Universidad de Costa Rica | MA1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería

Escuela de Matemática | 6 de mayo de 2019 (I-2019)

PRÁCTICA PRIMER PARCIAL

Instrucciones: Este es un examen de desarrollo, todos los procedimientos que justifiquen su respuesta deben aparecer en el cuaderno de examen.

1. [20 pts.] Usando serie de potencias centrada en cero, hallar una solución general de:

$$(x^2-1)y''+4xy'+2y=0$$

SOLUCIÓN:

$$y''+\frac{4x}{x^2-1}y'+\frac{2}{x^2-1}y=0$$

$p(x)=\frac{4x}{x^2-1}$ y $q(x)=\frac{2}{x^2-1}$ son analíticas en cero, este es un punto ordinario de la ecuación diferencial. Entonces existe solución:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$y'=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

Sustituye en la ecuación diferencial:

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+4x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}4na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}4na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2a_2-6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}4a_nx^n+4a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}2a_nx^n+2a_0+2a_1x=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)a_n-(n+2)(n+1)a_{n+2}+4na_n+2a_n\right]x^n+(2a_0-2a_2)+(6a_1-6a_3)x=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n^2+3n+2)a_n-(n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n+(2a_0-2a_2)+(6a_1-6a_3)x=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_n-(n+1)(n+2)a_{n+2}]x^n+(2a_0-2a_2)+(6a_1-6a_3)x=0$$

$$\begin{cases} 2a_0-2a_2=0 \\ 6a_1-6a_3=0 \\ (n+2)(n+1)a_n-(n+2)(n+1)a_{n+2}=0 \end{cases} \qquad n=2,3,...$$

$$\begin{cases} a_2=a_0 \\ a_3=a_1 \\ a_{n+2}=a_n \end{cases} \qquad n=2,3,...$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=a_0\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) [15 pts.] $y'=y^4\cos(x)+y\tan(x)$

SOLUCIÓN: Ecuación diferencial de *Bernoulli*.

$$y'-y\tan(x)=\cos(x)y^4$$

$$y^{-4}y'-y^{-3}\tan(x)=\cos(x)$$

Tomamos la sustitución $u=y^{-3}$ y $u'=-3y^{-4}y'$ entonces:

$$-\frac{u'}{3}-u\tan(x)=\cos(x)$$

La ecuación diferencial se convierte en una ecuación diferencial lineal.

$$u'+3u\tan(x)=-3\cos(x)$$

Se calcula el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{3\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx} = e^{-3\ln|\cos(x)|} = \sec^3(x)$$

$$\int \left(sec^3(x) \cdot u\right)' = -3\int \sec^2(x)dx$$

$$\sec^3(x) \cdot u = -3\tan(x) + C$$

$$y^{-3} = -3\sin(x)\cos^2(x) + C\cos^3(x)$$

(b) [15 pts.] $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$

SOLUCIÓN:

$$y' = \frac{y(2x^2 - y^2)}{2x^3} = \frac{2x^2y - y^3}{2x^3} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

Tomando la sustitución $v = \frac{y}{x} \quad \rightarrow y = vx \quad \rightarrow y' = v + xv'$

$$v + xv' = v - \frac{v^3}{2}$$

$$xv' = -\frac{v^3}{2}$$

$$\int \frac{dv}{v^3} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{-2} = \ln(x) + C$$

3. Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y(2xy + 1)}{x(xy - 1)}$$

(a) [10 pts.] Demuestre que el cambio de variable $v = xy$ hace que la ecuación diferencial sea separable.

SOLUCIÓN:

$$v = xy \quad \rightarrow y = \frac{v}{x} \quad \rightarrow y' = -vx^{-2} + x^{-1}v'$$

$$\frac{xv' - v}{x^2} = \frac{\frac{v}{x}(2v + 1)}{x(v - 1)}$$

$$xv' = \frac{3v^2}{v - 1}$$

Ecuación diferencial separable.

(b) [10 pts.] Resuelva la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN:

$$\int \frac{(v-1)dv}{v^2} = 3\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{v}dv - \int \frac{1}{v^2}dv = 3\ln|x| + C$$

$$\ln|v| + v^{-1} = 3\ln|x| + C$$

$$\ln|xy| + (xy)^{-1} = 3\ln|x| + C$$

4. Dada la ecuación diferencial:

$$x^2(\ln^2 x)y'' - 2x(\ln x)y' + (\ln x + 2)y = 0$$

(a) [5 pts.] Muestre que $y_1 = \ln x$ es una solución de la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN:

Si $y_1 = \ln x$, entonces $y_1' = \frac{1}{x}$ $y_1'' = -\frac{1}{x^2}$.

$$\Leftrightarrow x^2(\ln^2(x))\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{y_1''} - 2x(\ln(x))\underbrace{\frac{1}{x}}_{y_1'} + (\ln(x)+2)\underbrace{\ln x}_{y_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\ln^2(x) - 2\ln(x) + \ln^2(x) + 2\ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

(b) [10 pts.] Encuentre la solución general de la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN:

Usando Abel:

$$y_2 = \ln(x)\int \frac{e^{-\int \frac{-2x(\ln(x))}{x^2\ln^2(x)}dx}}{\ln^2(x)}dx$$

$$y_2 = \ln(x)\int \frac{e^{2\int \frac{1}{x\ln(x)}dx}}{\ln^2(x)}dx$$

$$y_2 = \ln(x) \int \frac{e^{\ln(\ln^2(x))}}{\ln^2(x)} dx = \int dx = x$$

$$y_2 = x\ln(x)$$

La solución general es: $y = A\ln(x) + Bx\ln(x)$

5. [20 pts.] Resuelva la ecuación diferencial:

$$y'' + \frac{1}{4}y = \sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right), \quad en \ \ 0 < x < \pi$$

SOLUCIÓN:

Primero se busca la solución de la homogénea complementaria:

$$y'' + \frac{1}{4}y = 0$$

Tomando el tipo de solución $y = e^{rx}$ tenemos la ecuación característica:

$$r^2 + \frac{1}{4} = 0 \ \ r = \pm\frac{1}{2}i$$

$$y_c = A\cos\left(\frac{x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

La solución general está dada por $y = A\cos\left(\frac{x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{x}{2}\right) + y_p$. Para buscar y_p usamos el método de variación de parámetros.

$$W\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right), \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{x}{2}\right) & \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) & \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin\left(\frac{x}{x}\right) \\ \sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right) & \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \end{vmatrix} = -\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{x}{2}\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) & \sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right) \end{vmatrix} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\Delta_1 = -2\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = 4\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2x$$

$$\Delta_2 = 2\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = 2x + 4\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$y_p = \Delta_1(x)y_1 + \Delta_2(x)y_2$$

$$y_p = \underbrace{\left(4\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2x\right)}_{\Delta_1(x)}\underbrace{\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}_{y_1} + \underbrace{\left(2x + 4\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)}_{\Delta_2(x)}\underbrace{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}_{y_2}$$

$$y_p = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2x\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = A\cos\left(\frac{x}{2}\right)+B\sin\left(\frac{x}{2}\right)+4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)-2x\cos\left(\frac{x}{2}\right)+2x\sin\left(\frac{x}{2}\right)+4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

6. Dada la ecuación diferencial:

$$\left(3x + 2y + y^2\right)dx + \left(x + 4xy + 5y^2\right)dy = 0$$

(a) [10pts.] Encuentre un factor integrante de la forma $\eta = \eta(x + y^2)$.

SOLUCIÓN:

$$\eta(x + y^2)(3x + 2y + y^2)dx + \eta(x + y^2)(x + 4xy + 5y^2)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \eta(x + y^2)(2 + 2y) + \eta'(x + y^2)(6xy + 4y^2 + 2y^3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \eta(x + y^2)(1 + 4y) + \eta'(x + y^2)(x + 4xy + 5y^2)$$

$$\eta'(x + y^2)((x + y^2)(2y - 1)) = \eta(x + y^2)(2y - 1)$$

Tome $u = x + y^2$, entonces:

$$\frac{\eta'(u)}{\eta(u)} = \frac{1}{u}$$

$$\int \frac{d\eta(u)}{\eta(u)} = \int \frac{du}{u}$$

$$\eta(u) = u, \quad \underbrace{\eta(x + y^2) = x + y^2}_{\text{factor integrante}}$$

(b) [10pts.] Resuelva la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN:

La nueva ecuación diferencial:

$$(3x^2 + 2xy + xy^2 + 3xy^2 + 2y^3 + y^4)dx + (x^2 + 4x^2y + 5xy^2 + xy^2 + 4xy^3 + 5y^4)dy = 0$$

Verificamos que la ecuación diferencial es exacta.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 8xy + 6y^2 + 4y^3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 8xy + 6y^2 + 4y^3$$

Luego buscamos una función U tal que $U = C$ sea una solución general de la ecuación diferencial.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + xy^2 + 3xy^2 + 2y^3 + y^4$$

$$U = \int (3x^2 + 2xy + xy^2 + 3xy^2 + 2y^3 + y^4)\partial x + f(y)$$

$$U = x^3 + x^2y + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{3}{2}x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + f(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + x^2y + 3x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + f'(y)$$

$$x^2 + x^2y + 3x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + f'(y) = x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4$$

$$f'(y) = 5y^4 \ \rightarrow \ f(y) = y^5$$

$$U = x^3 + x^2y + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{3}{2}x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + \underbrace{y^5}_{f(y)}$$

$$U = C$$