Esta é a equação de Bessel, cujas soluções, obtidas a partir de expansões em série, são expressas genericamente como

$$b = b_1 J_0(c_0 r) + b_2 Y_0(c_0 r) \tag{37}$$

Nessa equação, as funções J0 e Y0 são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie. Assim, a distribuição de temperaturas nessa região é definida por

$$T = a_0 + [b_1 J_0(c_0 r) + b_2 Y_0(c_0 r)]\, e^{c_0 z} \tag{38}$$

SOLUÇÃO PARA A REGIÃO DO CASCO

Para a região externa aos tubos é preciso obter outra restrição diferencial, igualando as equações (2) e (3) em r = R_0:

$$\frac{v_\theta}{R_0}\frac{\partial T}{\partial \theta} = \propto \left(\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}\right) \tag{39}$$

Esta equação foi obtida após anular a componente radial da velocidade, devido à condição de não-penetração na superfície dos tubos. Note-se que a restrição diferencial obtida impõe um comportamento exponencial à distribuição local de temperaturas na variável angular, uma vez que as derivadas de primeira e segunda ordem são proporcionais entre si. Assim, a derivada primeira da temperatura resulta exponencial nessa variável angular, de modo que a solução final de (39) resulta

$$T = a + b e^{\frac{v_\theta R_0}{\propto}\theta} \tag{40}$$

onde a e b são constantes. Efetuando novamente o processo de variação de parâmetros e impondo em r = R_0 a igualdade dessa solução com a obtida na região da parede, obtém-se uma candidata a solução na região do casco:

$$T = a(r) + b(r) e^{c_1\theta + c_0 z} \tag{41}$$

Nessa prescrição, c_1 e c_2 foram mantidos como constantes por uma questão de objetividade. Caso fossem prescritas como funções de r, surgiriam equações extras no sistema de equações diferenciais ordinárias, informando que suas derivadas seriam nulas. Substituindo (41) em (3) são novamente gerados os mesmos modelos para a função a, a saber, a equação (9), e a seguinte equação auxiliar para b:

$$\propto \left(\frac{1}{r}\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{\partial^2 b}{\partial r^2}\right) + \left(\propto c_0^2 + \frac{\propto c_1^2}{r^2} - \frac{v_\theta c_1}{r}\right) b = 0 \tag{42}$$

Naturalmente, essa solução depende essencialmente do modelo adotado para $v_\theta(r)$. Apenas por uma questão de simplicidade, foi escolhido um modelo linear em r:

$$v_\theta = k_1 r \tag{43}$$

Essa equação também admite soluções do tipo exponencial de polinômio. Neste caso, entretanto, polinômios de grau 2 não fornecem soluções exatas, embora constituam boas aproximações. De fato, ao substituir

$$b = b_0 e^{b_1 r^2} \tag{44}$$

em (42), obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\propto b_0 c_1^2 = 0 \tag{45}$$

$$\propto b_0 b_1^2 = 0 \tag{46}$$

$$c_1 k_1 - 4 \propto c_1 - \propto c_0^2 = 0 \tag{47}$$

Na prática, valores típicos para a são da ordem de 10^{-6}, enquanto b_1 e c_1 são da ordem de 10^{-3} e b_0 varia entre 10 e 100. Assim, as equações (45) e (46) podem ser consideradas satisfeitas. De fato, nessas equações a magnitude típica dos valores numéricos dos produtos no membro esquerdo é de 10^{-9} e, portanto, a equação (47) pode ser resolvida para k_1:

$$k_1 = \propto \left(4 + \frac{c_0^2}{c_1}\right) \tag{48}$$