Exemple de calcul de lois conditionnelles pour le Gibbs sampler du Bayes A.

On a la densité jointe a posteriori:

$$f(\beta, \mu, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_{\beta_1}^2, \dots, \sigma_{\beta_p}^2 \mid Y)$$

$$= \frac{f(Y \mid \beta, \mu, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_{\beta_1}^2, \dots, \sigma_{\beta_p}^2) \times f(\beta, \mu, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_{\beta_1}^2, \dots, \sigma_{\beta_p}^2)}{f(Y)},$$

$\uparrow$

formule Bayes

On utilise le schéma hiérarchique :

$$= \frac{f(Y \mid \beta, \mu, \sigma_\varepsilon^2) \cdot f(\beta \mid \sigma_{\beta_1}^2, \dots, \sigma_{\beta_p}^2) \cdot f(\sigma_{\beta_1}^2, \dots, \sigma_{\beta_p}^2) \cdot f(\sigma_\varepsilon^2) \cdot f(\mu)}{f(Y)}$$

$= (*)$

On a fait le plus dur !

Maintenant il suffit d'identifier les variables qui nous intéressent :

Par exemple on cherche la loi condelle a posteriori de $\beta \mid Y, \mu, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_{\beta_1}^2, \dots, \sigma_{\beta_p}^2$)

↳ on isole les termes en β dans $(*)$

⇒ on trouve la densité

Illustration : si on garde les termes en β dans $(*)$ on a

$$(*) \underset{\text{proportionnel}}{\propto} \underbrace{f(Y \mid \beta, \mu, \sigma_\varepsilon^2)}_{N(X\beta + \mu \mathbb{1}, \sigma_\varepsilon^2 I)} \underbrace{f(\beta \mid \sigma_{\beta_1}^2, \dots, \sigma_{\beta_p}^2)}_{\prod_{j=1}^{p} N(0, \sigma_{\beta_j}^2)}$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left\{(Y - \mu\mathbb{1} - X\beta)'(Y - \mu\mathbb{1} - X\beta) + \sigma^2 \beta' \Sigma \beta\right\}}$$

avec $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_{\beta_1}^2, \dots, \sigma_{\beta_p}^2)$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left\{(Y-\mu\mathbb{1}-X\beta)'(Y-\mu\mathbb{1}-X\beta)/\sigma_\varepsilon^2 + \beta'\Sigma\beta\right\}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left\{\beta'(X'X/\sigma_\varepsilon^2 + \Sigma)\beta - \beta'X'(Y-\mu\mathbb{1})/\sigma_\varepsilon^2 - (Y'-\mu\mathbb{1}')X\beta/\sigma_\varepsilon^2\right\}}$$

$$= (**)$$

Rappel : Vecteur Gaussien $N(m, \Psi)$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}(X-m)'\Sigma^{-1}(X-m)}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(X'\Sigma^{-1}X - m'\Sigma^{-1}X - X'\Sigma^{-1}m + m'\Sigma^{-1}m)}$$

Avec ce rappel on identifie les termes de $(**)$:

$$(**) = e^{-\frac{1}{2}\left\{\beta'V^{-1}\beta - \beta'V^{-1}m \cdots\right\}}$$

avec $V^{-1} = (X'X/\sigma_\varepsilon^2 + \Sigma)$

$$m = V(X'(Y-\mu\mathbb{1}))/\sigma_\varepsilon^2$$

Conclusion :

$$\beta \mid Y, \mu, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_{\beta_1}^2, \dots, \sigma_{\beta_p}^2$$

$$\sim N(m, W)$$

avec $W = \left(\frac{X'X}{\sigma_\varepsilon^2} + \Sigma^{-1} \right)^{-1}$

$$m = W \frac{X'(Y - \mu \mathbb{1})}{\sigma_\varepsilon^2}$$

On fait de même pour les autres lois

$\hookrightarrow$ $\mu \mid Y, \beta, \sigma_\varepsilon^2 \sim N\left(\frac{\mathbb{1}'(Y - X\beta)}{n}, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} \right)$

$\hookrightarrow$ $\sigma_{\beta_j}^2 \mid \beta_j \sim \text{Inv.Gamma}\left(a + 1/2, b + 1/2\, \beta_j^2\right)$

$\hookrightarrow$ $\sigma_\varepsilon^2 \mid Y, \beta, \mu \sim \text{Inv.Gamma}\left(c + \frac{n}{2}, d + \frac{(Y - \mu\mathbb{1} - X\beta)'(Y - \mu\mathbb{1} - X\beta)}{2}\right)$