Aplicación 5: Algoritmos tipo "Page Rank" de Google

Máster en Ingeniería Informática

Aplicaciones de Matemática Computacional Avanzada

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada

Curso 2018/19

Contenidos

1. Matrices dispersas
   - Grafo de una matriz dispersa
2. Métodos iterativos
   - Normas vectoriales y matriciales
   - Métodos iterativos
3. Valores y vectores propios
   - Introducción
   - Método de las potencias
4. Page Rank de Google

Contenidos

1. Matrices dispersas
   - Grafo de una matriz dispersa
2. Métodos iterativos
   - Normas vectoriales y matriciales
   - Métodos iterativos
3. Valores y vectores propios
   - Introducción
   - Método de las potencias
4. Page Rank de Google

Matrices dispersas. Grafos

Definición

Se llama matriz dispersa a una matriz que tiene la mayoría de sus elementos nulos.

Matrices dispersas. Grafos

Definición

Se llama matriz dispersa a una matriz que tiene la mayoría de sus elementos nulos.

Cuando una matriz es dispersa se puede hacer uso de técnicas especiales para sacar ventaja del gran número de elementos nulos que posee.

Matrices dispersas. Grafos

Definición

Se llama matriz dispersa a una matriz que tiene la mayoría de sus elementos nulos.

Cuando una matriz es dispersa se puede hacer uso de técnicas especiales para sacar ventaja del gran número de elementos nulos que posee.

Algunos autores definen una matriz $n \times n$ como dispersa si el número de elementos no nulos se comporta como $n^{\gamma+1}$, $\gamma < 1$.

Matrices dispersas. Grafos

Definición

Se llama matriz dispersa a una matriz que tiene la mayoría de sus elementos nulos.

Cuando una matriz es dispersa se puede hacer uso de técnicas especiales para sacar ventaja del gran número de elementos nulos que posee.

Algunos autores definen una matriz $n \times n$ como dispersa si el número de elementos no nulos se comporta como $n^{\gamma+1}$, $\gamma < 1$.

Se puede hablar del grado de dispersión de una matriz $m \times n$

$$\frac{\text{elementos nulos}}{n\,m}$$

Se dice que la matriz es dispersa si la dispersión es mayor que 0,5.

Tipos de matrices dispersas

Estructuradas: Los elementos no nulos forman un patrón regular.

Tipos de matrices dispersas

Estructuradas: Los elementos no nulos forman un patrón regular.
Caso especial: matrices banda

$$
\begin{pmatrix}
c_1 & d_1 & e_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
b_1 & c_2 & d_2 & e_2 & \ddots & & \vdots \\
a_1 & b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & e_{n-3} & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & d_{n-2} & e_{n-2} \\
\vdots & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-2} & c_{n-1} & d_{n-1} \\
0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-2} & b_{n-1} & c_n
\end{pmatrix}
$$

Tipos de matrices dispersas

Estructuradas: Los elementos no nulos forman un patrón regular.
Caso especial: matrices banda

$$\begin{pmatrix}
c_1 & d_1 & e_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
b_1 & c_2 & d_2 & e_2 & \ddots & & \vdots \\
a_1 & b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & e_{n-3} & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & d_{n-2} & e_{n-2} \\
\vdots & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-2} & c_{n-1} & d_{n-1} \\
0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-2} & b_{n-1} & c_n
\end{pmatrix}$$

No estructuradas Los elementos no nulos se distribuyen de forma irregular.

Tipos de matrices dispersas

En el primer caso se pueden diseñar métodos basados en la estructura de las matrices, mientras que en el segundo caso solo se puede hacer uso de la "dispersidad" de la matriz.

Formatos de almacenamiento

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
- Sea n_z al número de elementos no nulos de la matriz.

Esquema coordenado Se representa A se utilizan tres vectores de dimensión n_z:

- AA se almacenan los elementos no nulos de A
- IA se almacenan los números de fila asociados a cada elemento
- JA se almacenan los números de columna asociados a cada elemento

Formatos de almacenamiento

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Formatos de almacenamiento

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Entonces su almacenamiento en formato coordenado podría ser

$$\begin{aligned} AA &= (12, 9, 7, 5, 1, 2, 11, 3, 6, 4, 8, 10) \\ IA &= (5, 3, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 3, 2, 3, 4) \\ JA &= (5, 5, 3, 4, 1, 4, 4, 1, 1, 2, 4, 3) \end{aligned}$$

Formatos de almacenamiento

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Entonces su almacenamiento en formato coordenado podría ser

$$\begin{aligned} AA &= (12, 9, 7, 5, 1, 2, 11, 3, 6, 4, 8, 10) \\ IA &= (5, 3, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 3, 2, 3, 4) \\ JA &= (5, 5, 3, 4, 1, 4, 4, 1, 1, 2, 4, 3) \end{aligned}$$

La representación no es única.

Formatos de almacenamiento

Más compacto: Esquema CSR (compressed sparse row)

- *AA* de dimensión n_z que contiene los elementos no nulos de A ordenados por filas,

Formatos de almacenamiento

Más compacto: Esquema CSR (compressed sparse row)

- *AA* de dimensión n_z que contiene los elementos no nulos de A ordenados por filas,
- *JA* de dimensión n_z que contiene los números de las columnas de los elementos de *AA*

Formatos de almacenamiento

Más compacto: Esquema CSR (compressed sparse row)

- *AA* de dimensión n_z que contiene los elementos no nulos de A ordenados por filas,
- *JA* de dimensión n_z que contiene los números de las columnas de los elementos de *AA*
- *IA* de dimensión $m+1$ con la siguiente estructura:

$$IA(1) = 1,$$
$$IA(i+1) - IA(i) = \text{numero de elementos no nulos en la fila } i$$

Formatos de almacenamiento

La matriz anterior A en el formato CRS se representa por

$$\begin{aligned} AA &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12) \\ JA &= (1, 4, 1, 2, 4, 1, 3, 4, 5, 3, 4, 5) \\ IA &= (1, 3, 6, 10, 12, 13) \end{aligned}$$

Formatos de almacenamiento

La matriz anterior A en el formato CRS se representa por

$$\begin{aligned} AA &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12) \\ JA &= (1, 4, 1, 2, 4, 1, 3, 4, 5, 3, 4, 5) \\ IA &= (1, 3, 6, 10, 12, 13) \end{aligned}$$

Análogamente se puede definir un formato de almacenamiento por columnas llamado CSC.

Formatos de almacenamiento

Una de las librerías libre más utilizadas para el manejo de matrices dispersas se denomina SPARSKIT
Tiene implementadas distintas funciones para la conversión de formatos:

- DNS Formato denso
- BND Linpack Banded format
- CSR Compressed Sparse Row format
- CSC Compressed Sparse Column format
- COO Coordinate format
- DIA Diagonal format
- ...

También contiene funciones para hacer las operaciones usuales con matrices dispersas: suma de matrices, producto, obtención de la diagonal, etc.

Producto matriz–vector

Una de las operaciones más usuales en los métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones y el cálculo del valor y vector propio dominante es el producto de una matriz por un vector.

Se usa la *dispersidad* de la matriz para re–definir el producto (de una matriz $n \times m$ por un vector de m componentes).

Producto matriz–vector

Una de las operaciones más usuales en los métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones y el cálculo del valor y vector propio dominante es el producto de una matriz por un vector.

Se usa la *dispersidad* de la matriz para re–definir el producto (de una matriz $n \times m$ por un vector de m componentes).

- Esquema COO

Producto matriz–vector

Una de las operaciones más usuales en los métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones y el cálculo del valor y vector propio dominante es el producto de una matriz por un vector.

Se usa la *dispersidad* de la matriz para re–definir el producto (de una matriz $n \times m$ por un vector de m componentes).

- Esquema COO
- Esquema CSR

Producto matriz–vector

Una de las operaciones más usuales en los métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones y el cálculo del valor y vector propio dominante es el producto de una matriz por un vector.

Se usa la *dispersidad* de la matriz para re–definir el producto (de una matriz $n \times m$ por un vector de m componentes).

- Esquema COO
- Esquema CSR

```
DO I=1,n
K1=IA(I)
K2=IA(I+1)-1
Y(i)=DOTPRODUCT(AA(K1:K2),X(JA(K1:K2)))
ENDDO
```

Producto matriz–vector

Una de las operaciones más usuales en los métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones y el cálculo del valor y vector propio dominante es el producto de una matriz por un vector.

Se usa la *dispersidad* de la matriz para re–definir el producto (de una matriz $n \times m$ por un vector de m componentes).

- Esquema COO
- Esquema CSR

```
DO I=1,n
K1=IA(I)
K2=IA(I+1)-1
Y(i)=DOTPRODUCT(AA(K1:K2),X(JA(K1:K2)))
ENDDO
```

- Esquema CSC

Otros cálculos

- Fila *i*–ésima

```
vec=[]
for k=IA(I):IA(I+1)-1
    vec(JA(k)) = AA(k)
end
```

Otros cálculos

- Fila *i*–ésima

```
vec=[]
for k=IA(I):IA(I+1)-1
    vec(JA(k)) = AA(k)
end
```

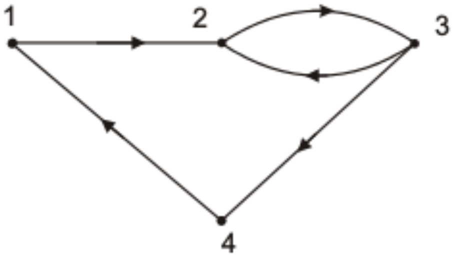
- Columna *j*–ésima

```
vec=[]
for k = 1:n
    for i=IA(k):IA(k+1)-1
      if JA(i)==j vec(k) = AA(i), break
      elseif JA(i) > j break
    end
end
```

Grafo de una matriz dispersa

- Hay una relación directa entre el patrón de una matriz dispersa y su grafo asociado.
- Un grafo dirigido o digrafo consiste en un conjunto de nodos o vértices y aristas dirigidas entre los nodos.
- Para una matriz cuadrada A, se asocia un nodo con cada fila y con cada columna.
  Si a_{ij} es un elemento no nulo de la matriz (entrada) de una matriz dispersa, hay una arista dirigida del nodo i al j.

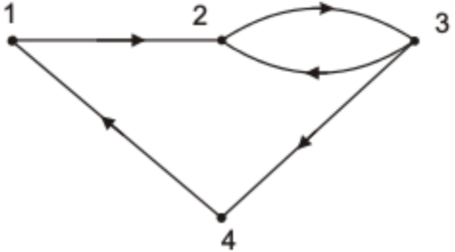
Grafo de una matriz dispersa



Matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

Grafo de una matriz dispersa



Matriz asociada:

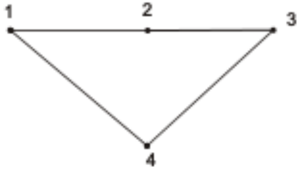
$$A = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & X & 0 & X \\ X & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Grafo de una matriz dispersa

Para matrices simétricas, si hay una conexión del nodo i al nodo j, se tendrá también una conexión del nodo j al i. De este modo las matrices simétricas se representan mediante un grafo no dirigido.

Grafo de una matriz dispersa

Para matrices simétricas, si hay una conexión del nodo *i* al nodo *j*, se tendrá también una conexión del nodo *j* al *i*. De este modo las matrices simétricas se representan mediante un grafo no dirigido.
La matriz asociada al grafo



es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 & X \\ X & 0 & X & 0 \\ 0 & X & 0 & X \\ X & 0 & X & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Calcula el grafo de la matriz

$$
\begin{bmatrix}
\mathbf{x} & & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & & \mathbf{x} & & & & & \mathbf{x} \\
& \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & & \mathbf{x} & & & & & & \\
\mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & & & \mathbf{x} & & & & & \\
\mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & & & & & & \\
\mathbf{x} & & & \mathbf{x} & \mathbf{x} & & & & & & & \\
& \mathbf{x} & & \mathbf{x} & & \mathbf{x} & & & & & & \\
\mathbf{x} & & \mathbf{x} & & & & \mathbf{x} & \mathbf{x} & & & & \mathbf{x} \\
& & & & & & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\
& & & & & & & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \\
& & & & & & & & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \\
& & & & & & & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\
\mathbf{x} & & & & & & \mathbf{x} & \mathbf{x} & & & \mathbf{x} & \mathbf{x}
\end{bmatrix}
$$

sabiendo que es simétrica.

Contenidos

1 Matrices dispersas
- Grafo de una matriz dispersa

2 Métodos iterativos
- Normas vectoriales y matriciales
- Métodos iterativos

3 Valores y vectores propios
- Introducción
- Método de las potencias

4 Page Rank de Google

Normas vectoriales

Para medir el tamaño de los vectores se usa el concepto de norma, que generaliza el concepto de módulo para escalares.
Dado un espacio vectorial E, una norma es una aplicación

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in E$, siendo $\|x\| = 0 \iff x = 0$. (Definida positiva).
2. $\|c\, x\| = |c|\|x\|, \ \forall c \in \mathbb{R}, \ \forall x \in E$. (Homogeneidad).
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in E$. (Desigualdad triangular).

Ejemplos de normas vectoriales

Sea E un espacio de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base suya. Cualquier vector $x \in E$ puede ser expresado de forma única en función de los vectores de la base $\mathcal{B}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

donde los escalares $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se conocen como coordenadas del vector x respecto de la base $\mathcal{B}$.

Ejemplos de normas vectoriales

Sea E un espacio de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base suya. Cualquier vector $x \in E$ puede ser expresado de forma única en función de los vectores de la base $\mathcal{B}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

donde los escalares $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se conocen como coordenadas del vector x respecto de la base $\mathcal{B}$. Utilizando esta notación, son ejemplos de normas los siguientes:

- Norma–1 $\quad \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$
- Norma euclídea $\quad \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$
- Norma Infinito $\quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$

Equivalencia de las normas vectoriales

Teorema

En un espacio vectorial de dimensión finita E todas las normas vectoriales son equivalentes, en el sentido siguiente: dadas las normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$, existen dos constantes positivas A y B tales que

$$A\,\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq B\,\|x\|_a, \quad \forall x \in E.$$

Ejemplo

En $\mathbb{R}^n$ se verifica:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Normas matriciales

Dado el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, una norma matricial es una aplicación

$$\| \cdot \| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. $\|\mathbf{A}\| \geq 0,\ \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siendo $\|\mathbf{A}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{A} = 0$. (Definida positiva).
2. $\|c\,\mathbf{A}\| = |c|\|\mathbf{A}\|,\ \forall c \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (Homogeneidad).
3. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|,\ \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (Desigualdad triangular).
4. $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|,\ \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Norma matricial inducida

Definición

Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ se define la norma matricial inducida (o subordinada) de la forma

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|}{\|x\|}$$

Norma matricial inducida

Definición

Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ se define la norma matricial inducida (o subordinada) de la forma

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|}{\|x\|}$$

Ejemplos

- Norma-1 $$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
- Norma Infinito $$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

La norma de Frobenius

No todas las normas matriciales son normas inducidas.
La norma de Frobenius:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

no es una norma inducida.

La norma de Frobenius

No todas las normas matriciales son normas inducidas.
La norma de Frobenius:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

no es una norma inducida.

Proposición

Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ y la correspondiente norma matricial inducida, se verifica

$$\|\mathbf{A}x\| \leq \|\mathbf{A}\|\|x\|$$

Métodos iterativos

Los métodos iterativos se utilizan para:

- resolver sistemas de ecuaciones grandes (Métodos de Jacobi, de Gauss-Seidel o de relajación) o
- calcular valores y vectores propios asociados a matrices dispersas.

Métodos iterativos

Los métodos iterativos se utilizan para:

- resolver sistemas de ecuaciones grandes (Métodos de Jacobi, de Gauss-Seidel o de relajación) o
- calcular valores y vectores propios asociados a matrices dispersas.

Un método iterativo es un algoritmo que consiste en construir una sucesión de vectores que, bajo ciertas condiciones, converge hacia la solución del sistema o hacia un vector propio de una matriz.

Convergencia de los métodos iterativos

Definición

Una sucesión de vectores de $\mathbb{R}^n$, $\{x^{(k)}\}_k$, se dice que converge al vector x si

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0.,$$

para una norma cualquiera.

Convergencia de los métodos iterativos

Definición

Una sucesión de vectores de $\mathbb{R}^n$, $\{x^{(k)}\}_k$, se dice que converge al vector x si

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0.,$$

para una norma cualquiera.

Nota

Puesto que en un espacio de dimensión finita todas las normas son equivalentes, la definición anterior es independiente de la norma vectorial considerada

Contenidos

1. Matrices dispersas
   - Grafo de una matriz dispersa
2. Métodos iterativos
   - Normas vectoriales y matriciales
   - Métodos iterativos
3. Valores y vectores propios
   - Introducción
   - Método de las potencias
4. Page Rank de Google

Introducción

El cálculo de los valores y vectores propios de una matriz aparece en un gran número de aplicaciones de la matemática. Por ejemplo, en el estudio de

- Resistencia de los materiales en el cálculo de estructuras
- Análisis de fenómenos vibratorios
- Cadenas de Markov
- Modelos económicos
- Análisis de datos
- Física y Química cuántica
- Motores de búsqueda en la web: Page Rank de Google

`http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank`

Introducción

Valor y vector propio de una matriz

λ es valor propio de una matriz cuadrada $n \times n$ A si y sólo si existe un vector no nulo v tal que

$$A\,v = \lambda\,v.$$

v se llama *vector propio asociado al valor propio* λ.

Cálculo de valores y vectores propios

$$A\,v - \lambda\,v = 0 \quad \Longrightarrow \quad (A - \lambda\,I)v = 0$$

luego buscamos soluciones no triviales al sistema anterior, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo

$$det(A - \lambda\,I) = 0$$

esto es, debemos calcular las raíces de este polinomio.

Introducción

- Polinomio característico: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Introducción

- Polinomio característico: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- Ecuación característica: $\det(A - \lambda I) = 0$

Introducción

- Polinomio característico: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- Ecuación característica: $\det(A - \lambda I) = 0$
- Espectro: $\sigma(A) = \{\lambda : \quad p(\lambda) = 0\}$

Introducción

- Polinomio característico: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- Ecuación característica: $\det(A - \lambda I) = 0$
- Espectro: $\sigma(A) = \{\lambda : \quad p(\lambda) = 0\}$
- Radio espectral: $\rho(A) = \text{máx}\{|\lambda| : \quad p(\lambda) = 0\}$

Introducción

- Polinomio característico: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- Ecuación característica: $\det(A - \lambda I) = 0$
- Espectro: $\sigma(A) = \{\lambda : \quad p(\lambda) = 0\}$
- Radio espectral: $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \quad p(\lambda) = 0\}$

  Dada una norma matricial inducida $\|\cdot\|$, se verifica $\rho(A) \leq \|A\|$

Introducción

- Polinomio característico: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- Ecuación característica: $\det(A - \lambda I) = 0$
- Espectro: $\sigma(A) = \{\lambda : \quad p(\lambda) = 0\}$
- Radio espectral: $\rho(A) = \text{máx}\{|\lambda| : \quad p(\lambda) = 0\}$
  Dada una norma matricial inducida $\|\cdot\|$, se verifica $\rho(A) \leq \|A\|$
- Subespacio propio asociado a un valor propio λ

$$V_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : \quad A \cdot v = \lambda\, v\}$$

Introducción

- Polinomio característico: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- Ecuación característica: $\det(A - \lambda I) = 0$
- Espectro: $\sigma(A) = \{\lambda : \quad p(\lambda) = 0\}$
- Radio espectral: $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \quad p(\lambda) = 0\}$
  Dada una norma matricial inducida $\|\cdot\|$, se verifica $\rho(A) \leq \|A\|$
- Subespacio propio asociado a un valor propio λ

$$V_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : \quad A \cdot v = \lambda\, v\}$$

Se cumple

$$\dim V_\lambda(A) \leq m.a.(\lambda)$$

donde $m.a.(\lambda)$ es la multiplicidad algebraica de λ

Métodos iterativos para el cálculo de valores y vectores propios

Existen dos grandes grupos de Métodos iterativos para el cálculo de valores y vectores propios de una matriz

- Los que sirven para calcular sólo un valor propio
- Los que permiten calcular simultáneamente todos los valores propios

Método de las potencias

Sea A una matriz $n \times n$, con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tal que:

- tiene un valor propio dominante

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|,$$

- una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de A

$$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\},$$

con v_i asociado a λ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Método de las potencias

Sea A una matriz $n \times n$, con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tal que:

- tiene un valor propio dominante

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|,$$

- una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de A

$$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\},$$

con v_i asociado a λ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Sea $x^{(0)}$ un vector arbitrario. Entonces existen constantes β_i, $i = 1, \ldots, n$, no todas nulas tales que

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, v_i = \beta_1 \, v_1 + \beta_2 \, v_2 + \cdots + \beta_n \, v_n.$$

Método de las potencias

Definimos la sucesión de vectores

$$
\begin{aligned}
x^{(1)} &= A\,x^{(0)} \\
x^{(2)} &= A\,x^{(1)} = A^2 x^{(0)} \\
&\vdots \\
x^{(k)} &= A\,x^{(k-1)} = A^k\,x^{(0)}.
\end{aligned}
$$

Lema

Si λ es un valor propio de A cuyo vector propio es v, entonces λ^k es un valor propio de la matriz A^k con vector propio v.

$$A\,v = \lambda\,v \quad \Rightarrow \quad A^k\,v = \lambda^k\,v$$

Método de las potencias

De este modo, podemos calcular:

$$x^{(k)} = A^k \, x^{(0)}$$

Método de las potencias

De este modo, podemos calcular:

$$x^{(k)} = A^k\, x^{(0)} = A^k \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, v_i$$

Método de las potencias

De este modo, podemos calcular:

$$x^{(k)} = A^k \, x^{(0)} = A^k \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, A^k \, v_i$$

Método de las potencias

De este modo, podemos calcular:

$$x^{(k)} = A^k\, x^{(0)} = A^k \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, A^k\, v_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \lambda_i^k\, v_i$$

Método de las potencias

De este modo, podemos calcular:

$$
\begin{aligned}
x^{(k)} &= A^k\, x^{(0)} = A^k \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, A^k\, v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \lambda_i^k\, v_i = \lambda_1^k \left[\beta_1\, v_1 + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k v_i \right].
\end{aligned}
$$

Método de las potencias

De este modo, podemos calcular:

$$
\begin{aligned}
x^{(k)} &= A^k\, x^{(0)} = A^k \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, A^k\, v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \lambda_i^k\, v_i = \lambda_1^k \left[\beta_1\, v_1 + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k v_i \right].
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que $\lambda_i < \lambda_1$, para $i = 2, \ldots, n$, se deduce que

Método de las potencias

De este modo, podemos calcular:

$$
\begin{aligned}
x^{(k)} &= A^k\, x^{(0)} = A^k \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, A^k\, v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \lambda_i^k\, v_i = \lambda_1^k \left[\beta_1\, v_1 + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k v_i \right].
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que $\lambda_i < \lambda_1$, para $i = 2, \ldots, n$, se deduce que

- $|\lambda_1| > 1$, cada una de las componentes de $x^{(k)}$ diverge
- $|\lambda_1| < 1$, cada una de las componentes de $x^{(k)}$ tiende a cero
- $|\lambda_1| = 1$, entonces la sucesión converge a un vector propio asociado a λ_1:

$$x^{(k)} \to \beta_1\, v_1$$

Método de las potencias

Sea $1 \leq m \leq n$, y sea $[A^k\, x^{(0)}]_m$ la componente m–ésima del vector. Entonces:

$$\frac{[A^{k+1}\, x^{(0)}]_m}{[A^k\, x^{(0)}]_m} = \lambda_1 \frac{\left[\beta_1\, v_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} v_i\right]_m}{\left[\beta_1\, v_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k} v_i\right]_m}.$$

Si $[\beta_1\, v_1]_m \neq 0$, se verifica

Método de las potencias

Sea $1 \leq m \leq n$, y sea $[A^k\, x^{(0)}]_m$ la componente m–ésima del vector. Entonces:

$$\frac{[A^{k+1}\, x^{(0)}]_m}{[A^k\, x^{(0)}]_m} = \lambda_1 \frac{\left[\beta_1\, v_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} v_i\right]_m}{\left[\beta_1\, v_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k} v_i\right]_m}.$$

Si $[\beta_1\, v_1]_m \neq 0$, se verifica

$$\lim_{k\to\infty} \frac{[x^{(k+1)}]_m}{[x^{(k)}]_m} = \lim_{k\to\infty} \frac{[A^{k+1}\, x^{(0)}]_m}{[A^k\, x^{(0)}]_m}$$

Método de las potencias

Sea $1 \leq m \leq n$, y sea $[A^k\, x^{(0)}]_m$ la componente m–ésima del vector. Entonces:

$$\frac{[A^{k+1}\, x^{(0)}]_m}{[A^k\, x^{(0)}]_m} = \lambda_1 \frac{\left[\beta_1\, v_1 + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} v_i\right]_m}{\left[\beta_1\, v_1 + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k} v_i\right]_m}.$$

Si $[\beta_1\, v_1]_m \neq 0$, se verifica

$$\lim_{k\to\infty} \frac{[x^{(k+1)}]_m}{[x^{(k)}]_m} = \lim_{k\to\infty} \frac{[A^{k+1}\, x^{(0)}]_m}{[A^k\, x^{(0)}]_m} = \lambda_1.$$

Método de las potencias normalizado

Método de las potencias normalizado

Dado $x^{(0)}$ arbitrario, para $k \geq 0$, se toma

$$
\begin{aligned}
y^{(k)} &= \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} \\
x^{(k+1)} &= A\, y^{(k)}
\end{aligned}
$$

donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma vectorial.

Método de las potencias normalizado

Método de las potencias normalizado

Dado $x^{(0)}$ arbitrario, para $k \geq 0$, se toma

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} \\ x^{(k+1)} &= A\,y^{(k)} \end{aligned}$$

donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma vectorial.

De este modo,

$$y^{(k+1)} = \frac{x^{(k+1)}}{\|x^{(k+1)}\|} = \frac{A\,y^{(k)}}{\|A\,y^{(k)}\|}$$

Se puede demostrar que $y^{(k)}$ converge hacia un vector propio asociado al valor propio dominante pero no podemos obtener el valor propio dominante.

Matrices: positivas, estocásticas, matrices de Markov

- Una matriz A se dice positiva si $a_{ij} > 0, \forall i, j$.

Matrices: positivas, estocásticas, matrices de Markov

- Una matriz A se dice positiva si $a_{ij} > 0, \forall i, j$.
- Una matriz A positiva se dice que es una matriz de Markov (o estocástica) por columnas si

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ para } j = 1, 2, \dots, n.$$

- Una matriz A positiva se dice que es una matriz de Markov (o estocástica) por filas si

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Matrices: positivas, estocásticas, matrices de Markov

Proposición

Sea A una matriz $n \times n$ positiva

1. Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1,\ j = 1, 2, \ldots, n \ \Rightarrow\ |\lambda| < 1, \forall\lambda$ valor propio de A.
2. Si $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n \ \Rightarrow\ |\lambda| < 1, \forall\lambda$ valor propio de A.
3. Si A es de Markov $\ \Rightarrow\ $ tiene un valor propio igual a 1.

Matrices: positivas, estocásticas, matrices de Markov

Proposición

Sea A una matriz $n \times n$ positiva

1. Si $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, \; j = 1, 2, \ldots, n \;\Rightarrow\; |\lambda| < 1, \forall\lambda$ valor propio de A.
2. Si $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1, \; i = 1, 2, \ldots, n \;\Rightarrow\; |\lambda| < 1, \forall\lambda$ valor propio de A.
3. Si A es de Markov $\;\Rightarrow\;$ tiene un valor propio igual a 1.

Como consecuencia si A es de Markov, $\rho(A) = 1$ y será $\rho(A) < 1$ en los casos 1. y 2.

Contenidos

1. Matrices dispersas
   - Grafo de una matriz dispersa
2. Métodos iterativos
   - Normas vectoriales y matriciales
   - Métodos iterativos
3. Valores y vectores propios
   - Introducción
   - Método de las potencias
4. Page Rank de Google

Page Rank de Google

http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank

Referencias

- D. Austin, How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack, http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank

- C. Brezinski, M. Redivo–Zaglia, Méthodes numériques itératives, Ellipses, Paris, 2006.

- K. Bryan, T. Leise, The $25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google, SIAM Review, Vol. 48, No. 3 (2006), 569-581.

- A. N. Langville, C.D. Meyer, Google's PageRank and beyond: the science of search engine rankings, Princeton University Press, 2006.