過量載子的特性

過量電子與電洞的移動並不是獨立的，他們是以相同的等效擴散係數來進行擴散和相同的等效遷移率來進行飄移。這種現象稱為雙極性傳輸。
用以描述這些過量載子特性的等效擴散係數與等效遷移率為何?回答問題之前我們必須發展載子連續方程式，進一步推出雙極性傳輸。

圖顯示電洞粒子在一維方向的x處進入單元體，而於x+dx處離開單元體。參數F_{px}^{+}是電洞粒子通量圖所示粒子流通密度的X方向分量可以寫成

$$F_{px}^{+}(x+dx)=F_{px}^{+}(x)+\frac{\partial F_{px}^{+}(x)}{\partial x}dx$$

此式為 F_{px}^{+}(x +dx)的泰勒展開，其中dx長度非常小，故只需要考慮前兩項。在微單元體由於電洞通量的x方向分量所造成電洞數量變化的時變率為

$$\frac{\partial p}{\partial t}dxdydz=\left[F_{px}^{+}(x)-F_{px}^{+}(x+dx)\right]dydz=-\frac{\partial F_{px}^{+}(x)}{\partial x}dxdydz$$

如果$F_{px}^{+}>F_{px}^{+}$(x+dx)代表微單元體中電洞濃度會隨時間增加。
電洞的產生與復合速率都會影響微單元體中電洞濃度。則單位時間內微單元體電洞數淨增加量為

$$\frac{\partial p}{\partial t}dxdydz=-\frac{\partial F_{px}^{+}(x)}{\partial x}dxdydz+g_p dxdydz-\frac{p}{\tau_{pt}}dxdydz$$

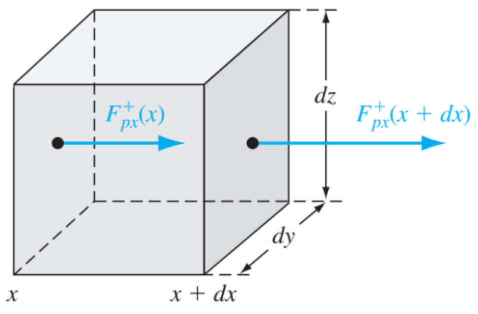
(p is density of holes)　　產生率　　復合率

其中p是電洞濃度，右邊第一項是單位時間電洞通量所造成電洞數增加，第二項是單位時間因電洞產生所造成電洞數增加量，第三項為電洞復合造成電洞減少量。將兩邊除以微量體積dxdydz得到

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial F_{px}^{+}(x)}{\partial x}+g_p-\frac{p}{\tau_{pt}}$$

電子同理

$$\frac{\partial n}{\partial t}=-\frac{\partial F_{nx}^{-}(x)}{\partial x}+g_n-\frac{n}{\tau_{nt}}$$



時變擴散方程式

在前面我們得到電子電洞在一維電流密度

$$\begin{cases} J_p = e\mu_p pE - eD_p \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ J_n = e\mu_n nE + eD_n \dfrac{\partial n}{\partial x} \end{cases}$$

電洞電流密度除以+e，電子電流密度除以-e，可以得到個粒子通量如下

$$\begin{cases} \dfrac{J_p}{+e} = F_p^+ = \mu_p pE - D_p \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{J_n}{-e} = F_n^- = -\mu_n nE - D_n \dfrac{\partial n}{\partial x} \end{cases}$$

帶回連續方程式可得

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mu_p \frac{\partial (pE)}{\partial x} + D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + g_p - \frac{p}{\tau_{pt}}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = +\mu_n \frac{\partial (nE)}{\partial x} + D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + g_n - \frac{n}{\tau_{nt}}$$

微分展開可得

$$\frac{\partial (pE)}{\partial x} = E\frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial E}{\partial x}$$

$$\begin{cases} D_p \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \mu_p \left(E\dfrac{\partial p}{\partial x} + p\dfrac{\partial E}{\partial x} \right) + g_p - \dfrac{p}{\tau_{pt}} = \dfrac{\partial p}{\partial t} \\ D_n \dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu_n \left(E\dfrac{\partial n}{\partial x} + n\dfrac{\partial E}{\partial x} \right) + g_n - \dfrac{n}{\tau_{nt}} = \dfrac{\partial n}{\partial t} \end{cases}$$

由於$p = p_0 + \delta p$以$n = n_0 + \delta n$的p_0和n_0不隨時間變化，因此可改寫為

$$D_p \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} - \mu_p \left(E\frac{\partial \delta p}{\partial x} + p\frac{\partial E}{\partial x} \right) + g_p - \frac{p}{\tau_{pt}} = \frac{\partial \delta p}{\partial t}$$

$$D_n \frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} + \mu_n \left(E\frac{\partial \delta n}{\partial x} + n\frac{\partial E}{\partial x} \right) + g_n - \frac{n}{\tau_{nt}} = \frac{\partial \delta n}{\partial t}$$

雙極性傳輸方程式推導

前面推導出隨時間變化擴散方程式。然而我們還需要第三個Poisson 方程式其為

$$\nabla \cdot E_{\text{int}} = \frac{e(\delta p - \delta n)}{\varepsilon_s} = \frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial x} (\delta n, \delta p \text{ 和 E 有關})$$

ε_s是介電常數

為了讓式子比較好求解需要做一些近似。我們可以證明只需要夠小的電場便足以使電子與電洞一起飄移或擴散。因此可以假設

$$|E_{\text{int}}| \ll |E_{app}|$$

然而 $\nabla \cdot E_{\text{int}}$ 項不一定可以忽略不計。由以上不是很嚴謹說明可知，在任一時間半導體任意位置，過量電子的濃度皆會有等量的過量電洞濃度存在，反之亦然，此即為電中性條件。如果這個條件完全成立，則不具有使兩種粒子等量而一起移動的感應內部電場存在。如此結果似乎矛盾。

實際上只要過量電子的濃度與過量電洞的濃度有些微差異(意即準電中性)，就足以建立使粒子一起飄移及擴散的內部電場。

我們可以定義 $g_n = g_p = g$

$$R_n = \frac{n}{\tau_{nt}} = R_p = \frac{p}{\tau_{pt}} \equiv R$$

並再加上電中性δn~ δp，利用δn代表時變擴散方程式

$$D_p \frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} - \mu_p \left(E \frac{\partial \delta n}{\partial x} + p \frac{\partial E}{\partial x} \right) + g - R = \frac{\partial \delta n}{\partial t} \quad (1)$$

$$D_n \frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} + \mu_n \left(E \frac{\partial \delta n}{\partial x} + n \frac{\partial E}{\partial x} \right) + g - R = \frac{\partial \delta n}{\partial t} \quad (2)$$

雙極性傳輸方程式推導

將上下兩式分別乘上μ $_n n$、μ $_p p$並相加可得

$$\left(\mu_n n D_p + \mu_p p D_n\right)\frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} + \mu_n \mu_p \left(p-n\right) E \frac{\partial \delta n}{\partial x}$$
$$+\left(\mu_n n + \mu_p p\right)\left(g-R\right) = \left(\mu_n n + \mu_p p\right)\frac{\partial \delta n}{\partial t} \quad (3)$$

將上式除μ $_n n$ + μ $_p p$可得

$$D'\frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} + \mu' E \frac{\partial \delta n}{\partial x} + g - R = \frac{\partial \delta n}{\partial t}$$

$$D' = \frac{\mu_n n D_p + \mu_p p D_n}{\mu_n n + \mu_p p} \quad (4); \mu' = \frac{\left(\mu_n \mu_p\right)\left(p-n\right)}{\mu_n n + \mu_p p}$$

(3)式稱為雙極性傳輸方程式，描述過量電子和電洞在時間和空間行為。
愛因斯坦關係式表示為

$$\frac{\mu_n}{D_n} = \frac{\mu_p}{D_p} = \frac{e}{kT}$$

替換(4)式得到

$$D' = \frac{D_n D_p \left(n+p\right)}{D_n n + D_p p}$$