Mechanik-Seminar WS 2011/2012 - Termin 4

Lagrange $\xrightarrow{q_i?}$ Newton, Eichen und Pendeln

Aufgabe I - Doppelpendel

In dieser Aufgabe wollen wir sehen, wie "mühelos" man mit Langrange II an Bewegungsgleichungen für komplizierte Systeme kommt, die Zwangsbedingungen gehorchen müssen.

Ein Punktteilchen der Masse m sei über einen masselosen Stab der Länge l mit einer Aufhängung verbunden. Das Teilchen kann sich in einer Ebene frei unter dem Einfluß der Schwerkraft mg bewegen. An dem Punktteilchen ist ein identisches Teilchen auf die gleiche Art und Weise befestigt und kann sich in der selben Ebene bewegen.

(i) Skizzieren Sie das Problem.

(ii) Bestimmen Sie die Zwangsbedingungen.

(iii) Finde Sie generalisierte Koordinaten.

(iv) Stellen Sie die Lagrangefunktion L auf. Finden Sie zunächst Ausdrücke für die kinetische Energie T und die potentielle Energie V.

(v) Finden (und fürchten) Sie die Bewegungsgleichungen, die aus L erhalten.

Eventuell nützlich:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Wer Lust hat, der kann noch ausprobieren, welche Näherungslösungen sich für die Kleinwinkelnäherungen $\sin(\varphi) \approx \varphi$, $\cos(\varphi) \approx 1$ sowie der Annahme $\dot{\varphi}^2\varphi \approx 0$ (Ableitung klein) ergeben.

Aufgabe II - Von Lagrange II zu Newton

In der Vorlesung sind Sie historisch den Weg Newton → D'Alembert → Lagrange I → Lagrange II gegangen. In dieser Aufgabe wollen wir uns schnell klarmachen, wie man direkt von Langrange II zu Newton zurückkommt.

Für die Bewegung eines Teilchens in einem konservativen System bekommt man aus der Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V$ die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}; \qquad i = 1 \ldots s\,. \tag{1}$$

Diskutieren Sie, für welche Koordinaten q_i Sie aus (1) wieder die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \tag{2}$$

erhalten.

Aufgabe III - "Komplizierte" Lagrange-Funktionen

Wir untersuchen die Dynamik eines System, das durch die Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \sin(q)\dot{q} \tag{3}$$

gegeben ist.

(i) Finden Sie Bewegungsgleichung. Um welches System handelt es sich?

(ii) Welche Lagrange-Funktion hätten Sie für dieses System eigentlich erwartet?

(iii) Wie könnten Sie möglicherweise die Lagrangefunktion vereinfachen, ohne die Dynamik des Systems zu verändern? Finden Sie eine passende Eichtransformation. Schreiben Sie dazu den “störenden” Term als totale Zeitableitung einer Funktion $f(q)$.

Aufgabe IV - Eine kleine Einsicht zu Eichtransformationen (?)

In der Vorlesung und in Aufgabe III haben wir gelernt, dass zwei Lagrangefunktionen L_1 und L_2, die durch

$$L_2(q_i, \dot{q}_i, t) = L_1(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{\mathrm{d}f(q_i, t)}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

zusammenhängen, auf die selben Bewegungsgleichungen führen (und damit das selbe System beschrieben). Hier wollen wir durch ein Gegenbeispiel zeigen, dass der Umkehrschluss nicht gilt: zwei Lagrangefunktionen, die auf identische Bewegungsgleichungen führen, stehen nicht notwendigerweise durch (4) in Zusammenhang.

Gegeben sind die beiden Lagrange-Funktionen

$$L_1(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1 q_2 \tag{5}$$

$$L_2(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - q_1^2 - q_2^2\right) \tag{6}$$

(i) Finden Sie die jeweiligen Bewegungsgleichungen.

(ii) Welches System wird beschrieben?

Ihr Tutor versucht dann, Sie (etwas “heuristisch”) davon zu überzeugen, dass man die Lagrangefunktionen L_1 und L_2 nicht nach (4) ineinander überführen kann.