Mechanik-Seminar WS 2011/2012 - Termin 8

Hamilton $\xrightarrow{\text{Legendre}-\text{Trafo}}$ Lagrange II, Hamilton & Eichtrafo

---

Aufgabe I - Von Hamilton zurück zu Lagrange

Im Semiar und in der Vorlesung wurde bereits über die Legendre-Transformation gesprochen. In der Vorlesung wurde gezeigt, wie man durch eine Legendre-Transformation aus der Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ die Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$ erhält. Es wurde auch gezeigt, wie sich mit den Langrange-Gleichungen die *kanonischen Gleichungen* ergeben.

Wir wollen diese Rechnung nun "rückwärts" machen. Dazu müssen wir p durch $\dot{q}$ austauschen. Wir definieren zunächst

$$L(q, \dot{q}, t) = \dot{q}p(q, \dot{q}, t) - H(q, p(q, \dot{q}, t), t)\,.$$

Dabei haben wir angenommen, dass sich $p = p(q, \dot{q}, t)$ als Funktion von $q, \dot{q}$ und t ausdrücken lässt.

(i) Schreiben Sie die totalen Differentiale für beide Seiten der obigen Gleichung auf.

(ii) Benutzen Sie dann auf der rechten Seite die kanonischen Gleichungen.

(iii) Wie ergeben sich nun die Lagrange-Gleichungen zweiter Art?

Aufgabe II - Eichtransformation im Hamiltonformalismus

In der Vorlesung und Seminar haben wir gezeigt, dass eine "mechanische Eichtransformation"

$$L(q, \dot{q}, t) \to L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}f(q, t)}{\mathrm{d}t}$$

nichts an den Lagrange-Gleichungen ändert. Wir wollen uns jetzt überlegen, wie sich eine solche Transformation in den Hamiltonformalismus trägt.

(i) Wie ändert sich der kanonische Impuls p unter der Transformation? Finden Sie einen Ausdruck für p'.

(ii) Wie sieht die neue Hamiltonfunktion $H'(q, p', t)$ aus?

(iii) Zeigen Sie, dass sich *keine* neuen Bewegungsgleichungen ergeben!

Hinweis: wenn die untransformierte Hamiltonfunktion $H(q, p)$ nicht explizit von der Zeit abhing, dann zerstören explizit zeitabhängige Transformationen $f(q, t)$ die Eigenschaft als Energiefunktion – das ist daran zu sehen, dass $H'(q, p', t)$ *explizit* von der Zeit abhängt, was für ein System mit Energieerhaltung ausschließt, dass $H' = E$ ist.