תורת הגרפים-2

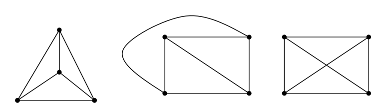
תרצה הרסט ואילת בוטמן,
מבוסס על הספר "מתמטיקה בדידה"
של נתי ליניאל ומיכל פרנס

1

גרפים מישורים (Planar Graphs)

הגדרה: גרף *G* נקרא **מישורי** אם **ניתן** לייצג אותו במישור מבלי שאף שתי צלעות תיחתכנה.

- דוגמא: הגרף השלם K_4 מישורי:



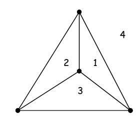
2

- מה עם הגרפים K_5 ו-$K_{3,3}$?

3

פאות של גרף מישורי

- **פאה** היא אזור החסום על ידי צלעות של הגרף המישורי.
- **הפאה האינסופית** היא הפאה החיצונית של הגרף.



4

משפטים על גרף מישורי

- משפט (נוסחת אוילר): יהי G גרף מישורי קשיר. יהיו:
  - n - מספר הקדקודים,
  - m - מספר הצלעות,
  - f - מספר הפאות של הגרף ,

  אזי מתקיים: $n+f-m=2$.
  - רעיון הוכחה:
  - מקבעים את מס' הקודקודים: n, ומוכיחים באינדוקציה על מס' הצלעות, שהינו: $m \geq n-1$ (כי הגרף קשיר).

5

הוכחת נוסחת אוילר: יהיה G גרף מישורי קשיר אזי מתקיים: $n+f-m=2$

אוילר הוכיח את הקשר הבא בין מספר הקדקודים, הצלעות והפאות של כל גרף מישורי.

משפט 5.2.29 (נוסחת אוילר): יהי G גרף מישורי קשיר. אז $n + f - m = 2$, כאשר n מספר הקדקודים, m מספר הצלעות ו- f מספר הפאות של הגרף G.

הוכחה: נקבע את מספר הקדקודים n, ונוכיח את המשפט באינדוקציה על מספר הצלעות m של הגרף. מכיוון ש- G קשיר בהכרח $m \geq n-1$ (טענה 5.1.14).

בסיס האינדוקציה: $m = n-1$. במקרה זה G הוא עץ (טענה 5.2.21). הפאה היחידה היא הפאה האינסופית, כלומר $f = 1$. מכיוון ש- $m = n-1$ נוסחת אוילר מתקיימת.

שלב האינדוקציה: נוכיח לגרף קשיר עם $m \geq n$ צלעות. לפי טענות 5.1.15 ו- 5.1.16, יש ב- G צלע e השייכת למעגל שהשמטתה אינה מנתקת את הגרף. לכן, בגרף $G' = G\setminus\{e\}$ יש $n' = n$ קדקודים ו- $m' = m-1$ צלעות והוא קשיר. מכאן, על פי הנחת האינדוקציה לגבי G' מתקיים $n' - m' + f' = 2$, כאשר n', m', f' הם מספר הקדקודים, הצלעות והפאות של G' בהתאמה. נשים לב כי השמטת הצלע e גורמת למיזוג של שתי הפאות שבהן היא גובלת (תרשים 5.2.16). לכן, מספר הפאות f' בגרף G' קטן ב- 1 ממספר הפאות ב- G, כלומר $f' = f-1$. יוצא אם כך: $n - m + f = n - (m-1) + (f-1) = n' - m' + f' = 2$. □

6

משפט: יהי G גרף מישורי קשיר עם $3\le n$ קדקודים ו-m צלעות. אז $m \le 3(n-2)$.

הוכחה: יהי t_F מס' הצלעות החלות בפאה F.

כל פאה מכילה לפחות 3 צלעות, לכן לכל F: $t_F\ge 3$

כל צלע משותפת לכל היותר ל-2 פאות, לכן סכום הצלעות החלות בכל הפאות הוא: $2m \ge \Sigma t_F \ge 3f$

לכן: $(2/3)*m \ge f$

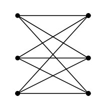
על פי נוסחת אוילר:

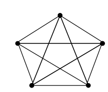
$2 = n-m+f \le n-m+2/3m$

לכן: $m \le 3(n-2)$ משל.

7

- מסקנה: הגרפים K_5 ו- $K_{3,3}$ אינם מישוריים !





8

K_5 אינו מישורי

- הוכחה: $n=5$ $m=5*4/2=10$
- לפי משפט קודם: $m=10 \le 3(n-2)=3*3=9$
- סתירה!

9

$K_{3,3}$ אינו מישורי !

הוכחה נניח בשלילה ש-$K_{3,3}$ מישורי.

לגרף 6 קודקודים ו-9 צלעות.

לפי נוסחת אוילר: $n+f-m = 6+f-9 = 2$

לכן יש לגרף 5 פאות.

לכל פאה יש לפחות שלוש צלעות, וכל צלע יכולה להשתתף בשתי פאות.

10

- מכאן שמספר הצלעות הממוצע בכל פאה:

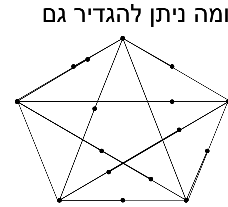
$$\frac{2m}{5} = 3.6$$

לכן חייבת להיות פאה עם לכל הפחות 3 צלעות ולכל היותר 3.6 צלעות - כלומר פאה בעלת 3 צלעות.
קיבלנו סתירה מאחר ש- $K_{3,3}$ הינו גרף דו צדדי שלא מכיל משולשים מאחר שכל מעגליו באורך זוגי.

11

הומיאומורף

- הגדרה: גרף המתקבל מהחלפה של כל צלע ב-K_5 במסלול כלשהו, כאשר המסלולים זרים, נקרא **הומיאומורף** של K_5 (בדומה ניתן להגדיר גם הומיאומורף של $K_{3,3}$).



12

משפט (Kuratowski): (ללא הוכחה בקורס שלנו)

הגרף G אינו מישורי אם ורק אם הוא מכיל תת-גרף שהוא הומיאומורף של K_5 או תת-גרף שהוא הומיאומורף של $K_{3,3}$.

13

משפט: בכל גרף מישורי G=(V,E) קיים קודקוד שדרגתו לכל היותר 5.

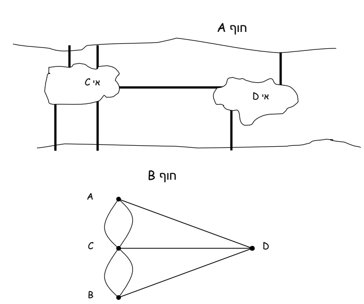
- הוכחה:

מספיק להוכיח כי הדרגה הממוצעת של קודקוד בגרף מישורי קטנה ממש מ6.

$$\frac{\sum_{v \epsilon V} \deg(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|} \leq \frac{1}{|V|} \cdot 2 \cdot 3 \cdot (|V| - 2)$$
$$= 6 \cdot \frac{|V| - 2}{|V|} < 6$$

14

בעיית אוילר



15

- **מסלול אוילר** - מסלול (לא בהכרח פשוט) שמבקר בכל צלע בדיוק פעם אחת נקרא.
- **מעגל אוילר** - מעגל (לא בהכרח פשוט) שמבקר בכל צלע בדיוק פעם אחת נקרא.
- משפט אוילר :

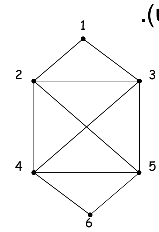
יהי G גרף קשיר **לא מכוון**. ב-G יש מעגל אוילר אם"ם כל הדרגות בגרף זוגיות.

יהי G גרף קשיר . ב-G יש מעגל אוילר אם"ם דרגת הכניסה של כל קדקוד שווה לדרגת היציאה של הקדקוד.

16

מעגל אוילר

- למה: יהי G=(V,E) גרף לא מכוון שכל דרגותיו זוגיות. אז כל קדקוד ב-G שדרגתו חיובית שייך למעגל כלשהו (לאו דווקא פשוט).
- תרגיל: מצא מעגל אוילר בעזרת השיטה שתיארנו בהוכחת המשפט.

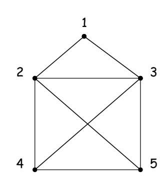


17

מסלול אוילר

- מסקנה: בגרף קשיר לא-מכוון יש מסלול אוילר אם"ם יש בו 0 או 2 קדקודים בעלי דרגה אי-זוגית.
- תרגיל:

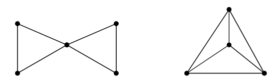
מצא מסלול אוילר בגרף הבא:



18

מעגל המילטון

- מעגל (מסלול) המילטון - מעגל (מסלול) שמבקר בכל **קדקוד** של הגרף בדיוק פעם אחת.
- האם יש לגרפים אלו מעגל המילטון?

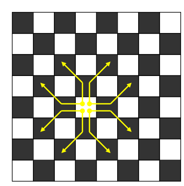


- סיבוכיות הבעיה של מציאת מעגל המילטון לגרף הינה NP-שלמה!

19

דוגמאות

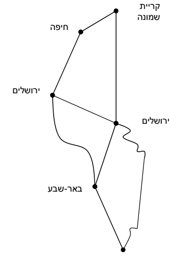
- האם ניתן לכסות את כל משבצות לוח שחמט על ידי צעדי פרש מבלי לדרוך במשבצת יותר מפעם אחת ולחזור לנקודת ההתחלה? (המילטון הראה שהדבר אפשרי)



20

הרחבה של בעית מעגל המילטון

- בעיית הסוכן הנוסע:
  סוכן מעוניין לבקר בכל אחת מערי הארץ, בכל עיר בדיוק פעם אחת, ולחזור בסיום לנקודת ההתחלה של מסעו. המטרה היא למצוא את **המסלול הקצר** ביותר שיקיים את הדרוש.



21

משפטים על מעגל המילטון

- משפט (Ove): אם בגרף בעל n קדקודים מתקיים $d(x)+d(y)\geq n$ לכל שני קדקודים x,y שאינם שכנים, אזי יש בגרף **מעגל** המילטון.
- שאלה: האם הכיוון ההפוך מתקיים ?
- מסקנה (תנאי מספיק לקיום מסלול המילטון בגרף): אם בגרף בעל n קדקודים מתקיים $d(x)+d(y)\geq n-1$ לכל שני קדקודים x,y שאינם שכנים, אזי יש בגרף **מסלול** המילטון.

22