OPTIMIZACIÓN: Take home exam. Parte I

Máster en Ciencia de Datos. Universidad Autónoma de Madrid

Adrián Rubio Pintado

March 7, 2022

Problem 1

(2 puntos). ¿Cuáles son los criterios de parada del algoritmo simplex algebraico?. Expón todas las alternativas posibles y las soluciones a que dan lugar

Solution.

Considerando un problema de minimización(si es de maximización lo transformamos en minimización multiplicando los coeficientes por -1 para no cambiar los criterios descritos)

Tenemos en total **3 posibles casos de parada.** [2]

CASO 1: El primer criterio de parada lo encontramos en el paso 2 del algoritmo (conocido como la "pricing operation") cuando se cumple que $z_k - c_k < 0$, siendo:

$$z_k - c_k = \max_{j \in J} z_j - c_j \tag{1}$$

Donde J es el conjunto de índices asociados con las variables no básicas. En este caso **la solución básica factible actual es la solución óptima.**

CASO 2: Si no se cumple la condición anterior, cogemos la variable con índice k como variable de entrada. Al resolver en el paso 3 del algoritmo:

$$y_k = B^{-1} a_k \tag{2}$$

Si se cumple que $y_k \leq 0$ Entonces se para el algoritmo simplex con la conclusión de que **la solución óptima es no acotada (infinitas soluciones).**

CASO 3:PASOS DEGENERADOS Y CICLOS

Si hay **pasos degenerados** ($z_k - c_k = 0$) alguna de las variables básicas es 0 en la siguiente iteración), y **se tienen SOLUCIONES ÓPTIMAS ALTERNATIVAS (se puede cambiar de SBF pero el objetivo no mejora** $z = z_0$**).**

Algunas veces, puede darse el fenómeno conocido como "cycling", a pesar de que es poco común. Esto ocurre después de un número sucesivo de pasos degenerados, donde tal vez volvamos a escoger una base B ya escogida en iteraciones anteriores. Si continuamos aplicando el algoritmo usando las mismas reglas para seleccionar los índices entrada/salida de la base, entraremos en un ciclo infinito del algoritmo y nunca convergerá.[3]

Para evitar el problema del bucle infinito, se puede controlar las variables que entran y salen de la base en cada iteración. No se explican aquí dada la finalidad del ejercicio.

Problem 2

(3 puntos). Una forma alternativa de definición de problemas de programación lineal viene dada por el modelo dual. En esta cuestión se pide que definas cuál es el Problema Dual de un Problema Primal.

a) ¿Qué relación existe entre ambos en términos de las soluciones posibles?

b) ¿Ofrece alguna ventaja la formulación dual respecto de la primal?

Por cada programa lineal que resolvemos, hay otro programa lineal asociado que resulta que estamos resolviendo simultáneamente. Al problema original le llamamos problema primal y al segundo problema dual. Ambos de programación lineal. [2]

Suponiendo que tenemos un problema primal de programación lineal dado el la forma canónica del tipo:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & cx \\ \text{subject to} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces el problema de programación lineal dual lo definimos de la forma(se detallan las transformaciones necesarias en el ejercicio 4):

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & wb \\ \text{subject to} \quad & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

Dado que el problema dual es también un problema de programación lineal, se puede demostrar que el dual de el problema dual anterior es el problema primal.

0.1 Apartado A

En particular, el valor objetivo de cualquier solución factible del problema de minimización da una cota superior al objetivo óptimo del problema de maximización. Del mismo modo, el valor objetivo de cualquier solución factible del problema de maximización da una cota inferior del objetivo óptimo del problema de minimización.

Si un problema posee una solución óptima, entonces ambos problemas poseen soluciones óptimas y los dos valores objetivos óptimos son iguales.

De hecho, generalizando aún más, se cumple el siguiente teorema: La relación de los problemas programación lineal primal y dual y sus soluciones, se da siempre que una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a) Ambos poseen soluciones óptimas x^* y w^* con $cx^* = w^*b$.

b) Uno de los problemas tiene un valor objetivo óptimo no acotado, en cuyo caso el otro problema es infactible.

c) Ambos problemas son infactibles.

De él se puede ver que la dualidad no es del todo simétrica. Lo único que podemos asegurar la relación de soluciones presente en la siguiente tabla (refiriéndonos a optimal como que tiene un óptimo finito, y unbounded, que tiene un valor objetivo óptimo no acotado). P:primal, D:Dual.[2]

P	OPTIMAL	$\Leftrightarrow$	D	OPTIMAL
P(D)	UNBOUNDED	$\Rightarrow$	D(P)	INFEASIBLE
P(D)	INFEASIBLE	$\Rightarrow$	D(P)	UNBOUNDED OR INFEASIBLE
P(D)	INFEASIBLE	$\Leftrightarrow$	D(P)	UNBOUNDED IN HOMOGENEOUS FORM

Figure 1: Relación soluciones primal-dual [2]

Esta tabla nos será util en el ejercicio 4.

0.2 Apartado B

El problema dual nos proporciona lo que se conoce como ”el principio del supervisor” porque proporciona un método de comprobación sencilla mediante la cual un ”supervisor” puede verificar la optimalidad (simultánea) de un par de soluciones factibles primarias y duales.

Además el problema dual relaciona las variables de un problema con las variables de holgura del otro problema(primal-dual). Por lo tanto, en la optimización, si una variable en un problema es positiva, entonces la restricción correspondiente en el otro problema es ajustada. Si una restricción en un problema no es ajustada, entonces la variable correspondiente en el otro problema es ser cero.[2] Es decir, tenemos que el problema dual tiene tantas restricciones como variables tiene el programa primal.

Estos dos teoremas nos permiten basicamente **utilizar el problema dual para resolver el primal de forma más rapida y sencilla.** Por ejemplo, la conversión primal a dual, puede hacer que el dual tenga menos variables y sea más facil de resolver. Si por ejemplo conseguimos que el dual tenga 2 variables(menos variables que el primal), podríamos resolver el problema gráficamente.

Además, una utilidad práctica, es que la dualidad nos permite hacer una interpretación económica del problema primal, cuya formulación formalizan algunos conceptos de economía. Por ejemplo podemos modelizar un problema de planificación de la producción, donde las variables del problema dual nos permiten interpretar de forma más claro nuestro problema en un ámbito real.

Problem 3

Demostrar que dada $f : S \to \mathbb{R}$ y $S \subset \mathbb{R}^n$ no vacío y convexo, entonces f es cuasiconvexa si y solo si el conjunto $S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$ es convexo para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para este ejercicio se ha consultado el libro [1]

Recordamos la definición de f cuasiconvexa:

$$\textit{Dado} \qquad f : S \to \mathbb{R}, S \subset \mathbb{R}^n, S \neq \emptyset$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max f(x_1), f(x_2) \forall \lambda \in (0,1) \tag{3}$$

Dividimos la doble implicación del enunciado en 2 implicaciones en simples:

Por el primer lado de la implicación, si suponemos que f es cuasiconvexa y cogemos 2 puntos $x_1, x_2 \in S_\alpha$, entonces se cumple que $x_1, x_2 \in S$ y $\max f(x_1), f(x_2) \leq \alpha$. Cogiendo $\lambda \in (0, 1)$ y definiendo $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$, por la definición de convexidad de S, x está dentro de S. Así no encontramos en la siguiente situacion(debido a la cuasiconvexidad de f):

$$f(x) \leq \max f(x_1), f(x_2) \forall \lambda \in (0, 1) \leq \alpha$$

Por el otro lado de la implicación,suponemos que S_α es convexo para todo α real. Cogemos dos puntos $x_1, x_2 \in S$ y escogiendo además $\lambda \in (0, 1)$ y definiendo $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$. Nos damos cuenta de que $x_1, x_2 \in S_\alpha$ para $\alpha = max f(x_1), f(x_2)$

Hemos asumido que S_α es convexo, lo que implica que el x definido está contenido en S_α. Con ello tenemos finalmente que

$$f(x) \leq \alpha = max f(x_1), f(x_2)$$

, es decir, que f es quasiconvexa, quedando demostrado el teorema.

Problem 4

Haciendo uso de la cuestión 2, demostrar que el siguiente problema carece de solución

$$\text{max z} = \text{x}_3 \qquad s.t. \begin{cases} 2x_1 - x_2, +x_3 \leq -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq -1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Para este ejercicio se ha consultado el libro [2] Lo primero que hacemos en convertir el problema de programación lineal primal dado, en uno dual. Para ello, sabemos que teniendo un problema primal del tipo:

$$max z_x = Cx \qquad s.t. \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

podemos transformarlo en un problema dual tal que así:

$$min z_w = b^T w \qquad s.t. \begin{cases} A^T w \geq C^T \\ w \geq 0 \end{cases}$$

Aplicando lo descrito a nuestro caso particular, teniendo del problema primal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos las trapuestas de A,b y c para obtener el problema dual:

$$minz = -w_1 - w_2 \qquad s.t. \begin{cases} 2w_1 - w_2 \geq 0 \\ -w_1 + 2w_2 \geq 0 \\ w_1 + w_2 \geq 1 \\ w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dado que ahora disponemos de 2 variables, podemos resolverlo fácilmente de manera gráfica 2.

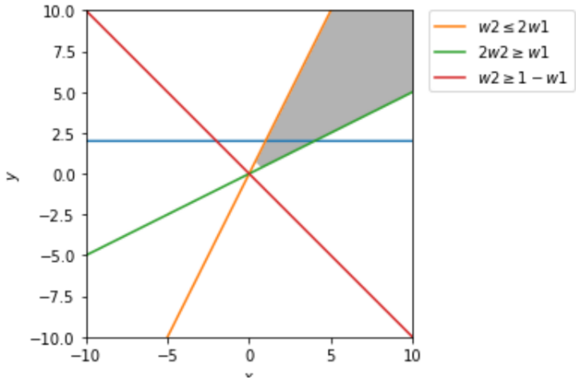

Figure 2: Región factible del problema dual

Vemos como la región factible del problema dual es no acotada. De acuerdo a la cuestión 2, usado la relación entre soluciones del problema primal-dual de la tabla 1, sabemos que por lo tanto **el problema primal es infeasible, es decir no tiene solución factible.**

References

[1] M S Bazaraa. *Nonlinear programming : theory and algorithms.* JohnWiley Sons, Hoboken, N.J, 3rd ed. edition, 2006.

[2] Mokhtar S Bazaraa, John J Jarvis, and Hanif D Sherali. *Linear programming and network flows.* Wiley, Somerset, 4th ed edition, 2011.

[3] Jorge Nocedal and Stephen J Wright. *Numerical Optimization.* Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer New York, New York, NY, second edition edition.