

## 6 Эффективность и среднеквадратичная ошибка

1. [# 30] Предположим, у нас есть случайная выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  из распределения  $Exp(\lambda)$ . Предположим, мы хотим оценить среднее значение  $1/\lambda$ . Оценка

$$T_1 = \bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

является несмещенной оценкой, равной  $1/\lambda$ .

Пусть  $M_n$  – минимум из

$$X_1, X_2, \dots, X_n.$$

$M_n$  имеет распределение  $Exp(n\lambda)$ . Оценка

$$T_2 = nM_n$$

является другой несмещенной оценкой для  $1/\lambda$ .

Какую из оценок  $T_1$  и  $T_2$  вы бы выбрали для оценки среднего значения  $1/\lambda$ ? Обоснуйте свой ответ, составив модель и проведя 2000 экспериментов. Вычислите относительную эффективность одной оценки по отношению к другой.

2. [# 40] Инженер-геодезист измеряет три неизвестных угла  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  треугольника. Он моделирует неопределенность в измерениях, рассматривая их как реализации трёх независимых случайных величин  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  с ожиданиями

$$E[T_1] = \alpha_1, \quad E[T_2] = \alpha_2, \quad E[T_3] = \alpha_3,$$

и все три с одинаковой дисперсией  $\sigma^2$ . Чтобы использовать тот факт, что три угла должны в сумме давать  $\pi$ , он также рассматривает новые оценки  $U_1, U_2$  и  $U_3$ , определяемые

$$U_1 = T_1 + \frac{1}{3}(\pi - T_1 - T_2 - T_3),$$

$$U_2 = T_2 + \frac{1}{3}(\pi - T_1 - T_2 - T_3),$$

$$U_3 = T_3 + \frac{1}{3}(\pi - T_1 - T_2 - T_3).$$

(Обратите внимание, что «отклонение»  $\pi - T_1 - T_2 - T_3$  делится поровну на три измерения и что  $U_1 + U_2 + U_3 = \pi$ .)

а. Вычислите  $E[U_1]$  и  $\text{Var}(U_1)$ .

б. Какая из оценок  $U_1$  или  $T_1$  эффективнее для оценки угла  $\alpha_1$ ? Вычислите относительную эффективность одной оценки по отношению к другой. Обоснуйте свой ответ, составив модель и проведя 2000 экспериментов.

с. Какой тип оценки вы бы выбрали для  $\alpha_1$ , если известно, что треугольник равнобедренный (т.е.  $\alpha_1 = \alpha_2$ )? Обоснуйте свой ответ, составив модель и проведя 2000 экспериментов.