Mechanik-Tutorium WS 2011/2012 - Termin 1

Fingerübungen zu Potentialen, Reduktion der Ordnung von DGL

Aufgabe I - Bestimmung von Potentialen durch „Kochrezept“

Wir betrachten die Kraft

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -k_x x \boldsymbol{e}_x - k_y y \boldsymbol{e}_y - k_z z \boldsymbol{e}_z \,. \tag{1}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{e}_{x,y,z}$ stehen dabei jeweils für die Einheitsvektoren in x, y, z-Richtung; die Größen $k_{x,y,z}$ sind konstant. Um welches System handelt es sich?

Welche Kriterien muss eine konservative Kraft erfüllen?

Im Folgenden soll versucht werden, ein Potential V zur Kraft (**??**) zu finden, so dass

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

gilt. Der sogenannte Nabla-Operator $\boldsymbol{\nabla}$ ist dabei durch

$$\boldsymbol{\nabla} V\left(\boldsymbol{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}\right) := \begin{bmatrix} \partial_x V(\boldsymbol{r}) \\ \partial_y V(\boldsymbol{r}) \\ \partial_z V(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix} \tag{3}$$

definiert. Die Kurzschreibweise ∂_x bedeuet $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$.

Schreiben Sie das Potential in einem ersten Schritt $V(\boldsymbol{r})$ als $V(\boldsymbol{r}) = u(x, y, z)$ und bestimmen Sie die x-Abhängigkeit von $u(x, y, z)$ durch Einsetzen von V in die erste Gleichung (erste Komponente) aus (**??**). Sie erhalten eine einfache partielle Differentialgleichung. Lösen Sie diese und beachten Sie, von welchen Variablen die Integrations„konstante“ noch abhängen kann.

Verfahren Sie mit den anderen beiden Komponenten von (**??**) analog. Ist das Potential V eindeutig definiert? Welche Freiheit in der Wahl von V haben Sie noch? Beeinflusst diese Freiheit die Dynamik? Warum?

Finden Sie auf gleiche Art und Weise Potentiale für die Kräfte

(i) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (y, x, 0)^{\mathrm{T}}$,

(ii) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k} \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})$ mit konstantem $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)^{\mathrm{T}}$,

(iii) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{r} \exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)$.

Aufgabe II - Etwas Integration

Ein Körper bewege sich unbeeinflußt von der Schwerkraft durch eine zähe Flüssigkeit. Die Flüssigkeit bewirkt eine Kraft

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}) = -\Gamma \boldsymbol{v} \qquad (\Gamma > 0)\,, \tag{4}$$

die nur von der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ abhängt. Welche Bedeutung haben das Vorzeichen auf der rechten Seite und die Konstante Γ?

Lösen Sie die Bewegungsgleichung $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$. Formulieren Sie die Bewegungsgleichung dabei so um, dass sie eine Gleichung für die Funktion $\boldsymbol{v}(t)$ erhalten. Lösen Sie diesen beispielsweise durch *Separation der Variablen* für die Anfangsbedingung $\boldsymbol{v}(t = 0) = \boldsymbol{v}_0$. Lösen Sie die drei Gleichungen, die durch die drei Vektorkomponenten gegeben sind einzeln und fassen Sie anschließend Ihre Ergebnisse wieder zu einer Vektorgleichung zusammen.

Skizzieren Sie die Zeitabhängigkeit von $|\boldsymbol{v}|$.

Aufgabe III - Reduktion der Ordnung von DGL

Im Rahmen der Newtonschen Mechanik gilt als Bewegungsgleichung[1][2]

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\,. \tag{5}$$

Die drei Komponenten dieser Gleichung stellen drei Differentialgleichungen *zweiter Ordnung* dar. Viele Algorithmen zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen sind allerdings für Differentialgleichungen *erster Ordnung* formuliert, vergleiche zum Beispiel `http://de.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta-Verfahren`.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$l\ddot{\varphi} = -g\sin(\varphi) \tag{6}$$

mit φ einem Winkel, l einer Länge und g der Erdbeschleunigung. Zu welchem physikalischen System gehört diese?

Wir wollen nun die Ordnung dieser Gleichung reduzieren. Dazu führen wir eine neue Variable $\omega := \dot{\varphi}$ ein. Wie lauten nun die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung?

Gehen Sie analog für die Gleichung

$$\ddot{\varphi} = -\sin(\varphi) - 2\gamma\dot{\varphi} + A\sin(\omega_{\mathrm{d}}t) \tag{7}$$

vor. Welches physikalische Systeme wird duch diese Gleichung beschrieben? Welche Bedeutung haben die Konstanten $\gamma, A, \omega_{\mathrm{d}}$?

Ein erster Kontakt mit dem Chaos (für Interessierte):

Lösen Sie die Differentialgleichung (**??**) numerisch. Wählen Sie $\gamma = 0.25$, $\omega_{\mathrm{d}} = 2/3$ sowie die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0) = 0$ und $\omega(t=0) = 0$. Stellen Sie für $A = 0, 0.5, 1.2, 2.2$ die Zeitabhängigkeit $\varphi(t)$ dar. Plotten Sie außerdem das Phasenportrait $\omega = \omega(\varphi)$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem, was sie über die Lösung der in φ linearisierten ($\sin\varphi \approx \varphi$) Gleichung (**??**) wissen.

Eine Beispielimplementierung in der Programmiersprache Python finden Sie auf `http://github.com/aeberspaecher/theoretische-mechanik`.

[1] Die Gleichung gilt für den Fall konstanter Massen, was in der Vorlesung auch vorausgesetzt wird.

[2] Die Schreibweise $\ddot{f}$ steht für $\ddot{f} := \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$.