Outline

光(電磁波)是物質還是能量？

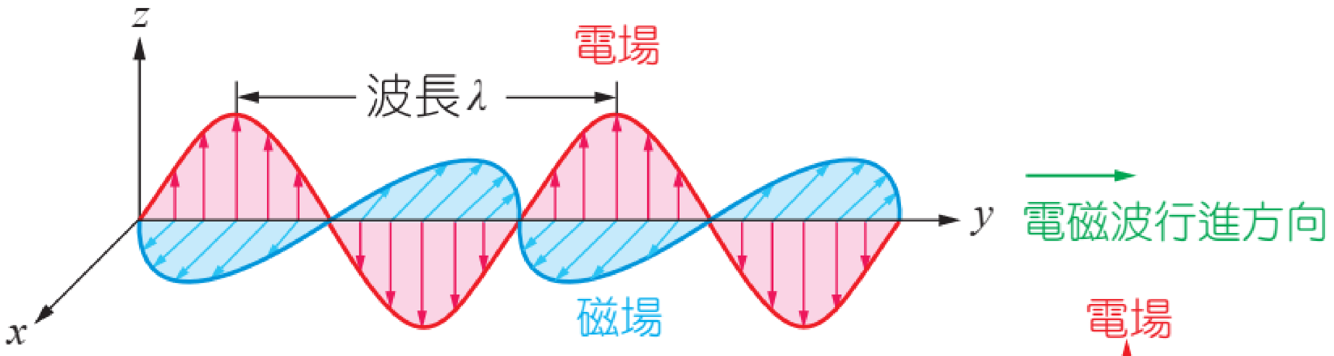
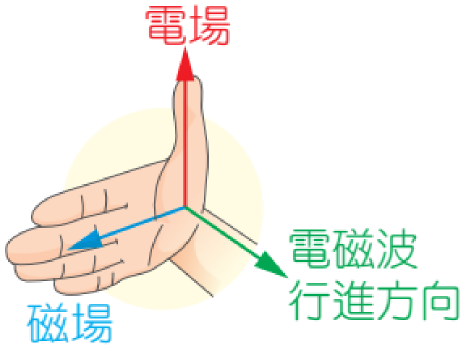


圖 4-21　電磁波示意圖。
電場、磁場及行進方向三者互相垂直，且可用右手（開掌）定則表達三者的關係。



MAXWELL

$\nabla \cdot E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$：高斯定律

$\nabla \cdot B = 0$：高斯磁定律

$\nabla \times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$：法拉第電磁感應定律

$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t}$：馬克士威-安培定律

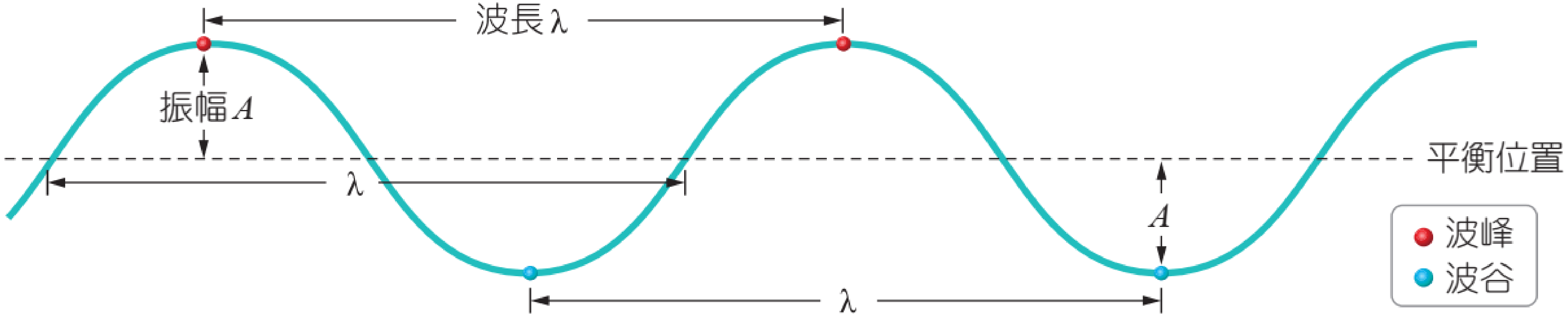
波動

波長

波速 $v = \dfrac{\lambda}{T} = f\lambda$

週期 頻率

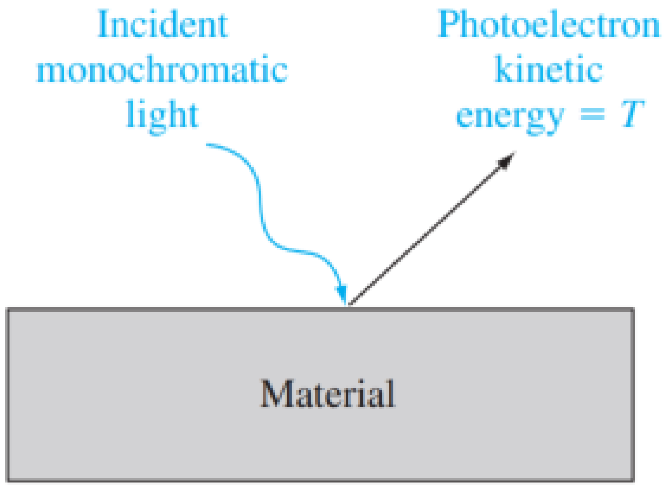
波數 $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

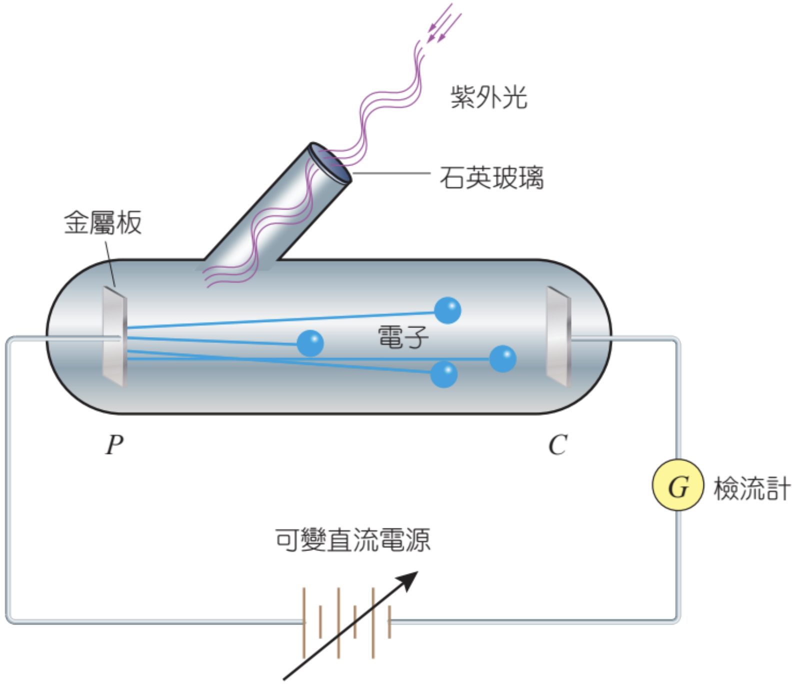


光電效應 Photoelectric Effect

光電效應特殊的性質無法以古典物理解釋。古典認為：

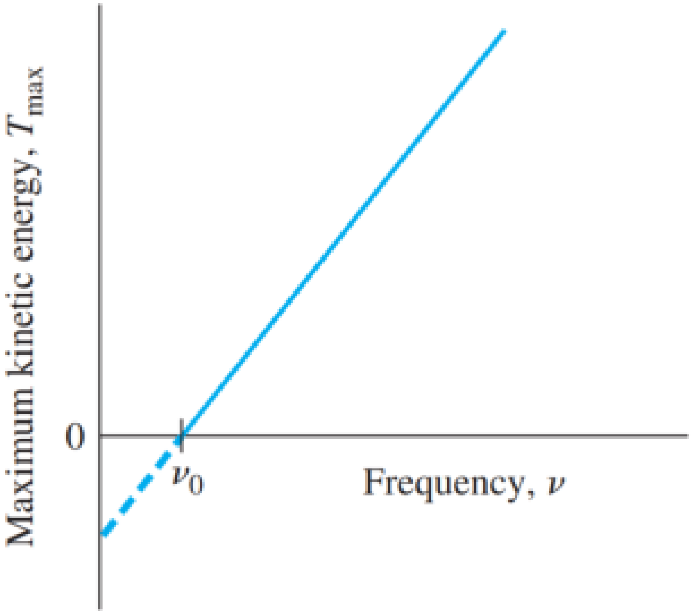
- 光是電磁波，光的強度與電磁波的振幅有關，金屬上的電子由電磁波「搖晃」而出，故光強度愈大，搖晃出的電子動能應愈大；電子動能應與光的頻率無關，只要照射時間夠長，應能累積足夠能量使光電子釋出
- 但這樣的解釋與實驗結果並不一致。





光電效應 Photoelectric Effect

- 為了解釋光電效應，1905年愛因斯坦提出光必須視為由一顆顆的粒子所組成，稱之為光量子，後來被稱為光子(photon)。
- 光子以光速(c = 3x10^8 m/s)前進，其能量與光的頻率成正比，且無法分割。單顆光子的能量為 $E = h\nu = \hbar\omega$



光子頻率

Kinetic energy
(動能)

$$h\nu = W + T_{max}$$

普朗克常數
$6.625 \cdot 10^{-34}$

Work function
(功函數)

Example 2.1 Photon Energy

Objective: Calculate the photon energy corresponding to a particular wavelength.

Consider an x-ray with a wavelength of $\lambda = 0.708 \times 10^{-8}$ cm.

Example 2.1 Photon Energy

Objective: Calculate the photon energy corresponding to a particular wavelength.

Consider an x-ray with a wavelength of $\lambda = 0.708 \times 10^{-8}$ cm.

使用物理 m(公尺) k (公斤) s(秒) 制，0.708×10^{-8} cm = 0.708×10^{-10} m

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{\left(6.625 \cdot 10^{-34}\right)\left(3 \cdot 10^{8}\right)}{0.708 \cdot 10^{-10}} = 2.81 \cdot 10^{-15} \quad \text{J}$$

$$E = \frac{2.81 \cdot 10^{-15}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 1.75 \cdot 10^{4} \quad \text{eV}$$

Note: 1 eV = 1.6×10^{-19} C $\times$ 1 V = 1.6×10^{-19} Joule

物質波 Matter wave

- 光子的理論提出後20年，科學界已逐漸接受光的粒子性時，1924年法國人德布羅意提出不僅光有波動、粒子的雙重特性，連粒子也具有波動性，並稱之為「物質波」。
- 物質與波動的轉換關係為 $\lambda = \frac{h}{p}$

物質波波長 $\lambda = \dfrac{h}{p}$

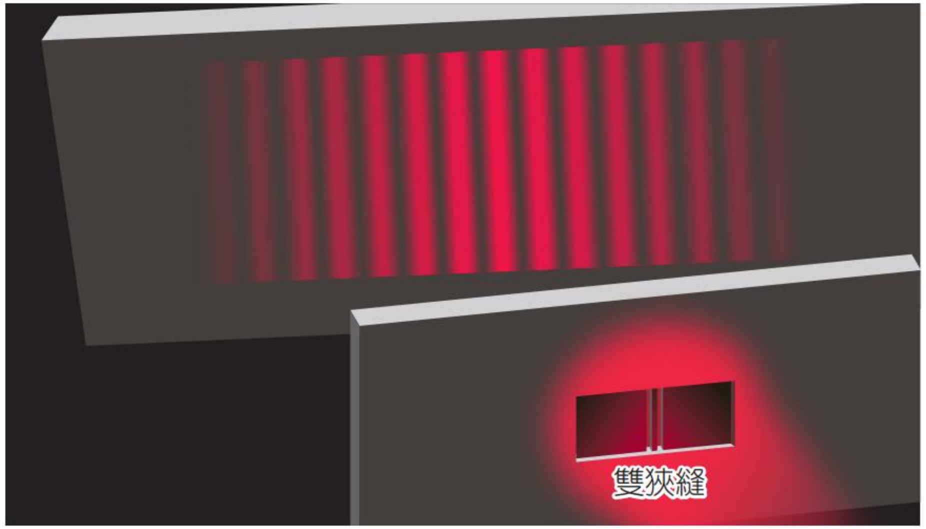
物質波波數 $k = \dfrac{p}{\hbar}$

Note:
$p = mv$
動量=質量×速度

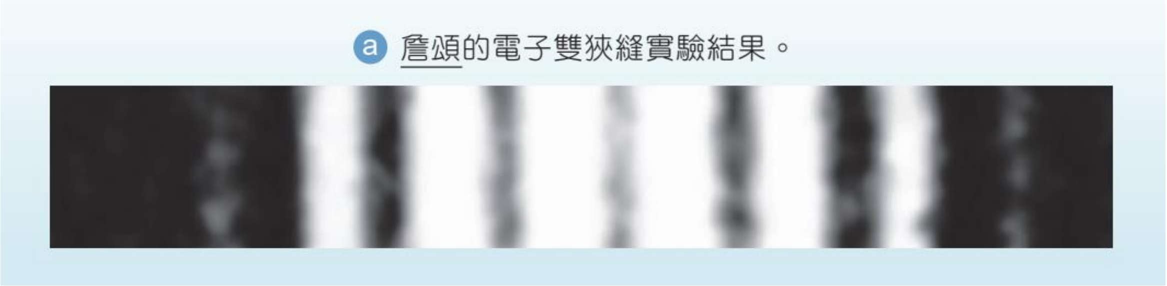
電子的雙狹縫干涉實驗

- 雙狹縫干涉實驗是光具波動性的代表性實驗，如果粒子也有波動性，那麼以粒子束取代光源進行雙狹縫干涉實驗應可以得到類似的結果。
- 德國人詹頌(Claus Jönsson,1930 ~)在1959年完成了這個實驗。證明了粒子具有波動性。

雷射光的雙狹縫干涉



電子的雙狹縫干涉



Example 2.2 de Broglie wavelength

Objective: Calculate the de Broglie wavelength of a particle.

Consider an electron traveling at a velocity of 10^7 cm/s $= 10^5$ m/s.

Example 2.2 de Broglie wavelength

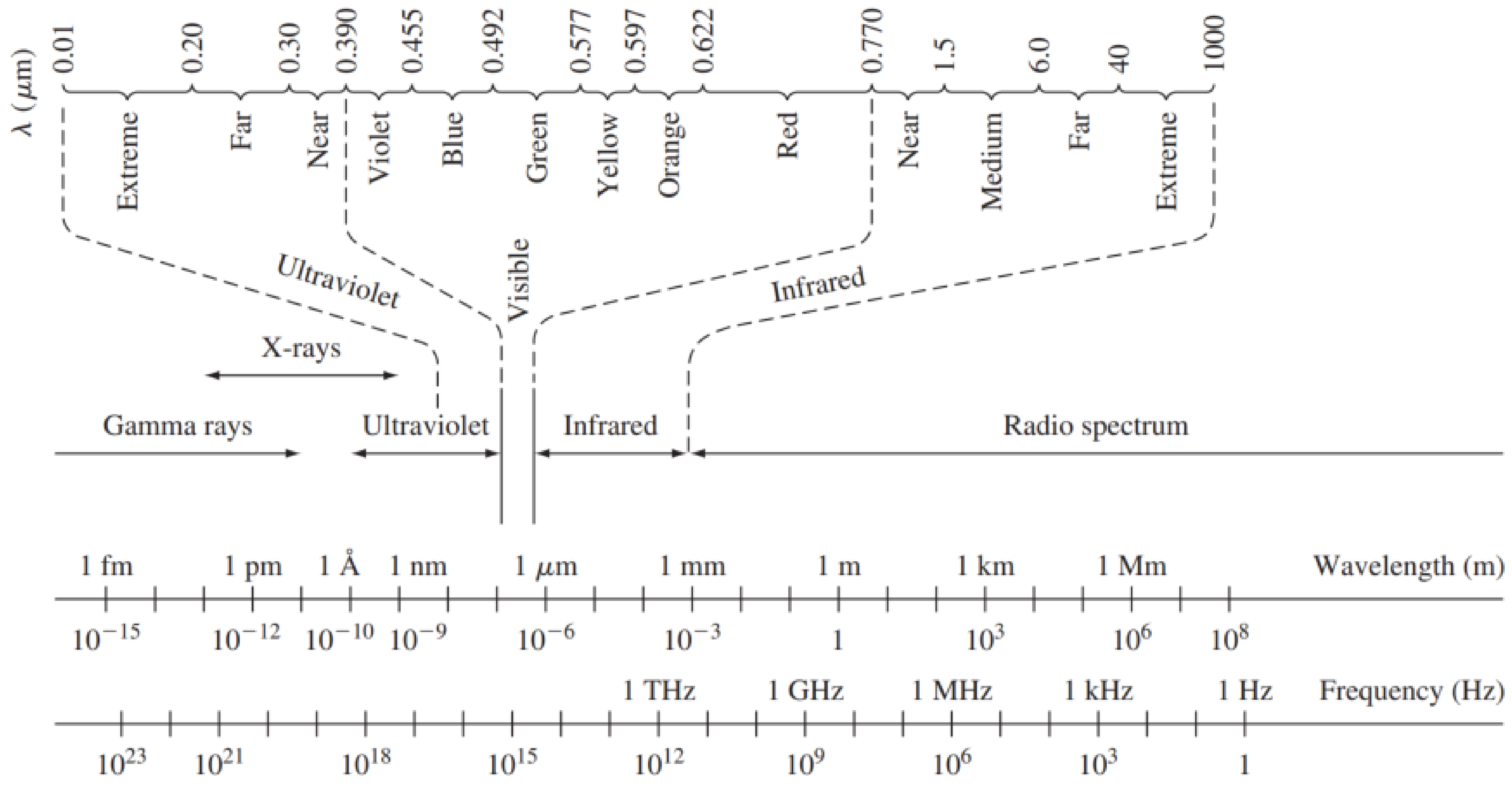
Objective: Calculate the de Broglie wavelength of a particle.

Consider an electron traveling at a velocity of 10^7 cm/s $= 10^5$ m/s.

$$p = mv = \left(9.11\times10^{-31}\right)\left(10^{5}\right) = 9.11\times10^{-26}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.625\times10^{-34}}{9.11\times10^{-26}} = 7.27 \quad \text{nm}$$

電磁波頻譜

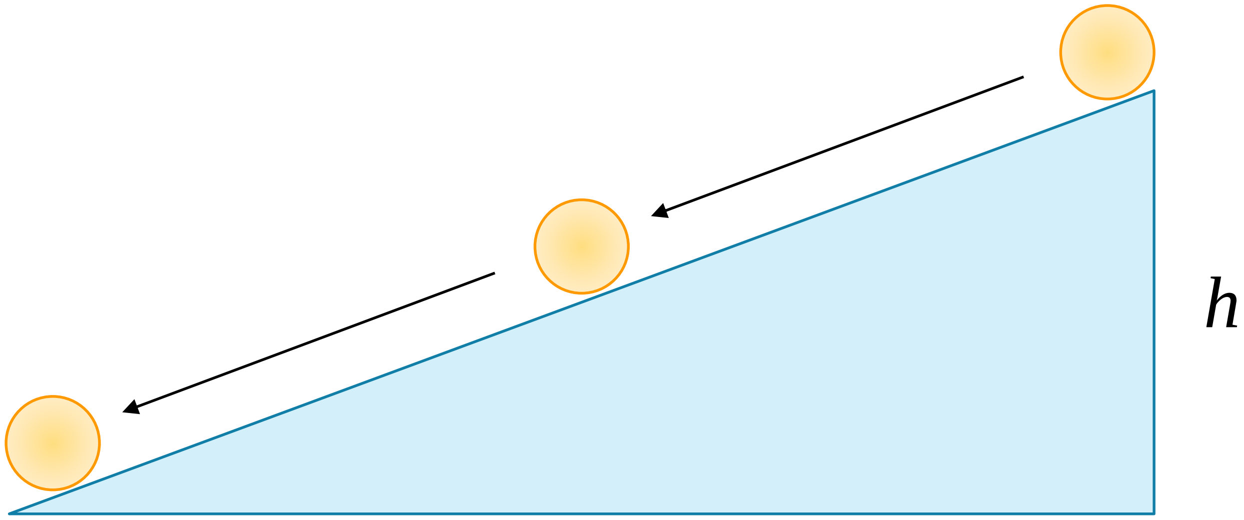


λ (μm)
0.01
0.20
0.30
0.390
0.455
0.492
0.577
0.597
0.622
0.770
1.5
6.0
40
1000
Extreme
Far
Near
Violet
Blue
Green
Yellow
Orange
Red
Near
Medium
Far
Extreme
Ultraviolet
Visible
Infrared
X-rays
Gamma rays
Ultraviolet
Infrared
Radio spectrum
1 fm
1 pm
1 Å
1 nm
1 μm
1 mm
1 m
1 km
1 Mm
Wavelength (m)
10−15
10−12
10−10
10−9
10−6
10−3
1
103
106
108
1 THz
1 GHz
1 MHz
1 kHz
1 Hz
Frequency (Hz)
1023
1021
1018
1015
1012
109
106
103
1

古典力學能

力學能（總能）= 動能 + 位能 (potential)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V \quad \text{或表示為} \quad E = \frac{p^2}{2m} + V$$



算符

$\psi(x) = e^{ikx}$, k是波數

根據德布羅意假說，自由粒子所表現的物質波，其波數與自由粒子動量的關係式是

$\boxed{p = \hbar k}$

自由粒子具有明確的動量p，給予一個系綜許多相同的自由粒子系統。每一個自由粒子系統的量子態都一樣。標記粒子的動量算符為$\widehat{p}$。假若，對於這系統內，每一個自由粒子系統的動量所作的測量，都得到同樣的測量值p，那麼，不確定性$\sigma_p = 0$，自由粒子的量子態是確定態，是$\widehat{p}$ 的本徵態，在位置空間(position space)裏，本徵函數為ψ，本徵值為p

$$\hat{p}\psi(x) = p\psi(x)$$

換句話說，在位置空間裏，動量算符的本徵函數必須是自由粒子的波函數ψ，為了要達到此目標，勢必要令

$$\hat{p}\psi(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}e^{ikx} = \hbar k e^{ikx} = p\psi(x)$$

測不準原理

在量子力學中，海森堡(Heisenberg)的測不準原理，陳述如果確定粒子的位置，將使它的動量不確定性增加；相反的，如果精確測量粒子的動量，將使它的位置的不確定性增加。

在數學的原理上,每個量子態的位置分布的方均根偏差(root-mean-square)（位置分布的標準差）：

$$\Delta x = \sqrt{\left(x^2\right) - \left(x^2\right)}$$

$$\Delta p = \sqrt{\left(p^2\right) - \left(p^2\right)}$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

海森堡

2.2 Schrodinger's Wave Equation

薛丁格如何改造波動方程式？

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m}+V\right]\Psi\left(x,t\right)=\hat{E}\Psi\left(x,t\right)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi\left(x,t\right)}{\partial x^2}+V\left(x\right)\Psi\left(x,t\right)=j\hbar\frac{\partial\Psi\left(x,t\right)}{\partial t}$$

波函數的物理意義

量子力學中，物質的位置不確定，而是呈現機率分布的型態

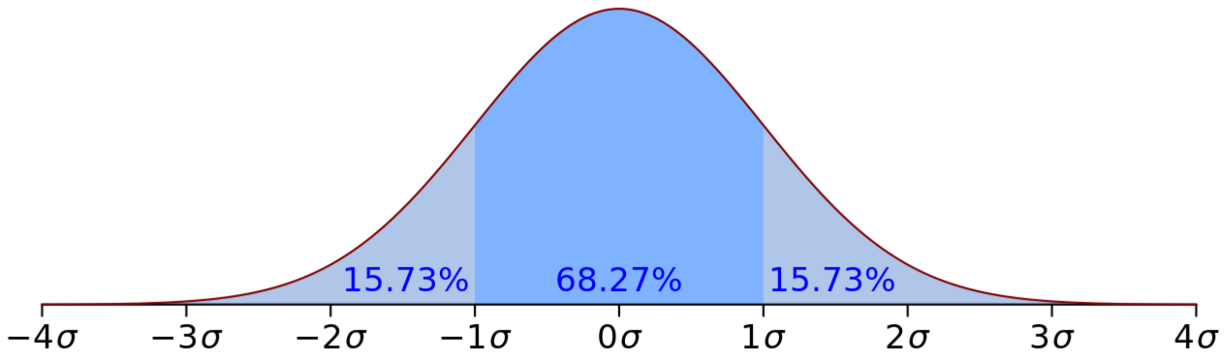
機率密度函數

$$\Psi^* \cdot \Psi = \left|\Psi(x,t)\right|^2$$

全域機率總和必定為1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx = 1$$

例：常態分布



無限位能井 Infinite Potential Well

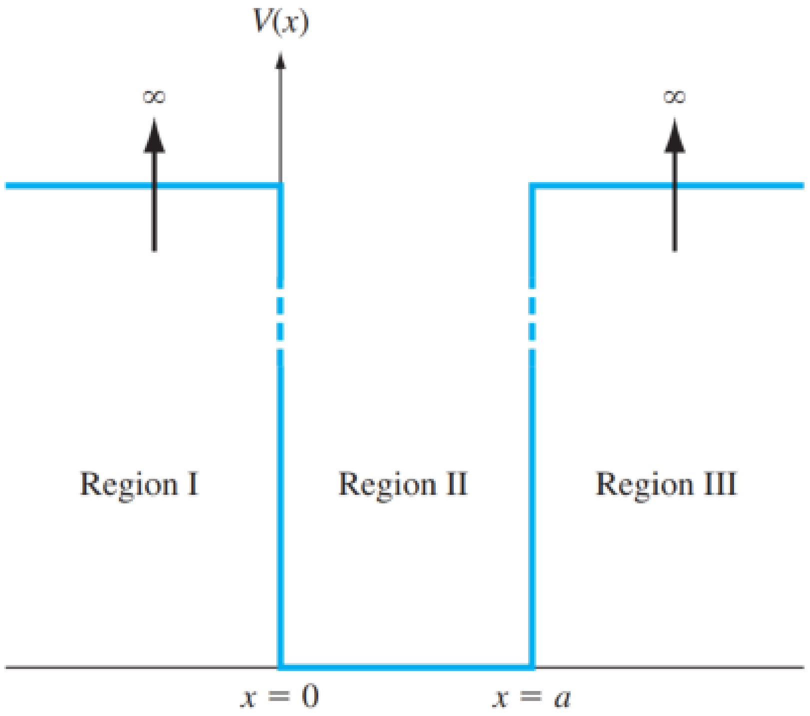
在 $a < x$ 或 $x < 0$ 的區域中： $\psi(x) = 0$

在 $0 < x < a$ 的區域中： $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$ $n = 1, 2, 3...$

能量 $E = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$ $n = 1, 2, 3...$

量子數

能量受到 n 的限制，不能是任意值

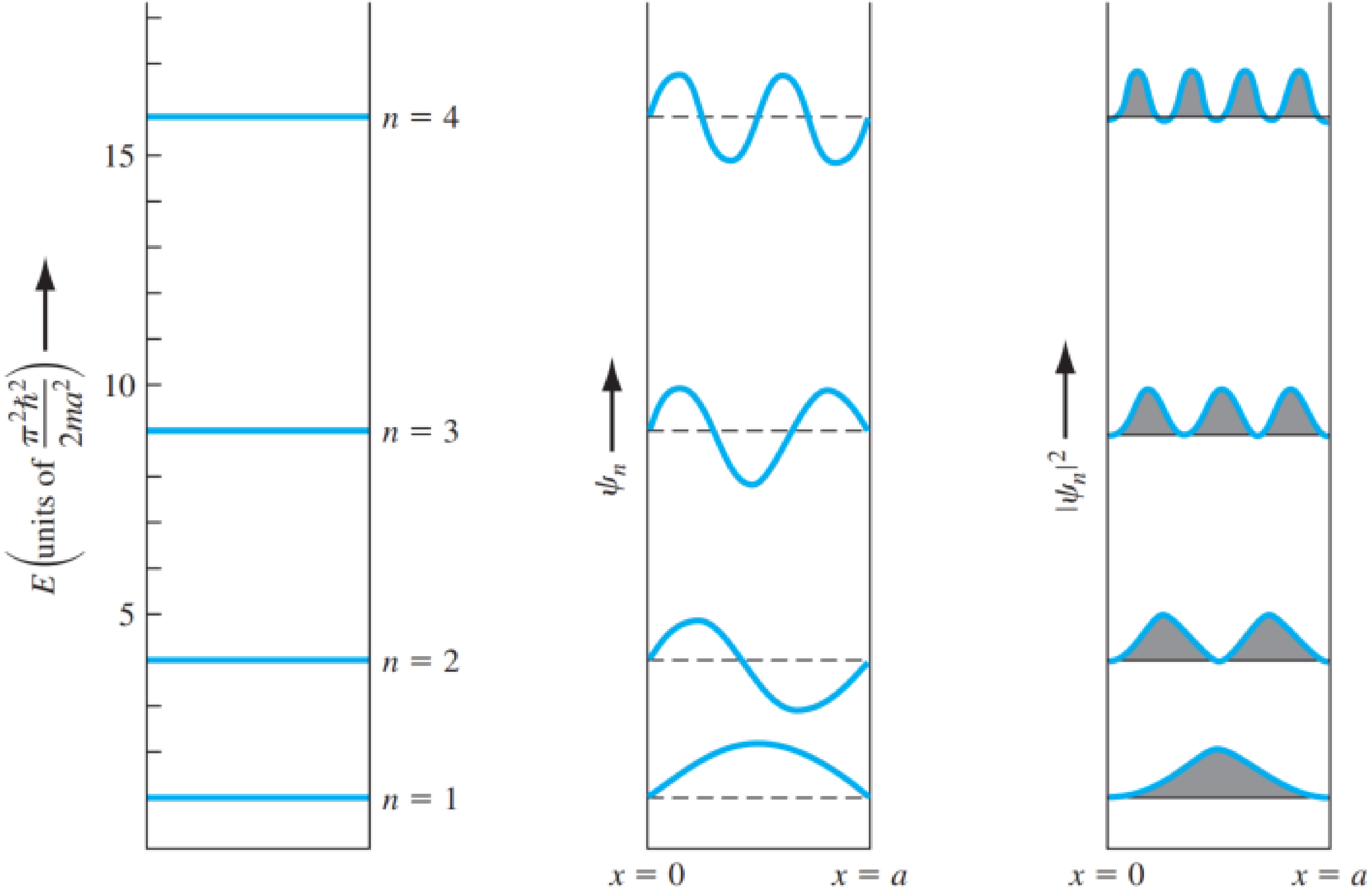


無限位能井 – 能量量子化

$$E = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

$\Psi(x)$

$|\Psi(x)|^2$



Example 2.3 Quantization of Energy

Objective: Calculate the first three energy levels of an electron in an infinite potential well.

Consider an electron in an infinite potential well of width 5 Å.

Example 2.3 Quantization of Energy

Objective: Calculate the first three energy levels of an electron in an infinite potential well.

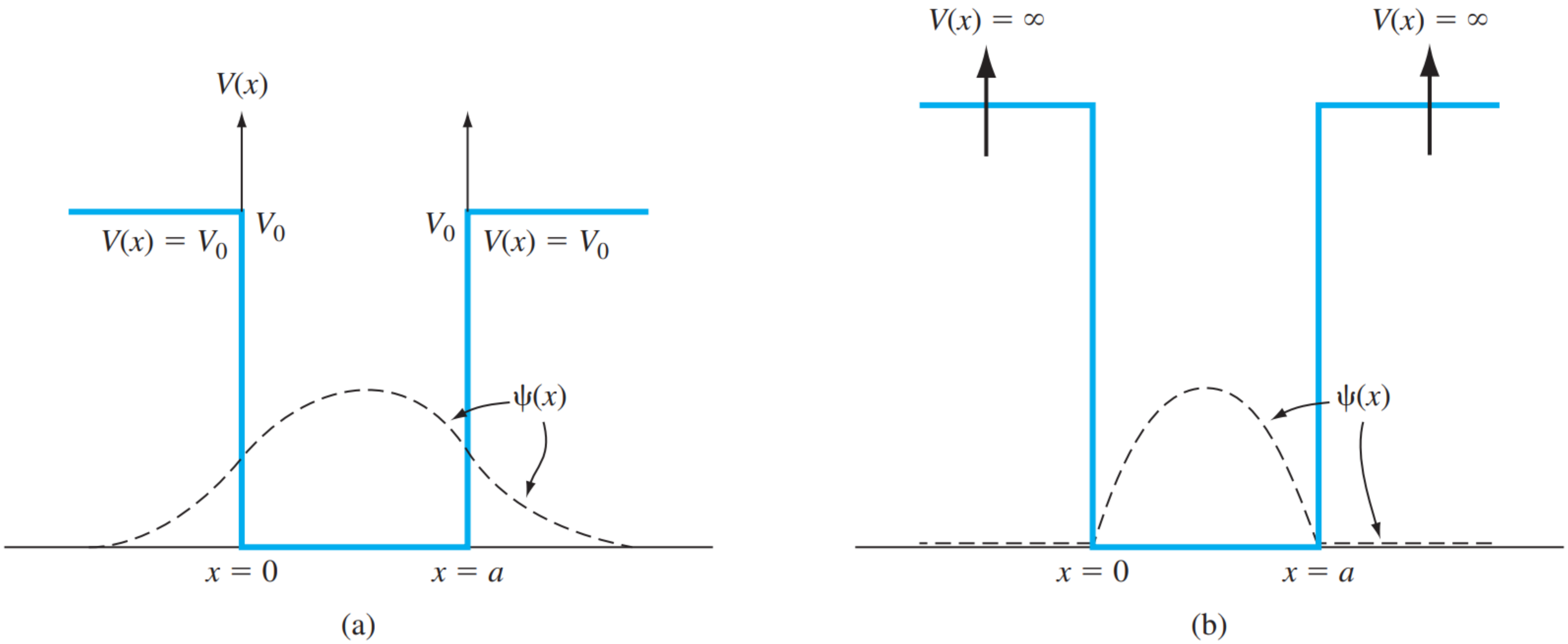
Consider an electron in an infinite potential well of width 5 Å.

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2ma^2} = n^2 \frac{1.054\cdot 10^{-34}\pi^2}{2\cdot\left(9.11\cdot 10^{-31}\right)\left(5\cdot 10^{-10}\right)^2} = n^2\left(2.14\cdot 10^{-19}\right) \quad \text{J}$$

$$E_n = \frac{n^2\left(2.14\cdot 10^{-19}\right)}{1.6\cdot 10^{-19}} = n^2\left(1.51\right) \quad \text{eV}$$

$$E_1 = 1.51 \qquad E_2 = 6.04 \qquad E_3 = 13.59$$

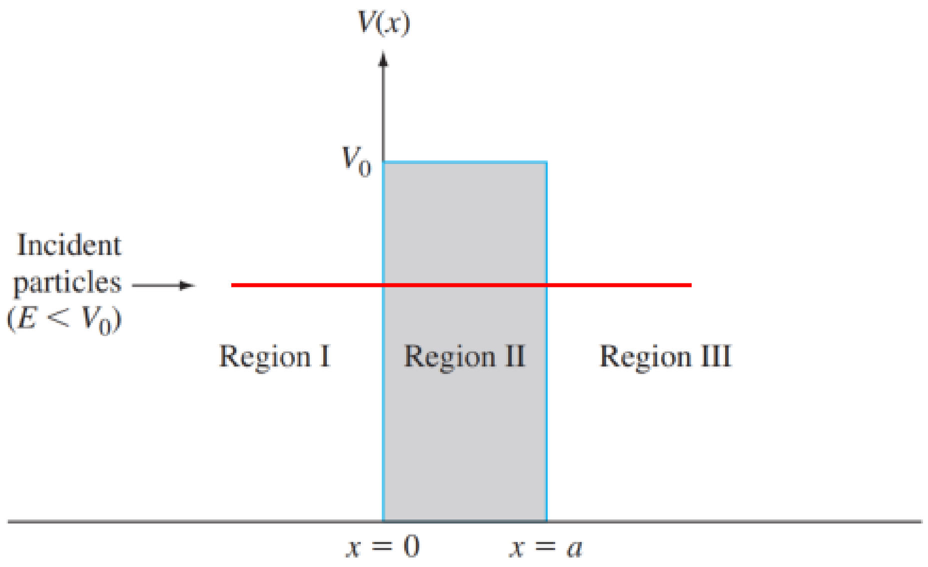
有限位能井 Finite Potential Well(補)

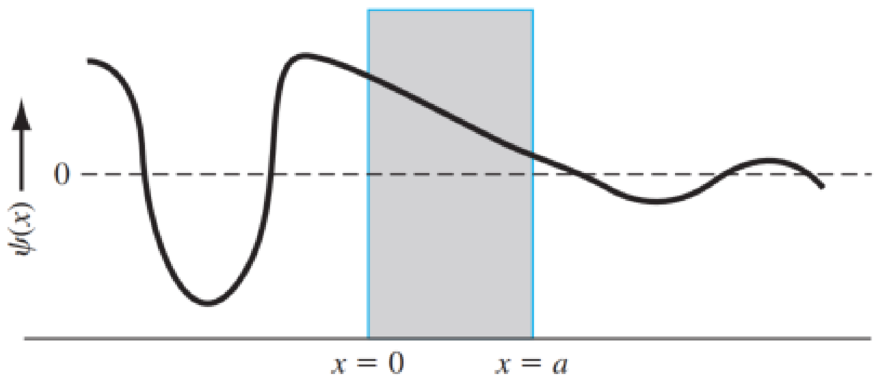


穿隧 Tunneling(補)

電子穿過障壁的機率為：

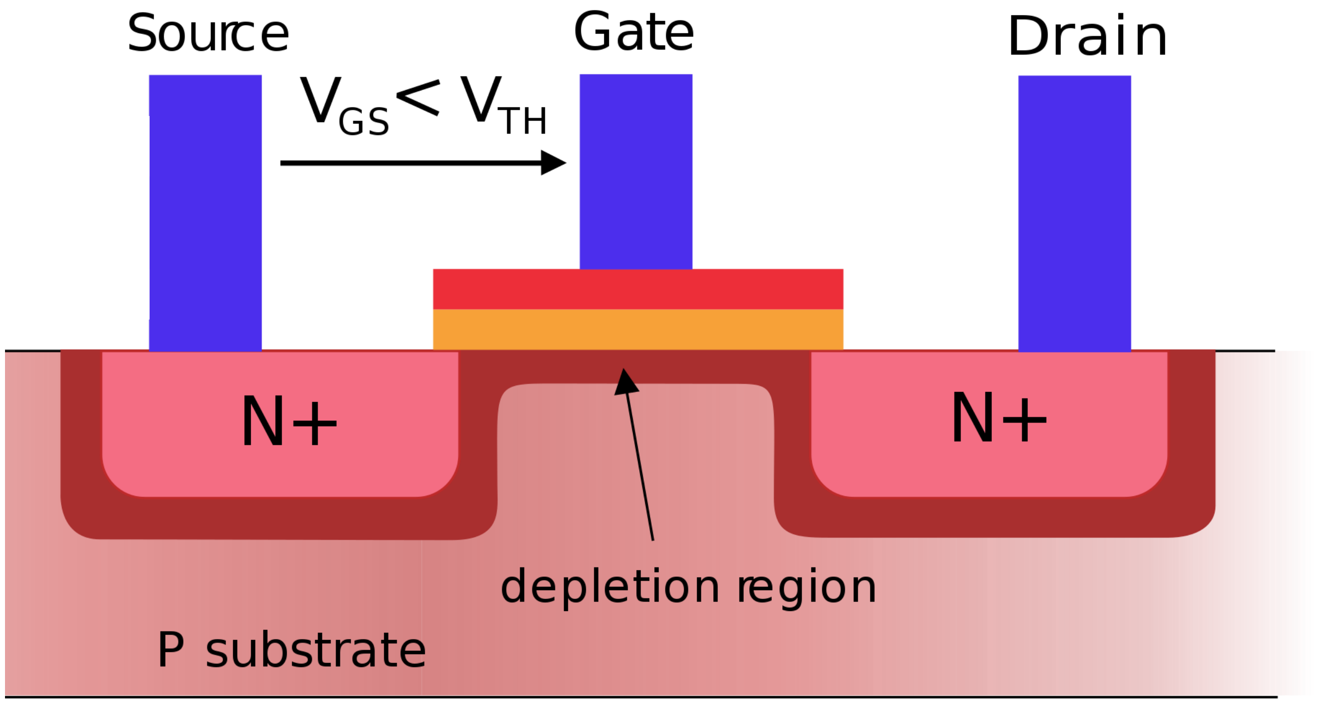
$$T=\left[1+\frac{V_0^2}{4E\left(V_0-E\right)}\sinh^2\left(k_2L\right)\right]^{-1}\approx 16\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)\exp\left(-2k_2L\right)\qquad ,E\ll V_0$$

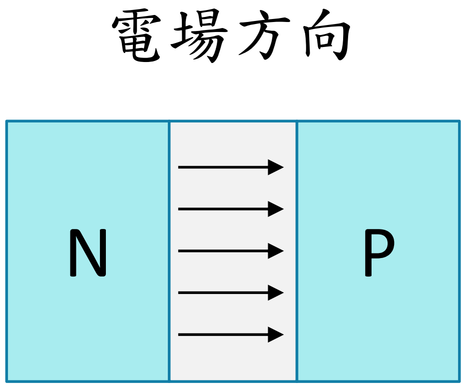




量子穿隧效應

- 當電荷帶有過多的動能，越過位能障壁並產生電流。
- 基於等效質量的差異，電子比電洞發生穿隧的機率更高。
- 穿隧效應對MOSFET的影響：穿隧過氧化層或通道(漏電)。





Example 2.5

Objective: Calculate the probability of an electron tunneling through a potential barrier.

Consider an electron with an energy of 2 eV impinging on a potential barrier with $V_0 = 20$ eV and a width of 3 Å.

Example 2.5

Objective: Calculate the probability of an electron tunneling through a potential barrier.

Consider an electron with an energy of 2 eV impinging on a potential barrier with $V_0 = 20$ eV and a width of 3 Å.

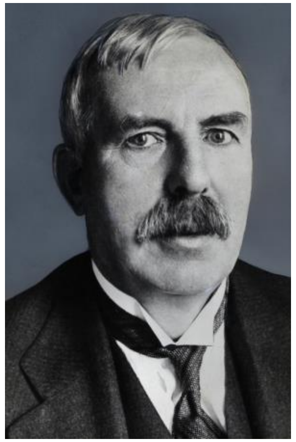
$$k_2 = \sqrt{\frac{2m\left(V_0 - E\right)}{\hbar^2}} = 2.17 \cdot 10^{10} m^{-1}$$

$$T = 16\frac{E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)\exp\left(-2k_2L\right)$$

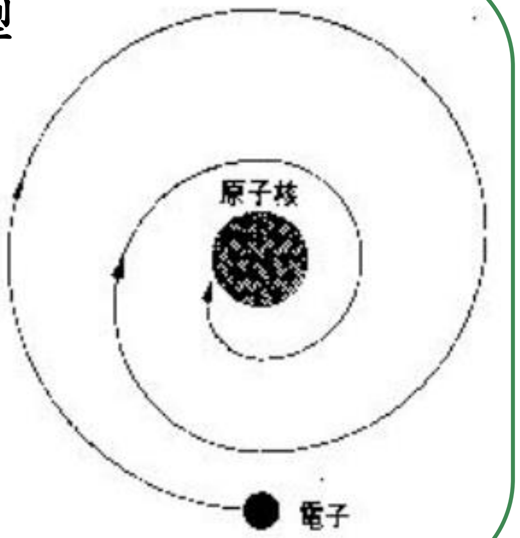
$$= 16(0.1)(1-0.1)\exp\left(-2\times 2.17\times 10^{10}\times 3\times 10^{-10}\right) = 3.17\times 10^{-6}$$

氫原子模型歷史

模型

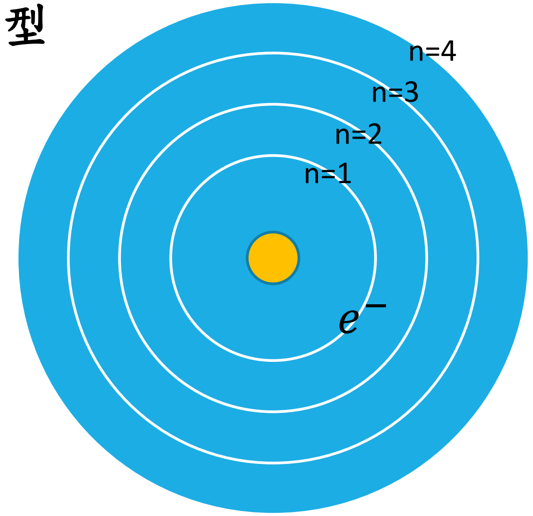


拉塞福



波耳

模型



論述:大部份α-粒子會直接穿過，但仍有極少部分會以大角度反彈。因此推論原子的結構應該是：大部份質量、正電荷集中於中心的極小區域(原子核)，而原子核周圍則環繞著帶負電的電子

缺點:

1. 若電子繞著原子核做圓周運動，必會輻射出電磁波，導致電子能量漸減，繞核運動的半徑會愈來愈小，最終電子必墜毀於原子核
2. 無法解釋原子光譜的不連續性

論述:1913年，波耳(Bohr)探討氫原子光譜提出了氫原子模型，加入能階的假設。於此模型中，電子繞原子核作圓周運動只能存在於某些特定能量的圓形軌道上，以庫侖力作為向心力，角動量

$$L_n = mvr = n\hbar$$

氫原子模型(補)

氫原子的薛丁格方程式(參考用)

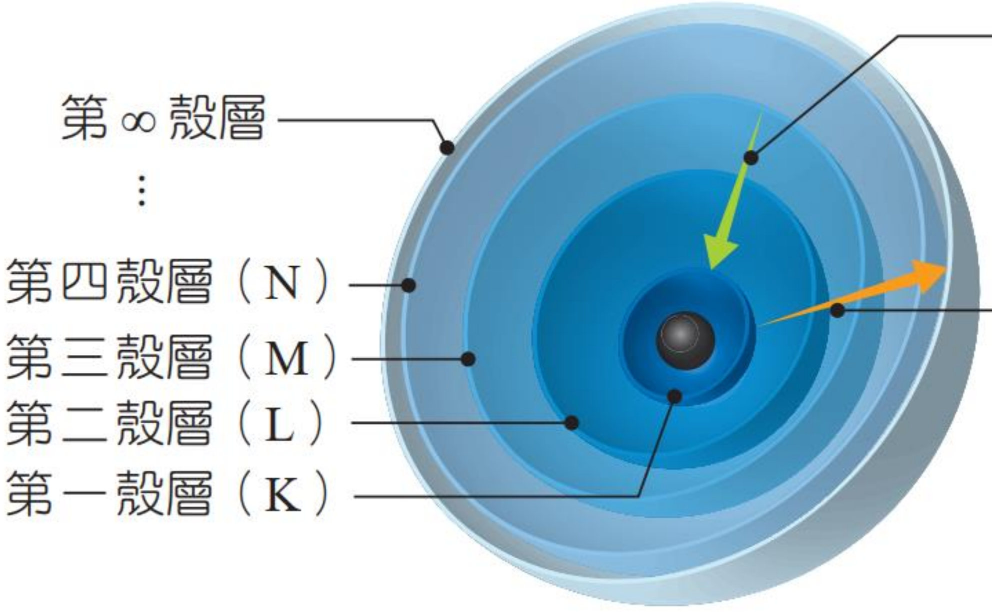
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{2m_0}{\hbar^2}\left(E-V(r)\right)\psi=0$$

波函數(極複雜，略)

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

能量量子化

$$E_n=\frac{-m_0e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\,2\hbar^2}\frac{1}{n^2}=-13.6\frac{1}{n^2}\quad \text{eV}$$

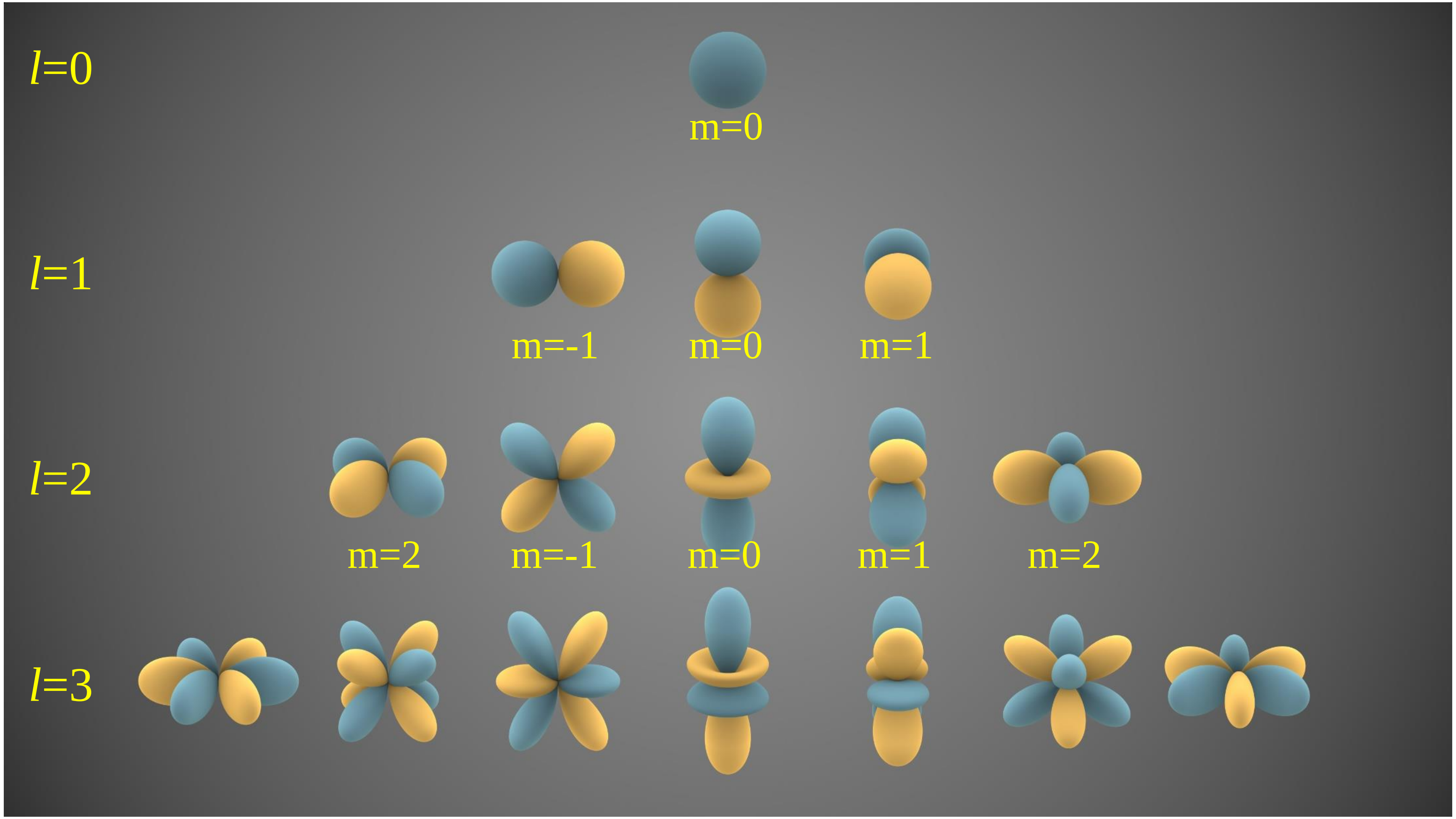


Quantum States

- 主量子數 n　　$n = 1, 2, 3...$
- 軌道量子數 l　　$l = 0, 1, 2 ... n-1$
- 軌道磁量子數 m　　$m = 0, \pm 1, \pm 2 ... \pm l$
- 自旋磁量子數 s　　$s = \pm 1/2$

Element	Notation	n	l	m	s
Hydrogen	$1s^1$	1	0	0	$+\frac{1}{2}$ or $-\frac{1}{2}$
Helium	$1s^2$	1	0	0	$+\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$
Lithium	$1s^2 2s^1$	2	0	0	$+\frac{1}{2}$ or $-\frac{1}{2}$
Beryllium	$1s^2 2s^2$	2	0	0	$+\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$
Boron	$1s^2 2s^2 2p^1$	2	1		
Carbon	$1s^2 2s^2 2p^2$	2	1		
Nitrogen	$1s^2 2s^2 2p^3$	2	1	$m = 0, -1, +1$	
Oxygen	$1s^2 2s^2 2p^4$	2	1	$s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	
Fluorine	$1s^2 2s^2 2p^5$	2	1		
Neon	$1s^2 2s^2 2p^6$	2	1		

Quantum States



Quantum States ↔ 房間

n=1
l=0
m=0
s=1/2

n=1
l=0
m=0
s=-1/2

n=2
l=0
m=0
s=1/2

n=2
l=0
m=0
s=-1/2

n=2
l=1
m=-1
s=1/2

n=2
l=1
m=-1
s=-1/2

n=2
l=1
m=0
s=1/2

n=2
l=1
m=0
s=-1/2

n=2
l=1
m=1
s=1/2

n=2
l=1
m=1
s=-1/2

Conclusion

- 光電效應 → 證明光具有粒子性 $E = h\nu$
- 電子雙狹縫干涉實驗 → 證明粒子具有波動性 $\lambda = h/p$
- 波粒二相性的觀念
- 薛丁格將古典力學能觀念和物質波結合成**薛丁格波動方程式**
- 無限位能井
- 波動的穿隧效應
- 氫原子模型的量子化和量子態（電子被限制）

哥本哈根詮釋

代表人物

波耳

海森堡

重要的觀點

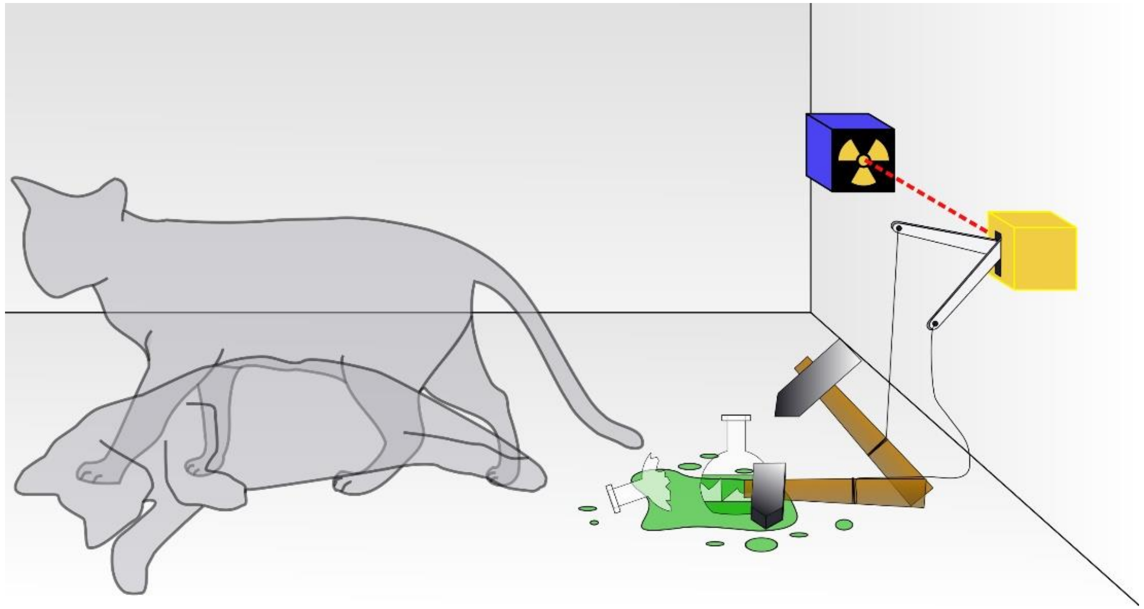
1. 一個量子系統的量子態可以用波函數來完全地表述。波函數代表一個觀察者對於量子系統所知道的全部資訊。
2. 按照玻恩定則，量子系統的描述是機率性的。一個事件的機率是波函數的絕對值平方。
3. 不確定性原理闡明，在量子系統裏，一個粒子的位置和動量無法同時被確定。
4. 物質具有波粒二象性；根據互補原理，一個實驗可以展示出物質的粒子行為，或波動行為；但不能同時展示出兩種行為。
5. 測量儀器是古典儀器，只能測量古典性質，像位置，動量等等。
6. 對應原理：大尺度宏觀系統的量子物理行為應該近似於古典行為。

薛丁格的貓

把一隻貓關在一個封閉的容器裏，內裝置一台蓋格計數器和少量放射性物質，在一小時內該物質衰變的機率為50%，不衰變的機率為50%。假若衰變事件發生了，則蓋格計數管會放電，啟動繼電器使榔頭打破裝有氰化氫的燒瓶。

問：一個小時後，貓是死還是活?

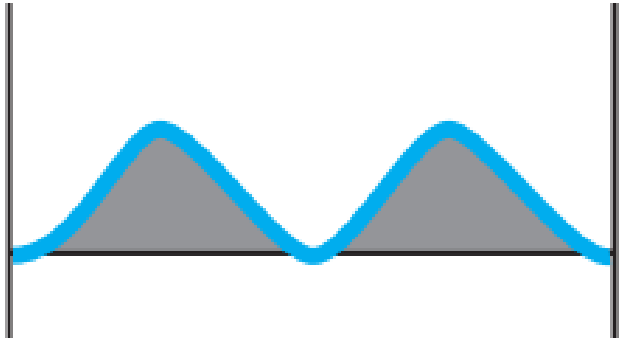
答：打開容器觀察的那一刻才知道，還沒打開前，貓處於既生既死的狀態



波函數坍塌

以無限位能井為例

測量前：



測量後(坍塌)：