

# Tarea 1

## Análisis Numérico

Adryan Trejo Mendoza  
Daniel David Florez Bocanegra  
Juan Felipe Muriel Mosquera  
Maria Fernanda Castro Cano

7 de diciembre de 2024

### 1. Método del polinomio característico

El método del polinomio característico es una técnica algebraica para determinar los valores propios de una matriz cuadrada  $A$ . Este método se basa en construir el determinante de una matriz que relaciona a  $A$  con la matriz identidad  $I$  y la solución del polinomio característico.

#### 1.1. Formulación matemática

Un valor propio  $\lambda$  de una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n \geq 1$  cumple que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

donde  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  es el vector propio asociado. La ecuación puede reescribirse como  $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Para que esta ecuación tenga soluciones no triviales, es decir, aquellas donde  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , entonces la matriz

$$(A - \lambda I)$$

debe ser no invertible o también llamada singular. Una matriz es singular si y sólo si su determinante es nulo. Así pues, para encontrar los valores propios  $\lambda$  se resuelve

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

El determinante  $\det(A - \lambda I)$  es conocido como el polinomio característico  $p(\lambda)$  de grado  $n$  en  $\lambda$ , siendo  $n$  el tamaño de  $A$  y también la cantidad de raíces que tendrá el polinomio. El polinomio característico tiene la forma:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

El polinomio característico también puede expandirse según  $Tr(A)$ , la traza de  $A$ , que es la suma de sus componentes diagonales,

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

y por  $\det(A)$ . Además, su término principal es  $(-1)^n \lambda^n$  y el coeficiente de  $\lambda^{n-1}$  es  $\pm Tr(A)$ . La expansión del polinomio característico sería entonces:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} Tr(A) \lambda^{n-1} + c_{n-2} \lambda^{n-2} + \cdots + \det(A),$$

donde cada  $c_{n-2}, c_{n-3}, \cdots$  son los coeficientes intermedios y están determinados por los menores principales y otros elementos de la matriz. Por otra parte, luego de que se conocen los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$  los vectores propios asociados se obtienen resolviendo para cada  $\lambda_i$  el sistema homogéneo:

$$(A - \lambda_i I) \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

## 1.2. Justificación

El método del polinomio característico se justifica mediante las propiedades del determinante y los valores propios. Para que  $A - \lambda I$  sea singular (no invertible) su determinante debe ser cero, lo que asegura que el sistema homogéneo  $(A - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0}$  tenga soluciones no triviales. Por lo anterior, las raíces del polinomio característico coinciden con los valores propios de  $A$ .

## 1.3. Suposiciones necesarias para la convergencia

Para que el método del polinomio característico sea aplicable, se requieren las siguientes suposiciones:

- La matriz  $A$  debe ser cuadrada, pues solamente para matrices cuadradas se define el determinante.
- En cálculos numéricos, el método del polinomio característico puede ser sensible a errores de redondeo, especialmente para matrices de gran tamaño.
- Como se combina el método con el método de bisección y Gauss-Seidel se requiere comenzar con un intervalo inicial válido, lo cual asegurará la convergencia de la bisección hacia una raíz. A su vez, se debe establecer una tolerancia  $\epsilon$  que equilibre la precisión y eficacia del método, además de una buena estimación inicial para las iteraciones de Gauss-Seidel.

## 1.4. Análisis de error del método

El cálculo de valores propios mediante el polinomio característico se desarrolló combinando su funcionamiento con el método de bisección y para encontrar los vectores propios se usan las iteraciones del método Gauss-Seidel, por lo cual, este diseño del método está sujeto a varios tipos de errores. El cálculo del polinomio característico  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  introduce

pequeños errores numéricos acumulativos y su precisión depende de cómo se condicione la matriz  $A$ . El método de la bisección introduce errores propios de su funcionamiento: tiene convergencia lineal y su error absoluto final dependerá de la longitud del intervalo en la última iteración. Por su parte, la iteración con Gauss-Seidel para la búsqueda de vectores propios está limitado por el condicionamiento del sistema  $A - \lambda I$ , su convergencia es lineal y puede acumular errores de redondeo en cada iteración.

## 1.5. Paso a paso del método

1. Construir la matriz  $A - \lambda I$
2. Cálculo del determinante de  $A - \lambda I$  que genera el polinomio característico.
3. Se soluciona  $p(\lambda) = 0$  para encontrar los valores propios  $\lambda_i$ .
4. Determinar los vectores propios a través de  $(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$  para cada valor propio  $\lambda_i$ .

## 2. Método de la potencia

El método de la potencia es una técnica iterativa para aproximarnos al valor propio dominante, es decir, el mayor valor propio en valor absoluto, junto con su correspondiente vector propio. El método se basa en dada una matriz cuadrada  $A$  y un vector arbitrario  $x_0$ ,  $A^k x_0$  se aproxima al vector asociado al valor propio dominante cuando  $k \rightarrow \infty$ , mientras que el valor propio se aproximará con una sucesión definida por las componentes de los vectores resultantes de la sucesión  $\{A^k x_0\}_{k=1}^{\infty}$

### 2.1. Formulación matemática

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  una matriz cuadrada. Buscamos el valor propio dominante y su correspondiente vector propio, es decir, si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  son valores propios tales que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_m|$$

Buscamos  $\lambda_1$  y su respectivo vector propio asociado  $V_1$ . De este modo utilizaremos el método iterativo de la potencia, que se describe de la siguiente manera:

Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  un vector arbitrario y diferente del vector nulo, definimos la siguiente relación iterativa.

$$x_k = Ax_{k-1}$$

$$\lambda_n = \frac{x_{nj}}{x_{(n-1)j}} \text{ tal que } j \in \{1, \dots, m\} \text{ y } x_{(n-1)j} \neq 0$$

Siendo  $x_{nj}, x_{(n-1)j}$  las componentes  $j$ -ésimas de los vectores  $x_n$  y  $x_{n-1}$  correspondientemente. Luego se afirma que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = V_1 \text{ y } \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda_1$$

## 2.2. Justificación

Veamos la convergencia del método al valor propio y su vector propio asociado. Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  los valores propios de  $A$

Tenemos que  $x_k = Ax_{k-1} = A^k x_0$ . Como  $(V_1, V_2, \dots, V_m)$  forman una base ortogonal, entonces podemos reescribir cualquier vector como combinación lineal de estos vectores, es decir, existen  $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$  tales que.

$$x_0 = c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_m V_m$$

Ahora reemplacemos en  $A^k x_0$ .

$$\begin{aligned} A^k x_0 &= A^k (c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_m V_m) \\ &= c_1 A^k V_1 + c_2 A^k V_2 + \dots + c_m A^k V_m \\ &= c_1 \lambda_1^k V_1 + c_2 \lambda_2^k V_2 + \dots + c_m \lambda_m^k V_m \\ &= \lambda_1^k (c_1 V_1 + c_2 (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k V_2 + \dots + c_m (\frac{\lambda_m}{\lambda_1})^k V_m) \end{aligned}$$

Aplicando límite cuando  $k \rightarrow \infty$  obtenemos.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^k (c_1 V_1 + c_2 (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k V_2 + \dots + c_m (\frac{\lambda_m}{\lambda_1})^k V_m) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^k c_1 V_1 \end{aligned}$$

Notese que esto último se da ya que  $(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}) < 1, i \in \{1, \dots, m\}$ , porque  $\lambda_1$  es el valor propio dominante de la matriz  $A$ , y entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k = 0$ . Luego se concluye que el método efectivamente converge a lo esperado.

## 2.3. Suposiciones necesarias para la convergencia

- La matriz  $A$  debe ser cuadrada, pues solamente para matrices cuadradas se define el determinante.
- El vector  $x_0 \neq \vec{0}$ .
- Supongamos que  $x_{nj} \neq 0 \forall n$  y  $j \in \{1, \dots, m\}$ . De este modo no incurriremos en divisiones por cero.
- $A$  tiene  $m$  valores propios y sus correspondientes vectores propios.
- $A$  tiene exactamente un valor propio dominante.
- Las entradas de la matriz y las componentes del vector son enteras.

## 2.4. Análisis de error del método

El error del método en la iteración  $k$  depende de qué tan pequeño es  $(\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^k$  para  $j \in \{1, \dots, m\}$ , a medida que  $k$  aumenta, el error disminuye.

A la hora de la implementación el error se puede ver reflejado a la hora de normalizar el vector y al momento de calcular  $\lambda$ , lo que sería un error de truncación por la representación del valor en número máquina. Se debe tener en cuenta que en el momento de la implementación se optó por hacer una ligera modificación: normalizar el vector en cada iteración para economía a la hora de computar. Más específicamente, se eligió usar el método de potencias normalizado.

## 2.5. Paso a paso del método

Dados  $A$  y  $tol$ =Tolerancia

1. Escoger  $x \in \mathbb{R}^m$  un vector.
2. Calcular  $y = Ax$ .
3. Definir  $\lambda = \frac{y_j}{x_j}$ , con  $x_j$  y  $y_j$  las componentes  $j$ -ésimas de los vectores correspondientes.
4. Se calcula  $\|y - \lambda x\|_\infty$
5.
  - Si  $\|y - \lambda x\|_\infty < tol$  imprimir  $\lambda$  y  $y$ .
  - Si no, entonces definir  $x = y$  para realizar otra iteración desde el paso 2.

## 3. Método de descomposición QR

Es una técnica de reducción matricial que permite determinar simultáneamente todos los vectores y valores propios de una matriz simétrica  $A$  a través de iteraciones donde se obtendrá una matriz triangular superior cuya diagonal converge hacia los valores propios de  $A$ . La idea es descomponer a  $A$  como  $QR$  donde  $Q$  es una matriz ortogonal y  $R$  una matriz triangular superior;  $A$  quedaría representada como  $A = QR$ .

### 3.1. Formulación matemática

Dada una matriz simétrica  $A$  se puede expresar como  $A = QR$  donde  $Q$  es una matriz ortogonal  $Q^T Q = I$ ,  $Q^T$  es la matriz traspuesta de  $Q$  y  $R$  es una matriz triangular superior (es decir, si todos sus elementos debajo de la diagonal principal son iguales a cero). Con fines de practicidad, se comienza con la matriz simétrica en forma tridiagonal (una matriz cuyos elementos son solo distintos de cero en la diagonal principal y las diagonales adyacentes por encima y por debajo de esta), si esta no es la forma de matriz entonces se aplica el método de Householder para calcular la matriz simétrica tridiagonal similar a la matriz dada.

En primer lugar, se asigna  $A^{(0)} = A$ . Para calcular  $Q$  y  $R$  que cumplan con lo requerido se tienen los siguientes métodos principales:

- **Método de Gram-Schmidt.** El método de Gram-Schmidt es un proceso que ortogonaliza las columnas de  $A$  para formar  $Q$  y  $R$ .

- **Método de transformaciones de Householder.** Este método construye a  $Q$  como el conjunto de matrices de reflexión ( $H_k$ ) que transforman cada columna de  $A$  en una base ortogonal. Este método también sirve en caso de que  $A$  no esté en una forma directamente adecuada para el método QR y se transforma en una matriz simétrica tridiagonal.
- **Rotaciones de Givens.** Este método utiliza rotaciones planas para anular elementos específicos de  $A$  y de esta manera ir construyendo gradualmente a  $Q$  y a  $R$ . Este método también sirve en caso de que  $A$  no esté en una forma directamente adecuada para el método QR como resultado se transforma en una matriz de Heissenberg o tridiagonal.

Ya teniendo  $QR$  se realiza la iteración:  $A^{(k)} = Q^{(k)} R^{(k)}$  y se actualiza  $A^{(k+1)} = R^{(k)} Q^{(k)}$ . Se repiten los pasos hasta que  $A^{(k+1)}$  se acerque a una matriz triangular superior. Los valores propios buscados se encuentran en la diagonal de  $A^{(k+1)}$ . Por otro lado, una vez que  $A^{(k+1)}$  converge se puede reconstruir una base de vectores propios a partir de las columnas de los productos acumulados de  $Q^{(k)}$  que se generaron durante las iteraciones.

### 3.2. Justificación

El método QR se fundamenta a través de varios teoremas y resultados que garantizan su validez.

- **Matriz semejante.** Dos matrices  $A$  y  $B$  son semejantes si existe una matriz invertible  $P$  tal que  $B = P^{-1}AP$ . Las matrices similares tienen los mismos valores propios. Esto fundamenta el método QR pues en cada iteración se transforma la matriz  $A^{(k)}$  en  $Q^{(k)T} A^{(k)} Q^{(k)}$ , como  $Q$  es ortogonal se asegura que  $Q^{(k)T} = Q^{(k)-1}$  lo cual garantiza que los valores propios de  $A$  no varíen a lo largo de las iteraciones.
- **Base de vectores propios.** El teorema de descomposición espectral establece que existe una base ortogonal que consiste en los vectores propios de  $A$ . En este contexto, las matrices  $Q^{(k)}$  acumuladas en el proceso forman una base ortogonal de vectores propios.
- **Teorema de Schur.** Siendo  $A$  una matriz arbitraria, las matrices  $A^{(k)}$  convergen a una forma triangular superior conocida como la forma Schur de  $A$  y así los valores propios de  $A$  aparecen en la diagonal.
- **Matriz de Hessenberg.** Es una matriz casi triangular, una matriz superior de Hessenberg tiene todos ceros por debajo de la primera subdiagonal, y una matriz inferior de Hessenberg tiene todos ceros por encima de la primera superdiagonal. En el contexto del algoritmo QR,  $Q^{(1)}$  es una matriz de Hessenberg superior. En consecuencia,  $A^{(2)} = Q^{(1)} R^{(1)}$  también es una matriz de Hessenberg superior porque multiplicar  $Q^{(1)}$  a la izquierda por la matriz triangular superior  $R^{(1)}$  no afecta a las entradas del triángulo inferior. Pero ya se sabe que es simétrica, por lo que  $A^{(2)}$  es tridiagonal. Las entradas fuera de la diagonal de  $A^{(2)}$  serán generalmente más pequeñas en magnitud que las entradas correspondientes de  $A^{(1)}$ , por lo que  $A^{(2)}$  está más cerca de ser una matriz diagonal que  $A^{(1)}$ . El proceso se repite para construir  $A^{(3)}, A^{(4)}, \dots$  hasta obtener una convergencia satisfactoria.

- **Técnica del desplazamiento (shifting).** Para acelerar la convergencia del método QR se incorporan desplazamientos. Consiste en restar un escalar  $\sigma$  que es cercano a algún valor propio estimado de la diagonal de  $A^{(k)}$  antes de la descomposición QR y luego se suma nuevamente. Así se logra una convergencia más rápida hacia los valores propios.

### 3.3. Suposiciones necesarias para la convergencia

- **Forma inicial de la matriz  $A$ .** Para este método es útil transformar la matriz  $A$ , según como esta sea, a una forma de Hessenberg (casi triangular) o a una forma tri-diagonal previo a aplicar el algoritmo QR. Esto es porque ambas formas preservan los valores propios.
- **Elección de los desplazamientos ( $\sigma$ ).** Se reescribe la matriz como  $A^{(k)} - \sigma I = Q^{(k)} R^{(k)}$  donde  $\sigma$  es el valor de desplazamiento, es decir, un escalar cercano a algún valor propio. Y la nueva matriz para la siguiente iteración es  $A^{(k+1)} = R^{(k)} Q^{(k)} + \sigma I$ . Sin desplazamientos, la convergencia puede ser extremadamente lenta, es especial si los valores propios están agrupados o muy cercanos entre sí.
- **Tasa de convergencia.** Según la separación de los valores propios se determina la tasa de convergencia que depende de  $|(\lambda_j - \sigma)/(\lambda_k - \sigma)|$  donde  $\lambda_j$  y  $\lambda_k$  son valores propios de  $A$ . En efecto, elegir un  $\sigma$  cercano a un valor propio acelerará la convergencia. Con esta técnica de desplazamiento, y bajo ciertas condiciones (como por ejemplo, que los valores propios de  $A$  sean distintos entre sí y que el ( $\sigma$ ) sea elegido preferiblemente cercano a uno de los valores propios dominantes de  $A$ ), la convergencia podría llegar a ser cúbica.
- **Verificación de la convergencia.** Para revisar si efectivamente  $A^{(k+1)}$  se aproxima a una matriz triangular superior se verifican si las entradas subdiagonales  $[A^{(k+1)}]_{i,i-1}$  son menores que un umbral de tolerancia  $\epsilon$ .

### 3.4. Análisis de error del método

En cada iteración, al calcular  $Q$  y  $R$  se pueden generar pequeños errores acumulativos. Y en caso de que  $Q$  no sea totalmente ortogonal por el redondeo es posible que la preservación de los valores propios se vea comprometida. Además, dado que el método QR realiza múltiples iteraciones, los errores de redondeo de cada iteración se acumulan y se puede afectar la convergencia. El uso de los desplazamientos ( $\sigma$ ) mejora la convergencia pero si no se elige correctamente entonces el número de iteraciones puede aumentar. En la implementación el método converge y arroja todos los valores propios haciéndolo extremadamente útil, sin embargo, no se encuentra ninguno de los vectores propios asociados pues se debe implementar un método extra para hallarlos.

### 3.5. Paso a paso del método

1. Sea  $A$  una matriz. Verificar si  $A$  está en la forma adecuada:

- Forma de Heissenberg (si  $A$  es una matriz general).
  - Forma tridiagonal (si  $A$  es una matriz simétrica).
  - Si no está en ninguna de estas formas, entonces aplicar una transformación de Householder o Rotaciones de Givens para llevarla a las formas anteriores.
2. Calcular la descomposición QR de  $A^{(k)}$  en cada iteración:  $A^{(k)} = Q^{(k)} R^{(k)}$  donde  $Q^{(k)}$  es matriz ortogonal y  $R^{(k)}$  es triangular superior. Para hallarlas se pueden usar Transformaciones de Householder o Gram-Schmidt.
  3. Construir  $A^{(k+1)}$  con  $A^{(k+1)} = R^{(k)} Q^{(k)}$ .
  4. Evaluar las entradas subdiagonales de  $A^{(k+1)}$ . En caso de que  $[A^{(k+1)}]_{i,i-1} < \epsilon$ , entonces el método ha convergido. Se ajusta el  $\epsilon$  según lo que se requiera.
  5. Si se quiere acelerar la convergencia usar la técnica de los desplazamientos:
    - a) Calcular QR para  $A^{(k)} - \sigma I = Q^{(k)} R^{(k)}$  donde  $\sigma$  es el valor de desplazamiento, es decir, un escalar cercano a algún valor propio.
    - b) Construir  $A^{(k+1)}$  como  $A^{(k+1)} = R^{(k)} Q^{(k)} + \sigma I$ .
  6. Continuar con los pasos del 2 hasta el 5 hasta que  $A^{(k)}$  converja a una matriz triangular superior  $T$ :  $A^{(k)} \longrightarrow T$ . Los valores propios buscados son las entradas de la diagonal de  $T$ .
  7. Hallar los vectores propios acumulando los productos de las matrices  $Q^{(k)}$  en cada iteración.