MODELAGEM MATEMÁTICA

Um exemplo de aplicação da metodologia proposta consiste no projeto de trocadores de calor casco-tubo. Para este fim específico, é necessário resolver equações diferenciais advectivo-difusivas em coordenadas curvilíneas para três regiões de interesse: a região dos dutos internos, a parede dos dutos internos e a região entre casco e tubos. Esta seção é dedicada ao dimensionamento de trocadores de calor[4] do tipo casco-tubo, cujas respectivas equações advectivo-difusivas são dadas por

$$w\frac{\partial T}{\partial z} = \propto \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) \quad \text{(interior dos dutos)} \quad (1)$$

$$w\frac{\partial T}{\partial z} = \propto \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) \quad \text{(parede dos dutos)} \quad (2)$$

$$v_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} = \propto \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

(região do casco) (3)

Na região do interior dos dutos, onde ocorre o escoamento longitudinal do fluido interno, w representa a componente axial da velocidade, r é a coordenada radial, z a coordenada axial e α a difusividade térmica do fluido interno. Na região da parede ocorre apenas condução e na região do casco ocorre o escoamento transversal em torno dos dutos do banco. Na equação (3), v_r e v_θ são as componentes da velocidade nas direções radial e angular, não sendo considerada a componente axial, uma vez que as chicanas são relativamente próximas e ocupam a maior parte da secção transversal do casco.

Na região do fluido interno é prescrito um perfil de velocidades parabólico para a componente axial, cujo ponto de máximo se localiza em r=0:

$$w = w_0 + w_1 r^2 \quad (4)$$

SOLUÇÃO PARA A REGIÃO DO FLUIDO INTERNO

Ao invés de resolver cada equação individualmente e depois conectar as soluções correspondentes ao longo das interfaces, é mais conveniente conectar as próprias equações diferenciais nessas fronteiras. Impondo simultaneamente as equações (1) e (2) sobre a interface r= R_i, onde R_i é o raio interno dos tubos, surge uma equação auxiliar denominada restrição diferencial, dada por

$$w\frac{\partial T}{\partial z} = -\propto \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad para\ \mathrm{R} = \mathrm{R_i} \quad (5)$$

Uma vez que essa restrição é válida para qualquer valor de z, esta pode ser resolvida a fim de produzir uma distribuição local de temperaturas, válida junto à interface

$$T = a + be^{\frac{-w}{\propto}z} \qquad para\ \mathrm{R} = \mathrm{R_i} \quad (6)$$

Nessa equação, a e b são parâmetros arbitrários. A equação (6), que atua como uma **condição de contorno de primeira espécie**, isto é, um perfil prescrito na fronteira, pode ser convertida em uma solução válida para toda a região do fluido interno. Para tanto, basta utilizar o método de variação de parâmetros. Neste caso, isto implica assumir que as constantes presentes em (6) passam a ser funções da coordenada radial:

$$T = a(r) + b(r)e^{c(r)z} \quad (7)$$

Substituindo (7) em (1) e reagrupando termos, obtém-se

$$\begin{aligned}&\propto \left[\frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial r} + \frac{\partial^2 a}{\partial r^2}\right] + \\ &+ \left[(w_0 + w_1 r^2)bc - \propto \left(\frac{1}{r}\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{\partial^2 b}{\partial r^2}\right)\right]e^{c(r)z} - \\ &\propto \left[\frac{b}{r}\frac{\partial c}{\partial r} + 2\frac{\partial b}{\partial r}\frac{\partial c}{\partial r} + b\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}\right]ze^{c(r)z} + \\ &+ \propto b\left[\frac{\partial c}{\partial r}\right]^2 = 0\end{aligned} \quad (8)$$