# Makroekonomia II – prof. M. Brzoza-Brzezina
# Ćwiczenia 2.

A. Duszak, T. Kleszcz

17 i 24 października 2018 r.

Funkcja produkcji, model Solowa

## Zadania

**Zad. 1.** Dla podanych funkcji produkcji sprawdź, czy spełniają one warunki stawiane neoklasycznym funkcjom produkcji. Jeśli tak, zapisz je w postaci intensywnej i narysuj wykres $f(k)$.

(a) $Y = KL$

(b) $Y = (K + L)^a;\ a > 1$

(c) $Y = K^{0,5}L^{0,5}$

(d) $Y = K^a L^{(1-a)};\ a > 0$

**Zad. 2.** W modelu Solowa ze stałą populacją i stałą technologią stopa oszczędności $s = 0,2$, a stopa deprecjacji kapitału wynosi $\delta = 0,05$. $k, y, c$ oraz $i$ to wielkości *per capita* (odpowiednio kapitał, produkcja, konsumpcja, inwestycje).

(a) Przedstaw funkcję produkcji $Y = K^{1/3}L^{2/3}$ w postaci intensywnej (*per capita*).

(b) Znajdź stan ustalony ($\bar{k}$)

(c) Ile wynosi kapitał zgodnie ze „złotą regułą" ($\hat{k}$)? Złota reguła wyznacza poziom kapitału, który maksymalizuje poziom konsumpcji *per capita* ($c$) w stanie ustalonym.

(d) Ile powinna wynosić stopa oszczędności ($\hat{s}$), aby $\bar{k} = \hat{k}$? Jak powinna się zmienić początkowa stopa oszczędności, aby osiągnąć poziom zgodny ze „złotą regułą"?

(e) Narysuj na jednym wykresie następujące funkcje: $y = f(k), \delta k, sf(k), \hat{s}f(k)$

(f) Jakie narzędzia polityki gospodarczej mogą wpłynąć na zmianę stopy oszczędności z $s$ na $\hat{s}$?

**Zad. 3.** Załóżmy, że iloraz K/Y jest stały i wynosi 2.

(a) Najpierw przyjmij, że liczba ludności się nie zmienia i że nie ma postępu technologicznego. Ile w stanie ustalonym wynosi relacja oszczędności-produkcja, która odpowiada stopie depracji równej 5%?

(b) Teraz dopuść możliwość wzrostu, którego przyczyną jest zwiększanie się liczby ludności lub postęp technologiczny. Oblicz odpowiadającą stanowi ustalonemu relację oszczędności-produkcja, możliwą do pogodzenia ze stopą deprecjacji równą 5% i 3-procentowym tempem wzrostu realnego PKB.

**Zad. 4.** Funkcja produkcji w formie intensywnej ma postać: $y = f(k) = k^{\alpha},\ \alpha = 0,3$. Stopa deprecjacji wynosi 4%, a iloraz K/Y jest stały i wynosi 2,5. W stanie ustalonym realny PKB rośnie w tempie 3%.

(a) Ile wynosi początkowa stopa oszczędności?

(b) Ile wynosi krańcowy produkt kapitału ($mpk$)?

(c) Ile wynosi krańcowy produkt kapitału ($mpk$) zgodny ze „złotą regułą"? Jak powinien zmienić się początkowy poziom kapitału $k$, aby osiągnąć poziom zgodny ze „złotą regułą"?

(d) Ile wynosi relacja oszczędności-produkcja zgodna ze „złotą regułą"?

(e) Jak powinna się zmienić początkowa stopa oszczędności, aby osiągnąć poziom zgodny ze „złotą regułą"?

# Odpowiedzi

**Zad.1**

(a) NIE: $Y_{K,K} = 0; \lambda Y \neq \lambda K \lambda L$

(b) NIE: $Y_{K,K} > 0; \lambda Y \neq (\lambda K + \lambda L)^a$

(c) TAK. $y = k^{0,5}$

(d) TAK dla $a < 1$; NIE dla $a > 1$

**Zad. 2**

(a) $\frac{Y}{L} = \frac{K^{1/3}L^{2/3}}{L} = k^{1/3}$

(b) $sf(\bar{k}) = \delta\bar{k}$
$s\bar{k}^{1/3} = \delta\bar{k}$
$\bar{k}^{2/3} = s/\delta$
$\bar{k} = (\frac{s}{\delta})^{2/3} = (\frac{0,2}{0,05})^{3/2} = 8$

(c) $k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t; i_t = f(k_t) - c_t$
$k = (1-\delta)k + f(k) - c$
$c = f(k) - \delta k$
Maksymalizujemy $c$:
$c' = f'(k) - \delta = 0 \Longrightarrow f'(\hat{k}) = \delta$
$\frac{1}{3}\hat{k}^{-2/3} = \delta$
$\hat{k} = 17,21$

(d) $\hat{s} \cdot f(\hat{k}) = \delta\hat{k}$
$\hat{s} = \frac{\delta\hat{k}}{f(\hat{k})} = \frac{0,05 \cdot 17,21}{17,21^{1/3}} = \frac{1}{3}$
powinna wzrosnąć

**Zad. 3.**

(a) $K/Y = 2,\ a = 0,\ n = 0,\ \delta = 5\%$
$k_{t+1} = sf(k_t) + (1-\delta)k_t$, w stanie ustalonym $k_{t+1} = k_t = k$
Stan ustalony: $sy = \delta k$
$s = \frac{\delta k}{y} = \frac{\delta K/L}{Y/L} = \delta\frac{K}{Y} = 0,05 \cdot 2 = 0,1$

(b) $K/Y = 2,\ a + n = 3\%, \delta = 5\%$
Stan ustalony: $sy = (\delta + a + n)k$
$s = \frac{(\delta+a+n)K/(AL)}{Y/(AL)} = (\delta + a + n)\frac{K}{Y} = (0,05 + 0,03) \cdot 2 = 0,16$

**Zad. 4.**

(a) $n + g = 0,03$
Stan ustalony: $sy = (\delta + a + n)k$
$s = (\delta + a + n)k/y = (\delta + a + n)K/Y = (0,04 + 0,03) \cdot 2,5 = 0,175$

(b) Dla funkcji produkcji Cobba-Douglasa: $\alpha = mpk(K/Y)$
$mpk = \alpha/(K/Y) = 0,3/2,5 = 0,12$

(c) Złota reguła: $mpk = \delta + a + n = 0,04 + 0,03 = 0,07$
powinien się zwiększyć

(d) $\alpha = mpk(K/Y)$
$(K/Y) = \alpha/mpk = 0,3/0,07 = 4,29$

(e) $s = (\delta + a + n)K/Y = (0,04 + 0,03) \cdot 4,29 = 0,3$
powinna się zwiększyć