

**CI-0116 Análisis de Algoritmos y Estructuras de Datos**  
**I ciclo de 2019**

**III EXAMEN PARCIAL**

*Martes 2 de julio*

Nombre: \_\_\_\_\_ Carné: \_\_\_\_\_

El examen consta de 8 preguntas que suman 101 puntos (1 % extra). Las preguntas se pueden responder en cualquier orden, pero se debe indicar en el cuadro de abajo las páginas del cuaderno de examen en la que están las respuestas. Para ello numere las hojas del cuaderno de examen en la esquina superior externa de cada página. El examen se puede realizar con lápiz o lapicero. No se permite el uso de dispositivos electrónicos (calculadoras, teléfonos, audífonos, etc.).

Pregunta	Puntos	Páginas	Calificación
1. <i>Análisis amortizado</i>	16		
2. <i>Representación de grafos</i>	9		
3. <i>Recorrido de un grafo en anchura</i>	7		
4. <i>Componentes fuertemente conexos</i>	14		
5. <i>Algoritmo de Kruskal y ests. de datos para conjs. disjtos.</i>	18		
6. <i>Algoritmo de Prim</i>	12		
7. <i>Camino más corto desde una fuente</i>	7		
8. <i>Camino más corto entre todos los vértices</i>	18		
Total	101		

1. *Análisis amortizado* [16 pts.]

Calcule el costo total esperado  $T(n)$  y el costo amortizado esperado  $T_a(n)$  de buscar todos los elementos guardados en las siguientes estructuras de datos:

- Números de 1 a  $n$  insertados secuencialmente en una lista enlazada.
- Permutación aleatoria de los números de 1 a  $n$  insertada en una lista enlazada.
- Números de 1 a  $n$  insertados secuencialmente en un árbol de búsqueda binario.
- Permutación aleatoria de los números de 1 a  $n$  insertada en un árbol de búsqueda binario.
- Números de 1 a  $n$  insertados secuencialmente en un árbol rojinegro.
- Permutación aleatoria de los números de 1 a  $n$  insertada en un árbol rojinegro.
- Números de 1 a  $n$  insertados secuencialmente en una tabla de dispersión de tamaño  $n$  y función de dispersión  $k \bmod n$ .
- Permutación aleatoria de los números de 1 a  $n$  insertada en una tabla de dispersión de tamaño  $n$  y función de dispersión  $k \bmod n$ .

2. *Representación de grafos* [9 pts.]

Represente el grafo de la figura 4 usando una matriz de adyacencia (si deja casillas vacías especifique su significado) [4 pts.] y listas de adyacencia [5 pts.: 1/4 pts. cada vertice/arista]. Asuma que las listas están ordenadas alfabéticamente e ignore los pesos de las aristas.

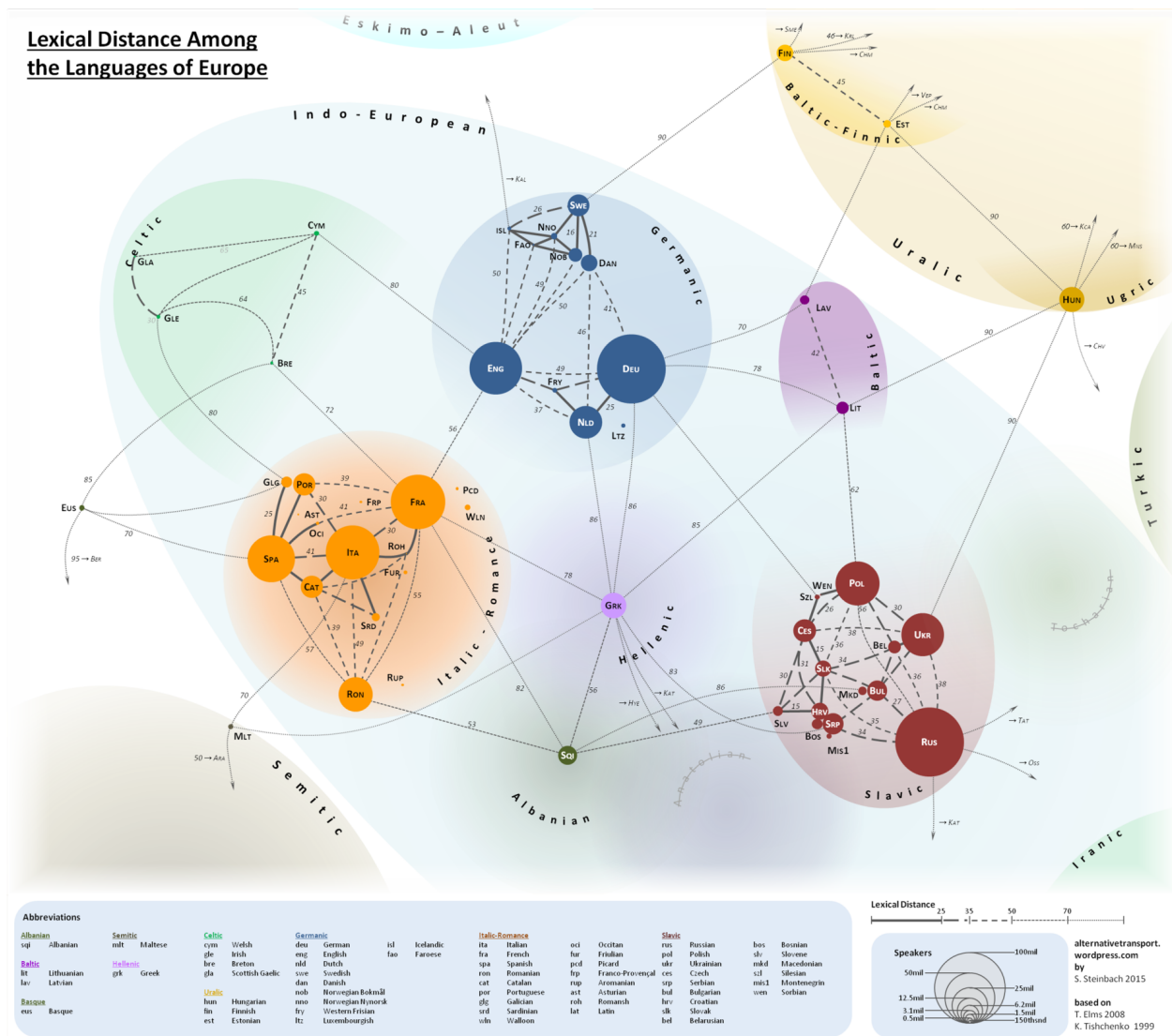


Figura 1: Distancia léxica entre los idiomas más hablados en Occidente. (Tomado de [alternativetransport.wordpress.com/2015/05/05/34](http://alternativetransport.wordpress.com/2015/05/05/34))

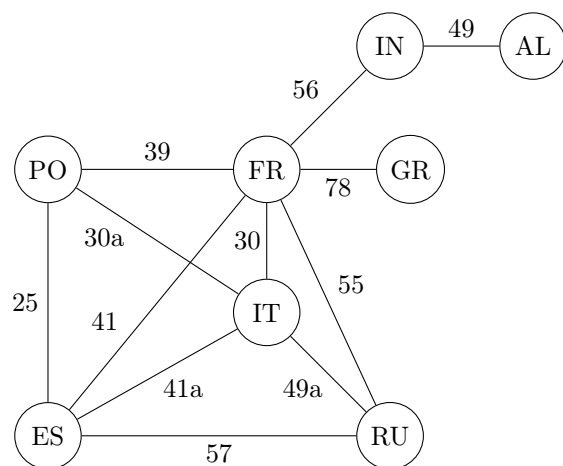


Figura 2: Extracto de la figura 1. AL: alemán, ES: español, FR: francés, GR: griego, IN: inglés, IT: italiano, PO: portugués, RU: rumano. (Elaboración propia).

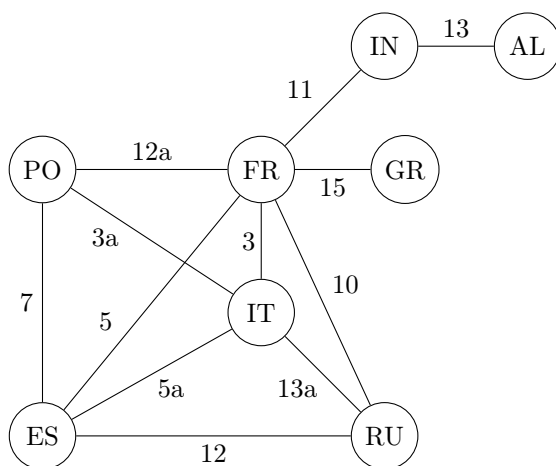


Figura 3: Grafo de la figura 2 con pesos reducidos a la suma de los dígitos de los pesos.

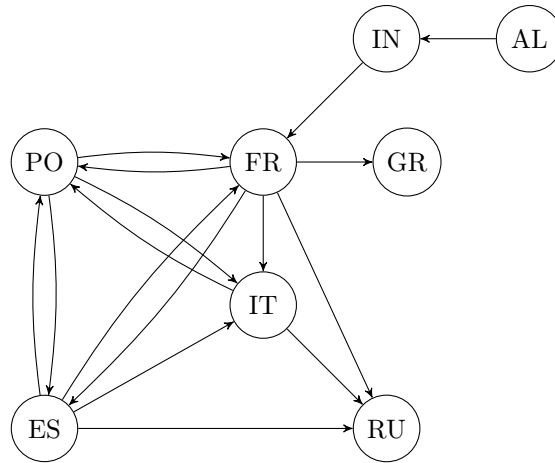


Figura 4: Versión dirigida y no pesada del grafo de la figura 2. (Hay una flecha de un vértice  $v$  a un vértice  $w$  si la  $i$ -ésima letra de la etiqueta de  $v$  es menor que la  $i$ -ésima letra de la etiqueta de  $w$  [ $i = 1, 2$ ]; por ejemplo, hay una flecha de ES a PO porque  $E < P$  [ $i = 1$ ] y una de PO a ES porque  $O < S$  [ $i = 2$ ]), y hay flecha en solo una dirección de ES a RU porque  $E < R$  [ $i = 1$ ] y  $S < U$  [ $i = 2$ ]).

3. *Recorrido de un grafo en anchura* [7 pts.]

Realice un recorrido en anchura de la versión sin pesos del grafo no dirigido de la figura 2, partiendo del vértice *español* (ES). Asuma que las listas de adyacencia están ordenadas alfabéticamente. Muestre al finalizar cada iteración principal del algoritmo la distancia de la fuente a cada uno de los otros vértices, los predecesores que forman el camino correspondiente y el estado de la cola. Si al finalizar una iteración no muestra la distancia o el predecesor de un nodo, se asume que son los mismos que en la iteración anterior ( $\infty$  y NIL, respectivamente, si no se indican en la primera iteración).

4. *Componentes fuertemente conexos* [14 pts.]

- Haga un recorrido en profundidad del grafo dirigido de la figura 4 y muestre los tiempos de descubrimiento y finalización y vértices predecesores correspondientes. Asuma que las listas de adyacencia están ordenadas alfabéticamente y que en el ciclo principal los vértices se toman en orden alfabético. Ignore los pesos de las aristas. [4 pts.]
- Clasifique las aristas por su tipo: de árbol, hacia adelante, hacia atrás y cruzada. Especifique la simbología usada. [6 pts.]
- Haga un recorrido en profundidad de la traspuesta del grafo tomando los vértices en orden decreciente de finalización de la parte a) y asumiendo que las listas de adyacencia están ordenadas alfabéticamente. Muestre los respectivos tiempos de descubrimiento y finalización y los predecesores [4 pts.]. Use esta información para encontrar los componentes fuertemente conexos del grafo [4 pts.].

5. *Algoritmo de Kruskal y ests. de datos para conjts. disjtos.* [18 pts.]

Use el algoritmo de Kruskal para encontrar un árbol recubridor mínimo del grafo pesado no dirigido de la figura 2. Las aristas con pesos repetidos se diferencian agregándoles la letra «a» y se deben considerar en orden alfabético, es decir, primero la que no tiene letra —por ejemplo, las aristas «30» y «30a» tienen el mismo peso, pero la arista «30» tiene prioridad sobre la otra—. Así, el orden en que se deben considerar las aristas es el siguiente: 25, 30, 30a, 39, 41, 41a, 49, 49a, 55, 56, 57 y 78. Muestre para cada iteración lo siguiente:

- La arista considerada, y si fue tomada o no. (Después de la primera arista mal procesada el resto no suman puntos). [6 pts.]
- El estado de la correspondiente estructura de datos para conjuntos disjuntos, implementada mediante árboles. Indique el rango de los nodos por medio de subíndices. (Si gusta, puede mostrar

solo los árboles que cambian; después del primer árbol mal procesado, el resto no suman puntos).  
[12 pts.]

Para esta pregunta asuma que los argumentos de la operación UNION son dados en orden alfabético (por ejemplo, como  $\text{UNION}(a, b)$  y no  $\text{UNION}(b, a)$ ). Si al finalizar una iteración no muestra el padre ni el rango de un nodo, se asumirá que son los mismos que en la iteración anterior (el nodo y cero, respectivamente, si no se indican en la primera iteración). *Indique si el algoritmo fue capaz de hallar un árbol recubridor* [1 pto.].

6. *Algoritmo de Prim* [12 pts.]

Use el algoritmo de Prim para encontrar un árbol recubridor mínimo del grafo pesado no dirigido de la figura 2. Especifique en cada iteración principal del algoritmo las aristas consideradas y la arista seleccionada [12 pts.]. Empiece en el vértice ES. (Después de la primera arista mal procesada el resto de aristas no suman puntos).

7. *Camino más corto desde una fuente* [7 pts.]

Use el algoritmo de Dijkstra para encontrar el camino más corto entre el vértice PO y los otros vértices en el grafo no dirigido de peso reducido de la figura 3. Al considerar un vértice como pivote, actualice las distancia y predecesores de sus adyacentes *solo si la distancia disminuye* (no si se mantiene igual). Si varios vértices tienen la misma distancia conocida a la fuente, dé prioridad al menor, en un sentido alfabético. Muestre en cada iteración las distancias más cortas conocidas desde la fuente [ $3\frac{1}{2}$  pts.] y los predecesores que forman tal camino [ $3\frac{1}{2}$  pts.]. Si al finalizar una iteración no indica la distancia o el predecesor de un vértice, se asume que son los mismos que en la iteración anterior ( $\infty$  y NIL, respectivamente, si no se han especificado).

8. *Camino más corto entre todos los vértices* [18 pts.]

Use la figura 5 para simular la ejecución del algoritmo de Floyd y Washall sobre el subgrafo del grafo de pesos reducidos de la figura 3 correspondiente a tomar solo los vértices de las lenguas romances: español, francés, italiano, portugués y rumano. [ $1\frac{1}{2}$ pto. cada matriz. Después de la primer matriz  $D$  incorrecta el resto de matrices  $D$  no suman puntos. Después de la primer matriz  $\Pi$  incorrecta el resto de matrices  $\Pi$  no suman puntos.]

$D^{(0)} =$	<table><tr><td></td><td>ES</td><td>FR</td><td>IT</td><td>PO</td><td>RU</td></tr><tr><td>ES</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>FR</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>IT</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>PO</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>RU</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		ES	FR	IT	PO	RU	ES						FR						IT						PO						RU						$\Pi^{(0)} =$	<table><tr><td></td><td>ES</td><td>FR</td><td>IT</td><td>PO</td><td>RU</td></tr><tr><td>ES</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>FR</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>IT</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>PO</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>RU</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		ES	FR	IT	PO	RU	ES						FR						IT						PO						RU					
	ES	FR	IT	PO	RU																																																																						
ES																																																																											
FR																																																																											
IT																																																																											
PO																																																																											
RU																																																																											
	ES	FR	IT	PO	RU																																																																						
ES																																																																											
FR																																																																											
IT																																																																											
PO																																																																											
RU																																																																											
$D^{(1)} =$	<table><tr><td></td><td>ES</td><td>FR</td><td>IT</td><td>PO</td><td>RU</td></tr><tr><td>ES</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>FR</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>IT</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>PO</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>RU</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		ES	FR	IT	PO	RU	ES						FR						IT						PO						RU						$\Pi^{(1)} =$	<table><tr><td></td><td>ES</td><td>FR</td><td>IT</td><td>PO</td><td>RU</td></tr><tr><td>ES</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>FR</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>IT</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>PO</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>RU</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		ES	FR	IT	PO	RU	ES						FR						IT						PO						RU					
	ES	FR	IT	PO	RU																																																																						
ES																																																																											
FR																																																																											
IT																																																																											
PO																																																																											
RU																																																																											
	ES	FR	IT	PO	RU																																																																						
ES																																																																											
FR																																																																											
IT																																																																											
PO																																																																											
RU																																																																											
$D^{(2)} =$	<table><tr><td></td><td>ES</td><td>FR</td><td>IT</td><td>PO</td><td>RU</td></tr><tr><td>ES</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>FR</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>IT</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>PO</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>RU</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		ES	FR	IT	PO	RU	ES						FR						IT						PO						RU						$\Pi^{(2)} =$	<table><tr><td></td><td>ES</td><td>FR</td><td>IT</td><td>PO</td><td>RU</td></tr><tr><td>ES</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>FR</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>IT</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>PO</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>RU</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		ES	FR	IT	PO	RU	ES						FR						IT						PO						RU					
	ES	FR	IT	PO	RU																																																																						
ES																																																																											
FR																																																																											
IT																																																																											
PO																																																																											
RU																																																																											
	ES	FR	IT	PO	RU																																																																						
ES																																																																											
FR																																																																											
IT																																																																											
PO																																																																											
RU																																																																											
$D^{(3)} =$	<table><tr><td></td><td>ES</td><td>FR</td><td>IT</td><td>PO</td><td>RU</td></tr><tr><td>ES</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>FR</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>IT</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>PO</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>RU</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		ES	FR	IT	PO	RU	ES						FR						IT						PO						RU						$\Pi^{(3)} =$	<table><tr><td></td><td>ES</td><td>FR</td><td>IT</td><td>PO</td><td>RU</td></tr><tr><td>ES</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>FR</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>IT</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>PO</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>RU</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		ES	FR	IT	PO	RU	ES						FR						IT						PO						RU					
	ES	FR	IT	PO	RU																																																																						
ES																																																																											
FR																																																																											
IT																																																																											
PO																																																																											
RU																																																																											
	ES	FR	IT	PO	RU																																																																						
ES																																																																											
FR																																																																											
IT																																																																											
PO																																																																											
RU																																																																											
$D^{(4)} =$	<table><tr><td></td><td>ES</td><td>FR</td><td>IT</td><td>PO</td><td>RU</td></tr><tr><td>ES</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>FR</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>IT</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>PO</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>RU</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		ES	FR	IT	PO	RU	ES						FR						IT						PO						RU						$\Pi^{(4)} =$	<table><tr><td></td><td>ES</td><td>FR</td><td>IT</td><td>PO</td><td>RU</td></tr><tr><td>ES</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>FR</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>IT</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>PO</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>RU</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		ES	FR	IT	PO	RU	ES						FR						IT						PO						RU					
	ES	FR	IT	PO	RU																																																																						
ES																																																																											
FR																																																																											
IT																																																																											
PO																																																																											
RU																																																																											
	ES	FR	IT	PO	RU																																																																						
ES																																																																											
FR																																																																											
IT																																																																											
PO																																																																											
RU																																																																											
$D^{(5)} =$	<table><tr><td></td><td>ES</td><td>FR</td><td>IT</td><td>PO</td><td>RU</td></tr><tr><td>ES</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>FR</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>IT</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>PO</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>RU</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		ES	FR	IT	PO	RU	ES						FR						IT						PO						RU						$\Pi^{(5)} =$	<table><tr><td></td><td>ES</td><td>FR</td><td>IT</td><td>PO</td><td>RU</td></tr><tr><td>ES</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>FR</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>IT</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>PO</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>RU</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		ES	FR	IT	PO	RU	ES						FR						IT						PO						RU					
	ES	FR	IT	PO	RU																																																																						
ES																																																																											
FR																																																																											
IT																																																																											
PO																																																																											
RU																																																																											
	ES	FR	IT	PO	RU																																																																						
ES																																																																											
FR																																																																											
IT																																																																											
PO																																																																											
RU																																																																											

Figura 5: Simulación de ejecución de algoritmo de Floyd y Warshall.