Modelagem Matemática para Obtenção de Requisitos de Especificação de Projeto

Vinicius Gadis Ribeiro
Centro Universitário Ritter dos Reis
Escola Superior de Propaganda e Marketing
Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil
vinicius@uniritter.edu.br

Jorge Rodolfo Zabadal
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil
jorge.zabadal@ufrgs.br

Renato Letizia Garcia
Universidade Estadual do Rio Grande do Sul
Novo Hamburgo, Rio Grande do Sul, Brasil
renato-garcia@uergs.edu.br

Sidnei Renato Silveira
CESNORS, UFSM
Frederico Westfallen, Rio Grande do Sul, Brasil
sidneirenato.silveira@gmail.com

André Marques da Silveira
Centro Universitário Ritter dos Reis
Escola Superior de Propaganda e Marketing
Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil
andre@pro.um

Emerson Gadis Ribeiro
Unisc
Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil
gadisrib@gmail.com

RESUMO

Modelos podem ser empregados para a obtenção de requisitos para especificação de projetos. Considerando os tipos de modelos, encontram-se os matemáticos, os quais empregam relações entre variáveis para a representação desejada, sendo destacado no presente trabalho o emprego de especificação por equações diferenciais. É apresentado um método para a sua resolução, sendo posteriormente aplicado como uma prova de conceito no projeto de trocadores de calor casco-tubo. Resultados numéricos são apresentados.

ABSTRACT

Models can be used to obtain design specification requirements. Considering the types of models, we find mathematical models - which employ relationships between variables to the desired representation. Present work highlights the use of differential equations to support specification of project. A method is presented to resolve, and then applied as a proof of concept in hull-tube heat exchanger design. Numerical results are presented.

PALAVRAS CHAVES: Requisitos de Projeto; Elicidação de Requisitos Projetuais; Especificação de Requisitos de Projeto; Modelagem Matemática.

INTRODUÇÃO

Diversos problemas em áreas que dependem de Projetos para geração de conhecimento e solução de problemas reais – em especial, em Design, Engenharia ou Computação - frequentemente preveem relações de causa e evento. Uma das formas mais economicamente viáveis de se obter dados para essas relações, informações e mesmo resultados que possibilitem a tomada de decisões de projeto, assim como também para realizar o levantamento de requisitos de projetos, se dá através do uso de modelos.

Assim, os modelos podem ser empregados para verificar o comportamento de determinado produto em certos fenômenos; para identificar valores limites de materiais ou estruturas em situações extremas; etc. As informações coletadas podem se referir a condições ambientais mais propícias, limitações, casos extremos, entre outros.

Assume-se que modelos são abstrações da realidade, nos quais se desconsideram aspectos não relevantes para determinada situação ou momento, e se concentram naqueles em que há elevada importância. Por vezes, modelos são desenvolvidos empiricamente. Contudo, há estudos buscando a formalização de modelos, de forma a construir teorias robustas.

O presente trabalho apresenta o emprego de modelagem matemática – mais especificamente, equações diferenciais parciais – para a obtenção e requisitos para a otimização de projeto. Como prova de conceito, é apresentada a situação do projeto de um trocador de calor.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma: são apresentados aspectos da teoria dos modelos, os tipos de modelos e os conceitos referentes à modelagem matemática; uma situação-problema e sua solução otimizada, como prova de conceito do emprego de modelagem matemática; sendo posteriormente apresentadas as considerações finais do trabalho.

TEORIA DOS MODELOS

A teoria dos modelos conforme Ziegler [1] levanta dois aspectos ortogonais na teoria: os níveis de especificação de sistemas, nos quais nos concentramos em descrever como os sistemas funcionam, e quais são os mecanismos os fazem funcionar no modo como o fazem; e os formalismos de especificação de sistemas, que compõe os chamados estilos de sistemas – os quais podem ser discretos ou contínuos – no qual os modeladores podem empregar para construir modelos de sistemas. Assim, pode-se entender que há uma nítida distinção entre a estrutura do sistema e o comportamento do sistema. Por estrutura, entende-se a constituição interna do sistema, e por comportamento, a sua manifestação com o exterior. Dentre os tipos de modelos mais comuns, as classificações preveem aspectos como valores que representam o estado de suas variáveis; de suas condições atuais ou anteriores; de acordo com os valores de suas variáveis ao longo do tempo; ser estáticos ou dinâmicos; lineares ou não lineares; orientados a tempo ou a eventos; determinísticos ou estocásticos; e diversas outros possíveis atributos. Indiferente ao tipo de modelo, há cada vez mais a preocupação em formalizar tais modelos.

Os formalismos que envolvem modelos criaram determinadas categorias. Dentre essas categorias, destacam-se os *Differential Equation System Specification* (DESS); *Discrete Event System Specification* (DEVS) e *Discrete Time System Specification* (DTSS) [1].

O emprego de qual formalismo utilizar depende especificamente do tipo de problema e dos tipos de variáveis que podem ser empregadas. Os tradicionais sistemas de equações diferenciais considerando estados contínuos e tempo contínuos fazem parte da categoria DESS ou Sistemas de Especificação por Equações Diferenciais. É o caso, por exemplo, de simulações de dispersão de poluentes na atmosfera ou em meio aquático; otimização de trocadores de calor; simulação de interação de forças magnéticas em moléculas, etc. Nos casos desse formalismo, a representação matemática antecedeu o seu equivalente computacional. Já sistemas que consideram o tempo como variável discreta são formulados como os DTSS ou Sistemas de Especificação por Tempo Discreto. É o caso, por exemplo, de autômatos finitos. O contrário é válido para outra categoria, os DEVS ou Sistemas de Especificação por Eventos Discretos – é o caso das redes de Petry, Máquina de Turing e das cadeias de Markov.

Contudo, o nível de conhecimento do sistema pode possibilitar o emprego de diversas outras tecnologias para obtenção de soluções para representação de problemas decorrentes de fenômenos naturais. Ziegler [1] apresenta quatro níveis de conhecimento do sistema – os quais podem demandar técnicas diferentes para a solução de um problema daquele nível:

- O primeiro nível – também conhecido por objeto - identifica uma parte do mundo real no qual se deseja modelar e os meios pelos quais desejamos observá-lo. Tipicamente, experimentos exploratórios se enquadram nesse nível – os quais definem as condições em que determinadas variáveis realmente influenciam no fenômeno em questão.
- O segundo nível – chamado de dados - é composto de uma base de dados resultantes de medidas e de observações feitas pelo uso do sistema. Em algumas vezes, pode-se recriar dados usando representações mais compactas – como fórmulas, obtidas através de métodos de ajuste de curvas, ou regras, através de algoritmos de mineração de dados.
- No terceiro nível – chamado de gerador -, essas formas de recursão (fórmulas) resultam de conhecimentos nos quais nem sempre se obtém a partir dos dados, como no segundo nível, por exemplo. De forma geral, os dados são obtidos através do uso do modelo. Tal situação se refere a, por exemplo, gerar dados a partir de modelos já consagrados, como aplicar determinadas condições de contorno a alguma equação diferencial e, em determinadas condições, obter-se os dados a partir do emprego desse modelo.
- No quarto nível – conhecido por estrutura -, é disponível um tipo específico de sistema gerador – ou ainda, sabe-se gerar dados observados no nível 1 de uma forma muito específica, considerando-se os componentes de um sistema que estão interconectados e cujas interações valem para a observação realizada. Essa é a forma mais popular de se pensar simulação de sistemas.

Esse quadro é útil como um ponto inicial, para ampliar uma perspectiva que considere os tipos de problemas relacionados com o emprego dos sistemas, da seguinte forma:

- Problema: Há fonte de dados? O que se pretende aprender disso? Qual nível de transição está relacionado?
- Análise de sistema: O sistema pode existir ou apenas estar sendo planejado. Pretende-se entender as características de seu funcionamento. De mais alto nível para mais baixo nível – informação de geradores para obter dados para um sistema de dados
- Inferência de sistema: Há sistema. Tenta-se inferir como ele atua a partir de observações de seu comportamento. De níveis mais baixos par a mais altos – a partir dos dados, obter meios para gerá-los
- Projeto de sistema: O sistema projetado ainda não existe em sua forma esperada. Tenta-se chegar a um bom design para ele. De níveis inferiores para superiores – tendo meios para gerar dados observados, sintetizá-los a partir de módulos componentes.

Dessa forma, é relevante definir os tipos de modelos – tema da seção que segue.

TIPOS DE MODELOS

Considerando-se que os modelos representam a realidade com certas limitações, Kappell destaca em Banerjee [3] os seguintes tipos de modelos:

Descrição verbal – refere-se ao emprego de língua natural para descrever o evento que se deseja modelar. Há situações onde se descreve o contexto, ambiente ou cenário onde atua o modelo. Uma das limitações de descrever assim um modelo é ambiguidade que ocorre na língua natural.

Lista de medidas – consiste, basicamente, na estruturação de medidas, argumentos ou atributos que representam como o modelo pode se comportar, assim como as restrições sobre o que o modelo não pode realizar.

Gráficos, mapas ou esquemas – trata-se da representação visual da realidade. Um mapa, por exemplo, decorrente de limitações de escala, pode perder a riqueza de detalhes que a realidade proporciona.

MODELAGEM MATEMÁTICA

Um exemplo de aplicação da metodologia proposta consiste no projeto de trocadores de calor casco-tubo. Para este fim específico, é necessário resolver equações diferenciais advectivo-difusivas em coordenadas curvilíneas para três regiões de interesse: a região dos dutos internos, a parede dos dutos internos e a região entre casco e tubos. Esta seção é dedicada ao dimensionamento de trocadores de calor[4] do tipo casco-tubo, cujas respectivas equações advectivo-difusivas são dadas por

$$w\frac{\partial T}{\partial z} = \propto \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) \quad \text{(interior dos dutos)} \quad (1)$$

$$w\frac{\partial T}{\partial z} = \propto \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) \quad \text{(parede dos dutos)} \quad (2)$$

$$v_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} = \propto \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

(região do casco) (3)

Na região do interior dos dutos, onde ocorre o escoamento longitudinal do fluido interno, w representa a componente axial da velocidade, r é a coordenada radial, z a coordenada axial e α a difusividade térmica do fluido interno. Na região da parede ocorre apenas condução e na região do casco ocorre o escoamento transversal em torno dos dutos do banco. Na equação (3), v_r e v_θ são as componentes da velocidade nas direções radial e angular, não sendo considerada a componente axial, uma vez que as chicanas são relativamente próximas e ocupam a maior parte da secção transversal do casco.

Na região do fluido interno é prescrito um perfil de velocidades parabólico para a componente axial, cujo ponto de máximo se localiza em r=0:

$$w = w_0 + w_1 r^2 \quad (4)$$

SOLUÇÃO PARA A REGIÃO DO FLUIDO INTERNO

Ao invés de resolver cada equação individualmente e depois conectar as soluções correspondentes ao longo das interfaces, é mais conveniente conectar as próprias equações diferenciais nessas fronteiras. Impondo simultaneamente as equações (1) e (2) sobre a interface r= R_i, onde R_i é o raio interno dos tubos, surge uma equação auxiliar denominada restrição diferencial, dada por

$$w\frac{\partial T}{\partial z} = -\propto \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad para\ \mathrm{R} = \mathrm{R_i} \quad (5)$$

Uma vez que essa restrição é válida para qualquer valor de z, esta pode ser resolvida a fim de produzir uma distribuição local de temperaturas, válida junto à interface

$$T = a + be^{\frac{-w}{\propto}z} \qquad para\ \mathrm{R} = \mathrm{R_i} \quad (6)$$

Nessa equação, a e b são parâmetros arbitrários. A equação (6), que atua como uma **condição de contorno de primeira espécie**, isto é, um perfil prescrito na fronteira, pode ser convertida em uma solução válida para toda a região do fluido interno. Para tanto, basta utilizar o método de variação de parâmetros. Neste caso, isto implica assumir que as constantes presentes em (6) passam a ser funções da coordenada radial:

$$T = a(r) + b(r)e^{c(r)z} \quad (7)$$

Substituindo (7) em (1) e reagrupando termos, obtém-se

$$\propto \left[\frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial r} + \frac{\partial^2 a}{\partial r^2}\right] + \\ + \left[(w_0 + w_1 r^2)bc - \propto \left(\frac{1}{r}\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{\partial^2 b}{\partial r^2}\right)\right] e^{c(r)z} - \\ \propto \left[\frac{b}{r}\frac{\partial c}{\partial r} + 2\frac{\partial b}{\partial r}\frac{\partial c}{\partial r} + b\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}\right] z e^{c(r)z} + \\ + \propto b\left[\frac{\partial c}{\partial r}\right]^2 = 0 \quad (8)$$

Uma vez que a, b e c não dependem de z, todas as expresses entre colchetes devem se anular individualmente, produzindo o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{\partial^2 a}{\partial r^2}=0 \tag{9}$$

$$(w_0+w_1r^2)bc-\propto\left(\frac{1}{r}\frac{\partial b}{\partial r}+\frac{\partial^2 b}{\partial r^2}\right)=0 \tag{10}$$

$$\frac{b}{r}\frac{\partial c}{\partial r}+2\frac{\partial b}{\partial r}\frac{\partial c}{\partial r}+b\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial c}{\partial r}=0 \tag{12}$$

A equação (12) informa que c é constante ($c=c_0$), resultado que também satisfaz (11). Restam, portanto, duas equações a resolver. A solução de (9) é obtida em duas etapas. Fazendo

$$\frac{\partial a}{\partial r}=f \tag{13}$$

obtém-se

$$\frac{f}{r}+\frac{\partial f}{\partial r}=0 \tag{14}$$

Separando variáveis, resulta

$$\frac{df}{f}=-\frac{dr}{r} \tag{15}$$

Integrando ambos os membros, obtém-se

$$lnf=-lnr+lna_1 \tag{16}$$

ou

$$f=\frac{a_1}{r} \tag{17}$$

Substituindo em (13) e integrando, resulta

$$a=a_0+a_1lnr \tag{18}$$

A equação (10), que foi convertida em

$$(w_0+w_1r^2)bc_0-\propto\left(\frac{1}{r}\frac{\partial b}{\partial r}+\frac{\partial^2 b}{\partial r^2}\right)=0 \tag{19}$$

Admite soluções do tipo exponencial de polinômio, o que pode ser facilmente verificado ao multiplicar todos os termos por r:

$$(w_0r+w_1r^3)bc_0-\propto\left(\frac{\partial b}{\partial r}+r\frac{\partial^2 b}{\partial r^2}\right)=0 \tag{20}$$

Note-se que nesta equação figuram termos polinomiais multiplicando b e suas derivadas, termos produzidos cada vez que a exponencial de um polinômio sofre derivação. Resta, portanto, encontrar o grau do polinômio correspondente. Uma prescrição simples para a candidata a solução é um perfil gaussiano:

$$b=b_0e^{b_1r^2} \tag{21}$$

Substituindo (21) em (10), obtém-se

$$[(c_0w_1-4\propto b_1^2)r^2+c_0w_0-4\propto b_1]b_0e^{b_1r^2}=0 \tag{22}$$

Como a exponencial não pode ser nula para qualquer valor de r, o conteúdo entre colchetes deve ser igual a zero. Esse conteúdo é um polinômio na variável radial, de modo que os coeficientes de cada potência de r devem ser nulos, produzindo o seguinte sistema algébrico:

$$b_1=\frac{c_0w_0}{4\propto} \tag{23}$$

$$c_0 = 4 \propto \frac{w_1}{w_0^2} \qquad (24)$$

Assim, a distribuição de temperaturas na região do fluido interno resulta

$$T = a_0 + a_1 ln r + b_0 e^{\frac{w_1}{w_0} r^2 + 4\propto \frac{w_1}{w_0^2} z} \qquad (25)$$

Nessa equação, a constante deve ser nula, a fim de evitar uma singularidade em r=0. Os demais parâmetros devem ser determinados utilizando restrições fisicamente realistas. Como exemplo, para fluidos que operam em contracorrente, se o trocador fosse suficientemente longo, a ponto da temperatura de saída do fluido interno resultar igual à de entrada do fluido externo (T_{ee}), a condição assintótica

$$\lim_{z \to \infty} T = T_{ee} \qquad (26)$$

seria realista. Entretanto, essa condição independe do tamanho do trocador, de modo que permanece válida para cenários realistas. Uma vez que a exponencial presente na solução dada por (25) tende a zero,

$$a_0 = T_{ee} \qquad (27)$$

Outra restrição fisicamente realista consiste em impor que a temperatura no ponto central (r=0) da primeira secção transversal do duto (z=0) seja igual à própria temperatura de entrada do fluido interno:

$$\mathrm{T}(0{,}0) = T_{ei} \qquad (28)$$

Aplicando essa condição de passagem por pontos sobre a solução, obtém-se

$$a_1 = T_{ii} - T_{io} \qquad (29)$$

Os demais parâmetros podem ser especificados utilizando restrições hidrodinâmicas. Impondo a condição de deslizamento parcial junto à parede, dada por

$$w = w_p \;\; para \;\; r = R_i \qquad (30)$$

onde w_p é a velocidade junto à parede, resulta

$$w_0 = w_w - w_1 R_i^2 \qquad (31)$$

Outra restrição hidrodinâmica consiste na imposição da mesma vazão em qualquer secção transversal ao longo do tubo:

$$Q = \int_0^R 2\pi r w \, dr \qquad (32)$$

Essa vazão fixa corresponde à obtida para perfil uniforme (plug) de velocidade, dada por

$$Q = \pi R^2 W_\infty \qquad (33)$$

Essa restrição especifica o último parâmetro livre na solução:

$$w_1 = \frac{w_w - 2W_\infty}{R_i^2} \qquad (34)$$

Dessa forma, a distribuição de temperaturas na região do fluido interno, delimitada pelo intervalo $0 < r < R_i$, pode ser expressa em termos dos dados de entrada do problema:

$$T = T_{io} + (T_{ii} - T_{io}) e^{\frac{2(W_w - W_\infty)}{R_i^2 (W_w - 2W_\infty)}\left(-r^2 + \frac{4\propto z}{(W_w - 2W_\infty)}\right)} \qquad (35)$$

Nessa equação, ainda não foi especificado o valor numérico da velocidade junto à parede.

SOLUÇÃO PARA A REGIÃO DA PAREDE DOS TUBOS

Na região situada entre os raios interno (R_i) e externo (R_0) dos dutos, a solução local é obtida ao substituir (7) em (2), o que produz as mesmas expressões para as funções a e c, sendo que a equação diferencial ordinária a partir da qual se obtém b é dada por

$$\frac{1}{r}\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{\partial^2 b}{\partial r^2} + c_0^2 b = 0 \qquad (36)$$

Esta é a equação de Bessel, cujas soluções, obtidas a partir de expansões em série, são expressas genericamente como

$$b = b_1 J_0(c_0 r) + b_2 Y_0(c_0 r) \qquad (37)$$

Nessa equação, as funções J0 e Y0 são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie. Assim, a distribuição de temperaturas nessa região é definida por

$$T = a_0 + [b_1 J_0(c_0 r) + b_2 Y_0(c_0 r)]\, e^{c_0 z} \qquad (38)$$

SOLUÇÃO PARA A REGIÃO DO CASCO

Para a região externa aos tubos é preciso obter outra restrição diferencial, igualando as equações (2) e (3) em r = R_0:

$$\frac{v_\theta}{R_0}\frac{\partial T}{\partial \theta} = \propto \left(\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}\right) \qquad (39)$$

Esta equação foi obtida após anular a componente radial da velocidade, devido à condição de não-penetração na superfície dos tubos. Note-se que a restrição diferencial obtida impõe um comportamento exponencial à distribuição local de temperaturas na variável angular, uma vez que as derivadas de primeira e segunda ordem são proporcionais entre si. Assim, a derivada primeira da temperatura resulta exponencial nessa variável angular, de modo que a solução final de (39) resulta

$$T = a + b e^{\frac{v_\theta R_0}{\propto}\theta} \qquad (40)$$

onde a e b são constantes. Efetuando novamente o processo de variação de parâmetros e impondo em r = R_0 a igualdade dessa solução com a obtida na região da parede, obtém-se uma candidata a solução na região do casco:

$$T = a(r) + b(r) e^{c_1\theta + c_0 z} \qquad (41)$$

Nessa prescrição, c_1 e c_2 foram mantidos como constantes por uma questão de objetividade. Caso fossem prescritas como funções de r, surgiriam equações extras no sistema de equações diferenciais ordinárias, informando que suas derivadas seriam nulas. Substituindo (41) em (3) são novamente gerados os mesmos modelos para a função a, a saber, a equação (9), e a seguinte equação auxiliar para b:

$$\propto \left(\frac{1}{r}\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{\partial^2 b}{\partial r^2}\right) + \left(\propto c_0^2 + \frac{\propto c_1^2}{r^2} - \frac{v_\theta c_1}{r}\right) b = 0 \qquad (42)$$

Naturalmente, essa solução depende essencialmente do modelo adotado para $v_\theta(r)$. Apenas por uma questão de simplicidade, foi escolhido um modelo linear em r:

$$v_\theta = k_1 r \qquad (43)$$

Essa equação também admite soluções do tipo exponencial de polinômio. Neste caso, entretanto, polinômios de grau 2 não fornecem soluções exatas, embora constituam boas aproximações. De fato, ao substituir

$$b = b_0 e^{b_1 r^2} \qquad (44)$$

em (42), obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\propto b_0 c_1^2 = 0 \qquad (45)$$

$$\propto b_0 b_1^2 = 0 \qquad (46)$$

$$c_1 k_1 - 4 \propto c_1 - \propto c_0^2 = 0 \qquad (47)$$

Na prática, valores típicos para a são da ordem de 10^{-6}, enquanto b_1 e c_1 são da ordem de 10^{-3} e b_0 varia entre 10 e 100. Assim, as equações (45) e (46) podem ser consideradas satisfeitas. De fato, nessas equações a magnitude típica dos valores numéricos dos produtos no membro esquerdo é de 10^{-9} e, portanto, a equação (47) pode ser resolvida para k_1:

$$k_1 = \propto \left(4 + \frac{c_0^2}{c_1}\right) \qquad (48)$$

enquanto (45) e (46) podem ser consideradas identidades. As distribuições de velocidade e temperatura nessa região resultam então

$$v_\theta = \propto \left(4 + \frac{c_0^2}{c_1}\right) r \qquad (49)$$

e

$$T = a_0 + a_1 lnr + b_0\ e^{b_1 r^2 + c_1\theta + c_0 z} \qquad (50)$$

ESTIMATIVA DE CARGA TÉRMICA E ÁREA DE TROCA

As constantes arbitrárias nas equações (38) e (40) são especificadas em função dos dados de entrada quando é imposta a continuidade das soluções e de suas derivadas nas respectivas interfaces. Impondo que as soluções para as regiões do fluido interno e da parede se tornem idênticas quando r=R_i, ao menos dois parâmetros podem ser explicitamente determinados: a_1=0 e

$$c_0 = \frac{-2 \propto}{R_i^2 W_\infty} \qquad (51)$$

Assim, na equação (39) b_1=0, a fim de evitar termos imaginários gerados pela função Y_0 quando avaliada para argumentos negativos. Desse modo, a solução na região da parede resulta explicitamente determinada:

$$T = a_0 + b_1 J_0\left(\frac{-2 \propto}{R_i^2 W_\infty} r\right)\ e^{\frac{-2\propto}{R_i^2 W_\infty} z} \qquad (52)$$

Note-se que na equação (42) a condição assintótica já aplicada sobre a região do fluido interno continua válida para a região da parede, uma vez imposta a continuidade de ambas na interface correspondente. Assim,

$$a_0 = T_{eo} \qquad (53)$$

e

$$a_1 = \frac{T_{eo} - T_{ei}}{n_t n_c} \qquad (54)$$

Nesta equação, n_t é o número de colunas do banco de tubos, n_c é o número de vezes que o fluxo atravessa o banco e o sub-índice "$_e$" denota o fluido externo. Dessa forma, a equação (42) se torna

$$T = T_{e0} + \frac{T_{eo} - T_{ei}}{n_t n_c}\ e^{b_1 r^2 + c_1\theta + \frac{-2\propto}{R_i^2 W_\infty} z} \qquad (55)$$

Essa equação é válida para uma única coluna de tubos, de modo que os parâmetros referentes às demais são determinados por via numérica. Cada perfil de temperatura obtido para fileiras situadas progressivamente mais a jusante é utilizada como condição de montante para a próxima região adjacente. Para a primeira coluna, os valores numéricos da vazão de fluido interno e da temperatura de saída do fluido externo são relacionados pelo balanço global de energia:

$$m_e c_e (T_{eo} - T_{ei}) = m_i c_i (T_{ii} - T_{io}) \qquad (56)$$

Essas duas grandezas são as incógnitas dessa equação, levando em conta que em geral a temperatura de saída do fluido interno é conhecida. Na prática, é mais conveniente prescrever a vazão mássica do fluido interno do que a temperatura de saída do fluido externo, porque a vazão possui um intervalo de variação mais restrito. Por um lado, existe um limite inferior em função da necessidade de produzir uma quantidade mínima de fluido interno, que em geral representa o produto de maior valor agregado na indústria. Por outro, a partir de um certo limite superior para a vazão, o próprio tempo de residência do fluido no interior dos dutos limita a quantidade de energia térmica transferida. Assim, é mais prático isolar do que arbitrar a temperatura de saída do fluído externo na equação (48):

$$T_{eo} = T_{ei} + \frac{m_i c_i}{m_e c_e}(T_{ii} - T_{io}) \qquad (57)$$

A quantidade de calor transferida pela superfície de um único tubo, definida pela lei de Fourier como

$$q = -2\pi k_i \int_0^L r\frac{\partial T}{\partial r}dz \qquad para\ r = R_i \tag{58}$$

Pode ser obtida da equação (28), que contém somente parâmetros conhecidos:

$$q = -2\pi k_i \int_0^L r\frac{\partial T}{\partial r}dz \qquad para\ r = R_i \tag{59}$$

Nessas equações, L é o comprimento dos tubos e k_i é a condutividade térmica do fluido interno. O fluxo total de energia transferida por todos os dutos do banco resulta então

$$Q = 2\pi N k_i R_i^2 \frac{W_\infty}{\propto}(T_{ii} - T_{io})\left[e^{-\frac{2\propto z}{R_i^2 W_\infty}} - 1\right] \tag{60}$$

onde N é o número de dutos. Essa quantidade de calor deve ser consistente com a definida pelo membro direito da equação (48):

$$Q = m_i c_i (T_{ii} - T_{io}) \tag{61}$$

Igualando as equações (60) e (61), obtém-se uma estimativa para o número total de tubos necessários para que o banco dissipe a quantidade de calor requerida pelo balanço global:

$$N = \frac{\propto m_i c_i (T_{ii} - T_{io})}{2\pi k_i R_i^2 W_\infty (T_{ii} - T_{io})\left[e^{-\frac{2\propto z}{R_i^2 W_\infty}} - 1\right]} \tag{62}$$

As equações (28), (48), (51) e (54) podem ser utilizadas para elaborar um método direto para dimensionamento de trocadores de calor casco-tubo. Esse método consiste basicamente de três passos:

1. A fim de determinar o comprimento do trocador é necessário resolver um sistema contendo a equação (52) e uma restrição do tipo função objetivo, a fim de minimizar o custo ou maximizar o lucro total da planta. Caso essa restrição não esteja disponível, é preciso prescrever a temperatura de saída do fluido interno, em função de perdas por evaporação ou em função de sua especificação comercial. Uma vez prescrita essa temperatura, basta então isolar z na equação (28).

2. A vazão mássica ou a temperatura de saída do fluido externo podem ser determinadas a partir da equação (48). Usualmente a vazão máxima é estimada em função da perda de carga [3,4].

3. O número de tubos - e, portanto, a respectiva área de troca -, é obtido a partir da equação (62)

Esse algoritmo pode ser reduzido a um único passo quando a vazão mássica possui um intervalo de variação tão restrito, que pode ser considerada conhecida. Neste caso, a velocidade da corrente livre pode ser expressa como

$$W_\infty = \frac{m}{\rho \pi R_i^2 N} \tag{63}$$

Na equação (53). Neste caso, o calor transferido é expresso em termos do número de tubos que formam o banco e de seu respectivo comprimento.

Uma vez determinados os parâmetros livres, torna-se possível plotar a distribuição de temperaturas resultante, a fim de verificar se é necessário estabelecer novas condições de operação (regulagem da vazão dos fluidos) ou mesmo se seria preciso utilizar maior número de passes nos tubos ou na própria carcaça do trocador.

O caráter analítico das soluções obtidas permite a formulação de códigos fonte suficientemente flexíveis para que possam ser aplicados a uma ampla classe de problemas envolvendo o projeto e simulação de trocadores de calor. Dessa forma, quando surge a necessidade de implementar refinamentos no modelo, a alteração ou mesmo a elaboração de rotinas se torna uma tarefa relativamente simples. Como exemplo, a exatidão das respectivas soluções pode ser aumentada pela inclusão de modelos de turbulência, que afetam a velocidade junto à parede e a difusividade térmica dos fluidos. Neste caso, dois modelos auxiliares bastante simples podem ser implementados diretamente nas soluções obtidas, fornecendo expressões para a velocidade junto à parede, expressa em termos da tensão de cisalhamento, e da redefinição da difusividade térmica em microescala, escrita em função do percurso livre médio e do período médio transcorrido entre duas colisões sucessivas.

ESTIMATIVA DA VELOCIDADE JUNTO À PAREDE

A fim de obter uma expressão para w_p é preciso aplicar uma nova condição de contorno sobre o respectivo perfil radial de velocidades:

$$\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial r} \tag{64}$$

Para o perfil parabólico dado pela equação (4), essa restrição fornece uma definição para w_p em termos da tensão de cisalhamento junto à parede:

$$W_w = W_\infty - \frac{R_i \tau}{4\mu} \tag{65}$$

A tensão de cisalhamento, por sua vez, pode ser definida através da seguinte equação empírica:

$$\tau = 0.0296\, Re_z^{0.2}\, \rho\, W_\infty^2 \tag{66}$$

Nessa equação, R_e é o **número de Reynolds** baseado na coordenada axial, definido como

$$Re_z = \frac{\rho W_{\infty i} z}{\mu} \tag{67}$$

REDEFINIÇÃO DA DIFUSIVIDADE TÉRMICA

O coeficiente de difusão mássico pode ser definido em microescala, a partir do percurso livre médio e do período médio entre colisões sucessivas. Uma vez que o mecanismo convectivo consiste no transporte de energia térmica por meio da translação das moléculas que compõem o meio fluido, a difusividade térmica de um meio sólido ou de um fluido estagnado pode sofrer correção, levando em consideração o transporte advectivo. O modelo proposto inicia com a definição de difusividade mássica em microescala, dada por Reichl (1980)

$$\mathrm{D} = \frac{l^2}{2\tau} \tag{68}$$

onde l é o percurso livre médio e τ o intervalo médio de tempo transcorrido entre duas colisões sucessivas. A partir dessa definição é possível obter um fator de amplificação para a difusividade térmica na forma

$$\mathrm{f} = \frac{\mathrm{D_{turbulento}}}{\mathrm{D_{browniano}}} \tag{69}$$

Assim, a difusividade térmica pode ser corrigida através do emprego de um fator multiplicativo adimensional, que leva em consideração a decorrência do movimento, isto é, a turbulência:

$$\propto = \mathrm{f}\, \mathrm{D_{browniano}} \tag{70}$$

O fator de amplificação pode ser obtido ao estimar o percurso livre médio e o período entre colisões para duas escalas de movimento. Para a escala macroscópica, o livre caminho médio é da ordem do raio interno dos tubos, e o período entre colisões é obtido a partir da velocidade da corrente livre, uma vez que

$$\mathrm{W}_\infty \cong \frac{\mathrm{l}}{\tau} \tag{71}$$

Para a escala microscópica, esses valores não necessitam realmente serem definidos, uma vez que o coeficiente de difusão clássico é medido em fluidos estagnados, e portanto corresponde à difusividade mássica associada ao movimento browniano. Entretanto, em função do argumento apresentado no capítulo 3 sobre coeficientes de difusão de quantidade de movimento, o valor da difusividade devido ao movimento browniano deve ser substituído pela própria viscosidade cinemática do fluido. Assim, a difusividade térmica turbulenta resulta

$$\propto = \frac{l^2}{2\tau} = \frac{l}{2}\frac{l}{\tau} = \frac{R_i}{2}W_\infty \qquad (72)$$

É importante observar que o fator adimensional de amplificação deveria, a rigor, ser definido localmente, uma vez que a viscosidade cinemática varia com a temperatura. Na verdade, essa regra é válida para todos os adimensionais definidos a partir de grandezas dinâmicas ao invés de propriedades físicas intrínsecas às substâncias que compõem o meio.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A formulação proposta passa agora a ser utilizada para resolver um exemplo prático de transferência de calor por condução e convecção: o dimensionamento de um trocador de calor casco-tubo operando com água como fluido interno e externo [12]. A água que circula nos dutos é aquecida de 38ºC a 54ºC, enquanto a temperatura de entrada da água no lado do casco é de 93ºC. O raio interno dos dutos é de 0.0095m, a condutividade da parede, considerada de aço carbono, é de aproximadamente 16W/mºC, as vazões nos tubos e nos cascos valem, respectivamente, 3.8 kg/s e 1.9 kg/s e as propriedades físicas médias para a água são mostradas na tabela 1.

Tabela 1: Propriedades físicas da água

K (W/mºC)	ρ (Kg/m3)	ν (m2/s)	C (J/Kg ºC)
0.5	1000	0.0000009	4200

Esses valores correspondem a uma difusividade térmica da ordem de 10^{-6} m^2/s, que deve ser corrigida através da multiplicação pelo fator de amplificação. Utilizando a equação (64), a difusividade térmica turbulenta resulta

$$\propto = \frac{R_i}{2}W_\infty = \frac{R_i}{2}\frac{Q_i}{A} = \frac{R_i}{2}\frac{2Q_i}{\pi R_i^2} = \frac{Q_i}{\pi R_i} =$$

$$= \frac{3.8}{3.14 \ x \ 0.0095} = 127.4 \qquad (74)$$

A tabela 2 mostra a quantidade de energia térmica transferida por segundo para o banco de tubos em função do número de dutos e do respectivo comprimento.

Tabela 2: Potência térmica transferida para o banco de tubos (W)

L(m)	N = 10	N = 20	N = 30	N = 40	N = 50
2,0	58019	111474	160025	203715	242737
2.2	63661	121921	174417	221238	262648
2.4	69276	132261	188568	238348	281950
2.6	74867	142495	202487	255062	300672
2.8	80434	152627	216180	271396	318838
3,0	85976	162660	229655	287364	336475

Para fins de comparação, o valor experimental disponível para a potência recebida por um arranjo contendo 36 tubos de 2.9m é de aproximadamente 264 kW, que é compatível com os resultados obtidos na tabela.

Com relação ao desempenho computacional, o tempo de processamento requerido para a geração da tabela 4 é virtualmente desprezível. Utilizando MapleV, o sistema demanda menos de 10s de processamento total em um processador AMD Sempron 1.8GHz, com 512Mb de RAM. Caso o problema fosse resolvido através de métodos iterativos baseados em formulações empíricas, apropria implementação computacional resultaria inviável, uma vez que esses algoritmos envolvem diversas consultas a tabelas contendo feixes de curvas, para as quais deveriam ser ajustadas as funções correspondentes.

REFERÊNCIAS

[1] Back, Nelson et al., 2008, “Projeto integrado de produtos: planejamento, concepção e modelagem”, Manole, Barueri.

[2] Ziegler, B., Prehoefer. H. and Kim, T., 2000, “Theory of Modeling and Simulation: integrating

discrete event and continuous complex dynamic systems", Academic Press, London.

[3] Banerjee, S., 2014, "Mathematical Modeling: models, analysis and applications", CRC Press, Boca Raton, FL.

[4] Kreith, F. e Bohn, M., 2003 "Princípios de Transferência de Calor", São Paulo, Thomson Pioneira.

[5] Polyanin, Andrei and Zaitsev, Valentin, 2003, "Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations", CRC Press, Boca Raton, FL.

[6] Reichl, R., 1980, "A modern course in statistical physics", New York, Eduard Arnold Pub.

[7] Holman, J., 2009, "Heat transfer", New York, McGraw-Hill.

[8] Ribeiro, V., Zabadal, J., Siqueira, M. e Lacerda, G., 2009, "Um Estudo Comparativo de Sistemas de Computação Algébrica para Análise de Dados em Simulações". Diálogo (Canoas), 14, pp. 147-160.