

## 5 Несмещенные оценки

1. Предположим, что наш набор данных является реализацией случайной выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  из равномерного распределения на интервале  $[-\theta, \theta]$ , где  $\theta$  неизвестно. Составьте модель, проведите 1000 экспериментов для проверки следующих гипотез.

а. [# 10] Оценка

$$t = \frac{3}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)$$

является несмещенной оценкой для  $\theta^2$ .

Если оценка является несмещённой, оцените параметр  $\alpha$  при котором

$$P(|E[\theta^2] - E[t]| < \alpha) \leq 0.95.$$

Если нет, укажите, имеет ли это положительное или отрицательное смещение.

б. [# 10] Является ли  $\sqrt{t}$  несмещенной оценкой для  $\theta$ ?

Если нет, укажите, имеет ли это положительное или отрицательное смещение.

2. Предположим, что случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  имеют одинаковое математическое ожидание  $\mu$ . Составьте модель, проведите 1000 экспериментов для проверки следующих гипотез.

а. [# 10] Оценка

$$s = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3$$

является несмещенной оценкой для  $\mu$ ? Если нет, укажите, имеет ли это положительное или отрицательное смещение.

б. [# 10] При каких условиях для констант  $a_1, a_2, \dots, a_n$  оценка

$$t = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$$

является несмещенной оценкой для  $\mu$ ?

В качестве модельного распределения выберите нормальное распределение. При решении задачи в общем виде ставятся дополнительные баллы.

3. [# 15] Случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  имеют одинаковое математическое ожидание  $\mu$ . Исследуйте для каких констант  $a$  и  $b$  значение

$$t = a(X_1 + X_2 + \dots + X_n) + b$$

является несмещенной оценкой для  $\mu$ ?

4. [# 30] Предположим, что набор данных в таблице «количество циклов до наступления беременности»

Циклы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кол-во	29	16	17	4	3	9	4	5	1	1	1	3

смоделирован как реализация случайной выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  из распределения  $Geo(p)$ , где  $0 < p < 1$  неизвестно. Руководствуясь законом больших чисел, естественной оценкой для  $p$  является

$$t = \frac{1}{\bar{X}_n}.$$

а. Проверьте, что  $t$  является смещенной оценкой для  $p$ , и выясните, имеет ли она положительное или отрицательное смещение.

б. В упражнении 3.3 мы обсуждали оценку вероятности того, что женщина забеременеет в течение трех или менее циклов. Одной из возможных оценок этой вероятности является относительная частота женщин, забеременевших в течение трех циклов

$$s = \frac{\text{кол} - \text{во } X_i \leq 3}{n}.$$

Покажите, что  $s$  является несмещенной оценкой этой вероятности.