Mechanik-Seminar WS 2011/2012 - Termin 10

Helmholtz-Oszillator

Aufgabe I - Helmholtz-Oszillator

Wir betrachten folgende Lagrange-Funktion:

$$L(x, \dot{x}, t) = \mathrm{e}^{\delta t}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{3}x^3 + \gamma x\cos(\omega t)\right] \tag{1}$$

($m, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega$: const $\in \mathbb{R}$)

Das dynamische System, das sich hinter dieser Lagrange-Funktion versteckt, wollen wir etwas genauer untersuchen.

(i) Finden Sie den kanonisch konjugierten Impuls p zur Variable x.

(ii) Leiten Sie aus L die Hamilton-Funktion $H(x,p)$ ab.

(iii) Geben Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen für dieses System an.

(iv) Benutzen Sie Ihre Lösung aus (iii), um eine gut zu interpretierende Bewegungsgleichung zweiter Ordnung anzugeben.

(v) Interpretieren Sie alle Terme in der Gleichung für $\ddot{x}$. Mit was für einem System haben Sie es zu tun? Klassifizieren Sie dieses System nach den Begriffen linear oder nichtlinear[1], konservativ oder dissipativ/getrieben, offen oder geschlossen? Gilt das Superpositionsprinzip für Lösungen der Differentialgleichung für x?

Fassen Sie nun in der Gleichung für H alle Terme, die nicht eindeutig die kinetische Energie sind, als eine Art verallgemeinertes Potential auf. Wir diskutieren von nun an den Fall $\delta = 0, \gamma = 0$.

[1] Betrachten Sie die Kraft – ist diese eine lineare Funktion von x?

(vi) Klassifizieren Sie das System erneut nach den Begriffen in (v).

(vii) Skizzieren Sie das Potential V für $\alpha = 1, \beta = 1$ und diskutieren Sie daran, welche Dynamik im System möglich ist.

(viii) Nehmen Sie eine Energie E an, die (je nach Anfangsbedingung) auf gebundene Bewegung führen *kann* – wieviele mögliche Umkehrpunkte gibt es insgesamt? Machen Sie sich klar, dass diese Punkte genau die Nullstellen von $E - V(x) = 0$ sind.

Damit lässt sich $E - V(x) = 0$ faktorisieren. Es folgt

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{\beta}{3}(x-a)(x-b)(x-c)\,, \tag{2}$$

wobei $a < b < c$ sein soll.

(ix) Trennen Sie in (2) die Variablen dx und dt. Integrieren Sie formal die Gleichung für eine Bewegung mit $x(t=0) = a$.

Mit der Variablentransformation $x = a + (b-a)\sin(\theta)^2$ ergibt sich dann nach unbequemer Rechnung mit $\tilde{m} = (b-a)/(c-a)$ folgendes Integral

$$t = \sqrt{\frac{6m}{\beta(c-a)}}\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\tilde{m}\sin^2\theta}}\,. \tag{3}$$

Das Integral auf der rechten Seite ist das sogenannte *unvollständige elliptische Integral erster Art* (in Legendre-Form). Diese Funktion finden Sie in vielen Computer-Bibliotheken implementiert. Beispielsweise heißt diese Funktion in SciPy `scipy.special.ellipkinc(theta, mtilde)`.

Die Darstellung hier orientiert sich stark an den ersten Abschnitten von J. A. Almendral und M. A. F. Sanjuán, „Integrability and symmetries for the Helmholtz oscillator with friction“, J. Phys. A: Math. Gen., **36**, 695 (2003).