

N ⁴
 דוגמה לגרף - ביואינפורמטיקה
 Metabolic network Proteins interaction network
Figs. 1 lights and 4 sometime and 4 common source. Bit you do so not spece.
4
 דוגמה לגרף - אינטרנט
5
בעיות מפורסמות על גרפים
6

בעיית האיכרים והבארות: האם ניתן לחבר את כל הבארות לכל הבתים ע"י תעלות
והאם ניתן לוובר את כל הבאות לכל הבתים עי תעלות שלא יחצו זו את זו?
7
N-A-
בעיית אוילר לגרפים
■ האם ניתן לצייר את הציורים הנ"ל במשיכת קולמוס אחת?
אוילר אוילר
·
בעיית הגשרים של קניגסברג
Legisland Jegisland George State Company of the Com
האם ניתן לחצות את כל שבעת הגשרים ולחזור לנקודת ההתחלה מבלי לעבור על אותו גשר יותר מפעם אחת?
9

N-
בעיית המילטון לגרפים
 ■ האם ניתן לעבור על כל הקודקודים של גרף כך שמבקרים בכל קודקוד פעם אחת בלבד?
•
0.045
G=(V,E) :גרף
ימון: י _י י רקוד - ע _י − קודקוד - ע _י ∪ צלע (v _i , v _j) צלע - e _i □
ם נאמר ש (v _i , v _j הם v _j , v _j הם קודקודים שכנים (סמוכים)
אם קיימת צלע (e _{i j} = (v _i , v _j). • e. • • • • • • • • • • • • • • • • •
בדוגמה שלנו הקשת (c,c)
N.
■ גרף מכוון: גרף שבו לכל הקשתות יש כיוון. ■ צלעות:
בגרף מכוון – זוגות סדורים בגרף מכוון – זוגות לא-סדורים. בגרף לא מכוון – זוגות לא-סדורים.
■ דרגה של קודקוד (degree(v) – מספר הפעמים ש v - v מופיע כקודקוד קצה של צלעות ב- E.
■ בגרף מכוון: □ דרגת יציאה (d _{out} (v) – מס' הצלעות היוצאות מ- v. □ דרגת כניסה (d _u (v) – מס' הצלעות הנכנסות ל- v.
ם דו גול כני טוו (ע _{ווו} ע) – נוט דוביעות הנכנטות לייע.

-בגרף לא מכוון

$$\sum_{v \in V} \deg ree(v) = 2 \mid E \mid$$

הוכחה: כל צלע נספרת פעמיים.



מסקנה: סכום הדרגות זוגי!

13



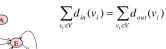
בגרף לא מכוון

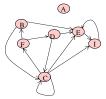
- מסקנה: בגרף לא מכוון יש מס' זוגי של קודקודים שדרגתם אי-זוגית.
- הוכחה: אילו היה מס' אי-זוגי של קודקודים שדרגתם אי-זוגית, סכום כל הדרגות היה אי-זוגי, בניגוד לטענה הקודמת.

14



בגרף מכוון





15

N.A.	
– G (V,E) הגדרות נוספות עבור גרף	
מ <mark>סלול:</mark> סדרה של קודקודים (v _o ,v ₁ ,,v _n) כך ש- E (v _i ,v _{i+1})∈E , וכל הצלעות שבין הקודקודים הנ"ל שונות זו מזו.	
■ מסלול פשוט: כל הקודקודים במסלול שונים זה מזה. ■ מעגל: מ ∨ 0 = ∨ 0 ■ מעגל פשוט: אם כל הקודקודים במעגל שונים זה ■ מיזה (פרט לראשון והאחרון). ■ אורך של מסלול: מספר הצלעות לאורך המסלול (ח).	
 הגדרות נוספות	
 מרחק בין שני קודקודים u ו- v: האורך המינימלי של מסלול כלשהו בינהם. סימון: (d(u,v). בינהם מלול בין u ל-v. אין מסלול בין u ל-v. קוטר הגרף: המרחק המקסימאלי בין שני קודקודים כלשהם בגרף. 	
הגדרות נוספות	
■ בגרף מכוון - <mark>מסלול (מעגל) מכוון:</mark> מסלול של קשתות מכוונות. ■ <mark>גרף (לא מכוון) קשיר:</mark> גרף שבו בין כל זוג צמתים קיים מסלול. ■ גרף מכוון הוא <mark>גרף קשיר חזק</mark> אם בין כל זוג קודקודים _י v _i , v _j קיים מסלול מכוון.	
ן ב מסות מפון. גרף מכוון קשיר חזק גרף שאינו קשיר חזק —	

N-
יחס השקילות: ~ בגרף לא מכוון
■ היחס ~ מוגדר על קודקודי הגרף: V. u אם יש מסלול בין u ל- v. u רכיב קשירות: מחלקת שקילות של היחס ~. □ רכיב קשירות חזקה בגרף מכוון: קבוצת קודקודים כך שיש מסלול מכל קודקוד לכל קודקוד.
19
Y
 יהי G=(V,E) גרף
ע"י השמטת G (<mark>x} ■ הגרף המתקבל מ- G ע"י השמטת G הקודקוד</mark> x וכל הצלעות החלות בו.
 .e אגרף המתקבל ע"י השמטת ה צלע: G ∖ {e} ■ (V',E') הוא <mark>תת-גרף</mark> של G אם C'=(V',E') ■ E'⊆E, ן- V' מכיל את כל קודקודי הקצה של
 ב= ב, ך
.V'=V הוא <mark>תת-גרף פורש</mark> של G אם G'=(V',E') ■
20
N-
 טענות
בגרף קשיר לא מכוון עם n קודקודים ו- m צלעות ■
 יש לפחות n-1 צלעות.
 ■ בגרף בעל 3≤ n קודקודים ו- m≥n צלעות יש מעגל.
 e∈E יהי G=(V,E) גרף קשיר ולא מכוון, ותהי G((V,E) צלע. אז הגרף G\{e} קשיר אם"ם הצלע e שייכת למעגל פשוט כלשהו ב- G.

N-
- טענה1:
- עם n קודקודים m צלעות, G עם u קודקודים m צלעות,
 ■ בגוף ⊖ עם דו קוו קווים יוו ציעוונ, אם m <n-1 -<="" n-m="" th="" אזי="" בg="" יש="" לפחות="" קשירות="" רכיבי=""></n-1>
- נוכיח באינדוקציה על מספר הצלעות בגרף
נוכיון באינו ווןציוז על מספו הצלעוונ בגוןי -
_
- 22
-
N.
- טענה 2
<u>.</u>
■ בגרף קשיר לא מכוון עם n קודקודים ו- m צלעות יש לפחות n-1 צלעות.
-
-
-
N-
טענה 3
בגרף בעל 3≥ n קודקודים ו- m≥n צלעות יש m≥n בגרף
_ מעגל.
נוכיח באינדוקציה על מספר הקודקודים בגרף
-

No.
טענה 4
■ יהי G=(V,E) גרף קשיר ולא מכוון, ותהי G=(V,E) צלע. אז הגרף G\{e} קשיר ⇔ הצלע e שייכת למעגל פשוט כלשהו ב- G.
·
הגדרה
. גרף. G=(V,E) גרף. \overline{G} הוא הגרף G= \overline{G} הוא הגרף G המשלים של
■ שני קודקודים הינם שכנים ב- G אם"ם הם אינם שכנים בגרף המשלים.
• 26
•
ly-
משפחות של גרפים
■ הגרף הריק:
. ארף ללא צלעות [№] 5
. ■ <mark>הגרף השלם (קליקה):</mark> גרף לא-מכוון המכיל את כל הצלעות האפשריות.
 נו ווצועווג וואפטר זוג.

N-
(F)
 ַ משפט: מס' הצלעות בגרף השלם הלא מכוון ה K _n הינו: • • • • • • • • • • • • • • • • • • •
$\binom{n}{2} = n(n-1)/2$
■ הוכחה: זהו מספר הזוגות הלא סדורים שאפשר לבחור מתוך n איברים.
- 28
•
ly-
C _n – גרף המעגל
. ארף המסלול – P _n − גרף המסלול
•
. 29
V
קוביות
■ גרף הקוביה ה-ח מימדית – Q _n : □ הקודקודים הם כל הסדרות □ הקודקודים הם כל הסדרות □
האפשריות באורך n של אפסים (1,0,1) (1,0,0) ואחדים.
יש צלע בין כל זוג קודקודים יש צלע בין כל זוג קודקודים השונים זה מזה בקורדינטה אחת (0,0,0) (0,0,0) בדיוק.
 . צלעות. n*2 ⁿ⁻¹ -ו קודקודים, ו- 1*2 ⁿ⁻¹ צלעות. Q _n שגרף
30

גרפים רגולריים
גרף רגולרי - לכל הקודקודים אותה דרגר ר גרף נקרא <mark>h-רגולרי</mark> אם לכל הקודקודים יי
גרף 3-רגולרי גרף 3-רגולר
2
גרף דו-צדדי
הוא גרף דו-צדדי - אם ניתן לו G=(V,E) ■
לשתי קבוצות זרות: V_1,V_2 כך שכל הצי V_1 עוברות בין V_1 ו- V_2 .
\vee \swarrow \boxtimes
\wedge \langle Z
$egin{array}{ccc} {\sf K}_{1,7} & {\sf K}_{2,3} \ {\sf גרף דו-צדד'} & {\sf גרף דו-צדדי ש} \end{array}$
שלם '
משפטים על גרף דו-צדדי
∎ בגרף דו-צדדי שלם K _{s,t} מספר הצלעות הו
V ₂ :G=(V ₁ ,V ₂ ,E) בגרף דו-צדדי רגולרי
גרף הוא דו-צדדי אם"ם כל המעגלים שלו ו •
באורך <mark>זוגי</mark> .
3

V-	
עצים	
■ יער – גרף לא מכוון שאינו מכיל מעגלים. ■ עץ – יער קשיר.	
י ■ עץ בעל n קודקודים. ■ <mark>עלה</mark> – קודקוד בעץ שדרגתו 1.	
	34
National Control of the Control of t	
 התנאים הבאים שקולים	
. הוא עץ G .1	
הוא <mark>חסר מעגלים</mark> אך הוספת צלע כלשהי בין G .2 שניים מקודקודיו תיצור מעגל.	?
 פנים מקודקוד דרבוד מעגז. 3. G אינו מכיל לולאות עצמיות ועבור כל זוג	3
 קודקודים <mark>קיים מסלול פשוט יחיד</mark> המחבר ביניהם.	
ק <mark>שיר</mark> אך הסרת קשת כלשהי מ-G פוגמת G. בקשירות G.	,
·	35
N	
 התנאים הבאים שקולים	
יהי G=(V, E) גרף סופי בעל n קודקודים: V =n.	
התנאים הבאים שקולים: -	
 1. G הוא <mark>עץ</mark> .	
2. חסר מעגלים ומכיל 1-n צלעות.	
3. G קשיר ומכיל n-1 צלעות.	i