

## Correction de l'exercice 5.13

Antonin Dudermel

Ambroise Poulet

Mathias Goffette

*Il serait intéressant (avant de lire la correction) de calculer  $f_{91}$  pour quelques valeurs non-triviales et de se poser la question subsidiaire : pourquoi cette fonction s'appelle-t-elle  $f_{91}$  ?*

On propose de démontrer la terminaison de la fonction suivante :

```
def f91(n):  
    if n <= 100:  
        return f91(f91(n + 11))  
    else:  
        return n - 10
```

Le cas des entiers strictement supérieurs à 100 ne pose aucun problème, reste à démontrer la terminaison pour des entiers inférieurs à 100. Faisons-le en démontrant un résultat plus fort :  $\forall n \in \mathbb{Z}, n \leq 101$  soit  $P_n$  la propriété : «  $f_{91}(n)$  termine et renvoie 91 »

Par récurrence forte descendante :

**Initialisation** On a directement  $P_{101}$

**Hérédité** Soit  $n \in \llbracket 0; 100 \rrbracket$ ,  $\forall k \in \llbracket n + 1; 101 \rrbracket$  ; par disjonction de cas :

- Si  $n \geq 91$  alors  $f_{91}(n)$  calcule et retourne, si possible  $f_{91}(f_{91}(n + 11))$ . Or  $n + 11 > 100$ . Ainsi  $f_{91}(n + 11)$  renvoie  $n + 11 - 10$  soit  $n + 1$ . Par hypothèse de récurrence :  $f_{91}(n + 1)$  termine et renvoie 91. Donc  $f_{91}(n)$  termine et renvoie 91.
- Sinon,  $n < 91$ , alors  $f_{91}(n)$  calcule et retourne si possible  $f_{91}(f_{91}(n + 11))$ . Or  $n + 11 \in \llbracket n + 1; 101 \rrbracket$  donc  $f_{91}(n + 11)$  termine et retourne 91. Or  $91 \in \llbracket n + 1; 101 \rrbracket$ , donc  $f_{91}(f_{91}(n + 11))$  termine et retourne, donc  $f_{91}(n)$  termine et retourne 91.

Par récurrence :  $\forall n \in \llbracket 0; 101 \rrbracket$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_{91}(n)$  termine.