

Autour du Manège Enchanté

Antonin Dudermel

1 Un Graphe pour le Manège

1.1 Le Manège

Le Manège enchanté est un rond-point assez particulier situé sur une intersection à 5 voies à Swindon en Angleterre : il est composé de 5 petits ronds-points tournant dans le sens anti-horaire (comme les ronds-points anglais) disposés en périphérie d'un grand rond-point central tournant dans le sens inverse, la priorité étant aux voitures situés à l'intérieur des petits ronds-points, comme le montre la figure 1.

Une telle disposition permet une diversité des itinéraires possibles pour aller d'une entrée à une sortie (voir figure 2). Le manège serait grâce à cela une réponse plus efficace au problème des intersections routières : assurer un trafic le plus fluide possible, des distances plus courtes, des infrastructures plus sûres... L'objectif de ce TIPE est de montrer que le manège enchanté remplit bien de telles conditions. Nous avons pour cela mis en place deux modèles : un utilisé en pratique pour étudier des infrastructures routières, par automates cellulaire, mais face à la complexité de ce modèle, nous nous sommes rabattus sur une étude plus élémentaire *via* la théorie des graphes.

1.2 Modéliser par un graphe

On peut aisément représenter un ensemble de routes par un graphe orienté pondéré : il suffit de considérer chaque intersection comme un sommet et chaque route comme une arête reliant une intersection à une autre de poids la longueur de la route. En appliquant ce principe au manège enchanté, on aboutit au graphe représenté par la figure 3a. De même on peut construire un graphe représentant le rond-point formé par la périphérie du manège.

L'intérêt principal de l'étude étant plus la forme du manège que cet exemple particulier, par souci d'implantation, le graphe a encore été simplifié en considérant les sorties et les intersections internes disposées en pentagones réguliers.

1.3 Réduction des distances

Muni de ces deux graphes, on peut dès lors appliquer l'algorithme de Floyd-Warshall pour connaître la distance entre les entrées-sorties, et les comparer entre les deux graphes. Le tableau 4 montre le rapport des distances du manège sur celles du rond-point. Sans surprise, on remarque un gain énorme quand il s'agit de prendre la sortie située immédiatement à gauche de l'entrée, puisqu'il n'est pas nécessaire de faire tout le tour du rond-point. Le manège réduit donc bien les distances par rapport à un rond-point classique.

FIGURE 1 – le manège enchanté

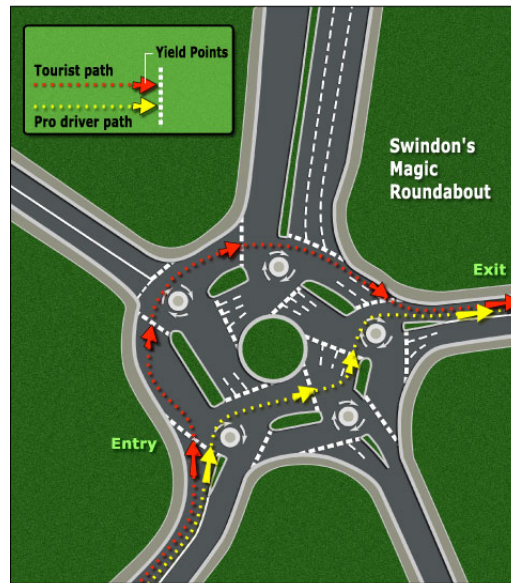
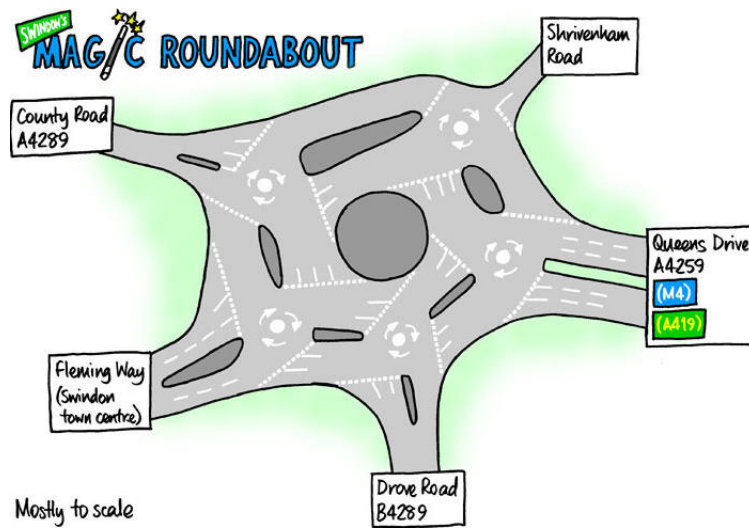
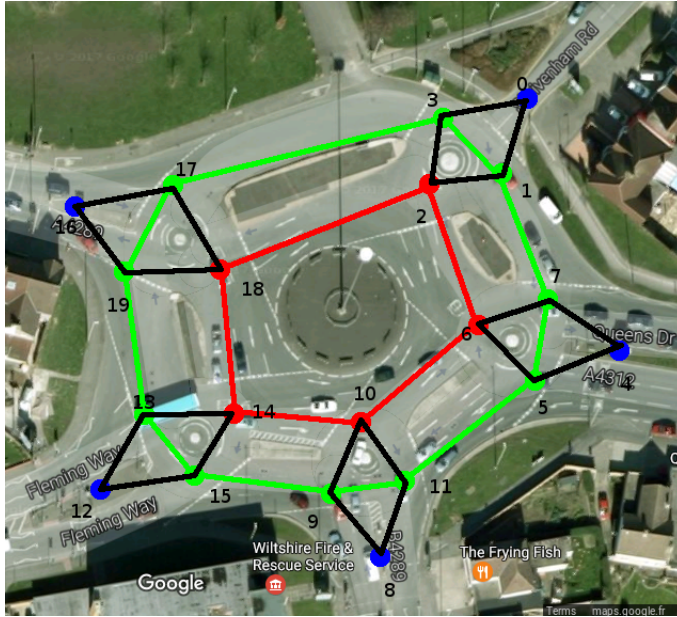
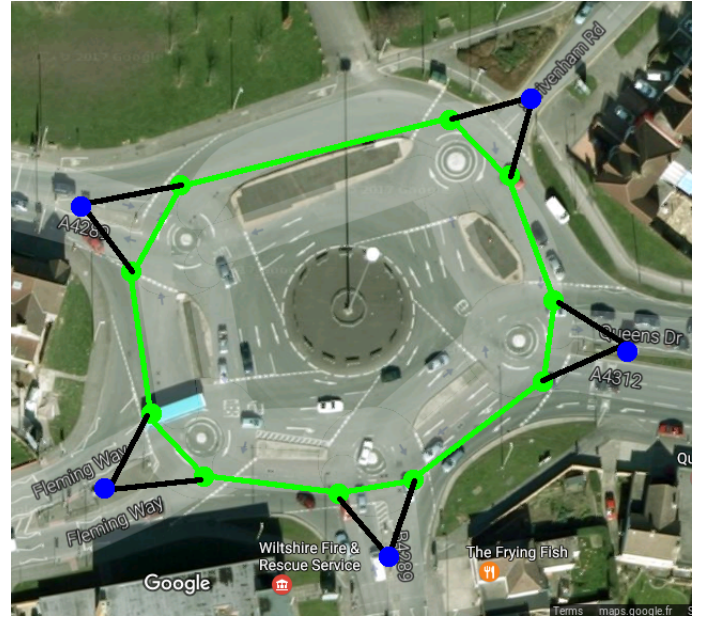


FIGURE 2 – itinéraires possibles



(a) le manège



(b) le rond-point

FIGURE 3 – un graphe adapté au manège

entrée	0	4	8	12	16
0	100	100	100	60	36
4	36	100	100	100	60
8	60	36	100	100	100
12	100	60	36	100	100
16	100	100	60	36	100

FIGURE 4 – Rapport entre la distance entrée-entrée pour le rond-point et le manège (en %)

1.4 Résistant aux coupures de section

1.4.1 arc critique

Un point remarquable du manège est que, comme le montre la figure 2, le conducteur dispose de plusieurs itinéraires pour aller d'une entrée à une sortie. Ainsi, si suite à un évènement, certaines sections se trouvent impraticables, le manège reste fonctionnel. Un algorithme permet de trouver quelles sections ne sont pas nécessaires au bon fonctionnement du manège. Défini formellement :

Définition 1 Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. L'arc $(a, b) \in E$ est dit critique si le graphe $G' = (V, E \setminus \{(a, b)\})$ n'a pas les mêmes composantes fortement connexes que G .

Un théorème intéressant nous permet de déterminer de tels arcs :

Théorème 1 Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté fortement connexe, $(a, b) \in E$, alors : $G' = (V, E \setminus \{(a, b)\})$ est fortement connexe SSI il existe un chemin de a à b dans G'

Pour savoir si (a, b) est un arc critique, il suffit donc de déterminer si b est atteignable depuis a dans G' , à l'aide d'un simple parcours du graphe.

1.4.2 implantation et complexité

Considérons un graphe $G = (V, E)$. L'algorithme fonctionne donc sur le principe décrit ci-dessus : On dispose de la liste des arcs critiques, initialement vide. Pour chaque arête (a, b) du graphe, on supprime cette arête (on a G'), si b n'est pas accessible depuis a dans G' , alors on ajoute (a, b) à la liste des arcs critiques, puis on rajoute (a, b) à G' .

Le besoin de supprimer des arêtes pousse à choisir la structure de matrice d'adjacence (voir ??) pour représenter le graphe, suppression effectuée pour cette structure en temps constant. Dans ce cas, on rappelle la complexité en temps d'un parcours de G : $O(|V|^2)$.

Lors de l'exécution de l'algorithme, on effectue donc :

- Des opérations en temps constant
- Un parcours des arêtes de G , en un temps $O(|V|^2)$
- $|E|$ fois :
 - des opérations en temps constant (suppression, ajout...)
 - Un parcours d'un graphe à $(|V|)$ sommets, en temps $O(|V|^2)$

La complexité totale de l'algorithme est donc un $O(|V|^2 + |E||V|^2) = O(|E||V|^2)$

2 Un Modèle par automate cellulaire

2.1 Automate cellulaire

Le principe de l'automate cellulaire est de décrire le système en discrétisant le temps et l'espace. Dans ces modèles, les voitures évoluent sur des cases, et ont des vitesses entière. Empiriquement, on prend un pas temporel $\Delta t = 1,2$ s et un pas spatial $\Delta x = 7.5$ m.

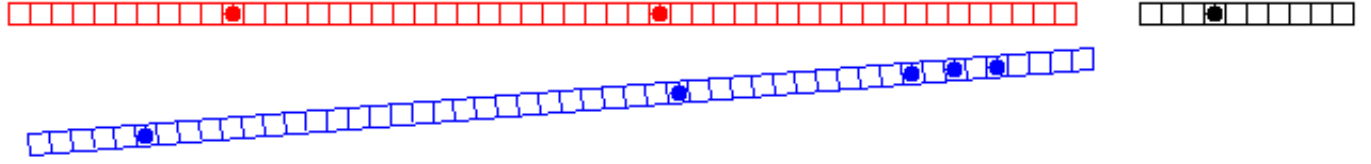


FIGURE 5 – Un exemple d'intersection 2-1

Notre automate se base sur celui de Kai Nagel et Michael Schreckenberg [1], adapté à une section de route, dont nous rappelons brièvement le principe ici : on considère n voitures c_1, \dots, c_n sur la section. On note $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $v_{i,t} \in \llbracket 1; v_M \rrbracket$ la vitesse du véhicule i , et $x_{i,t}$ sa position au temps t . La règle de transition est définie ainsi :

- Accélération : toute voiture n'ayant pas atteint la vitesse maximale voit sa vitesse incrémentée de 1 : $v_{i,t'} = \min(v_{i,t} + 1, v_M)$
- Décélération : chaque véhicule freine pour ne pas percuter la voiture de devant : $v_{i,t'} = \min(v_{i,t}, x_{i+1,t} - x_{i,t} - 1)$
- Décélération aléatoire (bruit) : chaque véhicule a la probabilité $p \in [0; 1]$ de freiner : $v_{i,t''} = \max(v_{i,t'}, 0)$ avec une probabilité p , $v_{i,t''}$ sinon
- Avancer : on a déterminé la vitesse de chaque voiture au temps $t + 1$, on accède à la position de chaque voiture au temps $t + 1$: $v_{i,t+1} = v_{i,t''}$ et $x_{i,t+1} = x_{i,t} + v_{i,t+1}$

Pour ne pas avoir un paramètre de plus à étudier, et nous inspirant d'autres études faites sur ce modèle[2], nous avons supprimé la partie décélération aléatoire.

2.2 Le Problème des intersections

Cependant, ce modèle n'est pas adapté à l'étude d'un rond-point : il faut définir le comportement d'une voiture aux intersections. Par exemple, figure 5, quelle voiture faire passer? J'ai donc tenté d'établir un modèle d'automate répondant à cette question, automate que j'ai ensuite comparé à celui proposé par Chen Rui-Xiong, Bai Ke-Zhao et Liu Mu-Ren[2] pour les ronds-points, décrivant les interactions entre une voie prioritaire et une voie non-prioritaire : si deux voitures, une sur la voie prioritaire, une autre sur la voie non-prioritaire (il s'agit nécessairement des voitures de tête sur leur voie) cherchent à atteindre l'intersection, que faire?

2.2.1 Le modèle de priorité dynamique

Ce modèle est plus complexe : il considère le temps nécessaire à chaque voiture pour arriver à l'intersection, puis fait avancer d'abord la voiture arrivant la première, puis la voiture arrivant ensuite, en tenant compte du déplacement de la première. En cas d'égalité, c'est la voiture la plus rapide qui passe, et encore en cas d'égalité, c'est la voiture sur la voie prioritaire qui passe. Ce modèle ne me semblait pas très réaliste : il impliquait en effet que les conducteurs anticipent des temps d'une durée de l'ordre de $\Delta t/6 = 0,2$ s. Ce qui m'a poussé à développer le modèle de priorité absolue, aussi plus simple à implanter (pour plus de détails sur le modèle de priorité dynamique, voir [2])

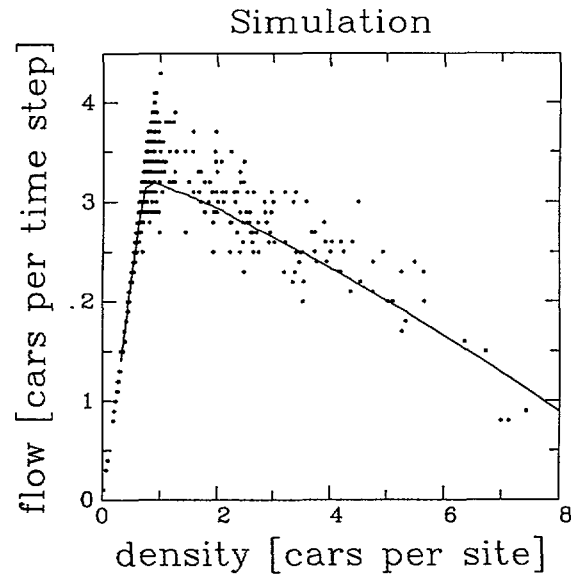


FIGURE 6 – Un exemple de diagramme fondamental, tiré de [1]

2.2.2 Le modèle de priorité absolue

Ce modèle correspond à un conducteur très prudent : il consiste à faire passer la voiture prioritaire, et à faire freiner la voiture non-prioritaire juste devant l'intersection (sur la dernière case de sa voie).

2.3 Étude locale

2.3.1 Grandeurs étudiées : le diagramme fondamental

Pour l'étude d'une infrastructure routière, on étudie principalement trois grandeurs : le flux J , la vitesse v , et la densité ρ . Le flux J représente le nombre de voitures passant par unité de temps à travers une surface donnée, c'est une grandeur qu'on cherchera à optimiser. ρ représente le nombre de voitures par unité d'espace, plus ρ est élevé, plus on risquera de se retrouver dans une situation d'embouteillage. On cherchera bien sûr aussi à optimiser v .

Une relation de mécanique des fluides (ou par analogie avec l'électromagnétisme) nous donne la relation pour une section $J = \rho * v_m$ où v_m est la vitesse moyenne des véhicules sur la section.

D'après cette relation, on construit le diagramme fondamental $J = f(\rho)$ de la figure 6.

2.3.2 Expérience

Le but de cette expérience est d'étudier l'influence de la densité de la voie prioritaire, sur la voie non-prioritaire. Pour cela, nous avons simulé grâce à l'automate une intersection à deux voies, avec sur la voie non-

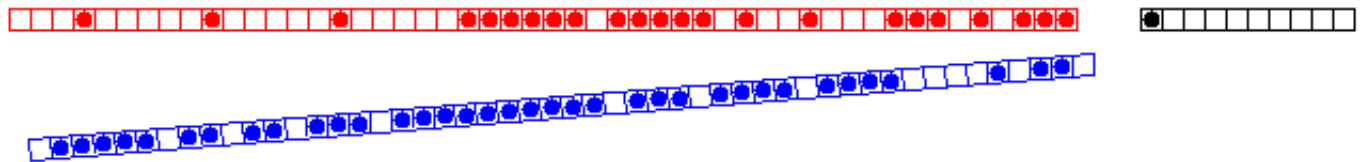


FIGURE 7 – début de saturation

prioritaire un flot constant et peu dense de voiture et sur la voie prioritaire, un flot croissant de voitures, ce pour les deux modèles d'intersection. Le graphique obtenu est le diagramme fondamental de la voie non-prioritaire, en fonction de la densité de la voie prioritaire (voir figure 5, page 6 l'expérience en cours).

2.3.3 Premiers résultats

Le graphique de la figure 8 met déjà en évidence le problème des intersection à priorité : face à une circulation trop dense sur la voie prioritaire, les voitures de la voie non-prioritaire se retrouvent bloquées, et n'avancent plus du tout. Cependant, un résultat surprenant est qu'on observe peu de différence entre le modèle de priorité absolue et de priorité dynamique. Des observations de la simulation ont montré que le trafic sur la voie prioritaire était extrêmement fluide, même sous de très fortes densités, modèle aberrant ne correspondant pas du tout à la réalité, dû à la suppression de la décélération aléatoire dans le modèle de Nagel-Schreckenberg. Il nous fallait donc revenir sur l'automate modélisant les sections.

2.3.4 Ajout d'un temps de redémarrage

Une amélioration simple à ce modèle est de considérer un temps de redémarrage pour un véhicule à l'arrêt : on se fixe un temps d'arrêt $t_a \in \mathbb{N}$, on ajoute à chaque voiture une variable arrêt a_i , à qui on attribue la valeur t_a à chaque fois que la vitesse de la voiture passe de 1 à 0, et ensuite, si une voiture est à l'arrêt, si $a_i = 0$, on passe sa vitesse à 1, sinon, on décrémente de 1 a_i .

Cela permet à la voie prioritaire d'être affectée par la voie non-prioritaire comme le montre la figure 9. Face à une densité élevée de voitures sur la voie prioritaire, ces dernières se retrouvent elles aussi embouteillées, ce qui permet à quelques voitures non-prioritaires de s'engager dans l'intersection (comme le montre l'itération de l'automate en figure 7). Ce modèle permet aussi d'établir des différences entre le modèle de priorité absolue et celui de priorité dynamique, les voitures prioritaires ayant une plus forte tendance à l'arrêt dans le second (voir figure 10)

2.4 Limites du modèle pour le manège

Le modèle en tant que tel ne nous a pas permis d'étudier le manège, et ce, pour plusieurs raisons. Il faut d'abord déterminer si le modèle est pertinent : les graphes obtenus avec un temps de réaction, pour des densités élevées traduisent-ils une réalité empirique où relèvent-ils des limites du graphe? Le manège aurait été aussi

lourd à implanter (même si le code permet déjà de construire assez simplement des ronds-points). Enfin, les problèmes et les solutions étudiés pour une étude locale ne se retrouveront pas forcément sur un automate de plus grande taille.

Bibliographie

- [1] Kai NAGEL et Michael SCHRECKENBERG : A cellular automaton model for freeway traffic. Journal de physique I, 2(12):2221–2229, 1992.
- [2] Chen RUI-XIONG, Bai KE-ZHAO et Liu MU-REN : The CA model for traffic-flow at the grade roundabout crossing. Chinese Physics, 15, 2006.

3 Annexe

3.1 Diagrammes fondamentaux

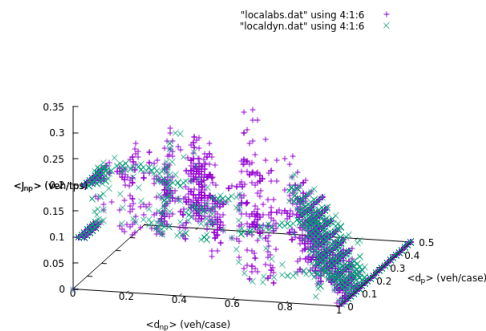


FIGURE 8 – Comparaison absolu (en violet) / dynamique (en vert)

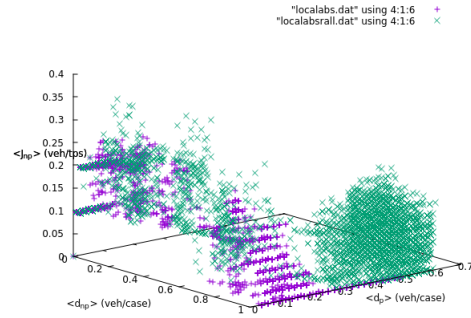


FIGURE 9 – Étude locale avec temps de démarrage

on observe une différence notable entre le modèle de priorité absolue sans temps de redémarrage (violet) et avec (vert)

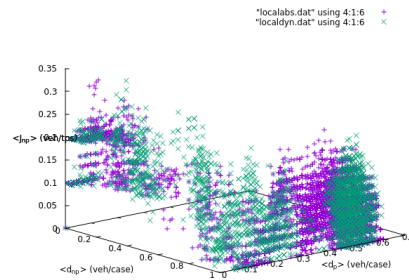


FIGURE 10 – Comparaison absolu-dynamique pour un temps de réaction de 1