1º Primero obtenemos la matriz dispersa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 12 & 13 \\ 0 & 14 & 0 & 0 & 15 & 16 & 17 & 0 \\ 18 & 0 & 19 & 0 & 20 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}$$

Esquema CSR:

AA = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22)

JA = (1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8)

IA = (1, 4, 6, 9, 11, 14, 18, 22, 23)

2º

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

↑ nº de elementos en cada fila obtenido de IA

(4ª)

|A| $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(-2-\lambda) - (-3 \cdot 1) = -4 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 3 = \lambda^2 - 1$$

* Polinomio característico $\Rightarrow \lambda^2 - 1$
* Ecuación característica $\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$

Soluciones $\begin{cases} \lambda_0 = 1 \\ \lambda_1 = -1 \end{cases}$

* Valores propios $\Rightarrow 1$ y -1

Calculamos el vector propio v con $\rightarrow$ $(A - \lambda I)v = 0$ para cada λ

$\underline{\lambda_0} = 1$

$$(A - \lambda_0 I)v = 0 \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Una solución es $x = 3$, $y = 1$ por lo tanto un vector propio para $\lambda = 1$ es $\boxed{(3, 1)}$

$\underline{\lambda_1} = -1$

$$(A - \lambda_1 I)v = 0 \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$$

Un vector propio par $\lambda = -1$ es $\boxed{(1, 1)}$

* Radio espectral = $\max(|1|, |-1|) = \boxed{1}$
* Norma-1 $\Rightarrow$ máximo de la suma de las filas = $\boxed{|+5|}$
* Norma ∞ $\Rightarrow$ " columnas = $\boxed{5}$

4) [A]

* Norma Frobenius = $\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2+(-2)^2} = 3\sqrt{2}$

[B]

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)\cdot(\tfrac{1}{2}-\lambda)\cdot(1-\lambda)=$$
$$=(\tfrac{1}{2}-\lambda-\tfrac{1}{2}\lambda+\lambda^2)\,(1-\lambda)=$$
$$=\tfrac{1}{2}-\lambda-\tfrac{1}{2}\lambda+\lambda^2-\tfrac{1}{2}\lambda+\lambda^2+\tfrac{1}{2}\lambda^2-\lambda^3=$$
$$=\lambda^3+\tfrac{5}{2}\lambda^2-2\lambda+\tfrac{1}{2}$$

* Polinomio característico = $\lambda^3+\frac{5}{2}\lambda^2-2\lambda+\frac{1}{2}$
* Ecuación característica = $\lambda^3+\frac{5}{2}\lambda^2-2\lambda+\frac{1}{2}=0$
  - Soluciones $\to$ $\lambda=-3{,}18$
* Valores propios $\Rightarrow$ $-3{,}18$

* Cálculo del vector propio

$$(A-\lambda I)v=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+3{,}18 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+3{,}18 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1+3{,}18 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4{,}18x+\frac{1}{4}y=0 \\ 3{,}68y=0 \\ \frac{1}{4}y+4{,}18z=0 \end{cases} \to \text{si } y=0 \longrightarrow x=0,\ z=0$$

por lo tanto obtendríamos el vector (0,0,0) pero como el vector nulo no es válido como vector propio entonces la matriz A no tiene vector propio para el valor propio $\lambda=-3{,}18$

* Radio espectral = 3,18
* Norma-1 = $\frac{5}{4}$
* Norma ∞ = 1
* Norma Frobenius = $\sqrt{1^2+(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{4})^2+1^2} = \frac{\sqrt{38}}{4}$

C) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta - \lambda & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta - \lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(\cos\Theta - \lambda)(\cos\Theta - \lambda) - (2-\lambda)(-\sin\Theta)(\sin\Theta) =$

$= (2-\lambda)\left[\cos^2\Theta - \cos\Theta\lambda - \cos\Theta\lambda + \lambda^2\right] - (2-\lambda)\left[-\sin^2\Theta\right] =$

$= (2-\lambda)\left[\cos^2\Theta - \cos\Theta\lambda - \cos\Theta\lambda + \lambda^2 + \underbrace{\sin^2\Theta}_{\sin^2\Theta + \cos^2\Theta = 1}\right] =$

$= (2-\lambda)\left[-2\cos\Theta\lambda + \lambda^2 + 1\right] =$

$= -4\cos\Theta\lambda + 2\lambda^2 + 2 + 2\cos\Theta\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda =$

$= -\lambda^3 + \lambda^2(2\cos\Theta + 2) - \lambda(4\cos\Theta + 1) + 2$

* Ecuación característica $\Rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2(2\cos\Theta + 2) - \lambda(4\cos\Theta + 1) + 2 = 0$

  - Solución (obtenida por un programa) $\rightarrow \lambda = 2$

* Valor propio $\Rightarrow 2$

* Cálculo del vector propio

$(A - \lambda I)v = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta - 2 & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y(\cos\Theta - 2) + z\sin\Theta = 0 \\ -y\sin\Theta + z(\cos\Theta - 2) = 0 \end{cases}$

Como x no aparece en el sistema puede tener cualquier valor, por lo tanto un vector propio para $\lambda = 2$ es $(1, 0, 0)$

* Radio espectral = 2
* Norma 1 = 2 porque $(\cos\Theta + \sin\Theta)$ ó $(-\sin\Theta + \cos\Theta)$ nunca van a ser mayores que 2
* Norma ∞ = 2 por la misma razón
* Norma Frobenius $= \sqrt{2^2 + \cos^2\Theta + \sin^2\Theta + (-\sin^2\Theta) + (\cos^2\Theta)} = \sqrt{2^2 + 1 + 1} = \sqrt{6}$

6º

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad x^{(0)} = (1,0,0)^t$$

Usando el programa desarrollado para el ejercicio 9, se ha obtenido con 20 iteraciones el siguiente resultado:

vector propio → [1, 1, 1]

valor propio → 6

Con el método de las potencias normalizado se ha obtenido.

vector propio → [1, 1, 1]

7º

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Usando el programa del ejercicio 9

$x^{(1)} = [0{,}75 \; ; \; 0{,}25 \; ; \; 1]$

$x^{(2)} = [0{,}91\hat{6} \; ; \; 0{,}75 \; ; \; 1]$

$x^{(3)} = [0{,}977 \; ; \; 0{,}9318 \; ; \; 1]$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

No se puede resolver porque en la primera iteración $B \cdot x^{(0)} = [0, -1, 0]$ y la norma de ese vector es 0. No se puede dividir el vector por su norma.

8°

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando mi programa con 20 iteraciones obtengo:

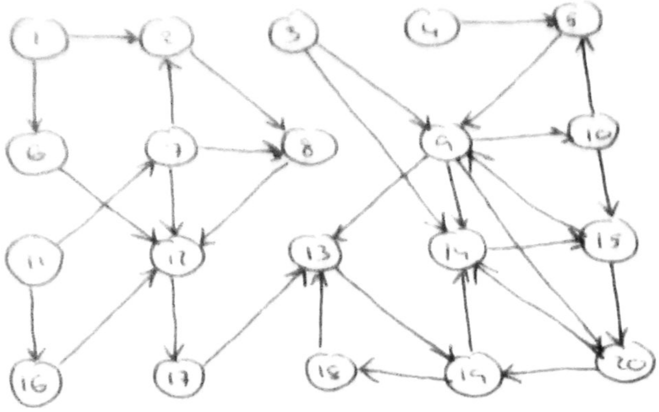
Valor propio → 1

Vector propio → [1, 1, 0, 0]

Introduciendo esa matriz en otro ~~mi~~ programa de internet obtengo que sus valores propios son $\{-1, 1, -\frac{2}{3}\}$. Por lo tanto, el método de las potencias de mi programa ha encontrado el valor propio de módulo máximo

EJERCICIO "PAGE RANK"

* Grafo de links entre páginas:



* Matriz H

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1/2	0	0	0	0	0	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1/2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1/2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0	0	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	1/2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	1	1/3	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1/4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
14	0	0	1/2	0	0	0	0	0	1/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	1/2
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1/2
20	0	0	0	0	0	0	0	0	1/4	0	0	0	0	0	1/2	0	0	0	0	0

* Matriz S:

La matriz S es igual a la H puesto que no hay ningún "dangling node", es decir, no hay ninguna columna con todo ceros

* Matriz G

Voy a usar $\alpha = 0{,}85$. Para calcular cada elemento de G se usa la siguiente formula:

$$\left[\; G_{ij} = 0{,}85 \cdot S_{ij} + \frac{0{,}15}{20} \;\right]$$

Para que la matriz sea mas simple de escribir y visualizar voy a darle un nombre a cada valor que aparece

- $A = 0{,}85 \cdot 1 + \frac{0{,}15}{20} = 0{,}8575$ → corresponde al valor 1 de la matriz S
- $B = 0{,}85 \cdot \frac{1}{2} + \frac{0{,}15}{20} = 0{,}4325$ → " $\frac{1}{2}$ "
- $C = 0{,}85 \cdot \frac{1}{3} + \frac{0{,}15}{20} = 0{,}29083$ → " $\frac{1}{3}$ "
- $D = 0{,}85 \cdot \frac{1}{4} + \frac{0{,}15}{20} = 0{,}22$ → " $\frac{1}{4}$ "
- $E = 0{,}85 \cdot 0 + \frac{0{,}15}{20} = 0{,}0075$ → " 0 "

$\boxed{G}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
2	B	E	E	E	E	E	C	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
3	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
4	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
5	E	E	E	A	E	E	E	E	E	B	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
6	B	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
7	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	B	E	E	E	E	E	E	E	E	E
8	E	A	E	E	E	E	C	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
9	E	E	B	E	A	E	E	E	E	E	E	E	E	E	B	E	E	E	E	E
10	E	E	E	E	E	E	E	E	D	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
11	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
12	E	E	E	E	E	A	C	A	E	E	E	E	E	E	E	A	E	E	E	E
13	E	E	E	E	E	E	E	E	D	E	E	E	E	E	E	E	A	A	E	E
14	E	E	B	E	E	E	E	E	D	E	E	E	E	E	E	E	E	E	B	B
15	E	E	E	E	E	E	E	E	E	B	E	E	E	A	E	E	E	E	E	E
16	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	B	E	E	E	E	E	E	E	E	E
17	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	A	E	E	E	E	E	E	E	E
18	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	B	E
19	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	A	E	E	E	E	E	E	B
20	E	E	E	E	E	E	E	E	D	E	E	E	E	E	B	E	E	E	E	E

* Método de las potencias

Haciendo uso del programa desarrollado para calcular el método de las potencias se obtiene como valor propio de la matriz $\lambda = 1$ y como vector propio normalizado asociado a ese valor:

	nº pág
V = [0,05066173,	1
0,0926474,	2
0,05066173,	3
0,05066173,	4
0,16749909,	5
0,07219296 ,	6
0.07219296 ,	7
0.14986646 ,	8
0.56976043 ,	9
0,17143818 ,	10
0,05066173 ,	11
0,32123072 ,	12
0.84828361 ,	13
0,84459905 ,	14
0,84194365,	15
0,07219296,	16
0,32370786 ,	17
0,47736655,	18
1 ,	19
0,52732743]	20

Basándonos en el vector podemos decir que la página 19 es la más importante seguida de la número 13