# Schwingungstheorie

Alexander Eberspächer

21. November 2011

Als Ergänzung zur Vorlesung wird eine allgemeine Theorie für kleine lineare Schwingungen um einen Gleichgewichtspunkt entwickelt. Beliebig viele Freiheitsgrade werden diskutiert. Außerdem werden sogenannte Normalschwingungen beschrieben.

## 1 Einleitung - Schwingungen in einem Freiheitsgrad

Im Folgenden wollen wir Schwingungen etwas näher betrachten. Im Fall von einem Teilchen, das sich in einer Dimension in einem Parabelpotential

$$V(q) = \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \tag{1}$$

bewegt, erhalten wir die Schwingungsdifferentialgleichung

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0\,. \tag{2}$$

Die Lösungen $q(t)$ können als

$$q(t) = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{3}$$

geschrieben werden (Realteilbildung impliziert!), wobei die Konstanten $A \in \mathbb{C}$ und $\omega \in \mathbb{R}$ sind. Die Frequenz $\omega$ muss reell sein, da sowohl Lösungen mit $+\omega$ und $-\omega$ zulässig sind – ein Imaginärteil würde einem der beiden Fälle zu einem exponentiellen Anwachsen der Lösung führen (ebenso zu einem exponentiellen Anwachsen der Energie). Die Gleichung (2) ist zweiter Ordnung in der Zeit, also werden zwei Anfangsbedingungen benötigt. Diese legen den Betrag von $A$ (die Amplitude der Schwingung) sowie dessen Phase $\varphi_0$ (Phase der Schwingung bei $t = 0$) fest. Es gilt also mit der Polardarstellung $A = |A|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$

$$\mathrm{Re}\, q(t) = \mathrm{Re}\left(|A|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right) = |A| \cos(-\omega t + \varphi_0)\,. \tag{4}$$

Wir wollen uns nun die Frage stellen, wie wir Schwingungen in mehreren Freiheitsgraden, die aneinander koppeln dürfen, beschreiben können. Die folgende Diskussion orientiert sich eng an den entsprechenden Kapiteln in den Lehrbüchern von Kuypers [1] und Goldstein et al [2].

## 2 Zur Wichtigkeit harmonischer Schwingungen

Harmonische Schwingungen sind auch für Probleme wichtig, in denen die eigentliche Potentiallandschaft kompilzierter ist als die einfache Parabel in (1). Das wird deutlich, wenn man das komplizierte Potential in der Nähe eines Minimums $q_0$ für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage in eine Taylorreihe entwickelt

$$V(q) = V(q)|_{q=q_0} + \left.\frac{\partial V(q)}{\partial q}\right|_{q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 V(q)}{\partial q^2}\right|_{q_0} (q - q_0)^2 + \dots \tag{5}$$

Der Term mit der ersten Ableitung $\partial_q V(q_0)$ verschwindet, weil wir in einem Minimum $q_0$ entwickelt haben. Lässt man für die Dynamik vollkommen irrelevante Konstante $V|_{q_0}$ weg, so bleibt ein Parabelpotential $V(q) \approx \frac{1}{2} m\omega^2 (q - q_0)^2$ mit $\omega^2 = \frac{2}{m} \partial_q^2 V|_{q_0}$, das genau die Form von (1) hat. Sie haben sich in den Übungen zur Vorlesung schon mit einer solchen Näherung für das Doppelmuldenpotential $V(q) = q^2 - a^2 q^2$ beschäftigt, im Seminar haben Sie eine solche Näherung für das Morsepotential $V(q) = V_0 \left(1 - \exp(-aq)\right)^2$ vorgenommen. Wir haben also bereits gesehen, dass man kleine Schwingungen um Potentialminima stets durch Parabelpotentiale beschreiben kann.

Analog lässt sich argumentieren, wenn man mehr als eine verallgemeinerte Koordinate hat; in diesem Fall schreibt man für die Taylorreihe um das Minimum $\boldsymbol{q}_0 = (q_{0,1} \ \dots \ q_{0,s})^{\mathrm{T}}$

$$V(q_1, \dots, q_s) = V(\boldsymbol{q}) = V|_{\boldsymbol{q}_0} + \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{\boldsymbol{q}_0} (q_i - q_{0,i}) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\boldsymbol{q}_0} (q_i - q_{0,i})(q_j - q_{0,j}) + \dots . \tag{6}$$

Ab jetzt wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet: über in einem Ausdruck wiederholt auftretende Indizes wird summiert. Wir wollen die Entwicklung nur für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage betrachten und nehmen deswegen nur die zweite Ordnung mit. Der lineare Term verschwindet, da um ein Minimum entwickelt wurde. Berücksichtigt man außerdem noch, dass das Potential nur bis auf eine Konstante bestimmt ist und schreibt für Auslenkungen aus der Ruhelage $\eta_i := q_i - q_{0,i}$, so ist

$$\begin{aligned} V(\eta_1, \dots, \eta_s) &\approx \frac{1}{2} \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\boldsymbol{q}_0}}_{:= V_{ij}} \eta_i \eta_j \,, \\ &\approx \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j \,. \end{aligned} \tag{7}$$

Die zweiten Ableitungen vertauschen, es ist also

$$V_{ij} = V_{ji} \tag{8}$$

beziehungsweise in Matrix-Schreibweise $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}$. Da $\mathbf{V}$ nur Ableitungen an einer bestimmten Stelle $\boldsymbol{q}_0$ enthält, ist $\mathbf{V}$ eine *konstante* Matrix.

## 3 Bewegsgleichungen beliebiger kleiner Schwingungen

### 3.1 Lagrange-Funktion

Die kinetische Energie lässt sich für zeitunabhängige Zwangsbedingungen als

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \tag{9}$$

ausdrücken (siehe dazu den Anhang). Die Terme $a_{ij}$ können dabei noch Funktionen der Koordinaten sein. Betrachtet man aber nur kleine Auslenkungen um die Ruhelage $\boldsymbol{q}_0$, so lassen sich auch die $a_{ij}$ nach Taylor entwickeln:

$$a_{ij} = a_{ij}|_{\boldsymbol{q}_0} + \left.\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right|_{\boldsymbol{q}_0} \eta_k + \dots . \tag{10}$$

Nun ist bereits (9) quadratisch in den (kleinen) Geschwindigkeiten $\dot{\eta}_i$, es ist also vernünftig, nur die niedrigste Ordnung in der Entwicklung der $a_{ij}$ mitzunehmen. Mit $T_{ij} := a_{ij}|_{\boldsymbol{q}_0}$ schreiben wir $T$ also als

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \tag{11}$$

Auch die Matrix $\mathbf{T} = [T_{ij}]$ ist konstant.

Aus (11) und (7) ergibt sich nun die Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left( T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j \right) . \tag{12}$$

beziehungsweise in Matrix-Schreibweise

$$L = \frac{1}{2} \left( \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}} \mathbf{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}} \mathbf{V} \boldsymbol{\eta} \right) . \tag{13}$$

## 3.2 Bewegungsgleichungen

Wir betrachten jetzt die $\eta_k$ als generalisierte Koordinaten. Die $k = 1, \dots, s$ Bewegsgleichungen erhalten wir als Euler-Lagrange-Gleichungen zur Langrange-Funktion (12). Dazu betrachten für zunächst einzeln $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ und $\frac{\partial L}{\partial q_k}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{1}{2} T_{ij} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_k} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( T_{ij} \dot{\eta}_j \delta_{ik} + T_{ij} \dot{\eta}_i \delta_{jk} \right) \\
&= \frac{1}{2} ( T_{kj} \ddot{\eta}_j + \underbrace{T_{ik} \ddot{\eta}_i}_{= T_{ki} \ddot{\eta}_i} ) \\
&= T_{ki} \ddot{\eta}_i
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \eta_k} &= -\frac{1}{2} V_{ij} \frac{\partial}{\partial \eta_k} \eta_i \eta_j \\
&= -\frac{1}{2} ( V_{ij} \eta_i \delta_{jk} + V_{ij} \eta_j \delta_{ik} ) \\
&= -\frac{1}{2} ( \underbrace{V_{ik} \eta_i}_{= V_{ki} \eta_i} + V_{kj} \eta_j ) \\
&= -V_{ki} \eta_i
\end{aligned} \tag{15}$$

Aus (14) und (15) erhalten wir dann insgesamt in Komponentendarstellung als Bewegungsgleichungen

$$T_{ki} \ddot{\eta}_i + V_{ki} \eta_i = 0 , \qquad k = 1, \dots, s , \tag{16}$$

(*keine* Summation in $k$!) beziehungsweise in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} T_{11} & \dots & T_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{s1} & \dots & T_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{11} & \dots & V_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{s1} & \dots & V_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{17}$$

oder noch knapper

$$\mathbf{T}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{V}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}\,. \tag{18}$$

In dieser Schreibweise lassen sich die einzelnen Matrix-Elemente $T_{ij}, V_{ij}$ einfach interpretieren: nehmen wir an, dass $\mathbf{T}$ diagonal ist (typischer Fall). Folgende Fälle sind dann zu unterscheiden:

1. $\mathbf{V}$ diagonal: (16) beschreibt $s$ voneinander unabhängige harmonische Schwingungen mit den Frequenzen $\omega_k = \sqrt{V_{kk}}; k = 1, \dots, s$.

2. $\mathbf{V}$ ist nicht diagonal: die off-diagonal Elemente $V_{i,j\neq i}$ von (16) beschreiben die Kopplung der Schwingungen in den einzelnen $\eta_k$.

## 3.3 Zur Lösung der Bewegungsgleichungen

Die $s$ Bewegungsgleichungen (16) lassen sich durch den Ansatz

$$\eta_i(t) = C A_i\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{19}$$

respektive

$$\boldsymbol{\eta}(t) = C \boldsymbol{A}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{20}$$

lösen. $C$ ist dabei ein noch nicht näher bestimmter Skalenfaktor, die $A_i$ sind die Amplituden für die einzelnen Schwingungen. Man beachte, dass wir bis jetzt genau eine Frequenz $\omega$ angesetzt haben, nicht mehrere! Einsetzen führt auf

$$\left(V_{ki} - \omega^2 T_{ki}\right) A_i = 0 \tag{21}$$

beziehungsweise

$$\left(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}\right) \boldsymbol{A} = \mathbf{0}\,. \tag{22}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Amplituden $A_i$. Dieses ist nicht-trivial lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet, also

$$\det\left(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}\right) = 0 \tag{23}$$

erfüllt ist. Die Determinante führt auf ein Polynom in der Variable $\omega^2$ vom Grad $s$. Dieses hat genau $s$ Lösungen, die hier wegen Energieerhaltung sogar reell sein müssen und positiv gewählt werden können. Die Wurzeln der Lösungen nennen wir $\omega_r$ (mit $r = 1, \dots, s$). Eine allgemeine Lösung für unser Problem müssen wir dann aus diesen Lösungen superponieren, für die Koordinate $\eta_i(t)$ gilt

$$\eta_i(t) = C_r A_{i,r}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_r t}\,, \tag{24}$$

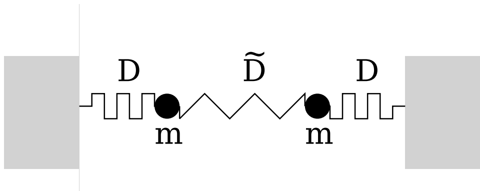
wobei die Größe $C_r A_{i,r}$ genau die Amplitude des Beitrags der Frequenz $\omega_r$ zur der Schwingung des Freiheitsgrades $i$ ist. Die Lösung ist nur dann periodisch, wenn die alle Frequenzen "kommensurabel" sind, das heißt, wenn alle Frequenzverhältnisse $\omega_i/\omega_j$ rational sind. [1] Die Lösungen für alle Freiheitsgrade lassen sich übrigens wieder vektoriell als

$$\boldsymbol{\eta}(t) = C_r \boldsymbol{A}_r \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_r t} \tag{25}$$

zusammenfassen. Wenn die Frequenzen bekannt sind (also geklärt wurde, für welche $\omega$ das Gleichungssystem (22) lösbar ist) lassen sich aus (22) Beziehungen zwischen den Amplituden $A_i$ als Lösungen des Gleichungssystems ableiten. Dieses Vorgehen wollen wir an einem Beispiel illustrieren.

## Beispiel: zwei gekoppelte Federschwinger

Betrachtet wird das folgende System:




Die für die kinetische sowie die potentielle Energie finden wir

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2\right) \,, \tag{26}$$

$$V = \frac{1}{2}\left(D\eta_1^2 + D\eta_2^2 + \tilde{D}(\eta_2 - \eta_1)^2\right) \,, \tag{27}$$

was jeweils quadratisch in $\dot{\eta}$ beziehungsweise $\eta$ ist. In Matrixschreibweise ist also mit (7) beziehungsweise (11)

$$\mathbf{T} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,, \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} D+\tilde{D} & -\tilde{D} \\ -\tilde{D} & D+\tilde{D} \end{bmatrix} \,. \tag{28}$$

Die Lösungen für die Frequenzen $\omega_i$ erhalten wir aus Gleichung (23) durch Nullsetzen der Determinante

$$\begin{vmatrix} D+\tilde{D}-m\omega^2 & -\tilde{D} \\ -\tilde{D} & D+\tilde{D}-m\omega^2 \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \,,$$

$$\Leftrightarrow \left(D+\tilde{D}-m\omega^2\right)^2 - \tilde{D}^2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{29}$$

was die Lösungen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} \,,$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D+2\tilde{D}}{m}} \,,$$

hat. Mit diesen beiden Lösungen lässt sich das lineare Gleichungssystem (22) für die Amplituden $A_i$ lösen. Man findet

[1]Ist bei zwei Freiheitsgraden zum Beispiel $\omega_1/\omega_2 = p/q$ (mit $\omega_1 < \omega_2$ und $p, q$ teilerfremd sowie $p, q \in \mathbb{N}$ ), dann beträgt die Periode $T$ gerade $T = 2\pi q/\omega_2$ – Freiheitsgrad 1 hat nach dieser Zeit gerade $p$ Durchläufe hinter sich, Freiheitsgrad 2 hingegen $q$.

1. für $\omega_1 = \sqrt{D/m}$ die Lösung $A_1 = A_2$. Das bedeutet, dass beide Teilchen mit der selben Frequenz gleichphasig schwingen. Der Abstand $\eta_2 - \eta_1$ bleibt dabei zeitlich konstant.

2. für $\omega_2 = \sqrt{(D + 2\tilde{D})/m}$ die Lösung $A_1 = -A_2$. Diese Lösung beschreibt eine gegenphasige Schwingung, bei der der Schwerpunkt erhalten bleibt.

Die beiden Lösungen

$$\boldsymbol{\eta}_1(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} \tag{30}$$

$$\boldsymbol{\eta}_2(t) = C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t} \tag{31}$$

nennt man die *Normalschwingungen* des Systems. Die allgemeine Lösung ist nach (25) die Superposition

$$\boldsymbol{\eta}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t}\,. \tag{32}$$

Betrag und Phase von $C_i$ sind aus Anfangsbedingungen zu bestimmen. Wie gehabt wird auch hier wieder Realteilbildung impliziert.

# 4 Normalschwingungen

Die Normalschwingungen (25) beschreiben einen speziellen Typus der Schwingung – nämlich den, bei dem nur eine einzige Frequenz zur Schwingung beiträgt. Alle Freiheitsgrade schwingen mit der selben Frequenz. Bei diesen Schwingungen wird keine Energie zwischen den Freiheitsgraden ausgetauscht. Bei einer allgemeinen Lösung (aus Normalschwingungen superponiert) ist dies nicht der Fall. Durch die Kopplung der verschiedenen Freiheitsgrade aneinander tragen mehrere Frequenzen zur Schwingung bei. Im Allgemeinen (es finden sich für $N$ gekoppelte Freiheitsgrade auch $N$ Frequenzen). Nehmen wir nun kurz an, wir fänden einen neuen Satz Koordinaten, in dem in der Bewegungsgleichung $\mathbf{T}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{V}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ sowohl $\mathbf{T}$ als auch $\mathbf{V}$ diagonal werden, so haben wir es mit $s$ entkoppelten Schwingungen zu tun. Wir wollen nun zeigen, dass es Koordinatentransformationen gibt, die genau auf ein solches Koordinatensystem führen. Die zuhehörigen Koordinaten heißen *Normalkoordinaten.* In den Normalkoordinaten werden dann wie gewünscht alle Freiheitsgrade mit genau einer Frequenz schwingen.

In Gleichung (25) wurden die Beiträge der Frequenz $\omega_m$ mit $\boldsymbol{A}_m$ bezeichnet. Wir betrachten nochmals die Gleichung (22), die wir für die $m$-te beziehungsweise die $n$-te Frequenz als

$$\omega_m^2 \mathbf{T}\boldsymbol{A}_m = \mathbf{V}\boldsymbol{A}_m\,, \qquad m = 1, \ldots, s \tag{33}$$

und

$$\omega_n^2 \mathbf{T}\boldsymbol{A}_n = \mathbf{V}\boldsymbol{A}_n\,, \qquad n = 1, \ldots, s \tag{34}$$

schreiben können. Diese Gleichungen verknüpfen (für feste $m, n$) jeweils zwei Vektoren mit jeweils $s$ Komponenten miteinander. Multiplizieren wir nun die erste Gleichung von links mit $\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}$ und die zweite ebenfalls von links mit $\boldsymbol{A}_m^{\mathrm{T}}$ und ziehen beide Gleichungen voneinander ab. Wir erhalten

$$\omega_m^2 \boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\boldsymbol{A}_m - \omega_n^2 \boldsymbol{A}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\boldsymbol{A}_m - \boldsymbol{A}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\boldsymbol{A}_n \tag{35}$$

(*keine* Summation in $m$ und $n$!). Im ersten Summanden auf beiden Seiten der Gleichung Seite können wir ein wenig umformen, wenn wir uns erinneren, dass für symmetrische Matrizen $B_{ij} = B_{ji}$ und zwei Vektoren $a_k, b_l$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{c} &= a_i B_{ij} c_j \\ &= a_i B_{ji} c_j \\ &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{a} \end{aligned}$$

gilt. Damit verschwindet in Gleichung (35) die rechte Seite. Ausklammern auf der linken Seite führt zu

$$\left(\omega_m^2 - \omega_n^2\right) \boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\boldsymbol{A}_m = 0\,. \tag{36}$$

Nehmen wir nun an, dass alle Frequenzen $\omega$ verschieden sind. Dann kann die letzte Gleichung nur dann wahr sein, wenn für $n \neq m$ gerade $\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\boldsymbol{A}_m = 0$ gilt. Betrachten wir nun eine Schwingung, also ein festes $n = m$. Aus physikalischen Gründen ist die kinetische Energie positiv (außer an den Umkehrpunkten der Bewegung). Das wir deutlich, wenn wir den Realteil der Lösung der Bewegungsgleichung (24), benutzen und zunächst

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(t) &= |C_n|\, \boldsymbol{A}_n \cos(-\omega_n t + \varphi_0) \\ \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) &= \omega_n\, |C_n|\, \boldsymbol{A}_n \sin(-\omega_n t + \varphi_0) \end{aligned} \tag{37}$$

ableiten. Damit schreiben wir die kinetische Energie als

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\eta}}_n \\ &= \frac{1}{2}\omega_n^2\, |C_n|^2 \sin^2(-\omega_n t + \varphi_0)\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\boldsymbol{A}_n\,, \end{aligned} \tag{38}$$

(*keine* Summation in $n$). Dieser Ausdruck ist für $\boldsymbol{A}_n \neq \mathbf{0}$ auf jeden Fall positiv. Wir können nun die Amplituden $\boldsymbol{A}_n$ und die Skalenfaktoren $C_n$ so wählen, dass

$$\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\boldsymbol{A}_n = 1 \tag{39}$$

(*keine* Summation in $n$) wird! An diese Stelle wird nochmals deutlich, weshalb die $C$-Faktoren überhaupt eingeführt wurden. Nun können wir alle Amplitudenvektoren $\boldsymbol{A}_n$ in eine einzige Matrix zusammenfassen:

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \dots & A_{ss} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{A}_1\ \dots\ \boldsymbol{A}_3]\,. \tag{40}$$

Nun können wir alle $s$ Gleichungen (39) (für alle $s$ Frequenzen $\omega_n$) in einer kompakten Matrixschreibweise fassen:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{1} \tag{41}$$

Gehen wir nun zu Gleichung (22) zurück. Führen wir nun noch die Matrix

$$\boldsymbol{\Omega} := \operatorname{diag}\left(\omega_1, \dots, \omega_s\right) \tag{42}$$

ein, können wir wieder für alle $s$ Frequenzen kompakt in einer Matrixgleichung

$$\mathbf{V}\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}^2 \tag{43}$$

schreiben. Multiplikation von links mit $\mathbf{A}^\mathrm{T}$ führt unter Verwendung von $\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{1}$ auf

$$\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{V}\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}^2 \,. \tag{44}$$

Dieses Resultat interpretieren wir wie folgt: die Matrix $\mathbf{A}$ ist im Stande, *gleichzeitig* $\mathbf{T}$ und $\mathbf{V}$ zu diagonalisieren. Die Gleichungen (41) und (44) haben außerdem die Form einer Ähnlichkeitstransformation $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}$, woraus wir (ohne strengen Beweis) schließen, dass $\mathbf{A}$ orthogonal ist, also $\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{A} = \mathbf{1}$ gilt.

Die Koordinatentransformationen

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{Q} \tag{45}$$

liefert die sogenannten *Hauptkoordinaten* $\boldsymbol{Q}$. In diesen Koordinaten haben wir es mit $s$ *entkoppelten* Schwingungen mit den Frequenzen $\omega_1, \ldots, \omega_s$ zu tun. Um das nochmal klar zu machen, setzen wir die letzte Gleichung in die Lagrange-Funktion (13) ein:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{\eta}}^\mathrm{T}\mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}^\mathrm{T}\mathbf{V}\boldsymbol{\eta}\right) \,, \\
\Leftrightarrow L(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) &= \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}^\mathrm{T}\underbrace{\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{T}\mathbf{A}}_{=\mathbf{1}}\dot{\boldsymbol{Q}} - \boldsymbol{Q}^\mathrm{T}\underbrace{\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{V}\mathbf{A}}_{=\mathbf{\Omega}^2}\boldsymbol{Q}\right) \,, \\
&= \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}^\mathrm{T}\dot{\boldsymbol{Q}} - \dot{\boldsymbol{Q}}^\mathrm{T}\mathbf{\Omega}^2\dot{\boldsymbol{Q}}\right)
\end{aligned} \tag{46}$$

beziehungsweise in Komponentendarstellung

$$L(Q_1, \ldots, Q_s, \dot{Q}_1, \ldots, \dot{Q}_s) = \dot{Q}_i^2 - \omega_i^2 Q_i^2 \,, \tag{47}$$

woraus sofort die $s$ (*entkoppelten!*) Bewewgungsgleichungen

$$\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = 0 \tag{48}$$

abgeleitet werden können. In diesen Koordinaten sind die Lösungen also harmonische Schwingungen mit den Frequenzen $\omega_i$.

## Beispiel: zwei gekoppelte Federschwinger – revisited

Im Beispiel mit den zwei gekoppelten Federschwingern haben wir zwei Frequenzen als Lösung gefunden. Die beiden zugehörigen Amplituden $\boldsymbol{A}$ bilden dann die Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2m}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \,, \tag{49}$$

die bereits so normiert wurde, dass

$$\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{T}\mathbf{A} = \frac{m}{2m}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,, \tag{50}$$

$$\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{V}\mathbf{A} = \frac{1}{2m}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D+\tilde{D} & -\tilde{D} \\ -\tilde{D} & D+\tilde{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D+2\tilde{D} \end{bmatrix} \,. \tag{51}$$

Die zugehörigen Koordinaten $\boldsymbol{Q}$ ergeben sich aus

$$\boldsymbol{Q} = \mathbf{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_2 \\ \eta_1 - \eta_2 \end{bmatrix} \tag{52}$$

was konsistent mit der vorherigen Rechnung ist: die Koordinate $Q_1 = \eta_1 + \eta_2$ beschreibt die gleichphasige Schwingung mit der Frequenz $\sqrt{D/m}$, in der Koordinate $Q_2 = \eta_1 - \eta_2$ hingegen finden wir eine gegenphasige Schwingung der beiden Massen mit der Frequenz $\sqrt{(D + 2\tilde{D})/m}$.

## Literatur

[1] F. Kuypers, *Klassische Mechanik.* Wiley, 2005.

[2] H. Goldstein, C. P. Safko, and J. L. Safko, *Classical Mechanics.* Addison Wesley, 2002.

## Angang: Kinetische Energie $T$ als quadratische Form in den verallgemeinerten Koordinaten $q_i$

In kartesischen Koordinaten schreibt sich die kinetische Energie eines $N$-Teilchensystems als

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}^2 \,. \tag{53}$$

$T$ ist also quadratisch in den $\dot{\boldsymbol{r}}_i$. Hat $T$ auch in verallgemeinerten Koordinaten $q_l$ eine solche Form ($l = 1, \ldots, s$; mit $s = 3N - k$; $k$: #Zwangsbedingungen)? Können wir also

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j,l}^{s} a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l \\ &= [\dot{q}_1 \ \ldots \ \dot{q}_s] \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & \ldots & a_{s,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{bmatrix} \\ &= \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \mathbf{a} \dot{\boldsymbol{q}} \end{aligned} \tag{54}$$

schreiben? Für holonome, skleronome Zwangsbedingungen können wir die $\boldsymbol{r}_i$ als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten $q_l$ ausdrücken: $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, \ldots, q_s)$. Wir schreiben hierzu

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left( \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i(q_j(t))}{\mathrm{d}t} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \cdot \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \sum_{j,l=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_j \dot{q}_l \,, \end{aligned} \tag{55}$$

wobei die Kettenregel ausgenutzt wurde. Außerdem wurde das Quadrat ausgeschrieben. Im letzten Schritt wurde für die $j, l$-Summation eine Doppelsumme geschrieben. Vertauschen wir nun noch die Summationsreihenfolge, so erhalten wir

$$T = \sum_{j,l=1}^{s} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l}}_{:=a_{jl}} \dot{q}_j \dot{q}_l \,, \tag{56}$$

was genau die Form (54) hat! Da das Skalarprodukt kommutativ ist, ist $a_{jl}$ symmetrisch:

$$a_{jl} = a_{lj} \,, \tag{57}$$

das heißt, die Matrix $\mathbf{a}$, deren Elemente die $a_{jl}$ sind, ist symmetrisch, es gilt $\mathbf{a}^T = \mathbf{a}$.

Für diese komplizierte Schreibweise wollen wir nun ein einfaches Beispiel machen. Betrachten wir ein Teilchen ($N = 1$), dass durch eine Zwangsbedingung ($k = 1$) so eingeschränkt wird, dass es sich noch auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius $R$ bewegen kann. Wir wählen als generalisierte Koordinaten $q_1 = \varphi$, $q_2 = \vartheta$, wobei $\varphi$ und $\vartheta$ wie in Kugelkoordinaten üblich definiert sind. Es gilt also

$$\boldsymbol{r}(\varphi, \vartheta) = R \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{bmatrix} . \tag{58}$$

Mit den Ableitungen

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = R \begin{bmatrix} -\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{59}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \vartheta} = R \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\cos(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) \end{bmatrix} \tag{60}$$

ergeben sich die Elemente der Matrix $\mathbf{a}$ zu

$$a_{11} = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{m}{2}R^2\sin^2(\vartheta)\,, \tag{61}$$

$$a_{22} = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \vartheta}\right)^2 = \frac{m}{2}R^2\,, \tag{62}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \vartheta} = 0\,, \tag{63}$$

womit die kinetische Energie eines Teilchens auf einer Kugel sich zu

$$T = \frac{m}{2}R^2 \begin{bmatrix} \dot{\varphi} & \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin^2(\vartheta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \frac{m}{2}R^2\left(\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2\right) \tag{64}$$

ergibt.