pasar...

Por esta razón incorporamos esta incertidumbre a nuestra definición matemática del problema de decisión...

- $\mathfrak{E} = \{E_1, \ldots, E_{n_1}, \ldots, E_k, \ldots, E_{n_k}\}$ el conjunto de eventos inciertos

Así, nuestro problema de decisión queda formalmente definido por:

$$(\mathbb{D}, \mathbb{C}, \mathfrak{E}, \prec)$$


d_1
d_k
$E_{1,1}$
$c_{1,1}$
E_{1,n_1}
$c_{1,n}$
$E_{k,1}$
$c_{1,k}$
E_{k,n_k}
$c_{k,n}$

Resolviendo el problema de decisión

Resolviendo el problema de decisión

Andamos buscando mecanismos/técnicas para " *podar* " nuestro arbol y solucionar nuestro problema de decisión

Algunas ideas son:

1. Criterio **optimista**
2. Criterio **pesimista**
3. Consecuencia **más probable**
4. Consecuencia **promedio**
5. Consecuencia **esperada**

¿Cuál de todos estos criterios es el mejor?

Teoría Axiomática de decisión

Objetivo:

Contestar a la pregunta ¿cómo se debe resolver un problema de decisión en ambiente de incertidumbre?

Axiomas de coherencia

En 1954 Leonard J. Savage publicó *The foundations of statistics* el texto que propuso por primera vez una receta general para tomar decisiones

Fué un matemático de la universidad de Michigan que trabajó de cerca con Milton Friedman

En palabras de Friedman: " *one of the few people I have met whom I would unhesitatingly call a genius* "

No es coincidencia que los axiomas que vamos a estudiar estén fuermente influenciados por la teoría de juegos y la teoría de utilidad

1

COMPARABILIDAD

Axioma de Comprabilidad

La relación de preferencia del tomador de decisiones es tal que para d_i y $d_j \epsilon \mathbb{D} \Longrightarrow$ necesariamente ocurre **una y solo una de las siguientes** :

i. d_i es más preferible que d_j ($d_i \prec d_j$)

ii. d_i es menos preferible que d_j ($d_j \prec d_i$)

iii. d_i es igualmente preferible que d_j ($d_i \sim d_j$)

Adicionalmente $\exists$ c_* y $c^* \epsilon \mathbb{C}$.,. $c_* \preceq c$ y $c \preceq c^*$ $\forall$ $c \epsilon \mathbb{C}$

2

TRANSITIVIDAD

Axioma de Transitividad

La relación de preferencias del tomador de decisiones es tal que para $\{d_i, d_j, d_k\} \epsilon \mathbb{D}$ ocurre que si $d_i \prec d_j$ y $d_j \prec d_k \Longrightarrow$ necesariamente $d_i \prec d_k$

Equivalentemente decimos que si $d_i \sim d_j$ y $d_j \sim d_k \Longrightarrow$ necesariamente $d_i \sim d_k$

3

SUSTITUIBILIDAD

Axioma de Sustituibilidad

También se le conoce cómo principio de la cosa segura

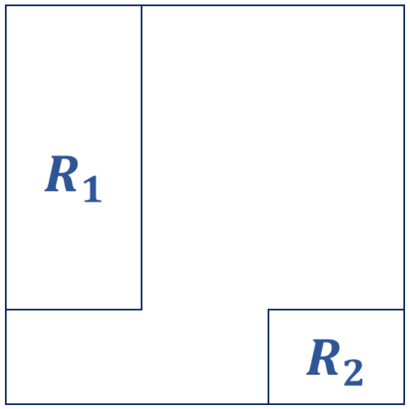
Para $\{d_i, d_j\} \epsilon \mathbb{D}$ y A es un suceso incierto. Si ocurre que $d_i \prec d_j|A$ y $d_i \prec d_j|A^c \Longrightarrow d_i \prec d_j$

4

EVENTOS DE REFERENCIA

Axioma de Eventos de Referencia

El tomador de decisiones puede imaginar un mecanismo para generar puntos en el cuadrado unitario $I \,\epsilon\, \mathbb{R}^2$ de tal manera que si R_1 y R_2 con dos regiones de $I \implies$ el evento $\{z \,\epsilon\, R_1\}$ es más **creible** que el evento $\{z \,\epsilon\, R_2\} \iff$ Área(R_1) > Área(R_2)



OJO: La ocurrencia de esto eventos del tipo 'z' es *independiente* de los eventos inciertos de nuestro problema de decisión

UTILIDAD

Utilidad

Habíamos dicho más atrás que el *tomador de decisiones* **EVALÚA** cada opción a partir de su consecuencia

Lo que no puntualizamos más atrás es el **CÓMO** realiza esta evaluación...

Def: UTILIDAD CANÓNICA

Sea c una consecuencia cualquiera en $\mathbb{C}$. Definimos entonces la *utilidad canónica* u_0 de c como el área de una región $R \epsilon I$.,.

$$u_0(c) = Área(R)$$

$$u_0 : \mathbb{C} \to [0, 1]$$

Utilidad conónica

Pregunta:

¿Porqué se llama *utilidad* y se apellida *canónica*?

R: La función u_0 tal cómo está definida es una función monótona que **respeta el ordenamiento de la preferencias** dado por $\prec$, además esta función **existe** y es **única** como consecuencia de los axiomas de coherencia

TEO

Sean c_i y $c_j \in \mathbb{C} \Longrightarrow c_i \prec c_j \Longleftrightarrow u_o(c_i) < u_0(c_j)$

Además $u_0(c_*) = 0$ y $u_0(c^*) = 1$

Probabilidad subjetiva

Tampoco hemos hablado de los eventos inciertos de nuestro problema de decisión ni de los mecanismos que tiene el tomador de decisiones para cuantificar el nivel de incertidumbre asociado a los mismos

Def: PROBABILIDAD SUBJETIVA

Sea $E \epsilon \mathfrak{E}$ un evento incierto relevante. Definimos la probailidad subjetiva del evento E como el área de $R \subseteq I$.,.

$$P(E|H) = \acute{A}rea(R)$$

H denota la **información** con la que cuenta el tomador de decisiones con respecto del evento incierto E al momento de tomar la decisión

Esta proabilidad **existe** y es **única** como consecuencia de los axiomas de coherencia

Probabilidad Subjetiva

TEO

La función de probabilidad $P(E|H)$ definida sobre los eventos inciertos, satisface los axiomas de Kolmogorov

¡¡¡ $\Longrightarrow$ los axiomas de Kolmogorov son una consecuencia de los axiomas de coherencia !!!

¿Qué sigue?

¿Qué sigue?

PRIMERO

Deducir el criterio óptimo para tomar decisiones con base en nuestro recién creado cuerpo axiomático

SEGUNDO

Aterriar nuestra teoría al caso de inferencia

TERCERO

Hacer inferencia bayesiana

Ya no se vale echarse para atrás

Tampoco hacer menjurjes...