INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES

CAMPUS PUEBLA

MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

M2025.2

PRIMAVERA 2020

MÉTODOS ITERATIVOS PARA SISTEMAS DE ECUACIONES

Eliminación Gaussiana, Jacobi, Gauss-Seidel, Newthon-Raphson

Reporte Técnico

INTEGRANTES:

Diana Laura Gómez Bravo

Diana Lisset Mercado Mondragón

Ilse Paola López Arreola

María Fernanda Ruiz Parada

ASESOR:

Adolfo Centeno Téllez

Fecha de entrega:

11 de mayo de 2020

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales es posible formular problemas matemáticos de tal forma que puedan resolverse usando operaciones aritméticas.
También nos vuelven aptos para entender esquemas numéricos a fin de resolver problemas matemáticos, de ingeniería y científicos en una computadora, reducir esquemas numéricos básicos, escribir programas y resolverlos en una computadora y usar correctamente el software existente para dichos métodos y no solo aumenta nuestra habilidad para el uso de computadoras sino que también amplía la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos.

El análisis numérico trata de diseñar métodos para " aproximar" de una manera eficiente las soluciones de problemas expresados matemáticamente.

El objetivo principal del análisis numérico es encontrar soluciones "aproximadas" a problemas complejos utilizando sólo las operaciones más simples de la aritmética, así como de secuencias de operaciones algebraicas y lógicas que producen la aproximación al problema matemático.

DESARROLLO

Método de Eliminación Gaussiana

En forma general este método propone la eliminación progresiva de variables en el sistema de ecuaciones, hasta tener sólo una ecuación con una incógnita. Una vez resuelta esta, se procede por sustitución regresiva hasta obtener los valores de todas las variables.
Sea por ejemplo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1+2x_2+3x_3= 9$$
$$4x_1+5x_2+6x_3= 24$$
$$3x_1+x_2+2x_3= 4$$

Lo que buscamos son 3 números, que satisfagan a las tres ecuaciones. El método de solución será simplificar las ecuaciones, de tal modo que las soluciones se puedan identificar con facilidad. Se comienza dividiendo la primera ecuación entre 2, obteniendo:
Se simplificará el sistema si multiplicamos por -4 ambos lados de la primera ecuación y sumando esta a la segunda. Entonces:

$$-4x_1-8x_2-12x_3=-36$$
$$4x_1+5x_2+6x_3=24$$

Sumándose resulta:

$$-3x_2-6x_3=-12$$

La nueva ecuación se puede sustituir por cualquiera de las dos. Ahora tenemos:

$$x_1+2x_2+3x_3= 9$$

$$0x_1-3x_2-6x_3= -12$$

$$3x_1+x_2-2x_3= 4$$

Luego, la primera se multiplica por -3 y se le suma a la tercera, obteniendo:

$$x_1+2x_2+3x_3= 9$$

$$0x_1-3x_2-6x_3= -12$$

$$0x_1-5x_2-11x_3=-23$$

Acto seguido, la segunda ecuación se divide entre -3. Ahora se multiplica por 5 y se le suma a la tercera:

$$x_1+2x_2+3x_3= 9$$

$$0x_1+x_2+2x_3= 4$$

$$0x_1+0x_2+x_3= 3$$

En este momento ya tenemos el valor de x3, ahora simplemente se procede a hacer la sustitución hacia atrás, y automáticamente se van obteniendo los valores de las otras incógnitas. Se obtendrá:

$$x_3= 3$$

$$x_2= 4-2(x_3) = -2$$

$$x_1= 9-3(x_3)-2(x_2) = 4$$

Se ha visto que al multiplicar o dividir los lados de una ecuación por un número diferente de cero se obtiene una ecuación nueva y válida.
Una variante interesante de la eliminación de Gauss es la eliminación de Gauss-Jordan y permite resolver hasta 15 o 20 ecuaciones simultáneas, con 8 o 10 dígitos significativos en las operaciones aritméticas de la computadora. Este procedimiento se distingue del método Gaussiano en que cuando se elimina una incógnita, se elimina de todas las ecuaciones restantes, es decir, las que preceden a la ecuación pivote así como de las que la siguen.

Método de Jacobi

El método Jacobi es un método iterativo que sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales más simples y se aplica sólo a sistemas cuadrados, es decir a sistemas con tantas incógnitas como ecuaciones.

1. Para poder resolverlo primero se determina la ecuación de recurrencia. Para ello se ordenan las ecuaciones y las incógnitas. De la ecuación i se despeja la incógnita i. En notación matricial se escribirse como:

$$x=c+Bx$$

donde x es el vector de incógnitas.

2. Se toma una aproximación para las soluciones y a ésta se le designa por xo

3. Se itera en el ciclo que cambia la aproximación

$$xi+1=c+Bxi$$

Uno de los problemas principales de los métodos iterativos es la garantía de que el método va aconverger, es decir, va a producir una sucesión de aproximaciones cada vez más próximas a la solución. En el caso del método de Jacobi no existe una condición exacta para la convergencia. Lo mejor es una condición que garantiza la convergencia, pero en caso de no cumplirse puede o no haberla, es la siguiente:

Si la matriz de coeficientes original del sistema de ecuaciones es diagonalmente dominante, el método de Jacobi seguro converge.

En ciertas ocasiones al aplicar Jacobi la matriz no es diagonalmente dominante y por tanto no existirá garantía de convergencia. Sin embargo, en algunos casos será posible reordenar las incógnitas en otra manera de forma que la nueva matriz de coeficientes sea diagonalmente dominante. Esto se puede detectar revisando todos los posibles ordenamientos de las incógnitas y ver cómo es la matriz resultante. Claro que esto conlleva un bueno número de pruebas pues el número posible de ordenamientos en n variables es $(n - 1)!$ pero cuando n es reducido es sencillo.

Partiendo de $(x = 1, y = 2)$ aplique dos iteraciones del método de Jacobi para resolver el sistema:

[□5x+2y=1□]

[x−4y=0]

solución:

$$x = 0.20 + 0.00x - 0.40y$$

$$y = 0.00 + 0.25x + 0.00y$$

[□x□]= □[□0.20□]+□[□0.00 −0.40□□x][x]

[□y]=[□0.00]+[□0.25+0.00][y]

Aplicamos la primera iteración partiendo de $x0 = 1.00$ y $y0 = 2.00$

$$x1 = 0.20 + 0.00\ (1.00) - 0.40\ (2.00) = -0.60$$

$$y1 = 0.00 + 0.25\ (1.00) + 0.00\ (2.00) = 0.25$$

Aplicamos la segunda iteración partiendo de $x1 = -0.60$ y $y1 = 0.25$:

$$x2 = 0.20 + 0.00\ (-0.60) - 0.40\ (0.25) = 0.10$$

$$y2 = 0.00 + 0.25\ (-0.60) + 0.00\ (0.25) = -0.15$$

Aplicamos la siguiente iteración partiendo de $x2 = 0.10$ y $y1 = -0.15$:

$$x3 = 0.20 + 0.00\ (0.10) - 0.40\ (-0.15) = 0.26$$

$$y3 = 0.00 + 0.25\ (0.10) + 0.00\ (-0.15) = 0.025$$

Aplicamos la siguiente iteración partiendo de $x3 = 0.26$ y $y3 = 0.025$:

$$x4 = 0.20 + 0.00\ (0.26) - 0.40\ (0.025) = 0.190$$

$$y4 = 0.00 + 0.25\ (0.26) + 0.00\ (0.025) = 0.065$$

Aplicamos la siguiente iteración partiendo de $x4 = 0.190$ y $y4 = 0.065$:

$$x5 = 0.20 + 0.00\ (0.19) - 0.40\ (0.065) = 0.174$$

$$y5 = 0.00 + 0.25\ (0.19) + 0.00\ (0.065) = 0.0475$$

Aplicamos la siguiente iteración partiendo de $x5 = 0.174$ y $y5 = 0.0475$:

$$x6 = 0.20 + 0.00\ (0.174) - 0.40\ (0.0475) = 0.181$$

$$y6 = 0.00 + 0.25\ (0.174) + 0.00\ (0.0475) = 0.0435$$

i	xi	yi	xi+1	yi+1	Di
0	1.000	2.000	-0.600	0.250	1.750
1	-0.600	0.250	0.100	-0.150	0.700
2	0.100	-0.150	0.260	0.025	0.175
3	0.260	0.025	0.190	0.065	0.070
4	0.190	0.065	0.174	0.047	0.017
5	0.174	0.047	0.181	0.043	0.007
6	0.181	0.043	0.182	0.045	0.001

Donde $Di = máx\ (|xi - xi+1|, |yi - yi+1|)$

Método de Gauss- Seidel

El método de Gauss-Seidel es muy semejante al método de Jacobi. Entre tanto, en el método de Jacobi se utiliza el valor de las incógnitas para determinar una nueva aproximación y en el de Gauss-Seidel se va utilizando los valores de las incógnitas recien calculados en la misma iteración, y no en la siguiente.

Por ejemplo, en el método de Jacobi se obtiene en el primer cálculo xi+1, pero este valor de x no se utiliza sino hasta la siguiente iteración. En el método de Gauss-Seidel en lugar de eso se utiliza de xi+1 en lugar de xi en forma inmediata para calcular el valor de yi+1 de igual manera procede con las siguientes variables; siempre se utilizan las variables recien calculadas.

Partiendo de (x = 1, y = 2) aplique dos iteraciones del método de Gauss-Seidel para resolver el sistema.

[□□5x+2y=1]

[□x-4y=0]

Solución:

Debemos primeramente despejar de la ecuación la incógnita correspondiente.

$$x = 0.20 + 0.00x - 0.40y$$

$$y = 0.00 + 0.25x + 0.00y$$

Aplicamos la primera iteración partiendo de x0 = 1.00 y y0 = 2.00:

$$x1 = 0.20 + 0.00\ (+1.000) - 0.40\ (2.00) = -0.600$$

$$y1 = 0.00 + 0.25\ (-0.600) + 0.00\ (2.00) = -0.15$$

Aplicamos la segunda iteración partiendo de x1 = −0.600 y y1 = −0.15:

$$x2 = 0.20 + 0.00\ (-0.600) - 0.40\ (-0.15) = 0.26$$

$$y2 = 0.00 + 0.25\ (0.26) + 0.00\ (-0.15) = 0.065$$

Método de Newthon-Raphson

Este método de resolución numérica busca un cero de la función f(x) por aproximaciones sucesivas a partir de un valor inicial x_0. El valor sucesivo x_{n+1} es la abscisa del punto en que la tangente a la gráfica de f(x) en x_n corta al eje x.

Naturalmente es necesario que la función que se utilice sea derivable. Por el contrario el método es inaplicable ya que la derivada se anula.

Este método es de especial interés cuando el costo computacional de derivar la función de estudio y evaluarla es demasiado elevado, por lo que el método de Newton no resulta atractivo.

Si se compara el método de Newton-Raphson con el método de la secante, el método de Newton-Raphson converge más rápido, sin embargo, el método de Newton-Raphson requiere la evaluación de f(x) y su derivada en cada paso, mientras que el método de la secante sólo requiere la evaluación de f(x). Por lo tanto, el método de la secante resulta más rápido en la práctica.

CONCLUSIÓN

Gracias a los métodos numéricos empleados pudimos formular problemas matemáticos que resolvimos al usar operaciones aritméticas. En el caso del método Jacobi es utilizado para resolver ecuaciones más simples, es decir sistemas con tantas incógnitas como ecuaciones, hablando del método de eliminasión Gausiana, se propone la eliminación progresiva de variables en el sistema de ecuaciones, hasta tener sólo una ecuación con una incógnita, y al final hacer la sustitución, por otra parte en el método de Newthon-Raphson se busca un cero de la función f(x) por aproximaciones sucesivas a partir de un valor inicial x_0. Y en el método de Gauss-Seidel a diferencia del Jacobi, en este se va utilizando los valores de las incógnitas recien calculados en la misma iteración, y no en la siguiente, por lo que podemos decir que cada uno de estos métodos está determinado para cierto tipo de sistemas de ecuaciones, así como su propia manera de solución, ya que unos están más complejos que otros.

REFERENCIAS

Universidad Autónoma Metropolitana. (-). Jacobi. Mayo 2,2020, de Universidad Autónoma Metropolitana Sitio web: http://test.cua.uam.mx/MN/Methods/EcLineales/Jacobi/Jacobi.php

Instituto Tecnológico de Tuxtla . (-). Método de eliminación Gaussiana. Mayo 3,2020, de Instituto Tecnológico de Tuxtla Sitio web: https://sites.google.com/site/metalmetnumericos/home/unidad-3/metodo-de-eliminacion-gaussiana

Departamento de Matemáticas ITESM. (2020). Métodos Iterativos para Resolver Sistemas Lineales. Mayo 4, 2020, de ITESM Sitio web: http://cb.mty.itesm.mx/ma1010/materiales/a843-13.pdf