

V0

## Beispielversuch: "Torsionsmodul"

AUTOR A

authorA@uni-kassel.de

MatrNr.: 123456789

AUTOR B

authorB@uni-kassel.de

MatrNr.: 234567890

AUTOR C

authorC@uni-kassel.de

MatrNr.: 345678901

Durchführung: Datum

Abgabe: Datum

Betreuer: Arne Vereijken / Adrian Krone  
Universität Kassel – Institut für Physik und CINSaT

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Grundlagen zum Versuch</b>	<b>3</b>
<b>2 Messprotokoll</b>	<b>4</b>
2.1 Versuchsdurchführung . . . . .	4
2.2 Messwerte . . . . .	5
<b>3 Auswertung</b>	<b>6</b>
<b>4 Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>7</b>
<b>Literatur</b>	<b>8</b>

# 1 Grundlagen zum Versuch

Bei diesem Experiment wird ein Drehpendel aufgebaut, bei dem eine Masse symmetrisch an einem Ende eines Metalldrahts aufgehängt ist. Die Pendelbewegung entsteht nach einer anfänglichen Verdrillung des Drahtes um seine Längsachse durch die rücktreibende Kraft, die aus der Torsion eines Drahtes entstammt. Solange bei der Verdrillung nicht die Elastizitätsgrenze des Materials überschritten wird, versucht der Draht, wenn keine Kraft mehr auf ihn wirkt, seine ursprüngliche Form wieder anzunehmen. Die Energie zum Erzeugen des dabei wirkenden Drehmoments ist die gleiche, welche zuvor für die Verdrillung des Drahtes aufgewandt wurde und zwischenzeitlich als elastische Energie im Draht gespeichert war. Das aus dieser Energie entstehende Drehmoment  $M$  ist als

$$M = -D \cdot \varphi, \quad (1)$$

beschrieben, wobei  $\varphi$  den Winkel der Verdrillung und  $D$  die Federkonstante darstellt [1]. Letztere ergibt sich bei den gewählten Versuchsbedingungen zu

$$D = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^4}{l} \cdot G \quad \Leftrightarrow \quad G = \frac{2 \cdot l \cdot D}{\pi \cdot r^4}. \quad (2)$$

Hierbei ist  $G$  das Torsionsmodul des Drahtes, welches eine materialspezifische Konstante darstellt,  $l$  die Länge des Drahts und  $r$  dessen Radius [3].

Die Geschwindigkeit, mit der die Ruhelage bei der Pendelbewegung erreicht wird, ist davon abhängig, wie hoch die Trägheit  $J$  des Pendels ist. Je weiter die Massenpunkte des Pendels von der Rotationsachse entfernt sind, desto höher ist das Trägheitsmoment des Pendels und umso geringer ist die Beschleunigung in Richtung der Ruhelage. Dies lässt sich ebenfalls mit einem Drehmoment beschreiben [3]:

$$M = J \cdot \ddot{\varphi}. \quad (3)$$

Aus den beiden Gleichungen (1) und (3) für das Drehmoment ergibt sich die Differentialgleichung der Schwingung zu

$$\ddot{\varphi} = -\frac{D}{J} \cdot \varphi. \quad (4)$$

Die Lösung dieser Gleichung beschreibt die Schwingung des Pendels um die Ruhelage. Dabei wird periodisch alle elastische Energie in kinetische Energie umgewandelt und umgekehrt. Diese Pendelbewegung um die Ruhelage findet solange statt, wie nicht alle Energie in Reibungsarbeit umgewandelt worden ist. Bei der Schwingung beträgt die Schwingungsdauer  $T$  [1]:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}} \quad \Leftrightarrow \quad J = \frac{T^2 \cdot D}{4 \cdot \pi^2}, \quad \Leftrightarrow \quad D = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot J}{T^2}. \quad (5)$$

Auf Basis dieser Gleichung ist es theoretisch möglich, die gesuchte Federkonstante zu berechnen, jedoch ist das Trägheitsmoment  $J_0$  des sich drehenden Gestänges am Ende des Drahtes nicht bekannt. Deswegen werden zwei Messungen mit zusätzlichen Massen,

also verschiedenen Trägheitsmomenten  $J_1$  und  $J_2$ , durchgeführt. Dabei gilt nach dem Steiner'schen Satz  $J_i = J_0 + m \cdot R^2$  [2]. Werden die Gleichungen für die veränderten Massen ins Verhältnis zueinander gesetzt, kann das unbekannte Drehmoment des Gestänges eliminiert werden:

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot J_1}{T_1^2} & D &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot J_2}{T_2^2} \\
 T_2^2 - T_1^2 &= 4\pi^2 \cdot \left( \frac{J_0 + m \cdot R_2^2}{D} - \frac{J_0 + m \cdot R_1^2}{D} \right) \\
 &= \frac{4\pi^2 m}{D} \cdot (R_2^2 - R_1^2) \\
 D &= 4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{T_2^2 - T_1^2}, \tag{6}
 \end{aligned}$$

wobei  $R$  den Abstand der Masse  $m$  zur Rotationsachse darstellt. Mit einer dritten Messung ohne Zusatzgewichte lässt sich über die Schwingungsdauer das Trägheitsmoment  $J_0$  des Pendels nach (5) abschließend bestimmen.

## 2 Messprotokoll

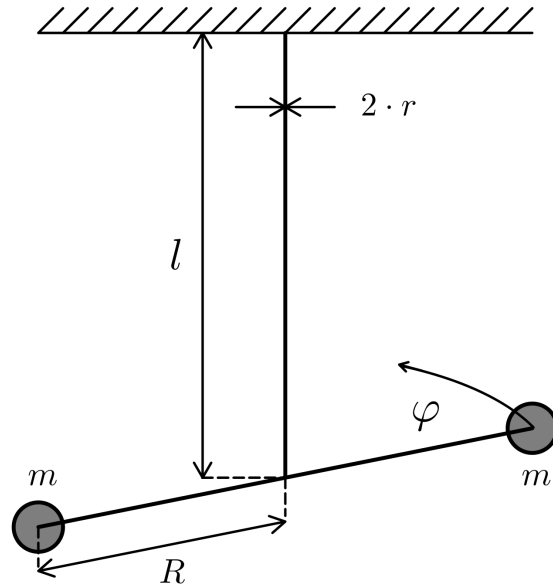
*In diesem Teil wird das Messprotokoll aus dem Original in ein ordentliches Format gebracht<sup>1</sup>.*

### 2.1 Versuchsdurchführung

Zuerst wurden die Abmessungen des Pendels sowie die für die Auswertung erforderlichen anderen Größen bestimmt (siehe Abb. 1). Zu den gemessenen Werten (siehe Tab. 1 und 2) wurde jeweils eine Messunsicherheit abgeschätzt: Die Massen  $m$ , die während der Versuchsdurchführung am Pendel angebracht wurde, wurden mit einer elektronischen Waage des Typs „Kern CB12K1N“ gewogen, welche laut Hersteller eine Unsicherheit von 1 g hat. Die Unsicherheit der Zeitmessung mit einer Stoppuhr ist dominiert von der Fähigkeit des Experimentators und wurde nach mehreren kurzen Testmessungen mit 1 s abgeschätzt. Die Abmessungen des Pendels wurden mit einem Bandmaß bestimmt, für welches eine Unsicherheit von 3 mm angenommen wird. Für die Bestimmung des Durchmessers des Drahtes wurde eine Mikrometerschraube verwendet, deren Bezeichnung auf Grund von häufiger Benutzung nicht mehr erkennbar war, weshalb die Unsicherheit etwas größer als üblich mit 20 µm abgeschätzt wird.

Bei der Durchführung wurde wie folgt vorgegangen: Zuerst wurde die Ruhelage des Pendels bestimmt. Von dort aus wurde dem Pendel eine Anfangsamplitude von einer Umdrehung gegeben. Bei Starten des Pendels aus dieser Position erfuhr es leichte vertikale Schwingungen um die horizontale Achse, welche über die Dauern der einzelnen Messungen bestehen blieben. Die Zeitmessung erfolgte an demjenigen Umkehrpunkt der Pendelbewegung, bei dem die Pendelbewegung startete.

<sup>1</sup>Scan / Foto des Original Messprotokolls vom Versuchstag im Anhang



**Abbildung 1:** Skizze des Torsionspendels mit den Messgrößen: Länge des Drahtes  $l$ , Durchmesser des Drahtes  $d = 2 \cdot r$ , Masse der Gewichte  $m$  und Position der Gewichte  $R$ . Die Rotationsachse verläuft durch den Draht mit der eingezeichneten Auslenkung  $\varphi$ .

Der Messzeitraum am Pendel umfasste 30 Schwingungen bei der Massepositionierung am äußeren Rand des Pendels. Bei den anderen Messungen wurde nur über einen Zeitraum von 25 Schwingungen gemessen, wobei versehentlich jeweils eine Schwingung zusätzlich gezählt und somit 26 Schwingungen aufgenommen wurden. Die Reduzierung der Schwingungsanzahl erfolgte aus Zeitgründen. Aus demselben Grund wurden pro Positionierung der Massen nur zwei statt drei Messungen durchgeführt.

Während jeder Messung der Schwingungsdauern war zu beobachten, dass die Amplitude der Pendelbewegung über den Messzeitraum kontinuierlich abgenommen hat, sodass sie zum Ende einer jeden Messung um ca.  $180^\circ$  reduziert war. Dies entspricht ca. 50% der Startamplitude.

## 2.2 Messwerte

Länge $l$ / m	Durchmesser $d$ / m
$1,500 \pm 0,003$	$(5,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$

**Tabelle 1:** Gemessene Eigenschaften des Drahtes mit abgeschätzten Unsicherheiten.

Messung	Masse $m$ / kg	Position $R$ / m	$t$ / s	Perioden $n$
01	-	-	$755,53 \pm 1,00$	26
02			$726,29 \pm 1,00$	25
11	$0,393 \pm 0,001$	$0,045 \pm 0,003$	$806,59 \pm 1,00$	26
12			$775,66 \pm 1,00$	25
21		$0,200 \pm 0,003$	$1637,8 \pm 1,0$	30
22			$1638,0 \pm 1,0$	30

**Tabelle 2:** Gemessene Zeiten der sechs Einzelmessungen. Bei den Messungen 01 und 02 wurden keine Massen verwendet. Bei den anderen Messungen wurden je zwei Massen mit Masse  $m$  verwendet. Für die Messungen 1J und 2J wurden verschiedene Positionen  $R$  der Massen eingestellt.

### 3 Auswertung

Die Schwingungsdauern

$$T_i = \frac{1}{2} \left( \frac{t_{i1}}{n_{i1}} + \frac{t_{i2}}{n_{i2}} \right) \quad (7)$$

ergeben sich aus den Messgrößen  $t_{i1}$  und  $t_{i2}$  der beiden Einzelmessungen über alle Perioden, jeweils dividiert durch die Zahl der Schwingungen pro Messung mit der jeweiligen Unsicherheit

$$\sigma_{T_i} = \sqrt{\frac{\sigma_{t_{i1}}^2}{4n_{i1}^2} + \frac{\sigma_{t_{i2}}^2}{4n_{i2}^2}}, \quad (8)$$

welche nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz bestimmt wird. Durch Einsetzen der gemessenen Werte aus Tabelle 2 ergibt sich

$$T_0 = (29,06 \pm 0,03) \text{ s}$$

$$T_1 = (31,02 \pm 0,03) \text{ s}$$

$$T_2 = (54,60 \pm 0,03) \text{ s}.$$

Die Federkonstante lässt sich nach Gleichung (6) bestimmen

$$D = (2,92 \pm 0,10) \cdot 10^{-4} \text{ N m}$$

mit der Unsicherheit<sup>2</sup>

$$\sigma_D = \sqrt{\left( \frac{\partial D}{\partial m} \cdot \sigma_m \right)^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial R_1} \cdot \sigma_{R_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial R_2} \cdot \sigma_{R_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial T_1} \cdot \sigma_{T_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial T_2} \cdot \sigma_{T_2} \right)^2}$$

<sup>2</sup>Dies ist erneut die Gaußsche Fehlerfortpflanzung. Diese muss nicht so ausführlich hingeschrieben werden wie hier.

und den jeweiligen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial m} &= 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \\ \frac{\partial D}{\partial R_1} &= 4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \frac{(-2) \cdot R_1}{T_2^2 - T_1^2} \\ \frac{\partial D}{\partial R_2} &= 4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \frac{2 \cdot R_2}{T_2^2 - T_1^2} \\ \frac{\partial D}{\partial T_1} &= -4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{(T_2^2 - T_1^2)^2} \cdot (-2) \cdot T_1 \\ \frac{\partial D}{\partial T_2} &= -4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{(T_2^2 - T_1^2)^2} \cdot 2 \cdot T_2.\end{aligned}$$

Damit ist es möglich das Torsionsmodul des Stahldrahtes bzw. die Verdrillung nach Gleichung (2) zu ermitteln:

$$G = (7,1 \pm 1,2) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Dabei wird die Unsicherheit mit

$$\sigma_G = \frac{2}{\pi} \sqrt{\left(\frac{l}{r^4} \cdot \sigma_D\right)^2 + \left(\frac{D}{r^4} \cdot \sigma_l\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot D \cdot l}{r^5} \cdot \sigma_r\right)^2}$$

fortgepflanzt. Mit der Messung ohne zusätzliche Massen  $T_0$ , der Gleichung (5) und der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_J = \sqrt{\left(\frac{T_0^2}{4\pi^2} \cdot \sigma_D\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot T_0 \cdot D}{4\pi^2} \cdot \sigma_{T_0}\right)^2}$$

wird das Trägheitsmoment des Pendels bestimmt:

$$J = (6,24 \pm 0,21) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

## 4 Zusammenfassung und Diskussion

Aus den durchgeführten Messungen haben sich die folgenden Größen für das Torsionspendel ergeben:

$$D = (2,92 \pm 0,10) \cdot 10^{-4} \text{ N m}$$

$$G = (7,1 \pm 1,2) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$J = (6,24 \pm 0,21) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Einen Vergleichswert aus der Literatur gibt es auf Grund des spezifischen Aufbaus des Experiments nur für das Torsionsmodul des Stahls. So findet sich in [2]: „ $\alpha$ -Eisen:

$G = 0,84 \cdot 10^4 \text{ kp/mm}^2$ “. Dies entspricht einem Wert von  $G = 7,46 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ , was innerhalb einer Standardabweichung des aus den Messungen bestimmten Wertes liegt.

Die relativ hohe Fehlertoleranz des experimentell bestimmten Torsionsmoduls ist in der Hauptsache durch die Genauigkeit der Messung des Drahtdurchmessers verursacht. Für eine präzisere Bestimmung des Torsionsmoduls mit dem verwendeten Pendel, müsste der Durchmesser mit einer genaueren Mikrometerschraube gemessen werden.

## Literatur

- [1] Paul A. Tipler und Gene Mosca. *Physik: für Wissenschaftler und Ingenieure*. Hrsg. von Jenny Wagner. Springer Berlin Heidelberg, 2015. ISBN: 978-3-642-54166-7. DOI: 10.1007/978-3-642-54166-7. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-54166-7>.
- [2] Wilhelm Walcher. *Praktikum der Physik*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2004. ISBN: 978-3-322-94128-2. DOI: 10.1007/978-3-322-94128-2. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-322-94128-2>.
- [3] Wilhelm H. Westphal. *Physikalisches Praktikum: Eine Sammlung von Übungsaufgaben mit einer Einführung in die Grundlagen des physikalischen Messens*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1971. ISBN: 978-3-663-01918-3. DOI: 10.1007/978-3-663-01918-3. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-663-01918-3>.