Autour du Manège Enchanté

Antonin Dudermel

1 Un Graphe pour le Manège

1.1 Le Manège

Le Manège enchanté est un rond-point assez particulier situé sur une intersection à 5 voies à Swindon en Angleterre : il est composé de 5 petits ronds-points tournant dans le sens anti-horaire (comme les ronds-points anglais) disposés en périphérie d'un grand rond-point central tournant dans le sens inverse, la priorité étant aux voitures situés à l'intérieur des petits ronds-points, comme le montre la figure 1.

Une telle disposition permet une diversité des itinéraires possibles pour aller d'une entrée à une sortie (voir figure 2). Le manège serait grâce à cela une réponse plus efficace au problème des intersections routières : assurer un trafic le plus fluide possible, des distances plus courtes, des infrastructures plus sûres… L'objectif de ce TIPE est de montrer que le manège enchanté remplit bien de telles conditions. Nous avons pour cela mis en place deux modèles : un utilisé en pratique pour étudier des infrastructures routières, par automates cellulaire, mais face à la complexité de ce modèle, nous nous sommes rabattus sur une étude plus élémentaire *via* la théorie des graphes.

1.2 Modéliser par un graphe

On peut aisément représenter un ensemble de routes par un graphe orienté pondéré : il suffit de considérer chaque intersection comme un sommet et chaque route comme une arête reliant une intersection à une autre de poids la longueur de la route. En appliquant ce principe au manège enchanté, on aboutit au graphe représenté par la figure 3a. De même on peut construire un graphe représentant le rond-point formé par la périphérie du manège.

L'intérêt principal de l'étude étant plus la forme du manège que cet exemple particulier, par souci d'implantation, le graphe a encore été simplifié en considérant les sorties et les intersections internes disposées en pentagones réguliers.

FIGURE 1 – le manège enchanté

[scale=0.4]images/magic-brit

[scale=0.3]images/itin

FIGURE 2 – itinéraires possibles

[scale=0.2]../manege-graphe [scale=0.2]../rp-graphe

(a) le manège (b) le rond-point

FIGURE 3 – un graphe adapté au manège

1.3 Réduction des distances

Muni de ces deux graphes, on peut dès lors appliquer l'algorithme de Floyd-Warshall pour connaître la distance entre les entrées-sorties, et les comparer entre les deux graphes. Le tableau 4 montre le rapport des distances du manège sur celles du rond-point. Sans surprise, on remarque un gain énorme quand il s'agit de prendre la sortie située immédiatement à gauche de l'entrée, puisqu'il n'est pas nécessaire de faire tout le tour du rond-point. Le manège réduit donc bien les distances par rapport à un rond-point classique.

1.4 Résistant aux coupures de section

1.4.1 arc critique

Un point remarquable du manège est que, comme le montre la figure 2, le conducteur dispose de plusieurs itinéraires pour aller d'une entrée à une sortie. Ainsi, si suite à un évènement, certaines sections se trouvent impraticables, le manège reste fonctionnel. Un algorithme permet de trouver quelles sections ne sont pas nécessaires au bon fonctionnement du manège. Défini formellement :

Définition 1 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe orienté. L'arc* $(a, b) \in E$ *est dit critique si le graphe* $G' = (V, E \setminus \{(a, b)\})$ *n'a pas les mêmes composantes fortement connexes que* G.

Un théorème intéressant nous permet de déterminer de tels arcs :

FIGURE 4 – Rapport entre la distance entrée-entrée pour le rond-point et le manège (en %)

entrée	0	4	8	12	16
0	100	100	100	60	36
4	36	100	100	100	60
8	60	36	100	100	100
12	100	60	36	100	100
16	100	100	60	36	100

Théorème 1 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe orienté fortement connexe,* $(a, b) \in E$*, alors :* $G' = (V, E \setminus \{(a, b)\})$ *est fortement connexe SSI il existe un chemin de a à b dans* G'

Pour savoir si (a, b) est un arc critique, il suffit donc de déterminer si b est atteignable depuis a dans $G\prime$, à l'aide d'un simple parcours du graphe.

1.4.2 implantation et complexité

Considérons un graphe $G = (V, E)$. L'algorithme fonctionne donc sur le principe décrit ci-dessus : On dispose de la liste des arcs critiques, initialement vide. Pour chaque arête (a, b) du graphe, on supprime cette arête (on a $G\prime$), si b n'est pas accessible depuis a dans $G\prime$, alors on ajoute (a, b) à la liste des arcs critiques, puis on rajoute (a, b) à $G\prime$.

Le besoin de supprimer des arêtes pousse à choisir la structure de matrice d'adjacence (voir 3.1) pour représenter le graphe, suppression effectuée pour cette structure en temps constant. Dans ce cas, on rappelle la complexité en temps d'un parcours de G : $O(|V|^2)$.

Lors de l'exécution de l'algorithme, on effectue donc :

- Des opérations en temps constant
- Un parcours des arêtes de G, en un temps $O(|V|^2)$
- $|E|$ fois :
  - des opérations en temps constant (suppression, ajout...)
  - Un parcours d'un graphe à $(|V|)$ sommets, en temps $O(|V|^2$

La complexité totale de l'algorithme est donc un $O(|V|^2 + |E||V|^2) = O(|E||V|^2)$

2 Un Modèle par automate cellulaire

2.1 Automate cellulaire

Le principe de l'automate cellulaire est de décrire le système en discrétisant le temps et l'espace. Dans ces modèles, les voitures évoluent sur des cases, et ont des vitesses entière. Empiriquement, on prend un pas temporel $\Delta t = 1{,}2$ s et un pas spatial $\Delta x = 7.5$ m.

Notre automate se base sur celui de Kai Nagel et Michael Schreckenberg [1], ion deadapté à une section de route, dont nous rappelons brièvement le principe ici : on considère n voitures $c_1, \ldots, c_n$ sur la section. On note $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $v_{i,t} \in [\![1; v_M]\!]$ la vitesse du véhicule i, et $x_{i,t}$ sa position au temps t. La règle de transition est définie ainsi :

- Accélération : toute voiture n'ayant pas atteint la vitesse maximale voit sa vitesse incrémentée de 1 : $v_{i,t'} = \min(v_{i,t} + 1, v_M)$
- Décélération : chaque véhicule freine pour ne pas percuter la voiture de devant : $v_{i,t''} = \min(v_{i,t'}, x_{i+1,t} - x_{i,t} - 1)$
- Décélération aléatoire (bruit) : chaque véhicule a la probabilité $p \in [0; 1]$ de freiner : $v_{i,t'''} = \max(v_{i,t''}, 0)$ avec une probabilité p, $v_{i,t''}$ sinon

[scale=0.5]./images/localdebut

FIGURE 5 – Un exemple d'intersection 2-1

— Avancer : on a déterminé la vitesse de chaque voiture au temps $t+1$, on accède à la position de chaque voiture au temps $t+1$: $v_{i,t+1} = v_{i,t'''}$ et $x_{i,t+1} = x_{i,t} + v_{i,t+1}$

2.2 Le Problème des intersections

Cependant, ce modèle n'est pas adapté à l'étude d'un rond-point : il faut définir le comportement d'une voiture aux intersections. Par exemple, figure 5, quelle voiture faire passer ? J'ai donc tenté d'établir un modèle d'automate répondant à cette question, automate que j'ai ensuite comparé à celui proposé par Chen Rui-Xiong, Bai Ke-Zhao et Liu Mu-Ren[2] pour les ronds-points, décrivant les interactions entre une voie prioritaire et une voie non-prioritaire : si deux voitures, une sur la voie prioritaire, une autre sur la voie non-prioritaire (il s'agit nécessairement des voitures de tête sur leur voie) cherchent à atteindre l'intersection, que faire ?

2.2.1 Le modèle de priorité dynamique

Ce modèle est plus complexe : il considère le temps nécessaire à chaque voiture pour arriver à l'intersection, puis fait avancer d'abord la voiture arrivant la première, puis la voiture arrivant ensuite, en tenant compte du déplacement de la première. En cas d'égalité, c'est la voiture la plus rapide qui passe, et encore en cas d'égalité, c'est la voiture sur la voie prioritaire qui passe. Ce modèle ne me semblait pas très réaliste : il impliquait en effet que les conducteurs anticipent des temps d'une durée de l'ordre de $\Delta t/6 = 0,2$ s. Ce qui m'a poussé à développer le modèle de priorité absolue, aussi plus simple à implanter (pour plus de détails sur le modèle de priorité dynamique, voir [**?**])

2.2.2 Le modèle de priorité absolue

Ce modèle correspond à un conducteur très prudent : il consiste à faire passer la voiture prioritaire, et à faire freiner la voiture non-prioritaire juste devant l'intersection (sur la dernière case de sa voie).

2.3 Étude locale

2.4 Limites du modèle pour le manège

Bibliographie

[1] Kai NAGEL et Michael SCHRECKENBERG : A cellular automaton model for freeway traffic. Journal de physique I, 2(12):2221–2229, 1992.

[2] Chen RUI-XIONG, Bai KE-ZHAO et Liu MU-REN : The CA model for traffic-flow at the grade roundabout crossing. Chinese Physics, 15, 2006.

3 Annexe

3.1 Graphe du manège

graphe.mli

```
```

graphe.ml

```
```

3.2 Automate cellulaire