Fingerübungen zu Potentialen, Reduktion der Ordnung von DGL

Aufgabe I - Bestimmung von Potentialen durch „Kochrezept“

Wir betrachten die Kraft

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -k_x x \boldsymbol{e}_x - k_y y \boldsymbol{e}_y - k_z z \boldsymbol{e}_z \,. \tag{1}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{e}_{x,y,z}$ stehen dabei jeweils für die Einheitsvektoren in x, y, z-Richtung; die Größen $k_{x,y,z}$ sind konstant. Um welches System handelt es sich?

Welche Kriterien muss eine konservative Kraft erfüllen?

Im Folgenden soll versucht werden, ein Potential V zur Kraft (1) zu finden, so dass

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

gilt. Der sogenannte Nabla-Operator $\boldsymbol{\nabla}$ ist dabei durch

$$\boldsymbol{\nabla} V \left(\boldsymbol{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}\right) := \begin{bmatrix} \partial_x V(\boldsymbol{r}) \\ \partial_y V(\boldsymbol{r}) \\ \partial_z V(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix} \tag{3}$$

definiert. Die Kurzschreibweise ∂_x bedeuet $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$.

Schreiben Sie das Potential in einem ersten Schritt $V(\boldsymbol{r})$ als $V(\boldsymbol{r}) = u(x, y, z)$ und bestimmen Sie die x-Abhängigkeit von $u(x, y, z)$ durch Einsetzen von V in die erste Gleichung (erste Komponente) aus (2). Sie erhalten eine einfache partielle Differentialgleichung. Lösen Sie diese und beachten Sie, von welchen Variablen die Integrations„konstante“ noch abhängen kann.

Verfahren Sie mit den anderen beiden Komponenten von (2) analog. Ist das Potential V eindeutig definiert? Welche Freiheit in der Wahl von V haben Sie noch? Beeinflusst diese Freiheit die Dynamik? Warum?

Finden Sie auf gleiche Art und Weise Potentiale für die Kräfte

(i) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (y, x, 0)^{\mathrm{T}}$,

(ii) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k} \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})$ mit konstantem $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)^{\mathrm{T}}$,

(iii) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{r} \exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)$.

Aufgabe II - Stokesche Reibung: Etwas Integration

Ein Körper bewege sich unbeeinflußt von der Schwerkraft durch eine zähe Flüssigkeit. Die Flüssigkeit bewirkt eine Kraft

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}) = -\Gamma \boldsymbol{v} \qquad (\Gamma > 0)\,, \tag{4}$$

die nur von der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ abhängt. Welche Bedeutung haben das Vorzeichen auf der rechten Seite und die Konstante Γ?

Lösen Sie die Bewegungsgleichung $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$. Formulieren Sie die Bewegungsgleichung dabei so um, dass sie eine Gleichung für die Funktion $\boldsymbol{v}(t)$ erhalten. Lösen Sie diesen beispielsweise durch *Separation der Variablen* für die Anfangsbedingung $\boldsymbol{v}(t = 0) = \boldsymbol{v}_0$. Lösen Sie die drei Gleichungen, die durch die drei Vektorkomponenten gegeben sind einzeln und fassen Sie anschließend Ihre Ergebnisse wieder zu einer Vektorgleichung zusammen.

Skizzieren Sie die Zeitabhängigkeit von $|\boldsymbol{v}|$. Was bedeutet das für die kinetische Energie des Teilchens?

Aufgabe III - Reduktion der Ordnung von DGL

Im Rahmen der Newtonschen Mechanik gilt als Bewegungsgleichung[1][2]

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\,. \tag{5}$$

Die drei Komponenten dieser Gleichung stellen drei Differentialgleichungen *zweiter Ordnung* dar. Viele Algorithmen zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen sind allerdings für Differentialgleichungen *erster Ordnung* formuliert, vergleiche zum Beispiel `http://de.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta-Verfahren`.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$l\ddot{\varphi} = -g\sin(\varphi) \tag{6}$$

mit φ einem Winkel, l einer Länge und g der Erdbeschleunigung. Zu welchem physikalischen System gehört diese?

Wir wollen nun die Ordnung dieser Gleichung reduzieren. Dazu führen wir eine neue Variable $\omega := \dot{\varphi}$ ein. Wie lauten nun die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung?

Gehen Sie analog für die Gleichung

$$\ddot{\varphi} = -\sin(\varphi) - 2\gamma\dot{\varphi} + A\sin(\omega_{\mathrm{d}} t) \tag{7}$$

vor. Welches physikalische Systeme wird duch diese Gleichung beschrieben? Welche Bedeutung haben die Konstanten $\gamma, A, \omega_{\mathrm{d}}$?

Ein erster Kontakt mit dem Chaos (für Interessierte):

Lösen Sie die Differentialgleichung (7) numerisch. Wählen Sie $\gamma = 0.25$, $\omega_{\mathrm{d}} = 2/3$ sowie die Anfangsbedingungen $\varphi(t = 0) = 0$ und $\omega(t = 0) = 0$. Stellen Sie für $A = 0, 0.5, 1.2, 2.2$ die Zeitabhängigkeit $\varphi(t)$ dar. Plotten Sie außerdem das Phasenportrait $\omega = \omega(\varphi)$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem, was sie über die Lösung der in φ linearisierten ($\sin\varphi \approx \varphi$) Gleichung (7) wissen.

Eine Beispielimplementierung in der Programmiersprache Python finden Sie auf `http://github.com/aeberspaecher/theoretische-mechanik`.

[1] Die Gleichung gilt für den Fall konstanter Massen, was in der Vorlesung auch vorausgesetzt wird.

[2] Die Schreibweise $\ddot{f}$ steht für $\ddot{f} := \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$.