

Aufgabe I - Bestimmung von Potentialen durch „Kochrezept“

Wir betrachten die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k_x x \mathbf{e}_x - k_y y \mathbf{e}_y - k_z z \mathbf{e}_z. \quad (1)$$

Die Vektoren $\mathbf{e}_{x,y,z}$ stehen dabei jeweils für die Einheitsvektoren in x, y, z -Richtung; die Größen $k_{x,y,z}$ sind konstant. Um welches System handelt es sich? Welche Bedeutung haben die $k_{x,y,z}$?

Welche Kriterien muss eine konservative Kraft erfüllen?

Im Folgenden soll versucht werden, ein Potential V zur Kraft (1) zu finden, so dass

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (2)$$

gilt. Der sogenannte Nabla-Operator ∇ ist dabei durch

$$\nabla V \left(\mathbf{r} = (x, y, z)^T \right) := \begin{bmatrix} \partial_x V(\mathbf{r}) \\ \partial_y V(\mathbf{r}) \\ \partial_z V(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

definiert. Die Kurzschreibweise ∂_x bedeutet $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$.

Schreiben Sie das Potential in einem ersten Schritt $V(\mathbf{r})$ als $V(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$ und bestimmen Sie die x -Abhängigkeit von $u(x, y, z)$ durch Einsetzen von V in die erste Gleichung (erste Komponente) aus (2). Sie erhalten eine einfache partielle Differentialgleichung für u . Lösen Sie diese und beachten Sie, von welchen Variablen die Integrations „konstante“ noch abhängen kann.

Verfahren Sie mit den anderen beiden Komponenten von (2) analog. Ist das Potential V eindeutig definiert? Welche Freiheit in der Wahl von V haben Sie noch? Beeinflusst diese Freiheit die Dynamik? Warum?

Finden Sie auf gleiche Art und Weise Potentiale für die Kräfte

$$(i) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = (y, x, 0)^T,$$

$$(ii) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \text{ mit konstantem } \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^T,$$

$$(iii) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right).$$

Aufgabe II - Stokesche Reibung: Etwas Integration

Ein Körper bewege sich unbeeinflusst von der Schwerkraft durch eine zähe Flüssigkeit. Die Flüssigkeit bewirkt eine Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -\Gamma \mathbf{v} \quad (\Gamma > 0), \quad (4)$$

die nur von der Geschwindigkeit \mathbf{v} abhängt. Welche Bedeutung haben das Vorzeichen auf der rechten Seite und die Konstante Γ ?

Lösen Sie die Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$. Formulieren Sie die Bewegungsgleichung dabei so um, dass sie eine Gleichung für die Funktion $\mathbf{v}(t)$ erhalten. Lösen Sie diesen beispielsweise durch *Separation der Variablen* für die Anfangsbedingung $\mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{v}_0$. Lösen Sie die drei Gleichungen, die durch die drei Vektorkomponenten gegeben sind einzeln und fassen Sie anschließend Ihre Ergebnisse wieder zu einer Vektorgleichung zusammen.

Skizzieren Sie die Zeitabhängigkeit von $|\mathbf{v}|$. Was bedeutet das für die kinetische Energie des Teilchens?

Aufgabe III - Reduktion der Ordnung von DGL

Im Rahmen der Newtonschen Mechanik gilt als Bewegungsgleichung¹²

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Die drei Komponenten dieser Gleichung stellen drei Differentialgleichungen *zweiter Ordnung* dar. Viele Algorithmen zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen sind allerdings für Differentialgleichungen *erster Ordnung* formuliert, vergleiche zum Beispiel <http://de.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta-Verfahren>.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin(\varphi) \quad (6)$$

mit φ einem Winkel, l einer Länge und g der Erdbeschleunigung. Zu welchem physikalischen System gehört diese?

Wir wollen nun die Ordnung dieser Gleichung reduzieren. Dazu führen wir eine neue Variable $\omega := \dot{\varphi}$ ein. Wie lauten nun die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung?

Gehen Sie analog für die Gleichung

$$\ddot{\varphi} = -\sin(\varphi) - 2\gamma\dot{\varphi} + A \sin(\omega_d t) \quad (7)$$

vor. Welches physikalische System wird durch diese Gleichung beschrieben? Welche Bedeutung haben die Konstanten γ, A, ω_d ?

Ein erster Kontakt mit dem Chaos (für Interessierte):

Lösen Sie die Differentialgleichung (7) numerisch. Wählen Sie $\gamma = 0.25$, $\omega_d = 2/3$ sowie die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0) = 0$ und $\omega(t=0) = 0$. Stellen Sie für $A = 0, 0.5, 1.2, 2.2$ die Zeitabhängigkeit $\varphi(t)$ dar. Plotten Sie außerdem das Phasenportrait $\omega = \omega(\varphi)$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem, was sie über die Lösung der in φ linearisierten ($\sin \varphi \approx \varphi$) Gleichung (7) wissen.

¹Die Gleichung gilt für den Fall konstanter Massen, was in der Vorlesung auch vorausgesetzt wird.

²Die Schreibweise \ddot{f} steht für $\ddot{f} := \frac{d^2 f}{dt^2}$.

Eine Beispielimplementierung in der Programmiersprache Python finden Sie auf <http://github.com/aeberspaecher/theoretische-mechanik>.