Mathematische Vorbereitungen zur Elektrodynamik

Alexander Eberspächer

17. April 2012

Als Vorbereitung zur Vorlesung sollen kurz sowohl Ableitungen von Vektorfeldern als auch vektorwertige Ableitungen besprochen werden. Die Operationen Gradient, Rotation und Divergenz werden interpretiert und die Integralsätze von Gauss, Stokes und Green werden kurz erläutert. Ebenso wird an das Helmholtz-Theorem erinnert.

Literatur: Arfken und Weber [1].

1 Gradient (und der „Nabla"-Operator)

1.1 Definition

Betrachten wir eine Funktion $f = f(x, y)$ in zwei Dimensionen x, y. Die Änderung $\mathrm{d}f$ von f zwischen (x, y) und $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$ ist

$$\mathrm{d}f(x, y) = f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y) \,. \tag{1}$$

Nach Taylor können wir nun für kleine $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ den Ausruck $f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$ um (x, y) gemäß

$$f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

bis zur ersten Ordnung entwickeln. Setzen wir das in (1) ein, so erhalten wir

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \,. \tag{2}$$

Diesen Ausdruck können wir als Skalarprodukt der Vektoren

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{bmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{\nabla} f := \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{bmatrix}$$

schreiben, es ist also

$$\mathrm{d}f = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \,. \tag{3}$$

Den Vektoroperator

$$\boldsymbol{\nabla} := \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} \tag{4}$$

nennt man den „Nabla“-Operator. Die Größe $\boldsymbol{\nabla} f$ nennt man den Gradienten von f, man schreibt auch $\operatorname{grad} f$ für $\boldsymbol{\nabla} f$. Die selben Begriffe benutzt man gleichermaßen auch in drei Dimensionen. Eine alternative Schreibweise für $\boldsymbol{\nabla}$ ist dort natürlich

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

1.2 Geometrische Bedeutung des Gradienten

Um die geometrische Bedeutung des Gradienten zu greifen betrachten wir eine Fläche

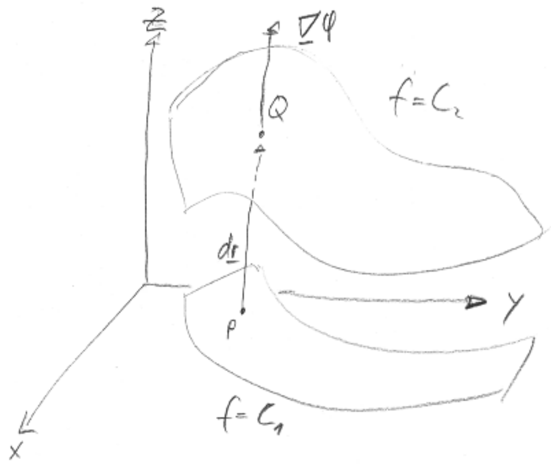
$$f(x, y, z) = \text{const}\,. \tag{5}$$

Die benachbarten Punkte P, Q liegen auf dieser Fläche. Mit der (gerichteten) Entfernung $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ gilt dann

$$\mathrm{d}f = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0\,. \tag{6}$$

Weil $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ im Allgemeinen ungleich $\mathbf{0}$ ist, aber das Skalarprodukt verschwindet, muss also $\boldsymbol{\nabla} f$ *senkrecht* auf der Fläche (5) stehen.

Eine weitere Aussage erhalten wir, wenn wir zwei benachbarte Flächen $f(x, y, z) = C_1$ und $f(x, y, z) = C_2$ betrachten.



Hier ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f = C_1 - C_2 = \Delta C &= (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= |\boldsymbol{\nabla} f|\,|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| \cos\left[\angle(\boldsymbol{\nabla} f, \mathrm{d}\boldsymbol{r})\right]\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Wählen wir nun ein festes $\mathrm{d}f$, so ist $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ minimal für den Fall dass $\mathrm{d}\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\nabla} f$ ist, da in diesem Fall $\cos[\dots] = 1$ gilt. Das bedeutet aber, dass $\boldsymbol{\nabla} f$ in die *Richtung des größten Anstiegs* von f zeigt!

2 Divergenz

2.1 Definition

Betrachten wir eine (kompressible) Flüssigkeit, die mit der (lokalen) Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ strömt und deren Dichte durch $\rho = \rho(\boldsymbol{r})$ gegeben ist. Das Produkt $\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}$ nennen wir den Strom. Eine kleine Einheitenanalyse zeigt, dass

$$[\boldsymbol{j}] = [\rho][\boldsymbol{v}] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2 \cdot s}$$

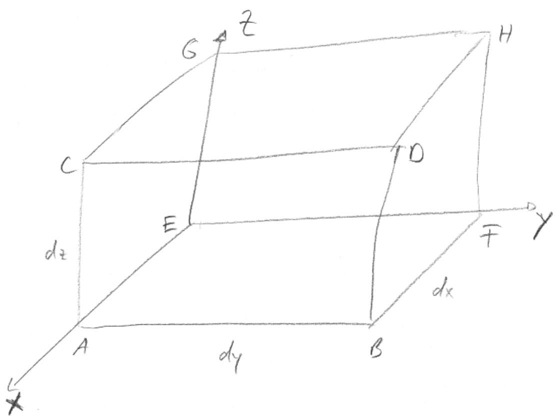
die Einheit eines (Massen-) Flusses pro Zeiteinheit hat. Den Ausruck

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho\boldsymbol{v}) = \frac{\partial\,(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial\,(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial\,(\rho v_z)}{\partial z} \tag{8}$$

nennt man die Divergenz des Vektorfeldes $\boldsymbol{j}$.

2.2 Bedeutung

Um die Bedeutung der Divergenz zu verstehen betrachten wir ein Volumen $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ an der Stelle $x = y = z = 0$.



Wir wollen nun den Fluß des Feldes $\boldsymbol{j}$ durch den Quader berechnen. Dazu betrachten wir die Seitenflächen getrennt. In x-Richtung werden zwei Flächen durchflossen. Durch diese strömt pro Zeiteinheit ein bestimmte Menge Flüssigkeit:

- Fläche $EFGH$, Fluß „reinwärts“: $\rho v_x|_{x=0}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- Fläche $ABCD$, Fluß „rauswärts“: $\rho v_x|_{x=\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Die Geschwindigkeitskomponenten v_y und v_z beschreiben einen Fluß senkrecht zur betrachteten Fläche und tragen deswegen nichts bei. Den zweiten Ausdruck entwickeln wir nach Taylor um $x = 0$ bis zur ersten Ordnung, es ist

$$\rho v_x|_{x=\mathrm{d}x} = \left[\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]_{x=0} .$$

Damit lässt sich berechnen, wie viel Flüßigkeit netto in x-Richtung durch den Quader strömt. Die Differenz der beiden Ausdrücke ist

$$\text{Netto-Fluss raus in } x\text{-Richtung} = \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \,. \tag{9}$$

Die selbe Argumentation lässt sich mit den anderen Seiten des Quaders wiederholen. Als Ergebnis findet man

$$\begin{aligned} \text{Netto-Fluss pro Zeiteinheit rauswärts} &= \left[\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \,. \end{aligned} \tag{10}$$

Damit verstehen wir die Divergenz $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}$ direkt als Netto-Fluß pro Zeiteinheit durch das Volumen $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Eine Anwendung ist die sogenannte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{11}$$

nach der eine Dichte-Änderung $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ im Quader die direkte Folge eines Netto-Flusses durch die Quaderoberfläche ist.

Im elektrostatischen Fall wird das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ von Relevanz sein. Hier bedeutet dann $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \neq 0$, dass sich im Quader *Quellen* oder *Senken* des elektrisches Feldes befinden - diese sind die definieren die Ladungsdichte (in SI-Eineiten) ρ gemäß

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \,. \tag{12}$$

Das magnetische Feld $\boldsymbol{V}$ hingegen hat keine Quellen, da es keine magnetische Ladungen gibt, es gilt also

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \,. \tag{13}$$

3 Rotation

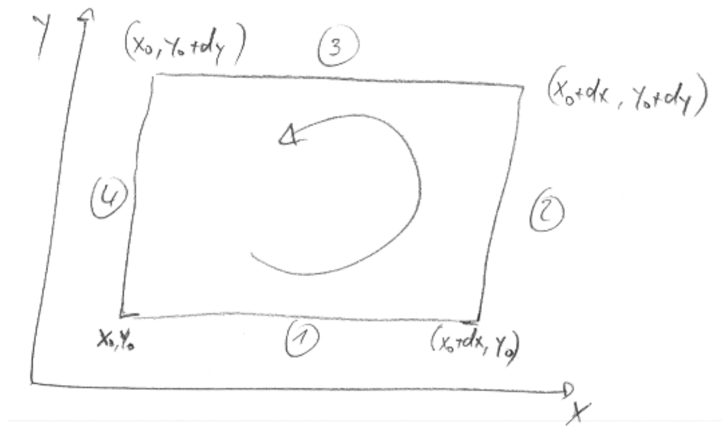
3.1 Definition

Unter der Rotation eines Vektorfeldes $\boldsymbol{V}$ verstehen wir

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \partial_y V_z - \partial_z V_y \\ \partial_z V_x - \partial_x V_z \\ \partial_x V_y - \partial_y V_x \end{bmatrix} \,. \tag{14}$$

3.2 Anschauliche Bedeutung

Der Strom einer Flüßigkeit sei durch eine Vektorfeld $\boldsymbol{V}$ beschrieben. Wir betrachten die Zirkulation dieser Flüssigkeit in der xy-Ebene:



Das Linienintegral $\int \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ über die Schleife zerlegen wir dann in die Summe

$$\begin{aligned}
\text{Zirkulation}_{1234} &= \int_{①} V_x \underbrace{\mathrm{d}\lambda_x}_{=+\mathrm{d}x} + \int_{②} V_y \underbrace{\mathrm{d}\lambda_y}_{=+\mathrm{d}y} \\
&+ \int_{③} V_x \underbrace{\mathrm{d}\lambda_x}_{=-\mathrm{d}x} + \int_{④} V_y \underbrace{\mathrm{d}\lambda_y}_{=-\mathrm{d}y}
\end{aligned} \tag{15}$$

Wir beziehen nun alle Größen auf (x_0, y_0) und entwickeln alle Ausdrücke nach Taylor um diesen Punkt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\text{Zirkulation}_{1234} &= \underbrace{V_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x}_{①} + \underbrace{\left[V_y(x_0, y_0) + \frac{\partial V_y}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y}_{②} \\
&+ \underbrace{\left[V_x(x_0, y_0) + \frac{\partial V_x}{\partial y}\mathrm{d}y\right](-\mathrm{d}x)}_{③} + \underbrace{V_y(x_0, y_0)(-\mathrm{d}y)}_{④} \\
&= \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,
\end{aligned} \tag{16}$$

wobei alle partiellen Ableitungen an der Stelle $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0)$ ausgewertet werden. Die Korrekturterme stammen aus der Verschiebung der Kanten ③ und ② gegen die Kanten ① und ④. Durch Vergleich mit (14) ist die Zirkulation des Feldes um die Schleife pro Flächeneinheit dann also

$$\text{Zirkulation}_{1234} = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V})_z\,|_{\boldsymbol{r}_0}\,. \tag{17}$$

Analog lassen sich die anderen Koordinatenebenen behandeln.

Das führt zu einer sehr anschaulichen Definition der Rotation: positioniert man einen kleinen Rotor in (frei drehbar, aber mit ortsfestem Schwerpunkt) im Punkt $\boldsymbol{r}_0$ in der Flüssigkeit, so dreht sich der Rotor um diejenige Achse, die durch $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}|_{\boldsymbol{r}_0}$ gegeben ist. Die Rotationsgeschwindigkeit ist proportional zu $|\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}|\,|_{\boldsymbol{r}_0}$.

Diese Diskussion findet sich etwas ausführlicher (und etwas strenger/formaler) auch in [2].

4 Integralsätze

Im Folgenden sollen ein paar sehr nützliche Integralsätze vorgestellt werden.

4.1 Satz von Stokes

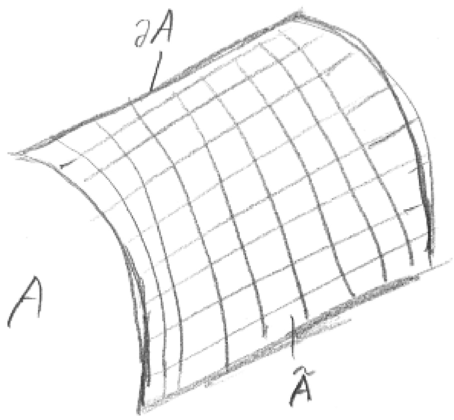
Der Satz von Stokes lautet

$$\oint_{\partial A} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \int_{A} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \,. \tag{18}$$

Demnach lässt sich der Fluß eines Rotationsfeldes $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}$ durch eine Fläche A schreiben als ein Linienintegral entlang des Randes ∂A der Integrationsfläche.

4.1.1 Anschauliche Interpretation

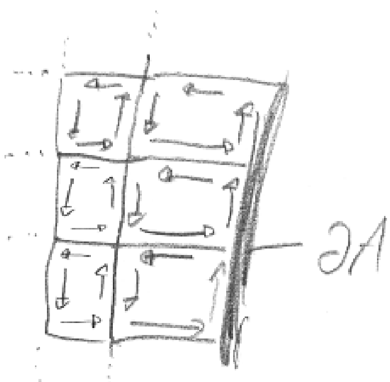
Zerlege das Integrationsgebiet A in viele kleine Rechtecke $\tilde{A}$:



Für ein kleines Rechteck $\tilde{A}$ gilt nach (17)

$$\sum_{4 \text{ Seiten}} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}) \cdot \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{A}} \,.$$

Wenn man nun über alle kleinen Rechtecke summiert löschen sich Beiträge benachbarter Rechtecke aus; da bei gleichem Umlaufsinn die Wegelemente $\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ entgegengerichtet sind.



Es bleiben nur Beiträge vom Rand des Integrationsgebiets A! Damit gilt

$$\sum_{\text{Rand von großer Fl.}} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \sum_{\text{kleine Rechtecke}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}) \cdot \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{A}}$$

Der Übergang zu infinitessmalen Größen führt dann auf den Satz von Stokes

$$\oint_{\partial A} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \int_{A} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \,.$$

Eine wichtige Folgerung ergibt sich direkt aus diesem Satz: der Fluß eines Wirbelfeldes $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}$ durch eine geschlossene Fläche A (*kein* Rand) ist gleich 0.

4.1.2 Integraldarstellung der Rotation

Der Satz von Stokes motiviert folgende Integraldarstellung der Rotation:

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}) \cdot \boldsymbol{n} = \lim_{A \to 0} \oint_{\partial A} \frac{\boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{|A|} \,, \tag{19}$$

wobei die Fläche A eine Kreisscheibe ist, deren Fläche gegen 0 strebt; $\boldsymbol{n}$ steht normal auf der Kreisscheibe und $\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ zeigt entlang des Kreises.

4.2 Satz von Gauss

Laut dem Satz von Gauss gilt für den Fluß eines Feldes $\boldsymbol{V}$ durch eine geschlossene Fläche $A = \partial V$

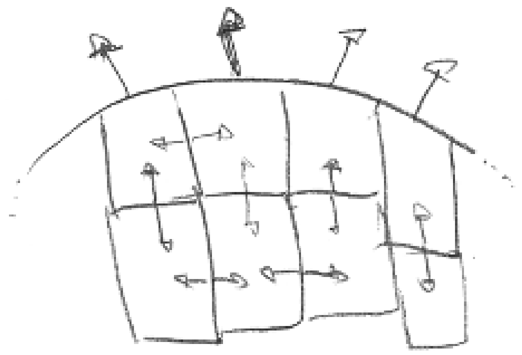
$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{V} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} \mathrm{d}V \tag{20}$$

4.2.1 Interpretation

Zerlege das Integrationsvolumen V in viele kleine Würfel. Es gilt dann für einen Würfel

$$\sum_{\text{6 Seitenfl.}} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} \mathrm{d}V \,. \tag{21}$$

Summiert man nun über alle kleinen Würfel, so löschen sich bei benachabarten innenliegenden Würfeln Flußbeiträge aus (Normalenvektoren *entgegengerichtet*!). Es bleiben nur die Beträge derjenigen Würfel, die am Rande des Integrationsvolumen liegen.



Es gilt also

$$\sum_{\text{Aussenfl.}} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \sum_{\text{Würfel}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} \mathrm{d}V \,.$$

beziehungsweise im Übergang zu infinitessmalen Würfeln

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} \mathrm{d}V \,. \tag{22}$$

4.2.2 Integraldarstellung der Divergenz

Der Satz von Gauss motiviert die Integraldarstellung der Divergenz

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} = \lim_{V \to P} \int_{\partial V} \frac{\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}}{|V|} \, \mathrm{d}A \,. \tag{23}$$

In dieser Gleichung ist V ein Integrationsvolumen, das den Punkt P zusammengezogen wird; $A = \partial V$ ist der Rand von V, $\boldsymbol{n}$ ein Normalenvektor auf A und $\mathrm{d}A$ ein (skalares) Flächenelement.

4.3 Greensche Identitäten

Aus dem Satz von Gauss lassen sich zwei weitere Identitäten folgern, die in der Elektrodynamik gebraucht werden.

Zunächst benutzen wir die beiden Gleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (u \boldsymbol{\nabla} v) = u \Delta v + (\boldsymbol{\nabla} u) \cdot (\boldsymbol{\nabla} v) \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (v \boldsymbol{\nabla} u) = v \Delta u + (\boldsymbol{\nabla} v) \cdot (\boldsymbol{\nabla} u) \tag{25}$$

für die skalare Funktionen u und v. Beide Gleichungen folgen aus der Produktregel. Wir ziehen nun (25) von (24) ab und erhalten

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (u \boldsymbol{\nabla} v) - \boldsymbol{\nabla} \cdot (v \boldsymbol{\nabla} u) = u \Delta v - v \Delta u \,.$$

Diese Gleichung integrieren wir über ein Volumen V zu

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot [u \boldsymbol{\nabla} v - v \boldsymbol{\nabla} u] \; \mathrm{d}V = \int_V [u \Delta v - v \Delta u] \; \mathrm{d}V \,.$$

Wendet man den Gausschen Satz auf der rechten Seite (dort steht ein Volumenintegral über eine Divergenz) an, so erhält man die erste Greensche Identität

$$\oint_{\partial V} [u \boldsymbol{\nabla} v - v \boldsymbol{\nabla} u] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_V [u \Delta v - v \Delta u] \; \mathrm{d}V \,. \tag{26}$$

Die zweite Identität erhält man aus (24) alleine. Volumenintegration auf beiden Seiten führt auf

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (u \boldsymbol{\nabla} v) \, \mathrm{d}V = \int_V u \Delta v \, \mathrm{d}V + \int_V (\boldsymbol{\nabla} u) \cdot (\boldsymbol{\nabla} v) \, \mathrm{d}V \,.$$

Mit dem Gausschen Satz für die linke Seite finden wir also die Identität

$$\oint_{\partial V} u \, (\boldsymbol{\nabla} v) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_V u \Delta v \, \mathrm{d}V + \int_V (\boldsymbol{\nabla} u) \cdot (\boldsymbol{\nabla} v) \, \mathrm{d}V \,. \tag{27}$$

Beachten Sie, dass diese Gleichung formal der partiellen Integration entspricht.

5 Mehrfache Ableitungen

Es gibt viele Möglichkeiten, die besprochenen Ableitungen miteinander zu verknüpfen. Vier davon wollen wir kurz betrachten. Die Funktionen ϕ und $\boldsymbol{V}$ seien ein Skalar- beziehungsweise Vektorfeld.

5.1 Divergenz des Gradienten

Die Operation $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ eines Skalarfeldes bekommt einen eigenen Namen. Der Differentialoperator $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ heißt auch „Laplace-Operator“. Das Symbol dafür ist

$$\Delta = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \tag{28}$$

In der Elektrostatik kann die Quellengleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,, \tag{29}$$

die das Feld $\boldsymbol{E}$ mit der Ladungsdichte ρ verknüpft, auch für das Potential ϕ (definiert durch $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\phi$), formuliert werden. Die sogenannte Poissongleichung lautet dann

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}\,. \tag{30}$$

5.2 Rotation des Gradienten

Die Ableitung $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\phi$ lautet ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\phi &= \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \partial_x\phi \\ \partial_y\phi \\ \partial_z\phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{0}\,;
\end{aligned} \tag{31}$$

im letzen Schritt wurde die Vertauschbarkeit zweiter Ableitungen verwendet.

In Worten bedeutet diese Gleichung, dass Gradientenfelder wirbelfrei sind. Betrachtet man ϕ als elektrostatisches Potential, so sieht man, dass elektrostatische Felder keine Wirbel haben – erst in der Elektro*dynamik* wird dies möglich sein.

5.3 Divergenz der Rotation

Die Divergenz einer Rotation $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}$ berechnet sich zu

$$\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_y V_z - \partial_z V_y \\ \partial_z V_x - \partial_x V_z \\ \partial_x V_y - \partial_y V_x \end{bmatrix} = \mathbf{0}\,, \tag{32}$$

was wieder durch die Vertauschbarkeit zweiter Ableitungen begründet ist.

Physikalisch bedeutet diese Gleichung, dass Wirbelfelder keine Quellen haben – die Feldlinien entspringen oder enden nirgends, sondern sind geschlossen.

6 Helmholtz-Theorem (ohne Beweis)

Nach Helmholtz lässt sich ein Vektorfeld $\boldsymbol{V}$, dessen Quell- und Wirbeldichte im Unendlichen verschwindet (also alle zum Beispiel alle elektrischen und magnetischen Felder endlicher Ladungs- und Stromverteilungen) eindeutig als Summe

$$\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{\nabla}\phi + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \tag{33}$$

schreiben. Dabei kann ϕ als skalares Potential gesehen werden, dass den wirbelfreien Teil von $\boldsymbol{V}$ definiert. Das Feld $\boldsymbol{A}$ ist dann ein Vektorpotential, das den quellenfreien beziehungsweise Wirbel-Teil von $\boldsymbol{V}$ bildet. Das Minuszeichen ist Konvention.

Als Folge aus dem Helmholtz-Theorem ergibt sich, dass ein (physikalisches) Feld durch Angabe seiner Quell- und Wirbeldichte festgelegt ist. In der Elektrodynamik werden die Maxwell-Gleichungen genau das leisten – sie legen Wirbel und Quellen für magnetische und elektrische Felder fest.

Literatur

[1] G. Arfken and H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists.* Elsevier, 2005.

[2] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik*, vol. 3. Elsevier, 2001.