

# Trabajo práctico. Análisis de Circuitos

Adrián Romero

1er cuatrimestre, año 2020

# Índice

<b>1. Objetivo</b>	<b>3</b>
<b>2. Análisis del filtro a partir de la función de transferencia</b>	<b>3</b>
2.1. Análisis del tipo filtro . . . . .	3
2.1.1. Orden . . . . .	3
2.1.2. Tipo . . . . .	3
2.2. Cálculo de ceros, polos, $w_0$ y Q . . . . .	3
2.2.1. Ceros . . . . .	3
2.2.2. Polos . . . . .	4
2.2.3. $w_0$ y Q . . . . .	4
2.3. Diagramas de Bode . . . . .	5
2.3.1. Magnitud . . . . .	5
2.3.2. Fase . . . . .	6
2.4. Respuesta al escalón . . . . .	6
2.5. Respuesta al impulso . . . . .	8
2.6. Comparación entre la respuesta al impulso y la respuesta al escalón . . . . .	10
2.7. Respuesta a señales cuadradas . . . . .	10
2.7.1. Respuesta a señal cuadrada de $f_0 = \frac{w_0}{2\pi}$ . . . . .	11
2.7.2. Respuesta a señal cuadrada de $10f_0 = 10\frac{w_0}{2\pi}$ . . . . .	11
2.7.3. Respuesta a señal cuadrada de $\frac{f_0}{10} = \frac{1}{10}\frac{w_0}{2\pi}$ . . . . .	12
2.7.4. Respuesta a señal cuadrada de $1000f_0$ . . . . .	12
2.7.5. Respuesta a señal cuadrada de $\frac{f_0}{1000}$ . . . . .	13
2.8. Respuesta a señales senoidales . . . . .	14
2.8.1. Respuesta a señal senoidal de $f_0 = \frac{w_0}{2\pi}$ . . . . .	14
2.8.2. Respuesta a señal senoidal de $f = \frac{314\frac{rad}{s}}{2\pi} = 100Hz$ . . . . .	15
2.8.3. Respuesta a señal senoidal de $f = \frac{100\frac{rad}{s}}{2\pi} = 15,91Hz$ . . . . .	16
<b>3. Diseño de filtro</b>	<b>17</b>
3.1. Cuestiones previas . . . . .	17
3.2. Filtros de Sallen-Key . . . . .	18
3.2.1. Filtro pasabajos de Sallen Key . . . . .	18
3.2.2. Filtro pasaaltos de Sallen-Key . . . . .	20
3.2.3. Justificación de la elección de los filtros de Sallen-Key . . . . .	21
3.3. Valores normalizados de los componentes . . . . .	21
3.3.1. Valores normalizados del filtro pasaaltos . . . . .	21
3.3.2. Valores normalizados filtro pasabajos . . . . .	22
3.4. Análisis del filtro diseñado . . . . .	24
3.4.1. Transferencia . . . . .	24
3.4.2. Parámetros del filtro . . . . .	24
3.4.3. Diagrama de Bode . . . . .	25
3.4.4. Respuesta al impulso . . . . .	26
3.4.5. Respuesta al escalón . . . . .	27
3.4.6. Respuesta a señales cuadradas . . . . .	28
3.4.7. Respuesta a señales senoidales . . . . .	31

<b>4. Cálculo analítico de las respuestas</b>	<b>34</b>
4.1. Respuesta al impulso . . . . .	34
4.2. Respuesta al escalón . . . . .	36
4.3. Respuesta a señal senoidal . . . . .	37
<b>5. Bibliografía</b>	<b>39</b>

# 1. Objetivo

El objetivo del presente trabajo práctico es estudiar y diseñar un filtro a partir de una función de transferencia dada. Se hallarán los polos y ceros de la transferencia, los parámetros  $w_0$  y  $Q$  sabiendo que la función de transferencia del filtro es:

$$\frac{s^2 \cdot 2,527 \cdot 10^9}{s^4 + s^3 \cdot 7,153 \cdot 10^4 + s^2 \cdot 2,558 \cdot 10^9 + s \cdot 1,13 \cdot 10^{12} + 2,494 \cdot 10^{14}}$$

Luego se procederá a hallar y analizar las respuesta al impulso, al escalón y a señales cuadradas y senoidales, además de los diagramas de Bode de magnitud y fase del filtro.

Posteriormente se diseñará un filtro que tenga la transferencia asignada, a partir de valores normalizados de resistencias y capacitores y se compararán sus respuestas con las respuestas esperadas a partir del análisis anteriormente mencionado.

Finalmente se buscarán las respuestas analíticas a las señales anteriores.

## 2. Análisis del filtro a partir de la función de transferencia

### 2.1. Análisis del tipo filtro

#### 2.1.1. Orden

A partir de la función de transferencia podemos ver que es un filtro de orden 4. Esto se deduce del hecho de que el denominador sea un polinomio de grado 4 y por lo tanto habrá cuatro polos.

#### 2.1.2. Tipo

Para poder decir si es un filtro de tipo pasabajo, pasalto, rechazabanda o pasabanda analizamos el comportamiento del filtro (a partir de analizar la función de transferencia) para frecuencias altas y para frecuencias bajas.

Para frecuencias altas hacemos tender  $s$  a infinito:  $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$

Esto es evidente pues el grado del polinomio en el denominador es mayor que el del numerador.

Para frecuencias bajas hacemos tender  $s$  a 0:  $\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = 0$

Dado que tanto para frecuencias altas como para frecuencias bajas la transferencia resulta 0, deducimos que estamos en presencia de un filtro pasabanda.

### 2.2. Calculo de ceros, polos, $w_0$ y $Q$

#### 2.2.1. Ceros

Dado que el numerador de la transferencia es:  $s^2 \cdot 2,527 \cdot 10^9$ , se observa fácilmente que hay un cero de orden 2 en  $s=0$ .

$$z_1 = z_2 = 0$$

### 2.2.2. Polos

Para el calculo de polos buscamos aquellos valores que anulan el denominador de la transferencia, es decir resolvemos la ecuación:

$$s^4 + s^3 \cdot 7,153 \cdot 10^4 + s^2 \cdot 2,558 \cdot 10^9 + s \cdot 1,13 \cdot 10^{12} + 2,494 \cdot 10^{14} = 0$$

Las soluciones obtenidas con Matlab fueron:

$$\begin{aligned} p_a &= \sigma_a + w_{da}j = -35542,74 + 35538,93j \\ \overline{p}_a &= \sigma_a - w_{da}j = -35542,74 - 35538,93j \\ p_b &= \sigma_b + w_{db}j = -222,25 + 222,08j \\ \overline{p}_b &= \sigma_b - w_{db}j = -222,25 - 222,08j \end{aligned}$$

Se observa que son dos pares de polos complejos conjugados.

### 2.2.3. $w_0$ y $Q$

A partir de los cuatro polos obtenidos en el apartado anterior podemos descomponer el denominador de la transferencia en el producto de dos polinomios de grado 2.

$$(s - p_a)(s - \overline{p}_a)(s - p_b)(s - \overline{p}_b) = (s^2 - 2Re(p_a) + |p_a|^2)(s^2 - 2Re(p_b) + |p_b|^2)$$

Luego, se calculan  $w_a$ ,  $Q_a$  y  $w_b$ ,  $Q_b$  las frecuencias naturales y los factores de calidad asociados a los polos  $p_a$  y  $p_b$  respectivamente a partir de la forma general de las transferencias de segundo orden:  $s^2 + s \cdot \frac{w_i}{Q_i} + w_i^2$ . Obtuvimos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} w_a &= 50262,33 \frac{rad}{s} & Q_a &= 0.70 \\ w_b &= 314,19 \frac{rad}{s} & Q_b &= 0.70 \end{aligned}$$

Como era de esperarse, pues en la sección anterior obtuvimos pares de polos complejos conjugados,  $Q_a$  y  $Q_b$  cumplen que:

$$Q_a > \frac{1}{2} \quad Q_b > \frac{1}{2}$$

Y por lo tanto la respuesta al escalón sera de tipo suma de señales subamortiguadas:

$$e^{-\frac{t}{\tau_1}}(A \sin(w_{d1}) + B \cos(w_{d1})) + e^{-\frac{t}{\tau_2}}(C \sin(w_{d2}) + D \cos(w_{d2}))$$

Donde:

$$\begin{aligned} w_{da} &= w_a \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_a^2}} = 35176,3 \simeq Im(p_a) & w_{db} &= w_b \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_b^2}} = 219,9 \simeq Im(p_b) \\ \tau_1 &= \frac{1}{-\sigma_1} = 4,5 \cdot 10^{-3} & \tau_2 &= \frac{1}{-\sigma_2} = 2,8 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Donde los valores son aproximadamente los esperados, probablemente debido a redondeos que realiza Matlab al encontrar los polos.

Finalmente, dado que el filtro a analizar es un pasabanda, la frecuencia natural  $w_0$  resultará la media geométrica entre  $w_a$  y  $w_b$ , es decir,  $w_0 = \sqrt{w_a w_b}$

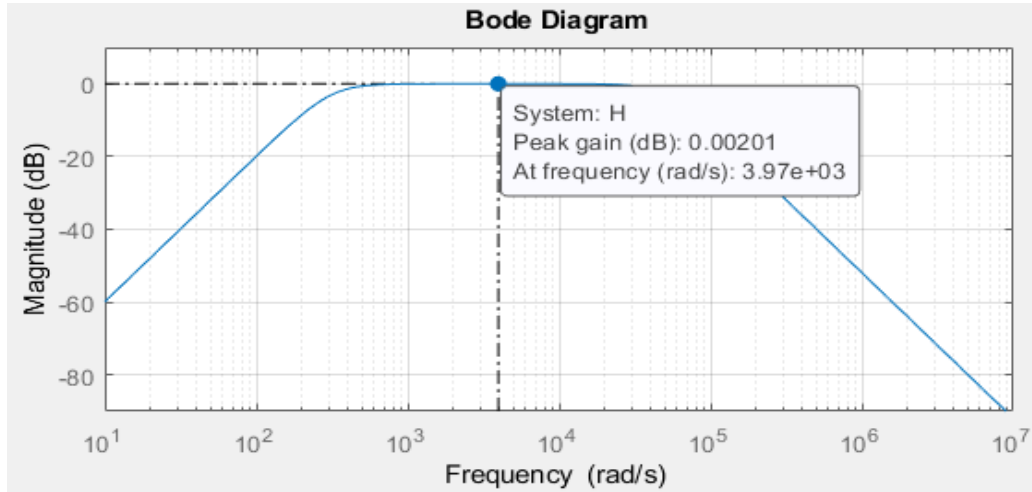
$$w_0 = 3973,96 \frac{rad}{s}$$

## 2.3. Diagramas de Bode

Utilizando la función  $Bode()$  de Matlab hallamos la respuesta en frecuencia del filtro representados en los diagramas de Bode para magnitud en dB y fase en grados.

### 2.3.1. Magnitud

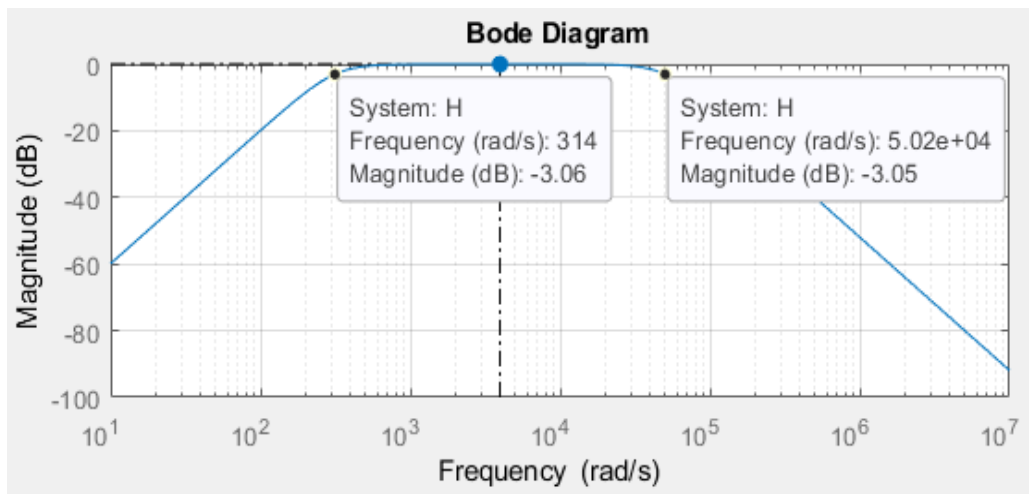
Observamos que tal como se predijo la máxima ganancia en magnitud se alcanza en  $w_0 = 3973,96 \frac{rad}{s}$ . La ganancia es de aproximadamente 0dB para  $w_0$  lo que indica una ganancia unitaria en tensión.



**Figura 1:** Diagrama de Bode de magnitud -  $w_0$

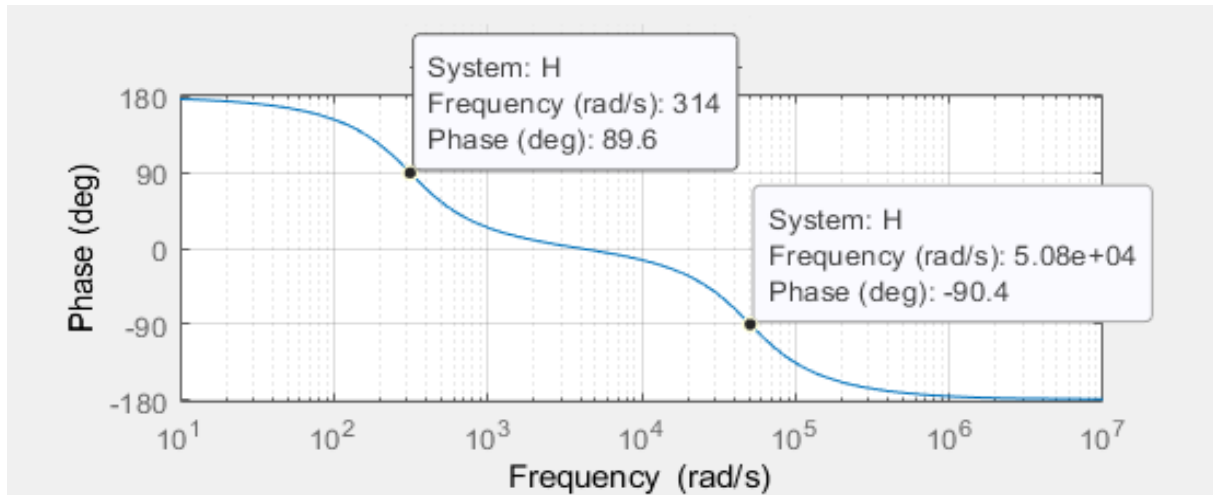
Observamos que para  $w_a = 50262,33 \frac{rad}{s}$  y  $w_b = 314,19 \frac{rad}{s}$  la ganancia en magnitud es aproximadamente la misma: -3dB. Esto indica una relación del 70 % entre la tensión de salida y la tensión de entrada. Esto se debe a que  $20\log(Q_a) = 20\log(Q_b) = 20\log(0,7) = -3\text{dB}$ .

Además se puede observar que las pendientes de subida y de bajada en magnitud son de  $\pm 40 \frac{dB}{dec}$  donde la subida se debe al cero doble en 0, la estabilizacion al polo complejo de  $314,19 \frac{rad}{s}$  y la bajada al polo de  $50262,33 \frac{rad}{s}$



**Figura 2:** Diagrama de Bode de magnitud -  $w_a$  y  $w_b$

### 2.3.2. Fase



**Figura 3:** Diagrama de Bode de fase

Podemos ver que como la transferencia tiene un cero doble en  $s = 0$ , la fase inicial resulta  $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$

Además, el cambio de fase entre que ocurre entre las frecuencias una década antes de  $w_a = 314,19 \frac{rad}{s}$  y una década después de  $w_a$  es de  $180^\circ$ , con una pendiente de  $\frac{-90^\circ}{dec}$ , pasando por  $90^\circ$  en la frecuencia  $w_a$ , tal como es esperado para los polos complejos conjugados. Lo mismo sucede para  $w_b = 50262,33 \frac{rad}{s}$  excepto que a esa frecuencia la fase es de  $-90^\circ$ .

## 2.4. Respuesta al escalón

La respuesta al escalón del sistema se puede hallar buscando la transformada inversa de laplace de  $\frac{H(s)}{s}$

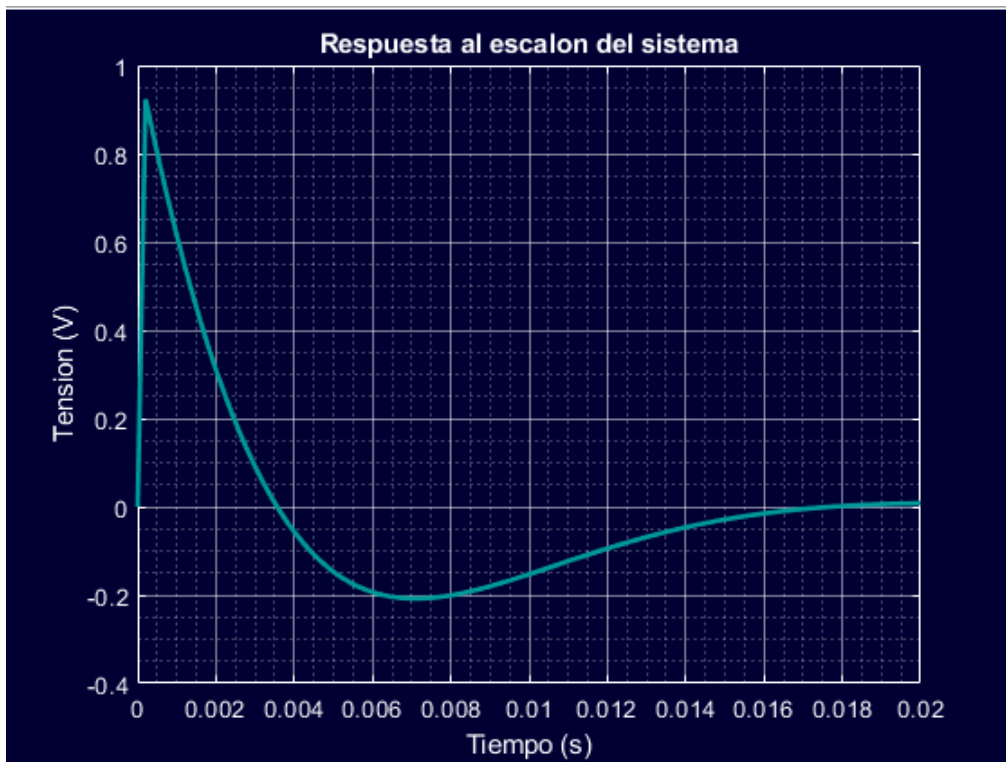
Utilizando la función *ilaplace()* de Matlab se obtuvo la siguiente respuesta al escalón:

$$\begin{aligned} & -exp(-35544,0t)cos(35544,0t)(0,5064 - 0,5002i) - \\ & exp(-35544,0t)cos(35544,0t)(0,5064 + 0,5002i) - \\ & exp(-35544,0t)sin(35544,0t)(0,5002 + 0,5064i) - \\ & exp(-35544,0t)sin(35544,0t)(0,5002 - 0,5064i) + \\ & exp(-222,2t)cos(222,1t)(0,5064 - 0,5005i) + \\ & exp(-222,3t)cos(222,1t)(0,5065 + 0,5005i) - \\ & exp(-222,2t)sin(222,1t)(0,5005 + 0,5064i) - \\ & exp(-222,3t)sin(222,1t)(0,5005 - 0,5064i) \end{aligned}$$

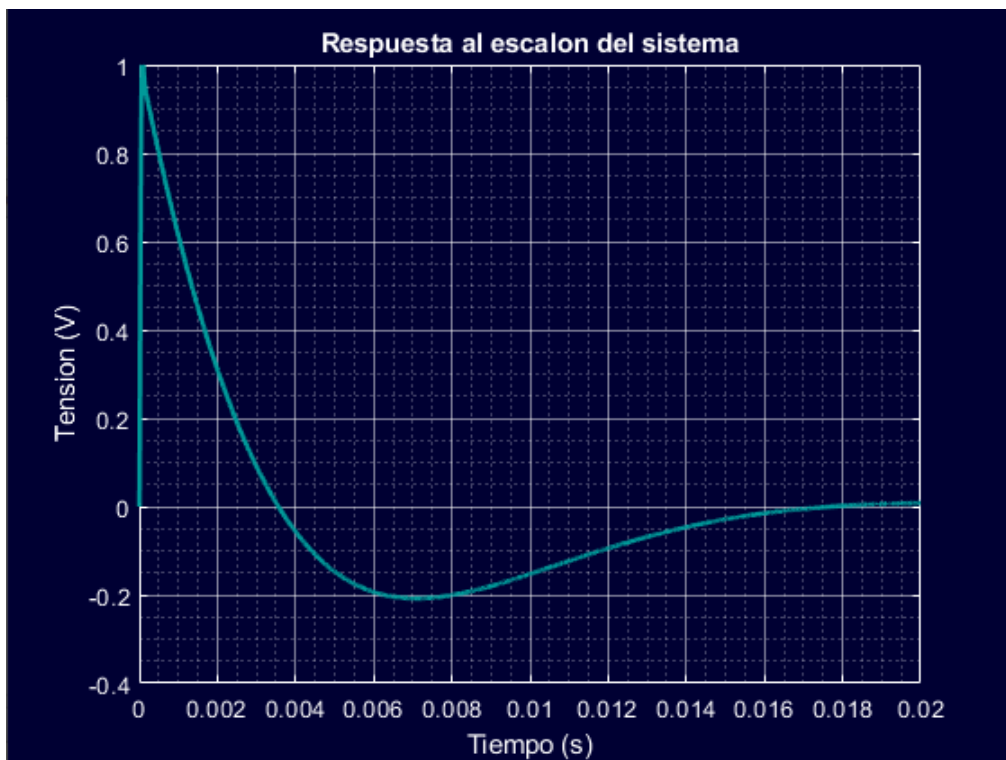
Agrupando los términos semejantes y aproximando valores parecidos logramos obtener una ecuación simplificada de la respuesta al escalón:

$$-e^{-35544t}(cos(35544t) + sin(35544t)) + e^{-222,2t}(cos(222,2t) - sin(222,2t))$$

Procedemos a graficar esta expresión y compararla con aquella que otorga la función *step()* de Matlab:



**Figura 4:** Respuesta al escalón hallada con *ilaplace()*



**Figura 5:** Respuesta al escalón hallada con *step()*



Observamos que ambas respuestas al escalón halladas son muy similares. Sin embargo, es posible apreciar que en la respuesta hallada con *step()* logra alcanzar un valor máximo mayor que el hallado con *ilaplace()*. A pesar de esto, consideramos que la respuesta al escalón hallada con *ilaplace()* es representativa del comportamiento del filtro.

La constante de tiempo  $\tau$  para este circuito puede obtenerse comparando los inversos de los coeficientes de las exponenciales de la respuesta al escalón obtenida:

$$\tau_1 = \frac{1s}{222,2} = 0,0045s \quad \tau_2 = \frac{1s}{35544} = 0,000028s$$

Estos valores son los que esperábamos de acuerdo al análisis hecho en la sección anterior.

Dado que  $\tau_1 \gg \tau_2$  es evidente que la respuesta al escalón se amortiguara casi completamente en un tiempo de:  $4\tau_1 = 0,018s$  como se puede ver en las figuras 4 y 5.

Además observamos que durante los primeros  $4\tau_2 = 0,000112s$  de tiempo se puede apreciar el efecto de la suma de ambas exponenciales al mismo tiempo y por eso la respuesta alcanza un valor mas alto. Luego de este tiempo solo es posible apreciar el efecto de una de las exponenciales pues la otra estará amortiguada.

Si relacionamos  $w_{da}$  con  $4\tau_1$  podremos estimar cuantos periodos de las senoidales amortiguadas podremos ver:

$$\frac{\frac{w_{da}}{2\pi}}{4\tau_1} = 1.57$$

La figura anterior se corresponde con este resultado pues solo podemos ver aproximadamente 1 periodo de senoidal antes de su amortiguamiento.

Debido a que el filtro es un pasabanda podemos ver que en el flanco del escalón la respuesta en tensión es nula. Esto se debe a que el flanco del escalón esta asociado con las altas frecuencias y un filtro pasabanda las filtra.

Además podemos observar que luego de que transcurre el transitorio - un tiempo de  $4\tau = 0,018s$  - la tensión de la respuesta al escalón es también nula. Esto se debe a que un filtro pasabanda también filtra las bajas frecuencias que se asocian con el régimen permanente o continuo.

## 2.5. Respuesta al impulso

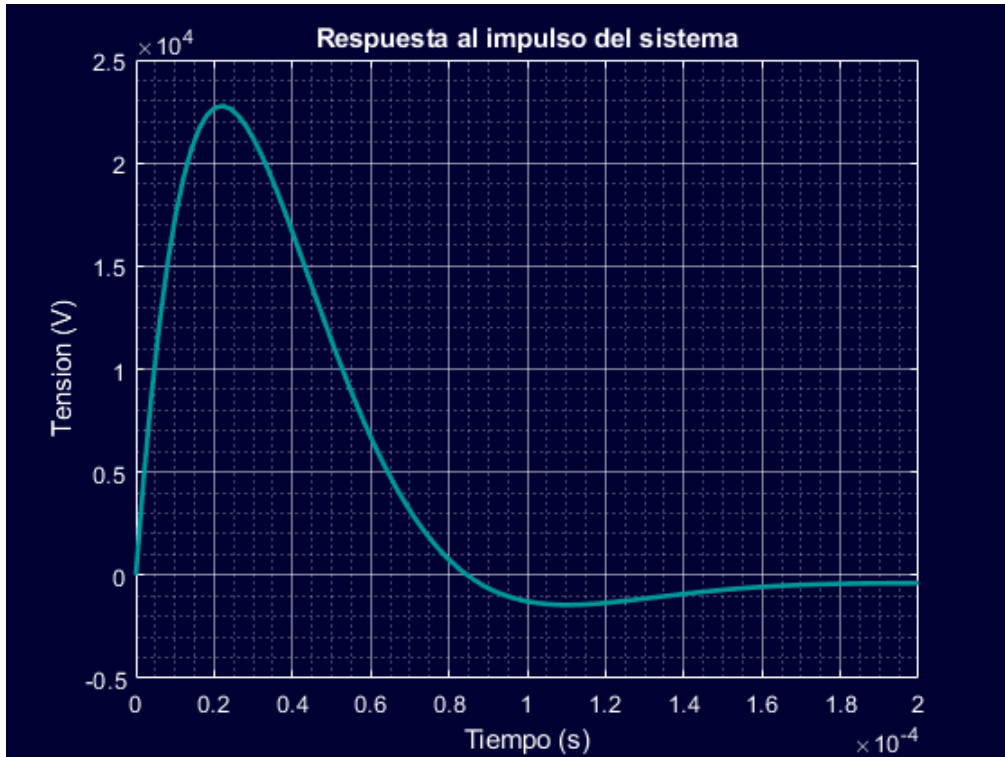
Buscamos la respuesta al impulso del sistema a traves de la antitransformada de Laplace de la funcion de transferencia  $H(s)$ . Nuavmente utilizamos *ilaplace()* y obtuvimos:

$$\begin{aligned} &exp(-35544,0 * t) * cos(35544,0 * t) * (223,7 - 35777,0i) + \\ &exp(-35544,0 * t) * cos(35544,0 * t) * (223,7 + 35777,0i) + \\ &exp(-35544,0 * t) * sin(35544,0 * t) * (35777,0 + 223,7i) + \\ &exp(-35544,0 * t) * sin(35544,0 * t) * (35777,0 - 223,7i) - \\ &exp(-222,2 * t) * cos(222,1 * t) * (223,7 + 1,232i) - \\ &exp(-222,3 * t) * cos(222,1 * t) * (223,7 - 1,231i) - \\ &exp(-222,2 * t) * sin(222,1 * t) * (1,232 - 223,7i) - \\ &exp(-222,3 * t) * sin(222,1 * t) * (1,231 + 223,7i) \end{aligned}$$

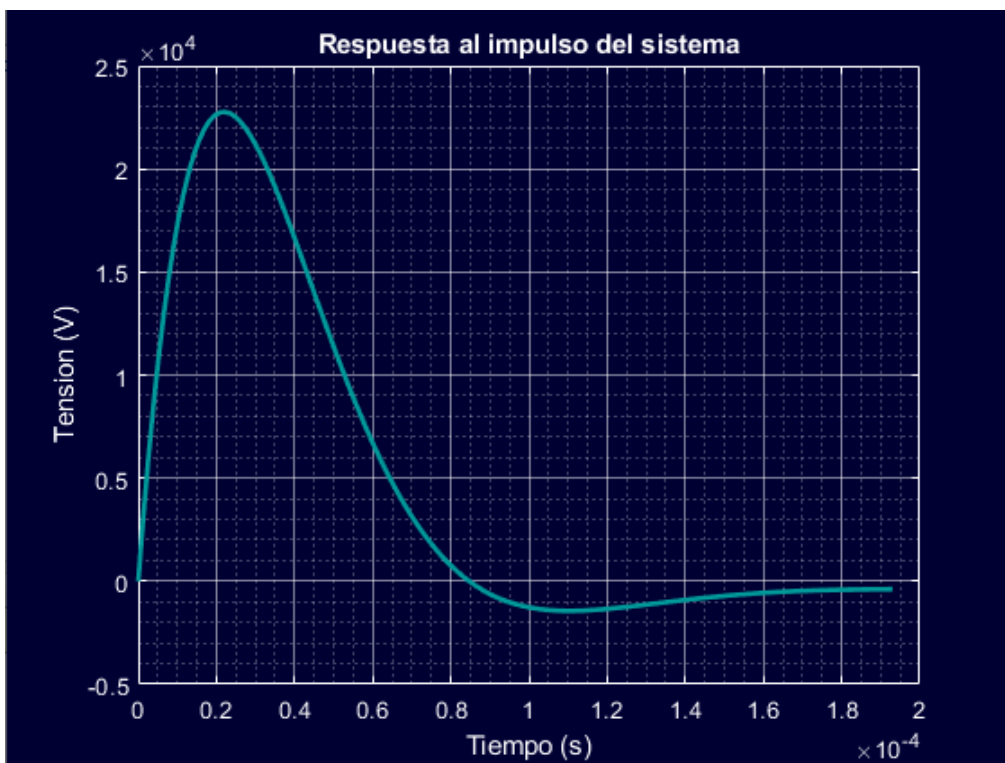
Simplificando logramos obtener:

$$e^{-35544t}(447,4cos(35544t) + 71554sin(35544t)) - e^{-222,2t}(447,4cos(222,2t) + 2,462sin(222,2t)) \quad (1)$$

Graficando esta respuesta y la obtenida con la función *impulse()* de Matlab:



**Figura 6:** Respuesta al impulso hallada con *ilaplace()*

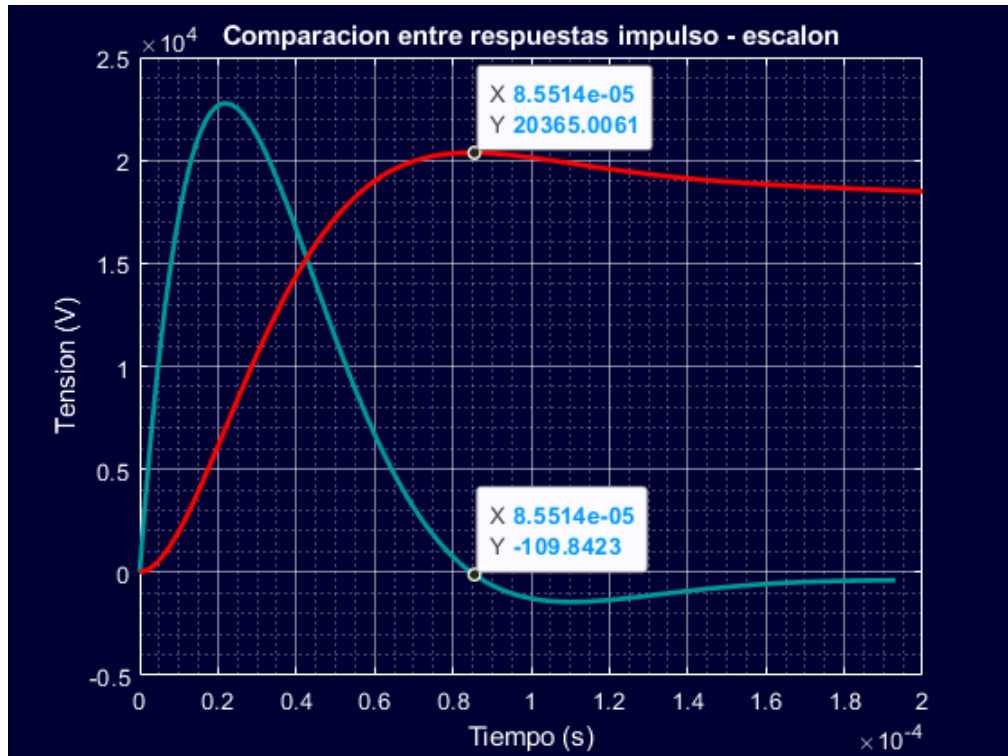


**Figura 7:** Respuesta al impulso hallada con *impulse()*

No se observan diferencias apreciables entre las respuestas al impulso halladas.

## 2.6. Comparación entre la respuesta al impulso y la respuesta al escalón

Para comparar la respuesta al impulso y al escalón se graficaron ambas funciones en el intervalo de tiempo  $[0, 0.2 \times 10^{-4}]$ . Además se reescaló la respuesta al escalón multiplicándola por un factor de  $2 \times 10^4$ .



**Figura 8:** Respuesta al impulso en turquesa, respuesta al escalón -reescalada- en rojo

Realizamos las siguientes observaciones:

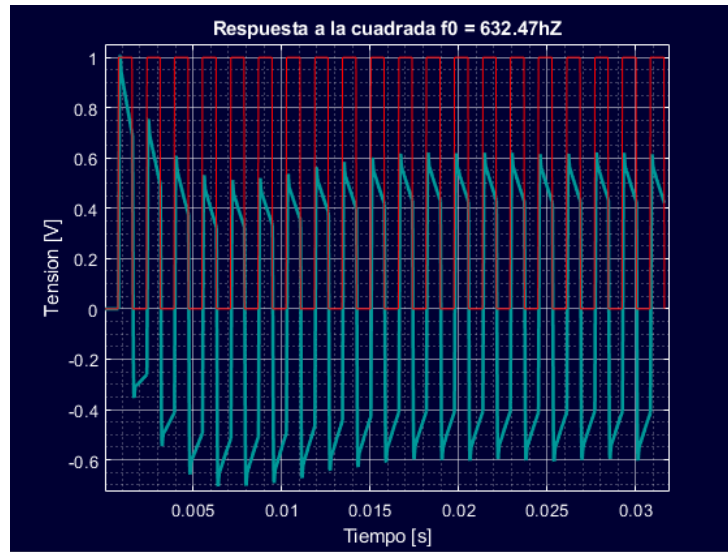
- Cuando la respuesta al impulso es positiva, la respuesta al escalón es creciente.
- Cuando la respuesta al impulso es negativa, la respuesta al escalón es decreciente.
- Cuando la respuesta al impulso es cero -indicado en la figura-, la respuesta al escalón alcanza un máximo.
- Cuando la respuesta al impulso tiene un máximo o un mínimo, la respuesta al escalón cambia su concavidad.

Esto es coherente pues la respuesta al impulso es la derivada de la respuesta al escalón.

## 2.7. Respuesta a señales cuadradas

Graficaremos ahora las respuestas del filtro a las señales cuadradas de frecuencias:  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 632.47\text{Hz}$ ,  $10f_0 = 6324.47\text{Hz}$  y  $\frac{f_0}{10} = 63.247\text{Hz}$ . En cada uno de los gráficos se indica en rojo la señal que produce la respuesta, indicada en turquesa.

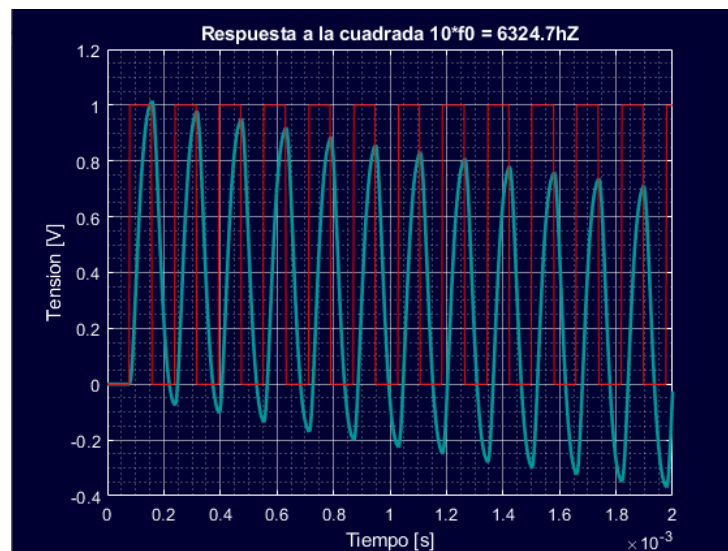
### 2.7.1. Respuesta a señal cuadrada de $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$



**Figura 9:** Respuesta a la cuadrada de 632.47hZ en turquesa, señal cuadrada en rojo (20 periodos)

Observamos que luego de 0.018s ( $4\tau$ ) la respuesta a la señal cuadrada de  $f_0$  se estabiliza. Además observaremos que en cada ventana de tiempo en el que la cuadrada está en el valor 1V, la respuesta es cómo una respuesta al escalón. Dependiendo de la frecuencia de la cuadrada se verá más o menos amortiguamiento como podremos observar en las siguientes respuestas. En particular para esta señal cuadrada el tiempo de amortiguamiento  $4\tau > \frac{T_{cuad}}{2} = 0,00079$  y por lo tanto no se podrá notar el amortiguamiento en el semiperíodo de cuadrada.

### 2.7.2. Respuesta a señal cuadrada de $10f_0 = 10\frac{\omega_0}{2\pi}$

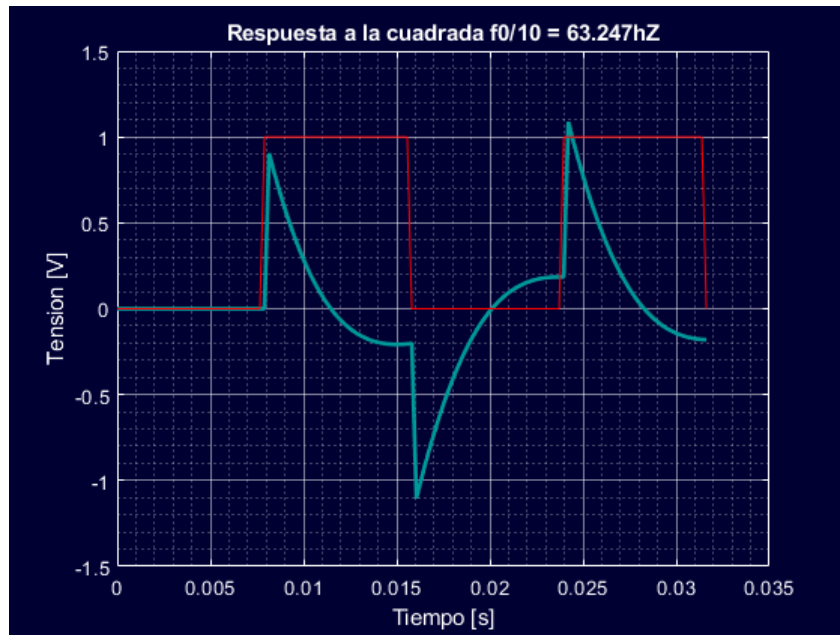


**Figura 10:** Respuesta a la cuadrada de 6324.7hZ en turquesa, señal cuadrada en rojo (12 periodos)

Podemos observar que cuando la frecuencia de la señal cuadrada es elevada, su periodo disminuye y por lo tanto le da menos tiempo al filtro a amortiguarse.

Comparando el tiempo de amortiguamiento del filtro  $4\tau = 0,018s$  con el semiperiodo de la cuadrada  $\frac{T_{cuad}}{2} = 0,00079s$  podemos observar que  $\frac{T_{cuad}}{2} \ll 4\tau$  y por lo tanto no podremos notar el amortiguamiento.

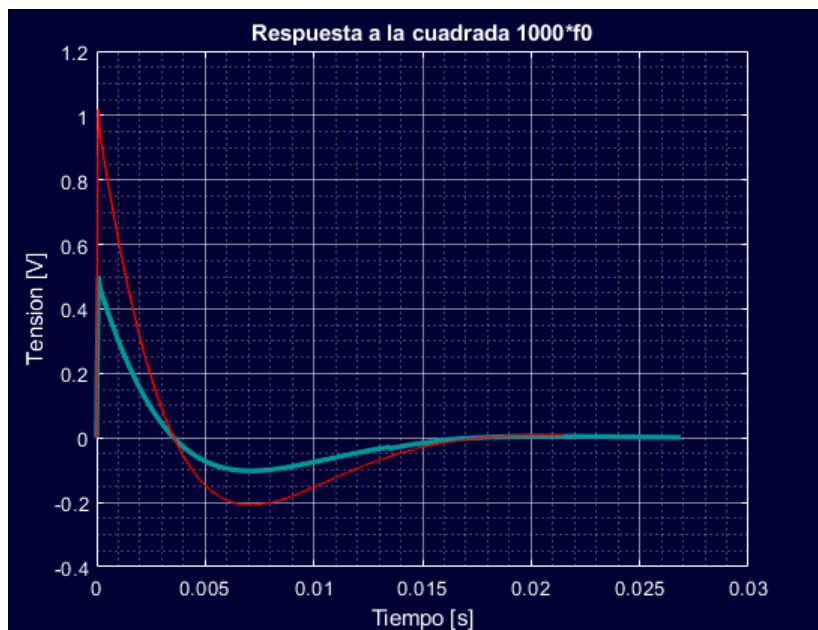
### 2.7.3. Respuesta a señal cuadrada de $\frac{f_0}{10} = \frac{1}{10} \frac{\omega_0}{2\pi}$



**Figura 11:** Respuesta a la cuadrada de 63.247hZ en turquesa, señal cuadrada en rojo (2 periodos)

El semiperiodo de la cuadrada para este caso es:  $\frac{T_{cuad}}{2} = 0,0079$  En este caso observamos que  $\frac{T_{cuad}}{2} < 4\tau$ . Por lo que si bien no veremos llegar a amortiguarse la respuesta en un semiperiodo si podremos ver mas amortiguamiento que en el caso anterior. De hecho podemos ver que en las ventanas de 0.0079s de la cuadrada, el filtro responde exactamente como los primeros 0.0079s de la respuesta al escalón.

### 2.7.4. Respuesta a señal cuadrada de $1000f_0$



**Figura 12:** Comparación respuesta cuadrada  $1000f_0$  en turquesa y respuesta al escalón en rojo

Se puede observar que la respuesta a la señal cuadrada se comporta como si fuera una respuesta a un escalón de amplitud  $\frac{1}{2}$ .

Una forma de explicar esto es mediante la descomposición en serie de Fourier de una señal cuadrada de frecuencia  $f$ :

$$x_{sq}(t) = V_{medio} + \frac{4}{\pi} \sum_{k_{impar}}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi k f t)}{k}$$

Observamos que se puede descomponer en una suma infinita de señales sinusoidales.

En particular para una señal cuadrada de valor medio  $\frac{1}{2}$  y frecuencia  $1000f_0$  la señal puede escribirse:

$$x_{sq}(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(2\pi 1000 f_0 t)}{1} + \frac{\text{sen}(2\pi 3000 f_0 t)}{3} + \frac{\text{sen}(2\pi 5000 f_0 t)}{5} + \dots \right)$$

$$x_{sq}(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(1000 w_0 t)}{1} + \frac{\text{sen}(3000 w_0 t)}{3} + \frac{\text{sen}(5000 w_0 t)}{5} + \dots \right)$$

Donde todas las frecuencias de las senoidales que componen a la cuadrada son de frecuencia mayor a  $1000w_0 = 3973926,211 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  y son evidentemente filtradas por el filtro pasabanda. El filtro responde entonces al valor medio de la señal que es de  $\frac{1}{2}$ .

### 2.7.5. Respuesta a señal cuadrada de $\frac{f_0}{1000}$



**Figura 13:** Señal cuadrada de  $\frac{f_0}{1000}$  en rojo (amplitud 1) , respuesta en turquesa

En este caso el semiperiodo de la señal cuadrada  $\frac{T_{cuad}}{2} = 0,79s$  es mucho mayor que el tiempo de amortiguamiento  $4\tau = 0,018s$  y por lo tanto si veremos a la respuesta amortiguarse dentro del semiperiodo. De hecho la relación entre  $\frac{T_{cuad}}{2}$  y  $4\tau$  nos puede indicar en que momento del semiperiodo se amortigua:

$$\frac{4\tau}{\frac{T_{cuad}}{2}} = 0,02$$

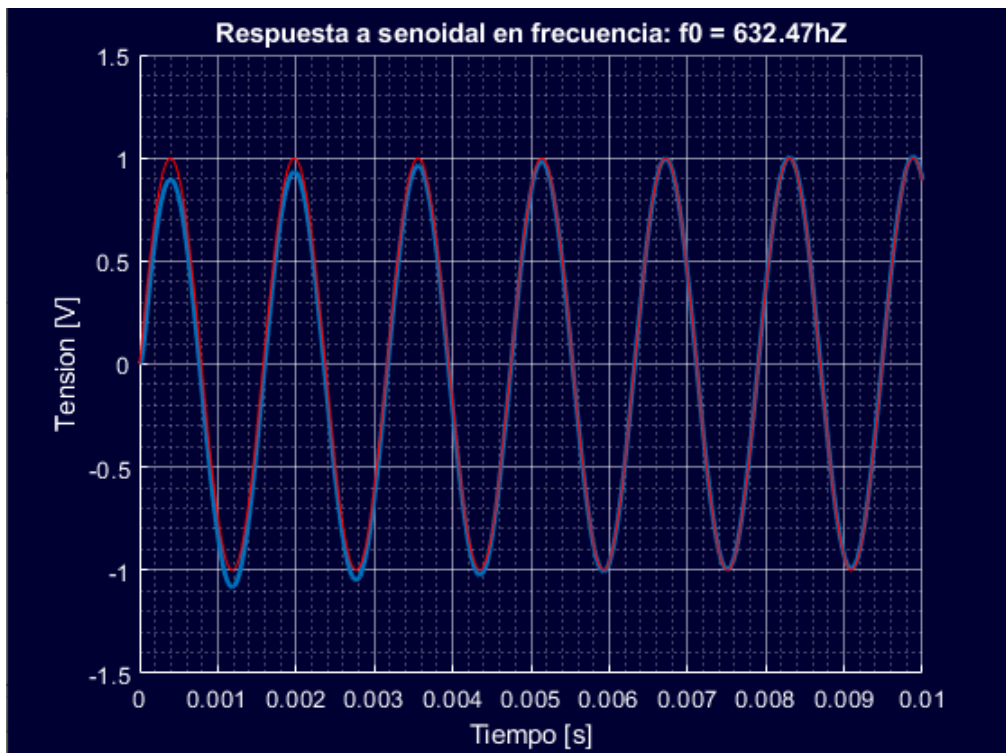
Lo que significa que en aproximadamente un 2% del tiempo en que la señal cuadrada esta en su valor máximo, la respuesta se amortigua.

## 2.8. Respuesta a señales senoidales

Se excitará el filtro con tres señales senoidales de diferente frecuencia y se estudiará la respuesta del filtro a estas señales. Las frecuencias elegidas fueron:

- $f_0 = \frac{w_0}{2\pi} = 632,47Hz$
- $f = \frac{314 \frac{rad}{s}}{2\pi} = 50Hz$
- $f = \frac{100 \frac{rad}{s}}{2\pi} = 15,91Hz$

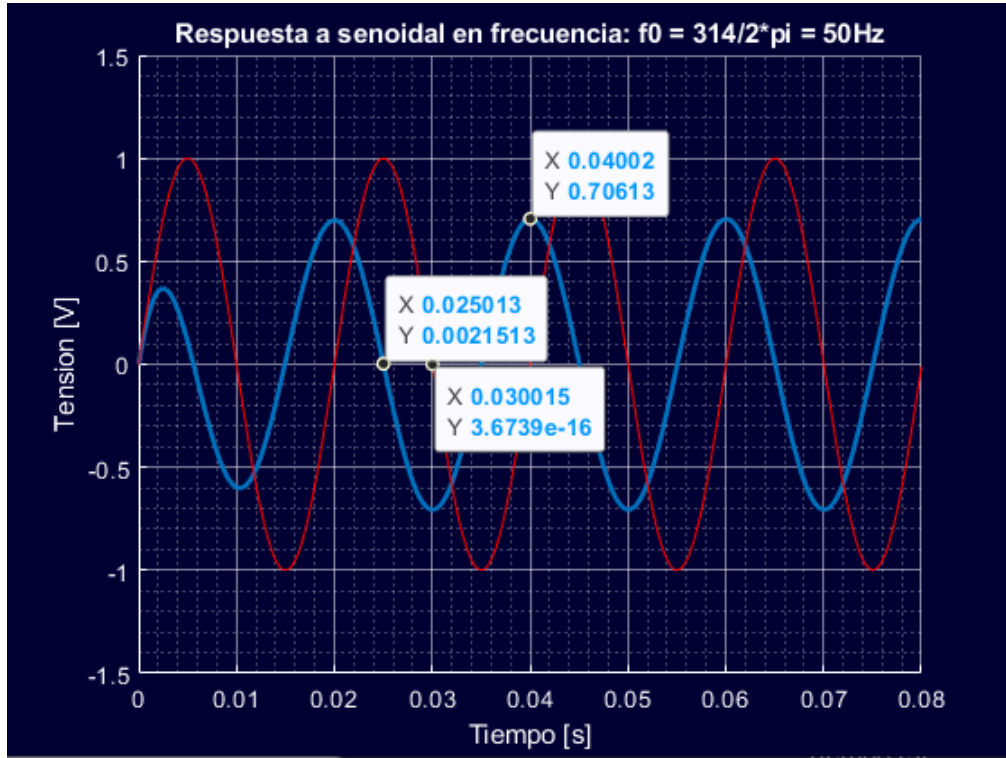
### 2.8.1. Respuesta a señal senoidal de $f_0 = \frac{w_0}{2\pi}$



**Figura 14:** Respuesta a la senoidal de 632.47Hz en turquesa, señal senoidal en rojo

Observamos que tanto la señal de excitación, como la respuesta tienen y la misma amplitud y están en fase. Esto era previsible pues el diagrama de Bode de magnitud nos indicaba que la ganancia era unitaria para esta frecuencia ( $w_0 = 3973,92 \frac{rad}{s}$ ). Además el diagrama de Bode de fase nos indicaba que para esta frecuencia el desfase era de  $0^\circ$

### 2.8.2. Respuesta a señal senoidal de $f = \frac{314 \frac{rad}{s}}{2\pi} = 100Hz$



**Figura 15:** Respuesta a la senoidal de 50Hz en turquesa, señal senoidal en rojo

Recordemos que  $314 \frac{rad}{s}$  era una frecuencia para la cual la ganancia en magnitud era de -3dB, es decir de aproximadamente el 70 %. En el gráfico se puede ver que la amplitud máxima de la respuesta alcanza un valor de 0.70 como es esperado.

Respecto al desfase, según el diagrama de Bode de fase, se debería alcanzar un desfase de  $90^\circ$ . Para corroborar esto se marcaron dos puntos en la figura que nos permitirán calcular un desfase temporal  $\Delta t$  entre las señales:

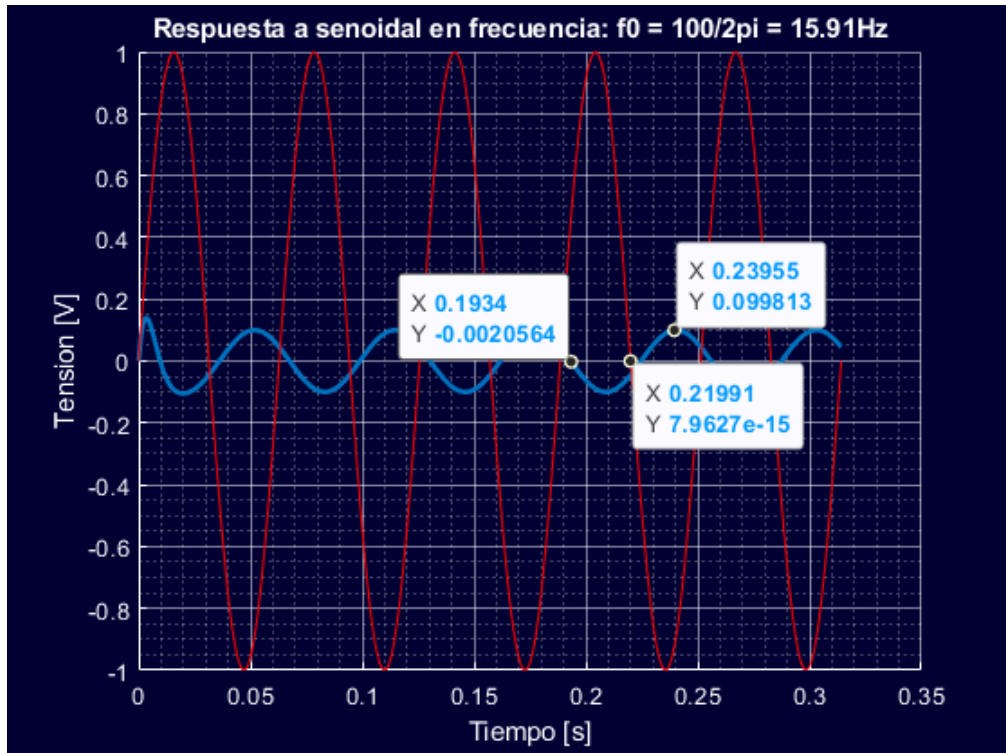
$$\Delta t = 0,03s - 0,0025s = 0,0005s$$

A partir de esto, obtenemos el desfase en ángulos multiplicándolo por  $w = 314 \frac{rad}{s}$ :

$$\Delta\phi = 314 \frac{rad}{s} \Delta t = 1,57rad = \frac{\pi}{2}rad = 90^\circ$$



### 2.8.3. Respuesta a señal senoidal de $f = \frac{100 \frac{rad}{s}}{2\pi} = 15,91Hz$



**Figura 16:** Respuesta a la senoidal de 15.91Hz en turquesa, señal senoidal en rojo

Se puede ver que la amplitud se redujo de 1V a 0.1V, es decir a un 10% de la señal de entrada. Esto se corresponde con que a frecuencia  $\omega = 100 \frac{rad}{s}$  la ganancia en magnitud es de -20dB.

Respecto del desfase podemos realizar el mismo procedimiento anterior con los puntos indicados en la figura:

$$\Delta t = 0,219s - 0,193s = 0,026s$$

$$\Delta \phi = 100 \frac{rad}{s} \Delta t = 2,6rad = 2,6rad \cdot \frac{180^\circ}{\pi rad} = 148^\circ$$

Lo cual se corresponde con el diagrama de Bode de fase

### 3. Diseño de filtro

En esta sección se explicara el proceso de diseño de un filtro que tenga la función de transferencia  $H(s)$  deseada.

#### 3.1. Cuestiones previas

Se desea diseñar un filtro pasabanda con la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{s^2 \cdot 2,527 \cdot 10^9}{s^4 + s^3 \cdot 7,153 \cdot 10^4 + s^2 \cdot 2,558 \cdot 10^9 + s \cdot 1,13 \cdot 10^{12} + 2,494 \cdot 10^{14}}$$

Una forma de realizar esto es poniendo en cascada dos filtros: un pasabajos de segundo orden y pasaaltos de segundo orden cuyas transferencias tienen como forma general:

$$H(s)_{LP} = \frac{k_{LP} \cdot w_{LP}^2}{s^2 + s \cdot \frac{w_{LP}}{Q_{LP}} + w_{LP}^2}$$
$$H(s)_{HP} = \frac{k_{HP} \cdot s^2}{s^2 + s \cdot \frac{w_{HP}}{Q_{HP}} + w_{HP}^2}$$

Donde:

- $H(s)_{LP}$  es la transferencia del pasabajos
- $H(s)_{HP}$  es la transferencia del pasaaltos
- $w_{LP}$  y  $w_{HP}$  son las frecuencias naturales de los filtros
- $Q_{LP}$  y  $Q_{HP}$  son los factores de calidad de los filtros
- $k_{LP}$  y  $k_{HP}$  son los factores de ganancia de los filtros

Al colocar los filtros en cascada, la transferencia del filtro resultante es el producto de las transferencias de los filtros que la componen:

$$H(s) = H(s)_{LP} \cdot H(s)_{HP}$$

Para lograr construir el filtro pasabanda, necesitamos que la frecuencia  $w_{HP}$  del pasaaltos sea menor a la frecuencia  $w_{LP}$  del pasabajos. De esta forma habrá un rango de frecuencias que ambos filtros dejan pasar que conformaran el ancho de banda del pasabanda. Es por este motivo que asignaremos las siguientes frecuencias halladas en la sección 2.2.3:

$$w_{LP} = 50262,33 \frac{rad}{s} \quad w_{HP} = 314,19 \frac{rad}{s}$$

Los factores de calidad de estos filtros deben corresponderse, también, con los hallados en la sección 2.2.3:

$$Q_{LP} = 0,7 \quad Q_{HP} = 0,7$$

Observando el diagrama de Bode pudimos observar que para el rango de frecuencias en el ancho de banda del circuito, la ganancia en tensión era unitaria o de 0dB. Esto lo podemos lograr si los factores de ganancia en tensión de los filtros pasabajos y pasaaltos son unitarios:

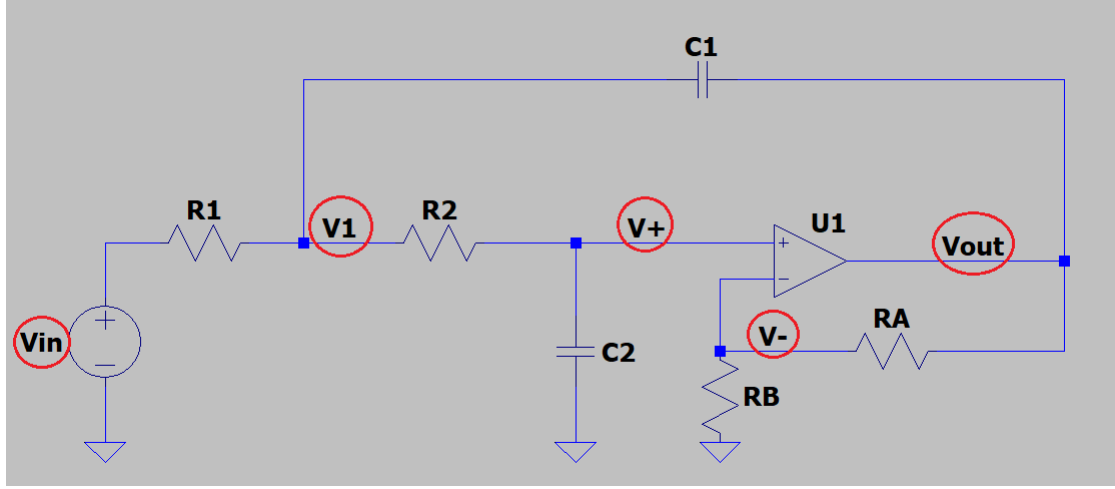
$$K_{LP} = 1 \quad K_{HP} = 1$$

Por ultimo debemos escoger los filtros pasabajos y pasaltos que usaremos para construir nuestro filtro pasabanda. Se eligieron los filtros pasaaltos y pasabajos de Sallen-Key expuestos en la siguiente sección.

## 3.2. Filtros de Sallen-Key

### 3.2.1. Filtro pasabajos de Sallen Key

El filtro pasabajos de Sallen-Key consta de cuatro resistores y dos capacitores dispuestos como indica la siguiente figura:



**Figura 17:** Filtro pasabajos de Sallen-Key

Realizaremos la deducción de la transferencia para este filtro a partir del método de nodos. Planteamos las ecuaciones de nodos para los nodos  $V_1$ ,  $V_+$  y  $V_-$  (Observación: reemplazamos  $V_{in}$  por 1 y buscamos  $V_{out}$ ):

- $V_1$  :  $0 = V_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1\right) - V_+\left(\frac{1}{R_2}\right) - 1\left(\frac{1}{R_1}\right) - V_{out}(sC_1)$
- $V_+$  :  $0 = V_+\left(\frac{1}{R_2} + sC_2\right) - V_1\left(\frac{1}{R_2}\right)$
- $V_-$  :  $0 = V_-\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}\right) - V_{out}\left(\frac{1}{R_A}\right)$

Buscaremos despejar de la ecuación de nodo de  $V_+$  a  $V_1$  y de la ecuación de nodo de  $V_-$  a  $V_-$ . Llamaremos  $V$  a  $V_- = V_+ = V$

- De la ecuación de  $V_+$ :  $V_1 = V(1 + sR_2C_2)$
- De la ecuación de  $V_-$ :  $V = V_{out}\left(\frac{R_B}{R_B + R_A}\right)$

Reescribiendo estas dos ecuaciones en función de  $V_{out}$  y reemplazando  $\frac{R_B}{R_B + R_A}$  por  $\frac{1}{k}$  (y por lo tanto  $k = 1 + \frac{R_A}{R_B}$ ) llegamos a las siguientes ecuaciones:

- $V_1 = V_{out}\frac{1}{k}(1 + sR_2C_2)$
- $V = V_{out}\frac{1}{k}$

Multiplicamos la ecuación de nodo correspondiente a  $V_1$  por  $R_1R_2$  y luego reemplazamos por las expresiones halladas anteriormente para  $V$  y  $V_1$  en función de  $V_{out}$

- ec  $V_1 \cdot R_1R_2$  :  $0 = V_1(R_2 + R_1 + R_1R_2C_1s) - V(R_1) - R_2 - V_{out}(sC_1R_1R_2)$
- $0 = V_{out}\frac{1}{k}(1 + sR_2C_2)(R_2 + R_1 + R_1R_2C_1s) - V_{out}\frac{1}{k}(R_1) - R_2 - V_{out}(sC_1R_1R_2)$
- $R_2 = V_{out}\left(\frac{1}{k}(1 + R_2C_2s)(R_2 + R_1 + R_1R_2C_1s) - R_1\right) - sC_1R_1R_2$

- $R_2 = V_{out}(\frac{1}{k}(R_2 + R_1 R_2 C_1 s + R_2^2 C_2 s + R_1 R_2 C_2 s + R_2^2 R_1 C_1 C_2 s^2) - s C_1 R_1 R_2)$
- $k = V_{out}(1 + R_1 C_1 s + R_2 C_2 s + R_1 C_2 s + R_2 R_1 C_1 C_2 s^2 - k s C_1 R_1)$
- $k = V_{out}(1 + s(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 - k R_1 C_1) + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2)$
- $k = V_{out}(1 + s[R_1 C_1(1 - k) + (R_2 + R_1)C_2] + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2)$
- $V_{out} = \frac{k(\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2})}{s^2 + s(\frac{1-k}{R_2 C_2} + \frac{1}{(R_1 // R_2) C_1}) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$

De manera que la transferencia para el filtro pasabajos de Sallen-Key resulta:

$$H(s) = \frac{k(\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2})}{s^2 + s(\frac{1-k}{R_2 C_2} + \frac{1}{(R_1 // R_2) C_1}) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Donde podemos observar que:

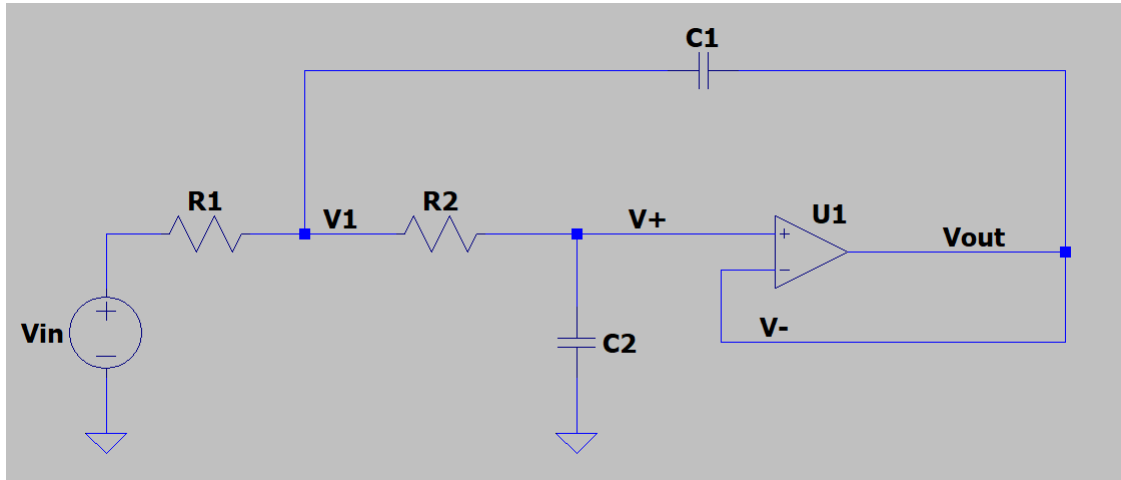
- $w_{LP}^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}$
- $k_{LP} = 1 + \frac{R_A}{R_B}$

Observamos que para el caso en que el factor de ganancia del filtro sea  $K_{LP} = 1$  se cumple que:

$$H(s)_{LP} = \frac{(\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2})}{s^2 + s(\frac{1}{(R_1 // R_2) C_1}) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$1 = 1 + \frac{R_A}{R_B} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = 0 \Rightarrow R_A = 0$$

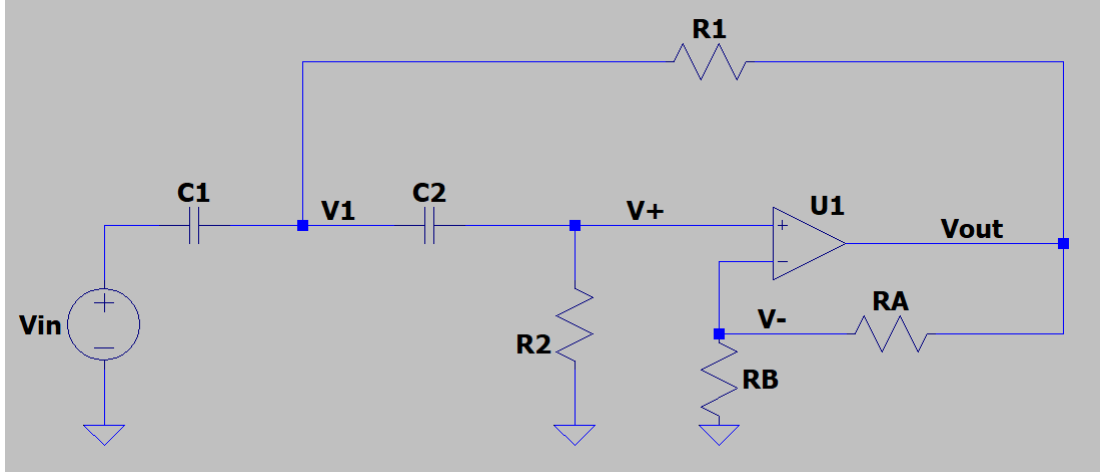
Observamos también que de esta manera el valor de  $R_B$  deja de ser relevante y por lo tanto podremos removerlo del circuito. En la siguiente figura mostramos una forma general del circuito pasabajos de Sallen-Key de ganancia unitaria que utilizaremos para el diseño de nuestro filtro pasabanda:



**Figura 18:** Filtro pasabajos de Sallen-Key de ganancia unitaria

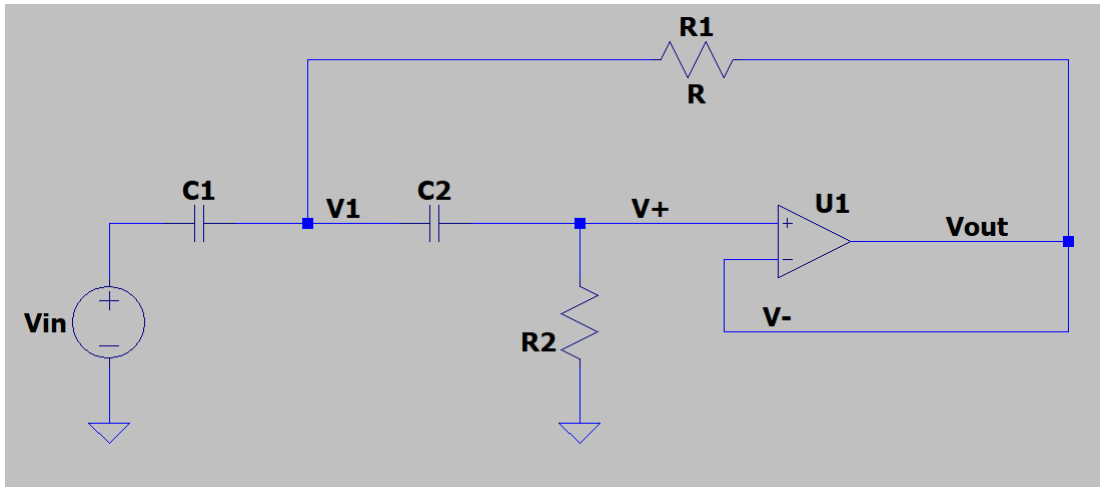
### 3.2.2. Filtro pasaaltos de Sallen-Key

El filtro pasaaltos de Sallen-Key es similar al filtro pasabajos. La diferencia entre estos filtros es que se intercambian las posiciones de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  por las de los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente obteniendo el siguiente circuito:



**Figura 19:** Filtro pasaaltos de Sallen-Key

En particular, nos interesa estudiar el caso para el que la ganancia es unitaria:



**Figura 20:** Filtro pasaaltos de Sallen-Key de ganancia unitaria

Podemos obtener la transferencia de esta filtro a partir de la transferencia del filtro pasabajos de Sallen-Key de ganancia unitaria. Debemos reemplazar las admitancias de  $R_1$  y  $R_2$  por las de  $C_1$  y  $C_2$  y viceversa, es decir:

- $\frac{1}{R_1} = sC_1 \Rightarrow R_1 = \frac{1}{sC_1}$
- $\frac{1}{R_2} = sC_2 \Rightarrow R_2 = \frac{1}{sC_2}$
- $sC_1 = \frac{1}{R_1} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{sR_1}$
- $sC_2 = \frac{1}{R_2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{sR_2}$

Realizando estos cambios en la transferencia del pasabajos obtenemos:

$$H(s)_{HP} = \frac{s^4 C_1 C_2 R_1 R_2}{s^2 + s^3 (C_1 + C_2) R_1 + s^4 C_1 C_2 R_1 R_2}$$

Y simplificando esta expresión hallamos la transferencia del filtro pasaaltos de Sallen-Key de ganancia unitaria que utilizaremos en nuestro diseño:

$$H(s)_{HP} = \frac{s^2}{s^2 + s \frac{1}{R_2(C_1 // C_2)} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

### 3.2.3. Justificación de la elección de los filtros de Sallen-Key

El motivo por el cual se escogieron los filtros de ganancia unitaria de Sallen-Key es que utilizan una cantidad razonable de resistores y capacitores (dos de cada uno) logrando armar un filtro resultante con pocos recursos. Además particularmente en el caso del filtro pasaaltos, escogiendo los valores deseados para  $w_0$ ,  $Q$  y los capacitores, los valores de las resistencias quedan completamente determinados por lo que el diseño del filtro se vuelve simple.

## 3.3. Valores normalizados de los componentes

Una vez definidos los filtros pasaaltos y pasabajos que utilizaremos y sus transferencias, debemos escoger los valores normalizados de resistencias y capacitores que nos permitan filtrar las frecuencias deseadas.

Se definieron primero los valores de los capacitores y luego los de los resistores. Se utilizaron valores normalizados de la serie del 10 % tanto para los capacitores como para los resistores. Además los valores de los capacitores se encuentran en el rango [1nF, 1µF] y los resistores en el rango [1kΩ, 1MΩ].

### 3.3.1. Valores normalizados del filtro pasaaltos

Debemos diseñar un filtro pasaaltos de Sallen-Key de ganancia unitaria que cumpla:

$$w_0 = 314,19 \frac{rad}{s} \quad Q = 0,7$$

Recordando que la transferencia para el filtro era:

$$H(s)_{HP} = \frac{s^2}{s^2 + s \frac{1}{R_2(C_1 // C_2)} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Observamos que:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad w_0^2 &= \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \\ \text{(b)} \quad \frac{w_0}{Q} &= \frac{1}{R_2(C_1 // C_2)} \end{aligned}$$

Despejando  $R_2$  de la ecuación (b) y  $R_1$  de la ecuación (a) obtenemos:

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{Q}{w_0 \cdot (C_1 // C_2)} \\ R_1 &= \frac{1}{w_0 \cdot Q \cdot (C_1 + C_2)} \end{aligned}$$

Por lo que logramos escribir a los resistores en función de los capacitores, de  $w_0$  y de  $Q$ . Esto nos da libertad para escoger los valores de  $C_1$  y  $C_2$  de manera independiente hasta lograr que los valores de  $R_1$  y  $R_2$  se encuentren en la serie del 10 %. Escogiendo  $C_2 = 12\text{nF}$  y  $C_1 = 68\text{nF}$  obtuvimos los siguientes valores para  $R_1$  y  $R_2$ :

$$R_1 = 56,835\text{k}\Omega \quad R_2 = 218,43\text{k}\Omega$$

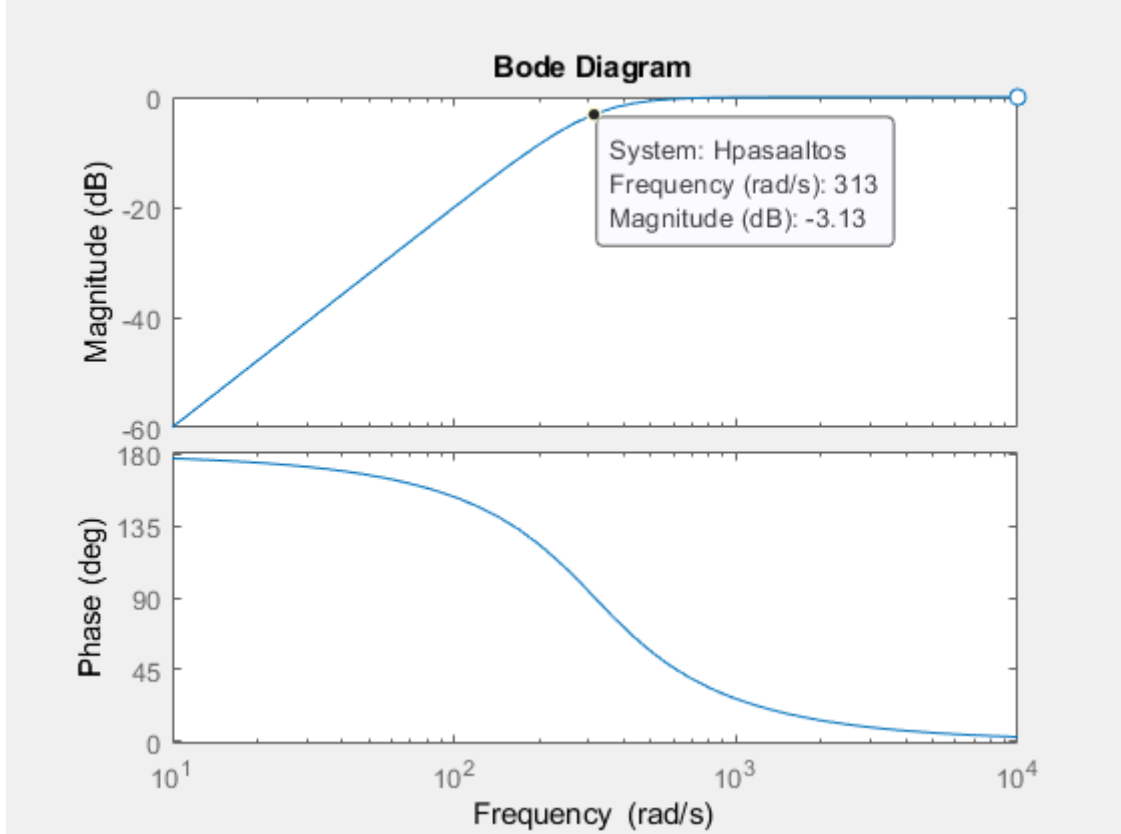
Que aproximaremos a los siguientes valores normalizados:

$$R_1 = 56k\Omega \quad R_2 = 220k\Omega$$

De manera que la transferencia para el filtro pasaaltos resulta:

$$H(s)_{HP} = \frac{s^2}{s^2 + s \cdot 448,83 + 99461,4}$$

Mostramos el diagrama de Bode para este filtro. Observamos que logramos que a frecuencia  $w_0 = 314 \frac{rad}{s}$  la ganancia en magnitud sea de aproximadamente -3dB como deseábamos.



**Figura 21:** Diagrama de Bode - Pasaaltos de Sallen-Key

### 3.3.2. Valores normalizados filtro pasabajos

Para el filtro pasabajos debíamos diseñarlo de manera que tenga ganancia unitaria y:

$$w_0 = 50262,33 \frac{rad}{s} \quad Q = 0,7$$

Recordemos que la función de transferencia para el filtro pasabajo de ganancia unitaria de Sallen-Key era:

$$H(s)_{LP} = \frac{\left(\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}\right)}{s^2 + s \left(\frac{1}{(R_1 // R_2) C_1} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}\right)}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad w_0^2 &= \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \\ \text{(b)} \quad \frac{w_0}{Q} &= \frac{1}{C_1 (R_1 // R_2)} \end{aligned}$$

Despejando  $R_1 // R_2$  de la ecuación (b) y  $C_2$  de la primera ecuación:

$$R_1//R_2 = \frac{Q}{w_0 C_1} \quad C_2 = \frac{1}{w_0^2 R_1 R_2 C_1}$$

Lo primero que hacemos es elegir  $C_1$  arbitrariamente:

$$C_1 = 4,7nF$$

Esto determina que  $R_1//R_2$  debe ser:

$$R_1//R_2 = 2,9632k\Omega$$

De manera que resta seleccionar  $R_1$  y  $R_2$  de manera de cumplir lo anterior y que el capacitor  $C_2$  sea aproximadamente un valor normalizado. Se escogieron:

$$R_1 = 4,7k\Omega \quad R_2 = 8,2k\Omega \Rightarrow R_1//R_2 = 2,9876k\Omega \text{ y } C_2 = 2,1853nF$$

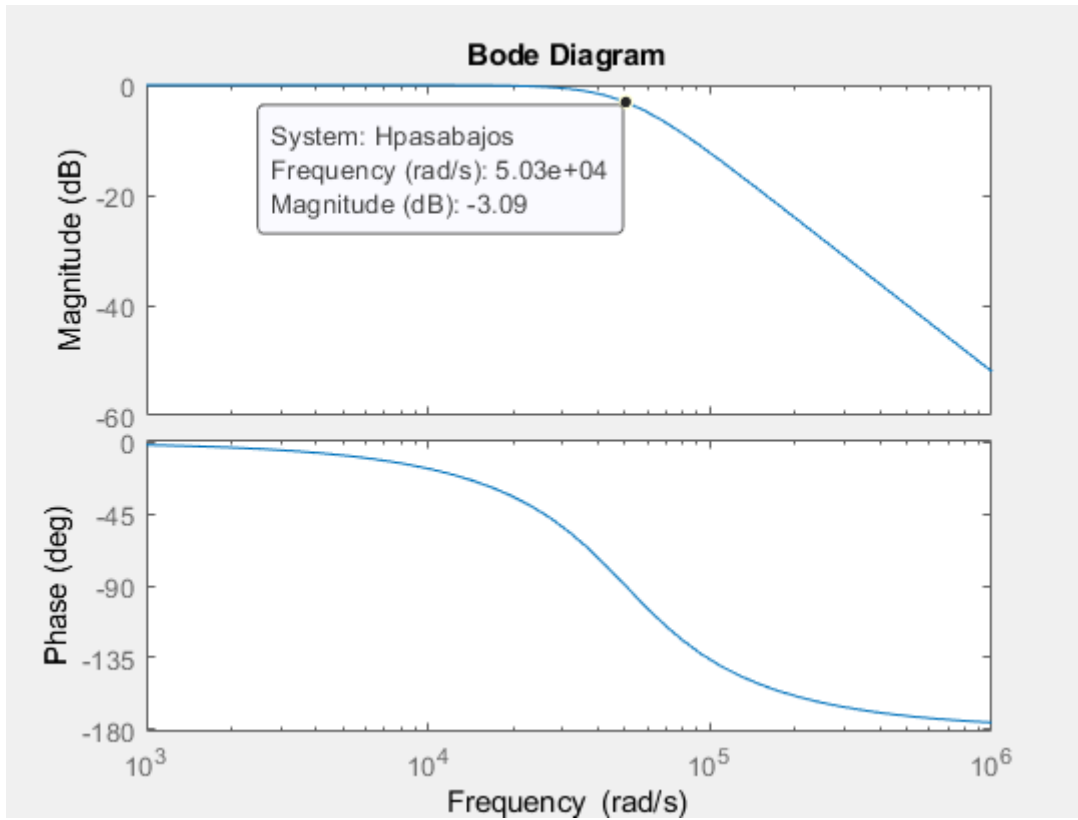
Por lo que escogemos un  $C_2$  de:

$$C_2 = 2,2nF$$

Con estos valores la transferencia del pasabajo resulta:

$$H(s)_{LP} = \frac{2,51 \cdot 10^9}{s^2 + 7,12 \cdot 10^4 s + 2,51 \cdot 10^9}$$

Mostramos el diagrama de Bode para este filtro. Podemos ver que para frecuencia aproximadamente  $50262,33 \frac{rad}{s}$  la ganancia es de -3dB como deseábamos:



**Figura 22:** Diagrama de Bode - Pasabajos de Sallen-Key



### 3.4. Análisis del filtro diseñado

Como dijimos para construir el pasabanda debemos poner los filtros pasaalto y pasabajos conseguidos anteriormente en cascada resultando:

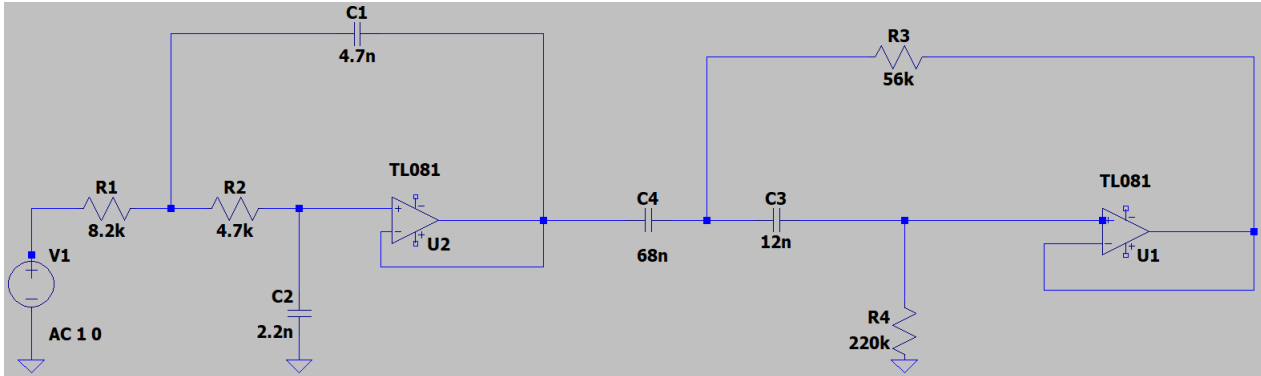


Figura 23: Filtro pasabanda de cuarto orden diseñado

#### 3.4.1. Transferencia

Su función de transferencia la conseguimos multiplicando  $H(s)_{LP} \cdot H(s)_{HP}$ :

$$H(s) = \frac{2,51 \cdot 10^9 s^2}{s^4 + 7,165 \cdot 10^4 s^3 + 2,542 \cdot 10^9 s^2 + 1,134 \cdot 10^{12} s + 2,496 \cdot 10^{14}}$$

La cual es muy similar a la ideal:

$$H(s) = \frac{s^2 \cdot 2,527 \cdot 10^9}{s^4 + s^3 \cdot 7,153 \cdot 10^4 + s^2 \cdot 2,558 \cdot 10^9 + s \cdot 1,13 \cdot 10^{12} + 2,494 \cdot 10^{14}}$$

#### 3.4.2. Parámetros del filtro

Mostramos los valores de las frecuencias  $w_a$  y  $w_b$  ideales y obtenidos. Lo mismo para los valores de  $Q_a$  y  $Q_b$ :

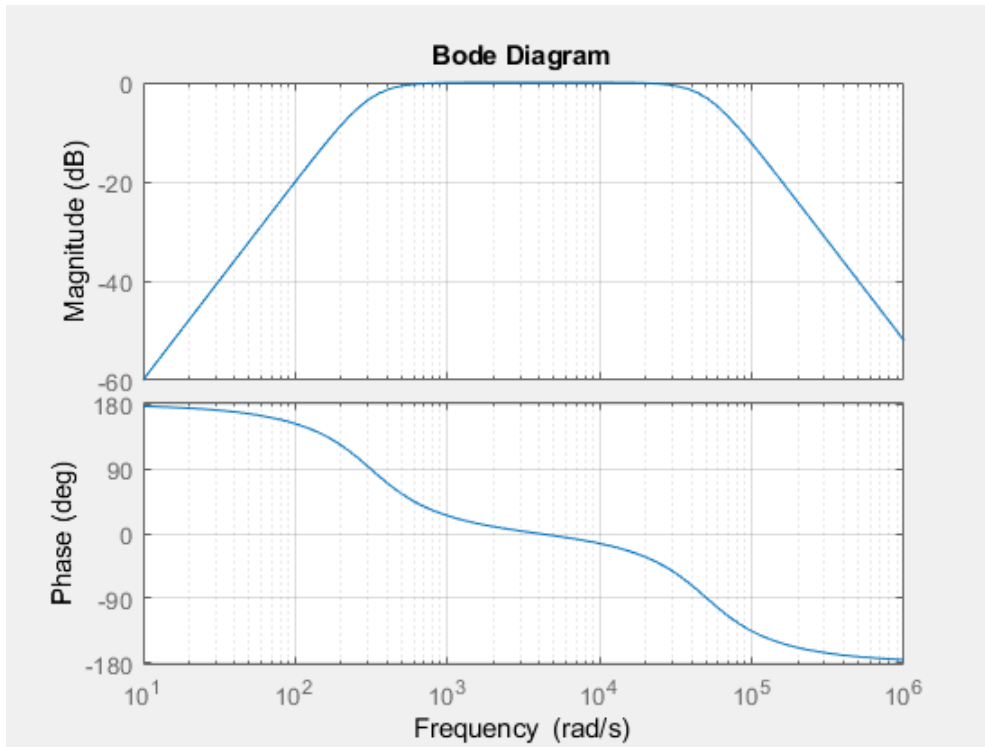
Parametro	Ideal	Obtenido	Error
$w_a$	50262.33	50093.78	0.33 %
$w_b$	314.19	315.39	0.2 %
$Q_a$	0.70	0.703	0.42 %
$Q_b$	0.70	0.704	0.57 %

Las diferencias se deben a que el filtro diseñado está construido a partir de valores normalizados de resistencias y capacitores por lo que no podemos construir un filtro que sea exactamente igual al dado.

Sin embargo las siguientes simulaciones nos muestran que el filtro diseñado con valores normalizados comparte las mismas características que el ideal.

### 3.4.3. Diagrama de Bode

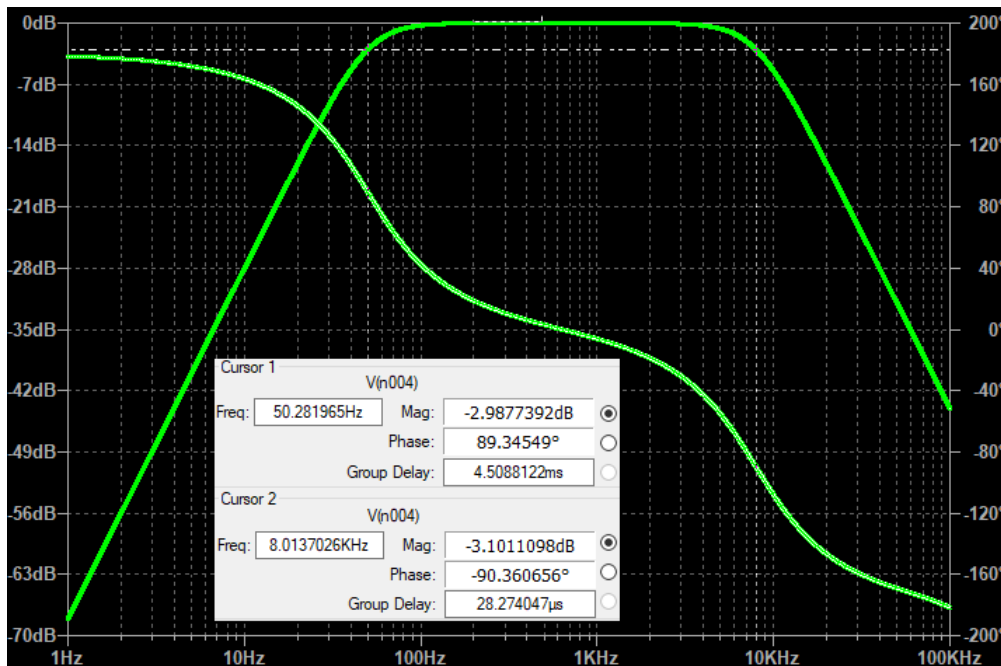
Mostramos el diagrama de Bode obtenido en Matlab para esta transferencia:



**Figura 24:** Diagrama de bode del filtro pasabanda de cuarto orden diseñado

El cual es muy similar al obtenido en la sección 2.3

Además se muestra la respuesta en frecuencia obtenida para el filtro diseñado en LTSpice:

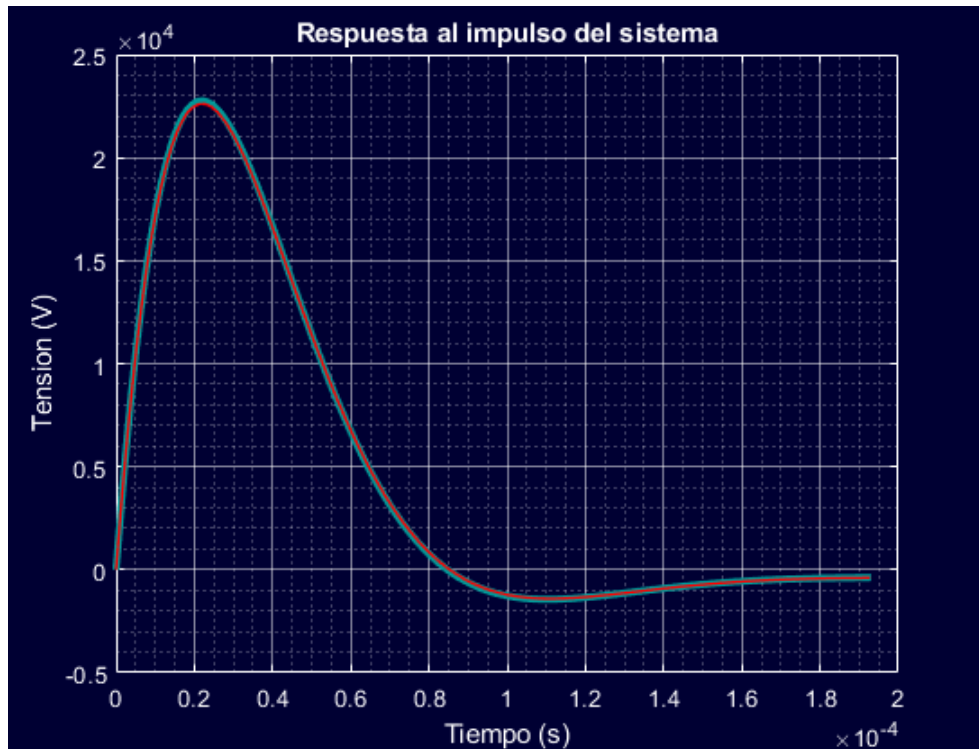


**Figura 25:** Diagrama de Bode del filtro pasabanda de cuarto orden diseñado obtenida en LTSpice

Hay que observar que LTSpice muestra el eje de frecuencias en  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  [Hz] mientras que Matlab lo muestra en  $\omega$  [ $\frac{rad}{s}$ ]. Es por este motivo que los -3dB de ganancia se encuentran en las frecuencias indicadas en el gráfico:  $f = 50\text{Hz}$  ( $314 \frac{rad}{s}$ ) y  $f = 8000\text{Hz}$  ( $50265 \frac{rad}{s}$ )

### 3.4.4. Respuesta al impulso

Mostramos en rojo la respuesta al impulso obtenida para el filtro diseñado y en turquesa la respuesta al impulso obtenida en la sección 2.5



**Figura 26:** Respuesta al impulso del filtro diseñado en rojo, respuesta al impulso hallada en la sección 2.5 en turquesa

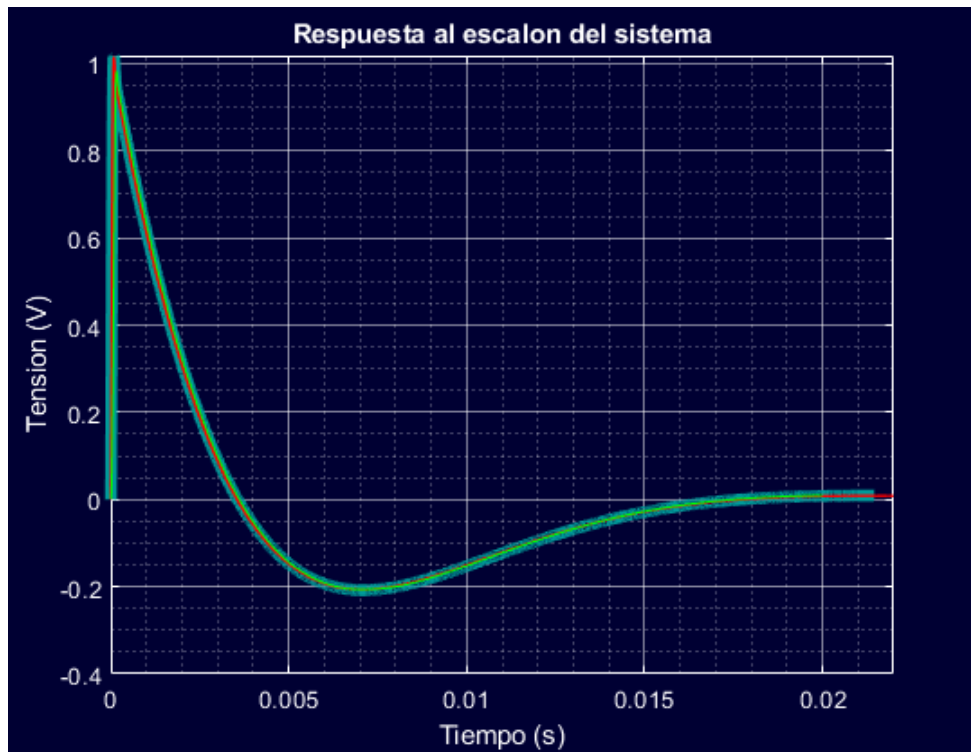
Podemos ver -tanto para esta respuesta como para las que siguen- que la respuesta del filtro diseñado se superpone con la respuesta que otorga Matlab con su función `impz()` y que fue analizada en la sección 2.5.

Esto nos indica que a pesar de que el filtro diseñado no tiene exactamente la misma transferencia que la dada (porque fue construido con resistencias y capacitores a valores normalizados), son lo suficientemente similares como para tener las mismas respuestas.

Procederemos a mostrar las respuestas a las mismas señales obtenidas en las secciones anteriores y a compararlas con la otorgada por Matlab para la transferencia ideal y con la otorgada por Spice

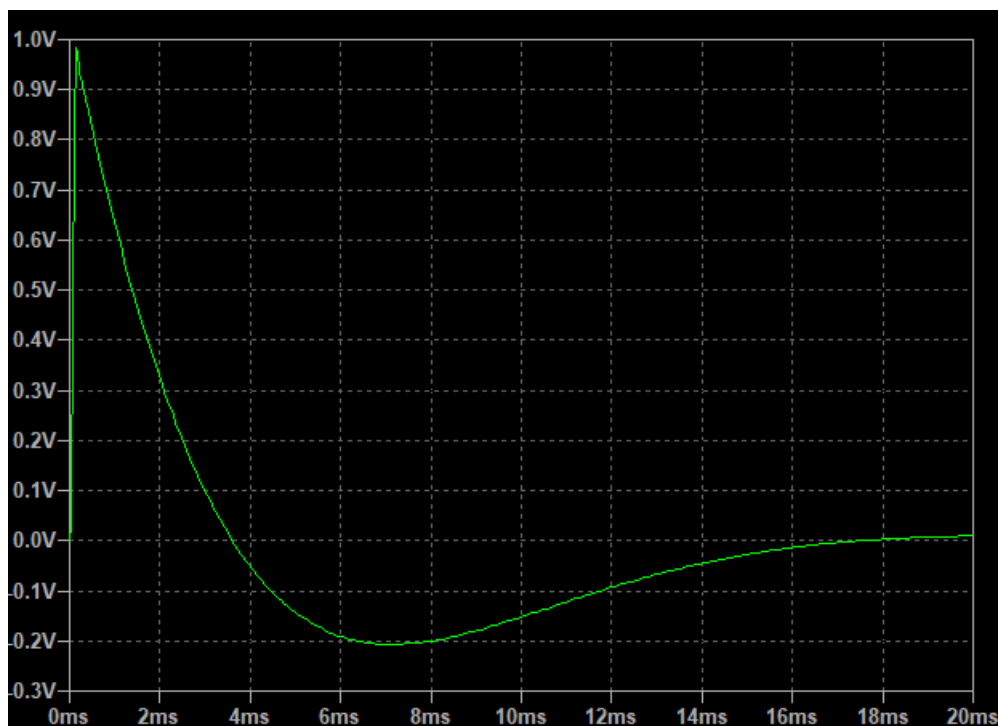
### 3.4.5. Respuesta al escalón

Se muestra la respuesta al escalón hallada en la sección 2.4 en turquesa y la respuesta al escalón hallada para el filtro diseñado en rojo:



**Figura 27:** Respuesta al escalón del filtro diseñado en rojo, respuesta al escalón hallada en la sección 2.4 en turquesa, respuesta de LTSpice en verde

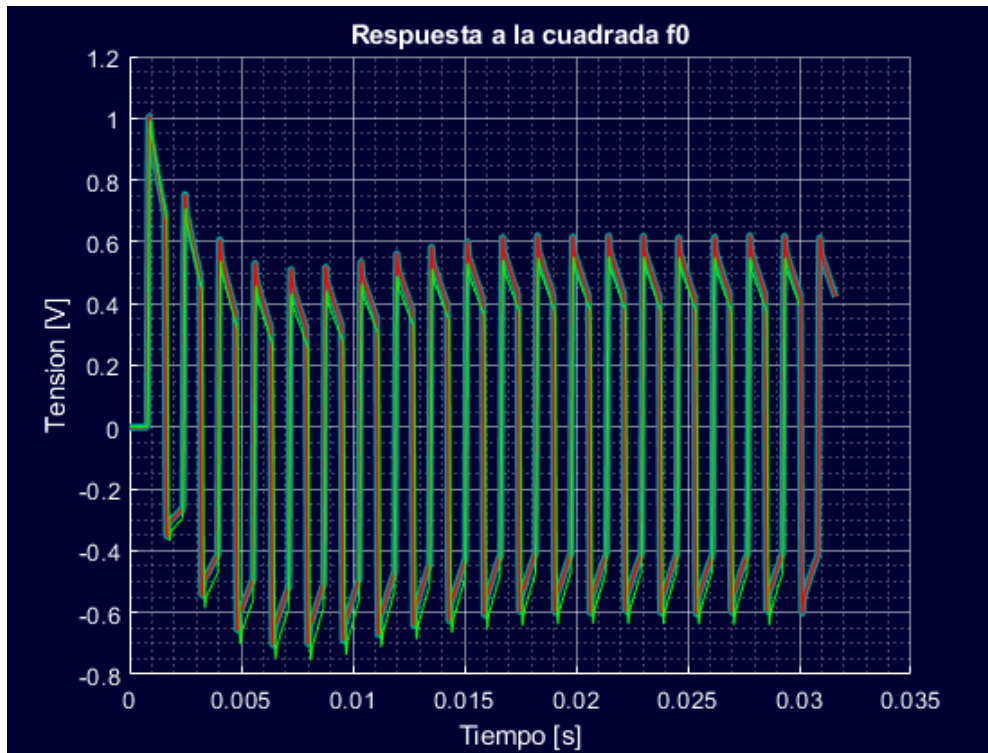
Se muestra ahora la respuesta al escalón para el filtro diseñado en LTSpice:



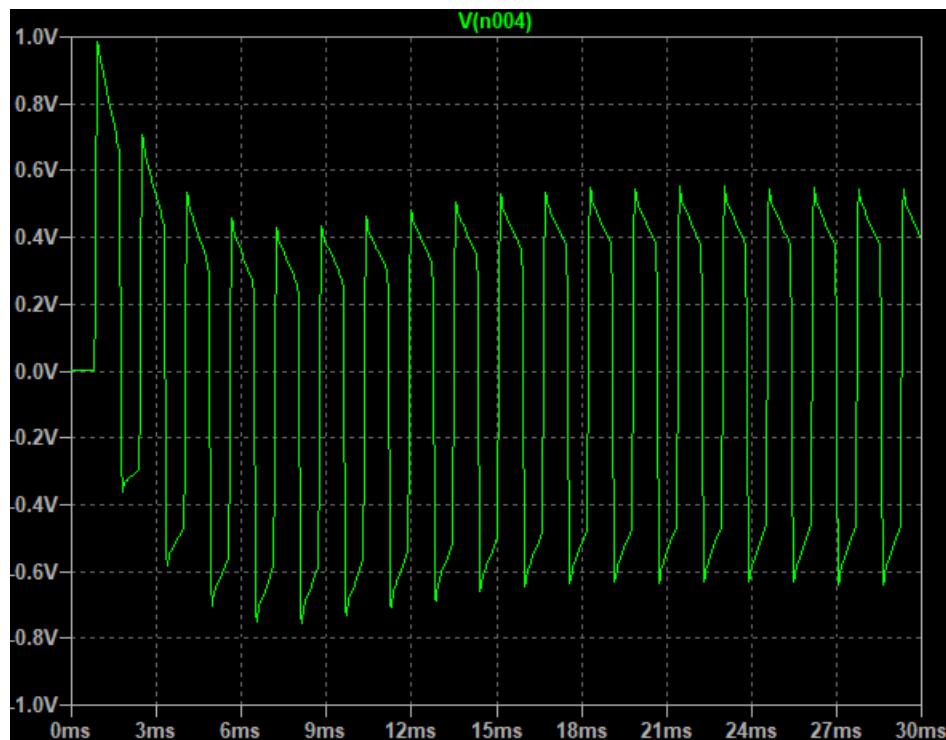
**Figura 28:** Respuesta al escalón en LTSpice del filtro diseñado

### 3.4.6. Respuesta a señales cuadradas

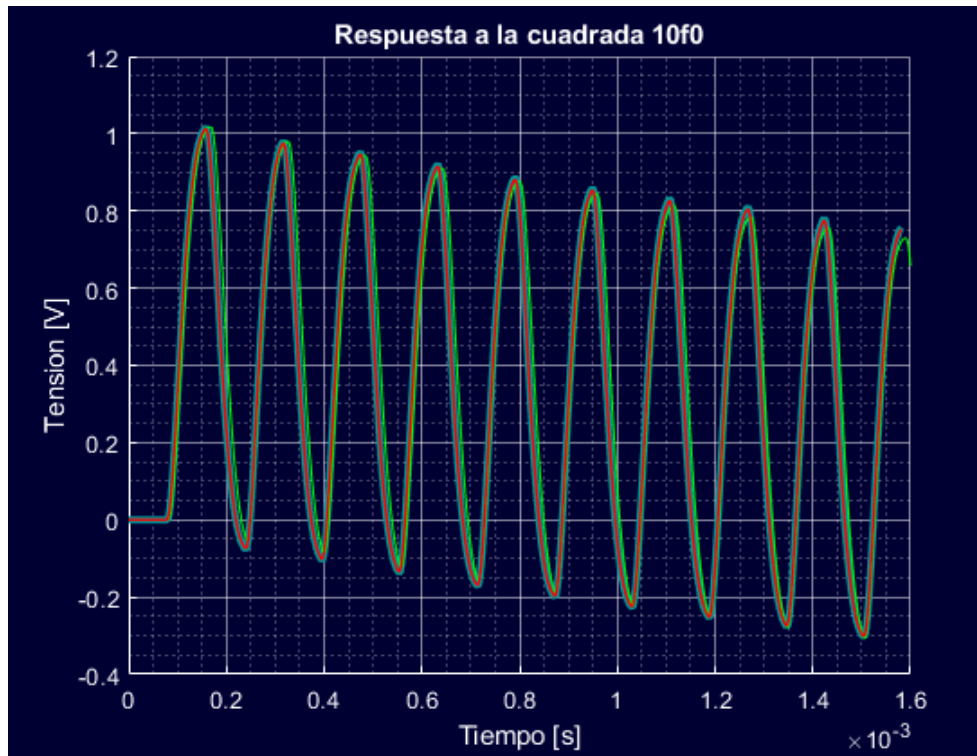
Se muestran comparaciones entre las respuestas halladas en la sección 2.7 y las respuesta del filtro diseñado. Además se muestra la respuesta que genera LTSpice:



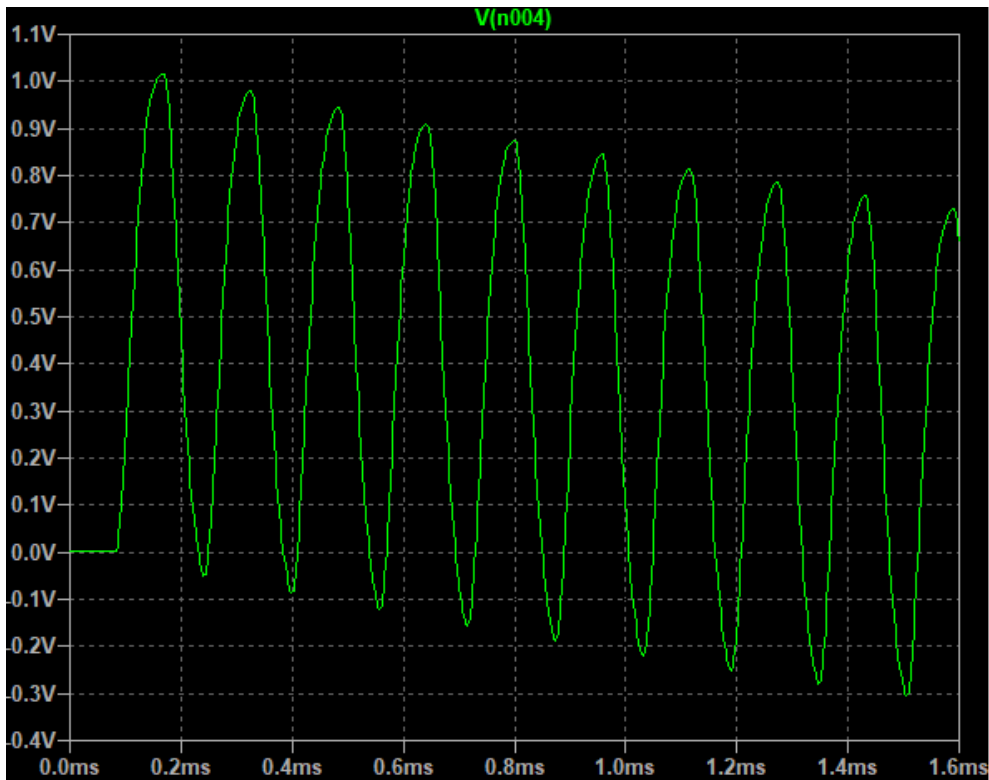
**Figura 29:** Respuesta a la cuadrada de  $f_0 = 632,47Hz$  del filtro diseñado en rojo, respuesta a la cuadrada hallada en la sección 2.7 en turquesa, respuesta de LTSpice en verde



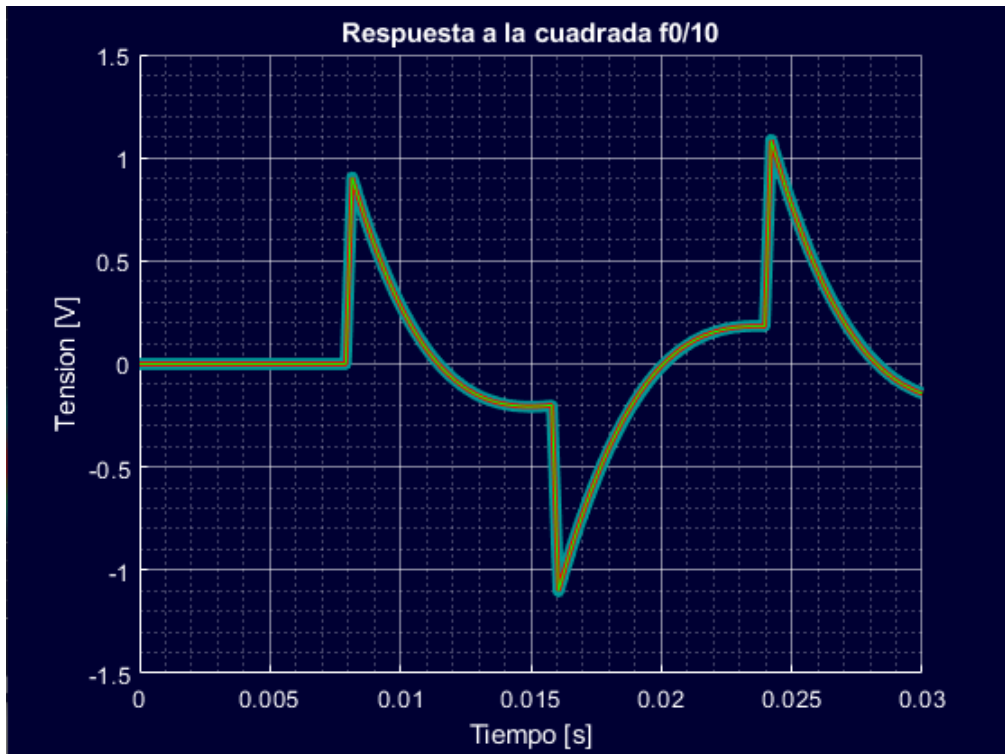
**Figura 30:** Respuesta a la cuadrada de  $f_0 = 632,47Hz$  en LTSpice del filtro diseñado



**Figura 31:** Respuesta a la cuadrada de  $10f_0 = 6324,7Hz$  del filtro diseñado en rojo, respuesta a la cuadrada hallada en la sección 2.7 en turquesa, respuesta de LTSpice en verde



**Figura 32:** Respuesta a la de  $10f_0 = 6324,7Hz$  cuadrada en LTSpice del filtro diseñado



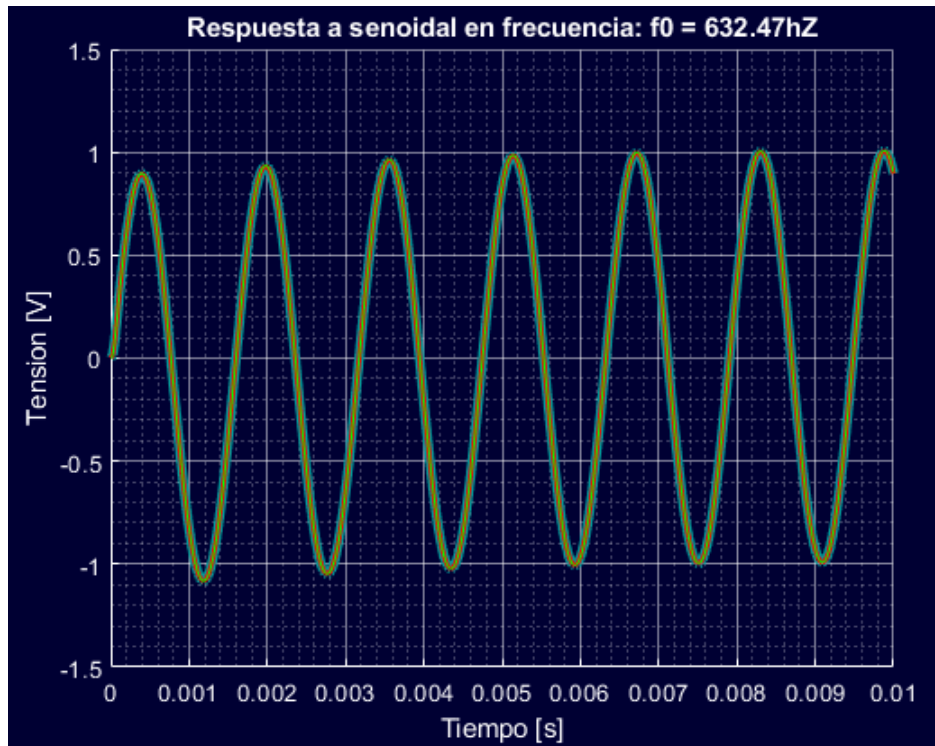
**Figura 33:** Respuesta a la cuadrada de  $\frac{f_0}{10} = 63,247Hz$  del filtro diseñado en rojo, respuesta a la cuadrada hallada en la sección 2.7 en turquesa, respuesta de LTSpice en verde



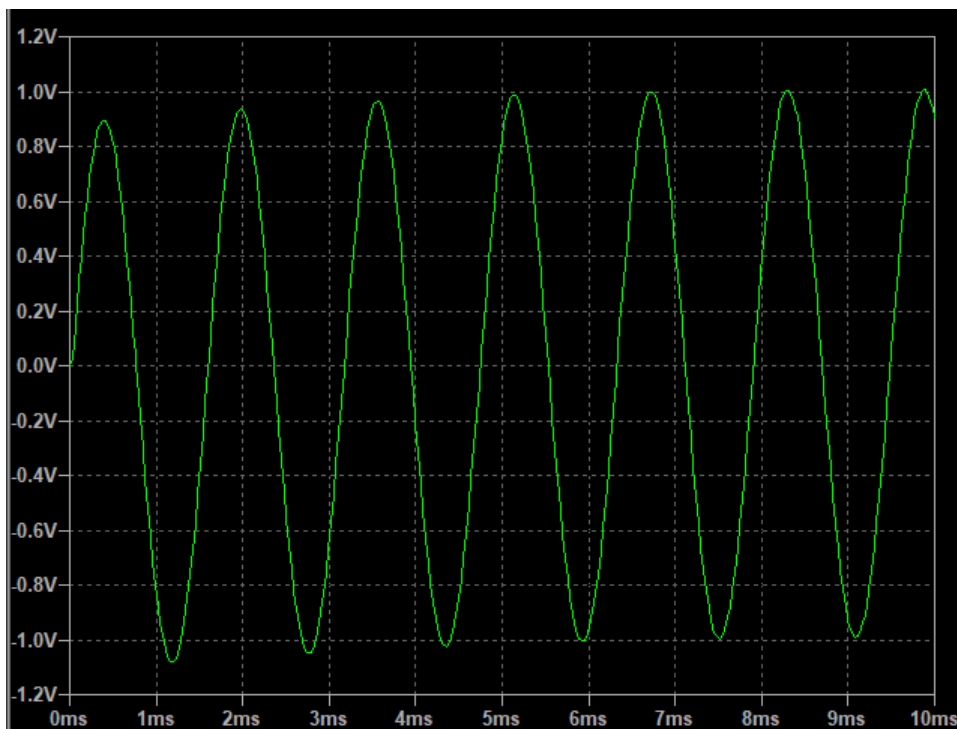
**Figura 34:** Respuesta a la cuadrada de  $\frac{f_0}{10} = 63,247Hz$  en LTSpice del filtro diseñado

### 3.4.7. Respuesta a señales senoidales

Se muestran comparaciones entre las respuestas a señales senoidales halladas en la sección 2.8 y las respuestas del filtro diseñado. Además se muestra la respuesta que genera LTSpice:

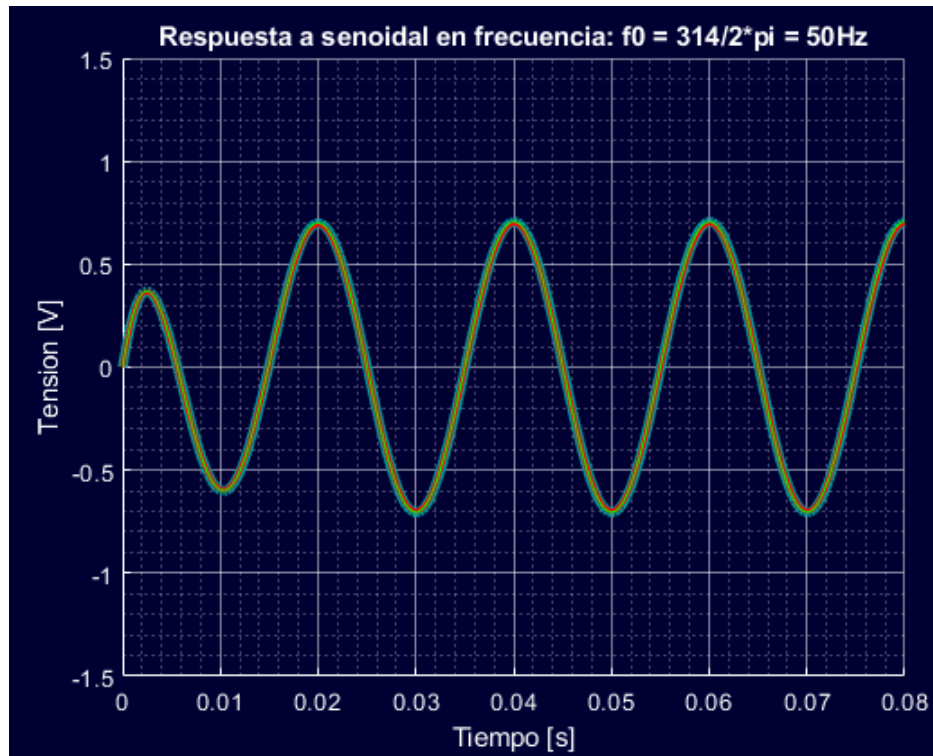


**Figura 35:** Respuesta a la senoidal de  $f_0 = 632,47Hz$  del filtro diseñado en rojo, respuesta a la cuadrada hallada en la sección 2.7 en turquesa, respuesta de LTSpice en verde

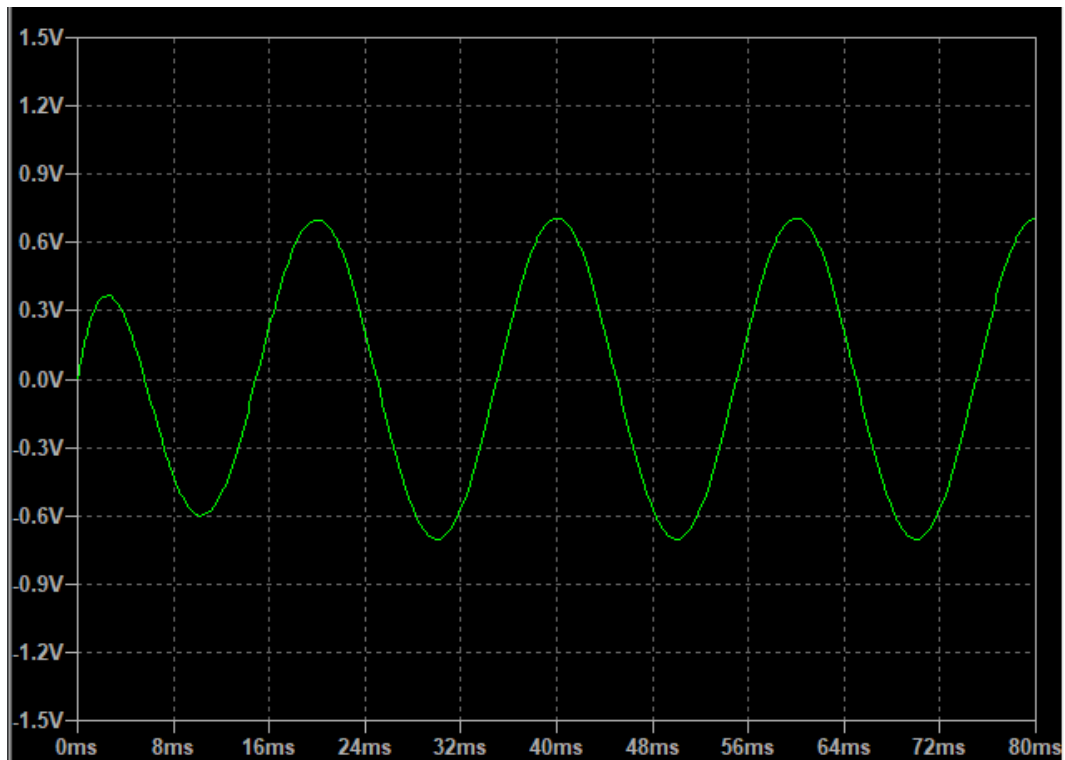


**Figura 36:** Respuesta a la senoidal de  $f_0 = 632,47Hz$  en LTSpice del filtro diseñado

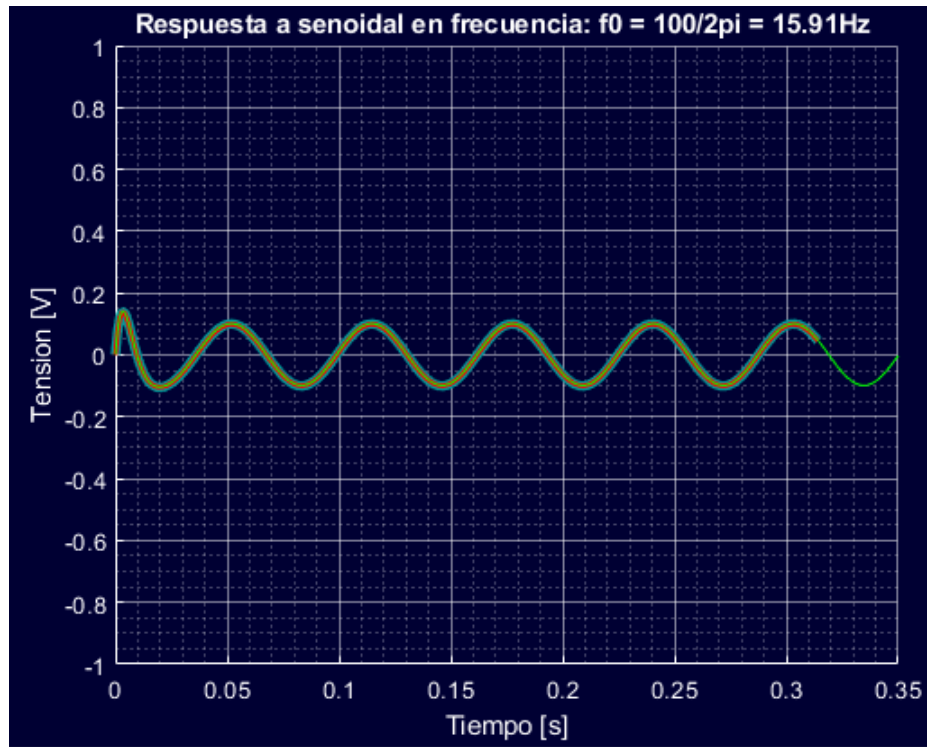




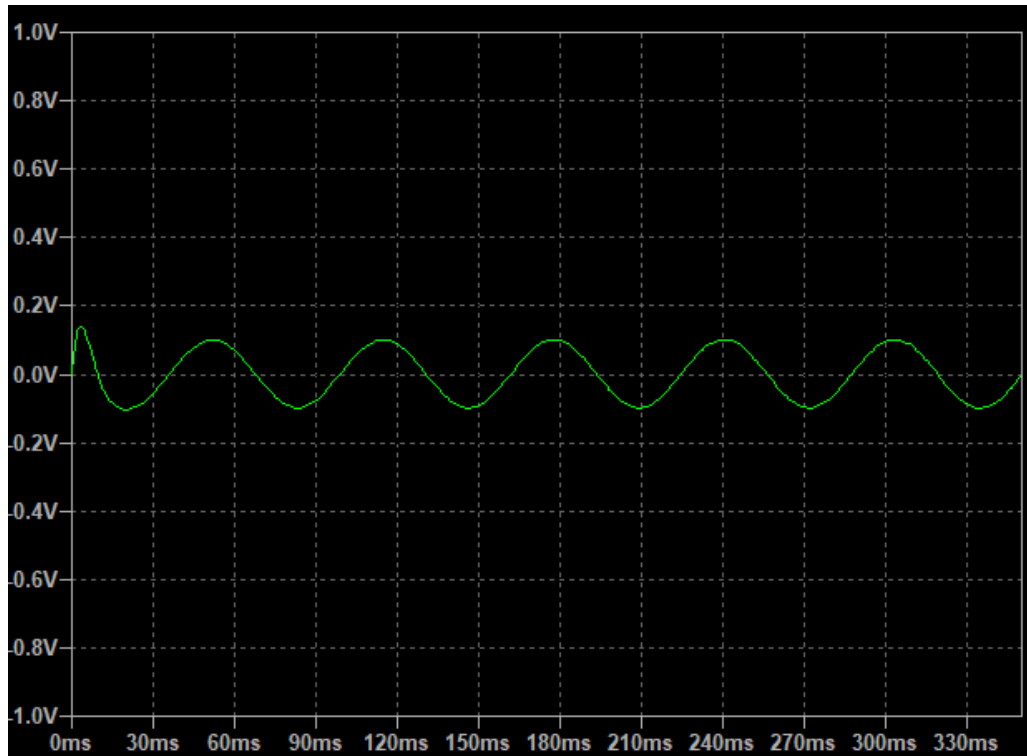
**Figura 37:** Respuesta a la senoidal de  $f = 50Hz$  del filtro diseñado en rojo, respuesta a la cuadrada hallada en la sección 2.7 en turquesa, respuesta de LTSpice en verde



**Figura 38:** Respuesta a la senoidal de  $f = 50Hz$  cuadrada en LTSpice del filtro diseñado



**Figura 39:** Respuesta a la senoidal de  $f = 15Hz$  del filtro diseñado en rojo, respuesta a la cuadrada hallada en la sección 2.7 en turquesa, respuesta de LTSpice en verde



**Figura 40:** Respuesta a la cuadrada de  $f = 15Hz$  en LTSpice del filtro diseñado

## 4. Cálculo analítico de las respuestas

En esta sección se deucirán las respuestas al impulso, al escalón y a la señal senoidal de 50Hz de manera analítica.

A partir de la transferencia es posible obtener la respuesta en el campo de frecuencias complejas  $V_{out}(s)$ :

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$$
$$V_{out}(s) = H(s) \cdot V_{in}(s)$$

Por lo tanto, conociendo la transformada inversa de Laplace del producto de la tensión de entrada  $V_{in}(s)$  con la transferencia  $H(s)$  podemos encontrar la respuesta temporal  $V_{out}(t)$  a una tensión de entrada  $V_{in}(t)$ . Es decir:

$$V_{out}(t) = L^{-1}[V_{out}(s)] = L^{-1}[H(s) \cdot V_{in}(s)]$$

### 4.1. Respuesta al impulso

Para hallar la respuesta al impulso o a la delta debemos identificar  $V_{in}(t)$  y  $V_{in}(s)$ :

$$V_{in}(t) = \delta(t) \Rightarrow V_{in}(s) = 1$$

Por lo tanto para hallar la respuesta al impulso debemos antitransformar la transferencia  $H(s)$  pues:

$$V_{out}(t) = L^{-1}[H(s) \cdot V_{in}(s)] = L^{-1}[H(s)]$$

Con este propósito, factorizamos el denominador de la transferencia en dos polinomios a coeficientes reales de segundo grado obteniendo:

$$H(s) = \frac{s^2 \cdot 2,527 \cdot 10^9}{(s^2 + s \cdot 444,5 + 98714,54)(s^2 + s \cdot 7,11 \cdot 10^4 + 2,53 \cdot 10^9)}$$

Procedemos a buscar una descomposición en fracciones simples del tipo:

$$H(s) = \frac{As+B}{(s^2+s \cdot 444,5+98714,54)} + \frac{Cs+D}{(s^2+s \cdot 7,11 \cdot 10^4+2,53 \cdot 10^9)}$$

Donde las constantes A, B, C y D deben ser tal que:

$$(As + B)(s^2 + s \cdot 7,11 \cdot 10^4 + 2,53 \cdot 10^9) + (Cs + D)(s^2 + s \cdot 444,5 + 98714,54) = s^2 \cdot 2,527 \cdot 10^9$$

Utilizando la notación eN para expresar  $10^N$  podemos reescribir el miembro izquierdo como:

$$(A+C)s^3 + (A7,11e4 + B + C444,5 + D)s^2 + (A2,53e9 + B7,11e4 + C98714,54 + D444,5)s + (B2,53e9 + D98714,54)$$

Por lo que restar resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales para hallar las constantes A,B,C y D:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A7,11e4 + B + C444,5 + D &= 2,527e9 \\ A2,53e9 + B7,11e4 + C98714,54 + D444,5 &= 0 \\ B2,53e9 + D98714,54 &= 0 \end{aligned}$$

Con resultados:

$$A = -447,8 \quad B = -9,984 \cdot 10^4 \quad C = 447,8 \quad D = 2,559 \cdot 10^9$$

Es decir que es posible reescribir la transferencia como:

$$H(s) = -\frac{447,8s+9,984 \cdot 10^4}{s^2+s \cdot 444,5+98714,54} + \frac{447,8s+2,559 \cdot 10^9}{s^2+s \cdot 7,11 \cdot 10^4+2,53 \cdot 10^9}$$

Completando cuadrados en los denominadores y distribuyendo las fracciones:

$$H(s) = -\frac{447,8(s+222,2-222,2)+9,984 \cdot 10^4}{(s+222,2)^2+(222,1)^2} + \frac{447,8(s+35550-35550)+2,559 \cdot 10^9}{(s+35550)^2+(35583,67)^2}$$

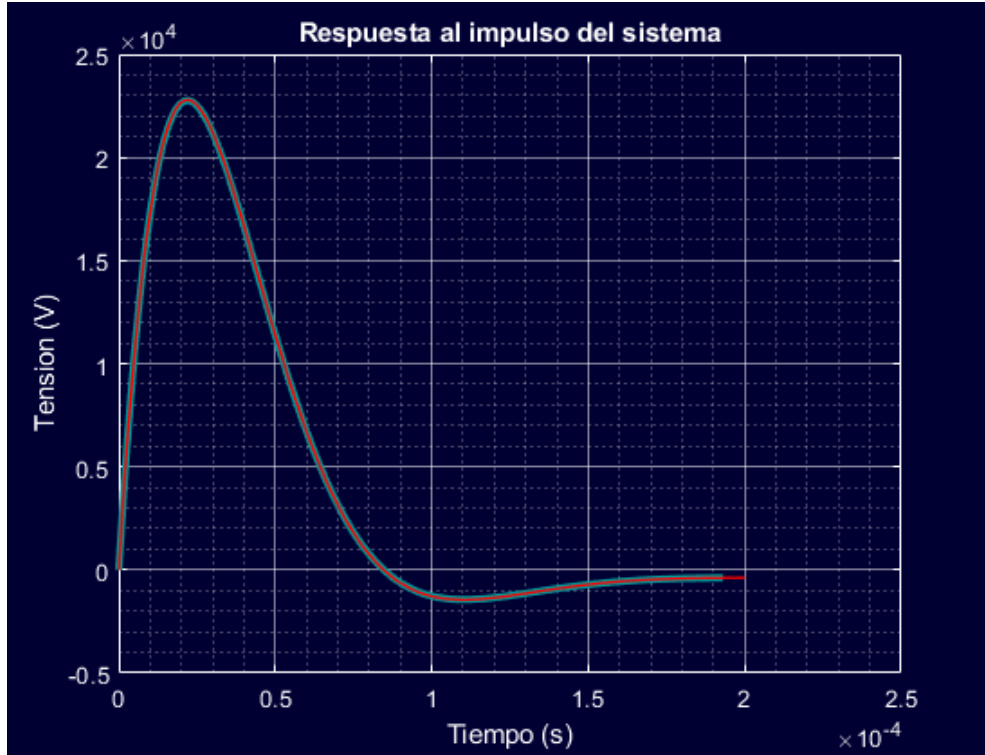
$$H(s) = -447,8 \frac{s+222,2}{(s+222,2)^2+(222,1)^2} - 1,52 \frac{222,1}{(s+222,2)^2+(222,1)^2} + 447,8s \frac{s+35550}{(s+35550)^2+(35583,67)^2} + \frac{71467,63}{(s+35550)^2+(35583,67)^2}$$

De esta manera es sencillo encontrar su antitransformada:

$$-e^{-222,2t}(447,8\cos(222,1t) + 1,52\sin(222,1t)) + e^{-35500t}(447,8\cos(35583,67t) + 71467,6\sin(35583,67t))$$

Observamos que hay pequeñas diferencias entre esta antitransformada y la hallada en la sección 2.5 que se deben a redondeos efectuados durante los cálculos realizados para encontrar la antitransformada.

Comparamos la respuesta hallada analíticamente con la otorgada por `impulse()`:



**Figura 41:** Comparación de la respuesta a al impulso analítica en rojo y la respuesta hallada por `impulse()` en turquesa

## 4.2. Respuesta al escalón

Para hallar la respuesta al escalón identificamos  $V_{in}(t)$  y  $V_{in}(s)$ :

$$V_{in}(t) = u(t) \Rightarrow V_{in}(s) = \frac{1}{s}$$

Por lo tanto para hallar la respuesta al escalón debemos antitransformar  $\frac{H(s)}{s}$  pues:

$$V_{out}(t) = L^{-1}[H(s) \cdot V_{in}(s)] = L^{-1}[H(s) \frac{1}{s}]$$

Procedemos a descomponer en fracciones simples a  $\frac{H(s)}{s}$

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{s \cdot 2,527 \cdot 10^9}{(s^2 + s \cdot 444,5 + 98714,54)(s^2 + s \cdot 7,11 \cdot 10^4 + 2,53 \cdot 10^9)}$$

Proponemos una descomposición del mismo tipo que la de la respuesta al impulso:

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{As+B}{(s^2+s \cdot 444,5+98714,54)} + \frac{Cs+D}{(s^2+s \cdot 7,11 \cdot 10^4+2,53 \cdot 10^9)}$$

Donde ahora las constantes A,B,C,D deben cumplir:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A7,11e4 + B + C444,5 + D &= 0 \\ A2,53e9 + B7,11e4 + C98714,54 + D444,5 &= 2,527e9 \\ B2,53e9 + D98714,54 &= 0 \end{aligned}$$

Obteniendo los siguientes resultados:

$$A = 1,011 \quad B = 2,788 \quad C = -1,011 \quad D = -71460$$

Por lo que la transferencia sobre s puede reescribirse como:

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{1,011s+2,788}{(s^2+s \cdot 444,5+98714,54)} - \frac{1,011s+71460}{(s^2+s \cdot 7,11 \cdot 10^4+2,53 \cdot 10^9)}$$

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{1,011(s+222,2-222,2)+2,788}{(s+222,2)^2+(222,1)^2} - \frac{1,011(s+35550-35550)+71460}{(s+35550)^2+(35583,67)^2} =$$

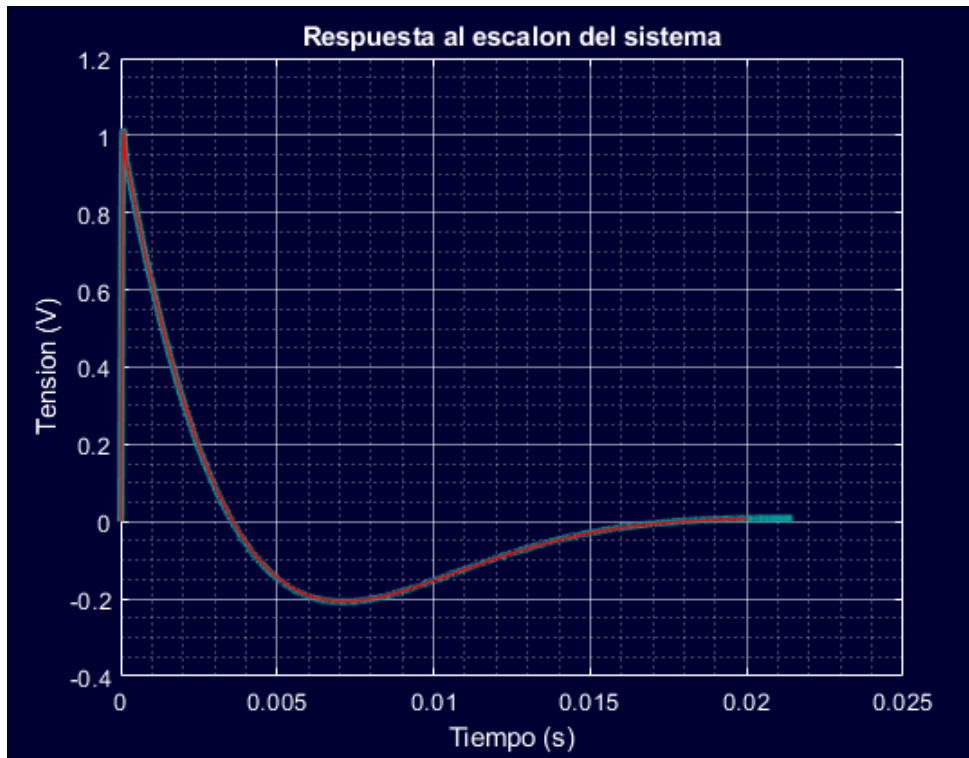
$$1,011 \frac{s+222,2}{(s+222,2)^2+(222,1)^2} - 0,99 \frac{222,1}{(s+222,2)^2+(222,1)^2} - 1,011 \frac{s+35550}{(s+35550)^2+(35583,67)^2} - 1,009 \frac{35583,67}{(s+35550)^2+(35583,67)^2}$$

Cuya antitransformada resulta:

$$e^{-222,2t}(1,011\cos(222,1t) - 0,99\sen(222,1t)) - e^{-35500t}(1,011\cos(35583,67t) + 1,009\sen(35583,67t))$$

Observamos que nuevamente, es similar a la hallada en la sección 2.4 pero con diferencias debido a redondeos.

Comparamos la respuesta hallada analíticamente con la otorgada por step():



**Figura 42:** Comparación de la respuesta a al escalón analítica en rojo y la respuesta hallada por step() en turquesa

### 4.3. Respuesta a señal senoidal

Buscaremos la respuesta a la señal senoidal de frecuencia  $f_0 = 632,47 Hz$ , o de manera equivalente:  $w_0 = 3973,93 \frac{rad}{s}$

Identificamos  $V_{in}(t)$  y  $V_{in}(s)$ :

$$V_{in}(t) = \text{sen}(w_0 t) \Rightarrow V_{in}(s) = \frac{w_0}{s^2 + w_0^2}$$

De manera que para hallar la respuesta temporal  $V_{out}(t)$  debemos antitransformar:

$$V_{out}(t) = L^{-1}[H(s) \cdot V_{in}(s)] = L^{-1}[H(s) \cdot \frac{w_0}{s^2 + w_0^2}]$$

Buscamos una descomposicion en fracciones simples de  $H(s) \cdot \frac{w_0}{s^2 + w_0^2}$  del tipo:

$$H(s) \cdot \frac{w_0}{s^2 + w_0^2} = \frac{As+B}{(s+222,2)^2 + (222,1)^2} + \frac{Cs+D}{(s+35550)^2 + (35583,67)^2} + \frac{Es+F}{s^2 + w_0^2}$$

Donde las constantes A,B,C,D,E y F son tales que cumplen (llamando  $p_1(s) = (s+222,2)^2 + (222,1)^2$  y  $p_2(s) = (s+35550)^2 + (35583,67)^2$ )

$$(As+B)p_2(s)(s^2 + w_0^2) + (Cs+D)p_1(s)(s^2 + w_0^2) + (Es+F)p_1(s)p_2(s) = w_0^3 s^2$$

Buscando las constantes que cumplen esto con Matlab:

$$A = -0.11259 \quad B = -25.004 \quad C = 0.11255 \quad D = 4000.7 \quad E = 0.000038823 \quad F = 3974.8$$

Aproximamos a los siguientes valores para simplificar los cálculos:

$$A = -0.1 \quad B = -25 \quad C = 0.1 \quad D = 4000 \quad E = 0 \quad F = w_0$$

Reescribiendo  $H(s) \cdot \frac{w_0}{s^2 + w_0^2}$ :

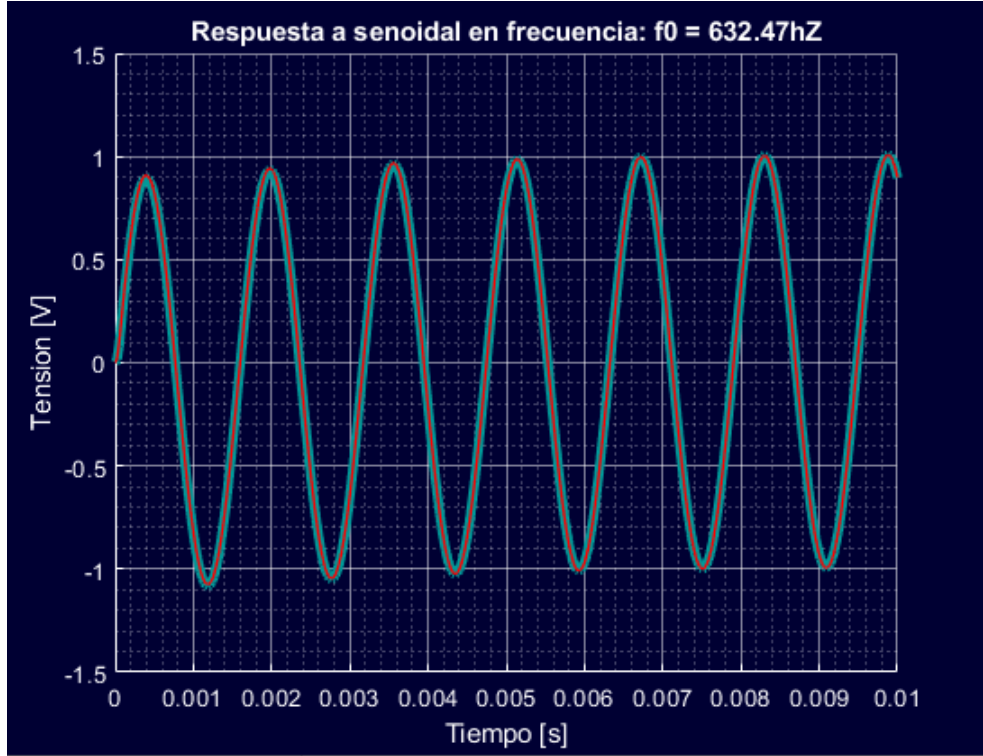
$$-\frac{0,1(s+222,2-222,2)+25}{(s+222,2)^2+(222,1)^2} + \frac{0,1(s+35550-35550)+4000}{(s+35550)^2+(35583,67)^2} + \frac{w_0}{s^2+w_0^2}$$

$$-0,1\frac{s+222,2}{(s+222,2)^2+(222,1)^2} - 2,5e^{-3}\frac{222,1}{(s+222,2)^2+(222,1)^2} + 0,1\frac{s+35550}{(s+35550)^2+(35583,67)^2} + 2,5e^{-3}\frac{35583,67}{(s+35550)^2+(35583,67)^2} + \frac{w_0}{s^2+w_0^2}$$

Cuya antitransformada resulta:

$$e^{-35500t}(0,1\cos(35583,67t) + 2,5e^{-3}\sen(35583,67t)) - e^{-222,2t}(0,1\cos(222,1t) + 2,5e^{-3}\sen(222,1t)) + \sen(w_0t)$$

Comparamos la respuesta hallada analíticamente con la otorgada por Matlab:



**Figura 43:** Comparación de la respuesta a senoidal analítica en rojo y la respuesta hallada por Matlab en turquesa

Donde podemos comprobar que coinciden y que luego de un periodo de  $4\tau = 0,018$  segundos la respuesta en estado permanente es la misma senoidal de entrada pues alcanza una amplitud de 1. Esto se puede verificar en la respuesta a la senoidal hallada en la sección 2.8

## 5. Bibliografía

### Referencias

- [1] *Understanding Poles and Zeros* Massachusetts Institute of Technology, 2004  
<http://web.mit.edu/2.14/www/Handouts/PoleZero.pdf>
- [2] *Analysis of the Sallen-Key architecture*. Texas Instruments, Dallas, Texas, 2002.  
[www.ti.com/lit/an/sloa024b/sloa024b.pdf?ts=1596491525685&ref\\_url=https%253A%252F%252Fwww.google.com%252F](http://www.ti.com/lit/an/sloa024b/sloa024b.pdf?ts=1596491525685&ref_url=https%253A%252F%252Fwww.google.com%252F)
- [3] *LTSpice Tutorial*. Wilfrid Laurier University, 2019  
<http://denethor.wlu.ca/ltspice/#vpulse>