

CI-0116 Análisis de Algoritmos y Estructuras de Datos
I ciclo de 2020

II EXAMEN PARCIAL

Lunes 8 de junio

El examen consta de 5 preguntas. Cada pregunta indica el tema tratado y su valor. Las preguntas se pueden responder en cualquier orden pero debe indicar en el cuadro mostrado abajo los números de página del cuaderno de examen en las que están las respuestas. Si la respuesta está en el enunciado del examen favor indicarlo con la letra 'E' en vez del número de página. Las hojas del cuaderno de examen se deben enumerar en la esquina superior externa de cada página. El examen se puede realizar con lápiz o bolígrafo. No se permite el uso de dispositivos electrónicos (calculadoras, teléfonos, audífonos, etc.).

Pregunta	Puntos	Páginas o 'E'	Calificación
1. <i>Árboles de búsqueda binarios</i>	20		
2. <i>Árboles rojinegros</i>	22		
3. <i>Tablas de dispersión</i>	26		
4. <i>Árboles rojinegros</i>	15		
5. <i>Pilas</i>	17		
Total	100		

El 3 de junio se lanzó al espacio la nave Falcon 9, primer lanzamiento al espacio de astronautas de los EE.UU., esta vez por una compañía privada, Xspace, después de nueve años de haber concluido el programa de transbordadores espaciales de la NASA (National Aeronautics and Space Administration). En este examen recordamos los transbordadores lanzados al espacio por la NASA y sus principales logros y le damos la bienvenida al Falcon 9.¹

Enterprise Primer transbordador de prueba construido para la NASA. No era apto para vuelos orbitales. Permitió recoger datos sobre aerodinámica y construcción de transbordadores.

Pathfinder Maqueta de acero en tamaño real de un transbordador espacial. Permitió realizar pruebas de transporte y manejo de los actuales transbordadores espaciales sin tener que recurrir al Enterprise.

Columbia Primero en cumplir misiones fuera de la Tierra. Se lanzó por primera vez en 1981. Sufrió un accidente en un viaje en 2003 al reingresar a la atmósfera. Se desintegró y murieron sus siete tripulantes.

¹Datos tomados de Wikipedia.

Challenger Segundo en entrar en servicio. Su primer vuelo fue en 1983. Se desintegró en su décima misión en 1986 a los 73 segundos de su lanzamiento. Murieron sus siete tripulantes.

Discovery Es una de las tres naves que permanecieron en la flota de transbordadores, junto con el Atlantis y el Endeavour. El Discovery era el transbordador más antiguo que continuaba en servicio y realizó variadas misiones de investigación y montaje de satélites, así como también misiones de construcción de la Estación Espacial Internacional (ISS, por sus siglas en inglés).

Atlantis Fue el cuarto transbordador operativo en ser construido. Tras la destrucción de los transbordadores Challenger y Columbia, fue uno de los tres transbordadores completamente operativos de la flota.

Endeavor Quinto y último transbordador operacional construido. Tuvo su primera misión en 1992 y la última en 2011.

Falcon 9 Fue construido por la empresa privada XSpace. Su lanzamiento el 3 de junio de 2020 marcó el regreso al espacio de EE. UU. después de nueve años.

1. *Árboles de búsqueda binarios.* [20 pts.]

A P Ent Ch D End Co F

- Inserte en un árbol de búsqueda binario las naves espaciales **Atlantis**, **Pathfinder**, **Enterprise**, **Challenger**, **Discovery**, **Endeavor**, **Columbia** y **Falcon 9**, *en ese orden*. Puede usar abreviaturas siempre que estas no afecten el ordenamiento final. Muestre el estado del árbol después de cada inserción. [1 pto. cada inserción. Después de la primera inserción fallida, el resto no suman puntos].
- Borre del árbol binario producido en el punto anterior los *orbitadores* espaciales de la NASA (todos menos Enterprise, Pathfinder), *en el orden en que fueron insertados* [2 pts. cada borrado]. Muestre el estado del árbol después de cada borrado. [Válido solo si el árbol del punto anterior es correcto. Después del primer borrado fallido, el resto no suman puntos].

2. *Árboles rojinegros.* [22 pts.]

- Inserte en un árbol rojinegro las naves espaciales **Atlantis**, **Pathfinder**, **Enterprise**, **Challenger**, **Discovery**, **Endeavor**, **Columbia** y **Falcon 9**, *en ese orden*. Muestre el estado del árbol al finalizar cada inserción e *indique los casos (1, 2 y 3) en que se estuvo y en qué orden*. [2 pts. cada inserción. Después de la primera operación fallida, el resto no suman puntos].
- Tomando en cuenta solo los nodos con llaves, ¿cuál es la altura del árbol? [1 pto., válido solo si el árbol es correcto].
- Compare la altura de la parte anterior con la del árbol de búsqueda binaria de la parte a) de la pregunta 1. ¿Se redujo la altura al usar un árbol rojinegro? [1 pto., válido solo si los árboles son correctos].
- Tomando en cuenta las hojas (nodos «nil»), ¿cuál es la altura negra del árbol? [1 pto., válido solo si el árbol es correcto].
- Muestre el árbol 2-3-4 correspondiente. [3 pts., válidos solo si el árbol rojinegro es correcto].

3. *Tablas de dispersión.* [26 pts.]

Sea una tabla de dispersión de **tamaño trece** con las siguientes funciones de dispersión auxiliares:

$$h'(k) = \begin{cases} 0 & \text{si la primera letra de } k \text{ es A o B,} \\ 1 & \text{si la primera letra de } k \text{ es C o D,} \\ 2 & \text{si la primera letra de } k \text{ es E o F,} \\ \vdots & \vdots \\ 12 & \text{si la primera letra de } k \text{ es Y o Z,} \end{cases}$$

$$h''(k) = \begin{cases} 2, & \text{si la tercera letra de } k \text{ es A, B o C,} \\ 3, & \text{si la tercera letra de } k \text{ es D, E o F,} \\ 4, & \text{si la tercera letra de } k \text{ es G, H o I,} \\ 5, & \text{si la tercera letra de } k \text{ es J, K o L,} \\ 6, & \text{si la tercera letra de } k \text{ es M, N u O,} \\ 7, & \text{si la tercera letra de } k \text{ es P, Q, R o S,} \\ 8, & \text{si la tercera letra de } k \text{ es T, U o V,} \\ 9, & \text{si la tercera letra de } k \text{ es W, X, Y o Z.} \end{cases}$$

- a) Muestre en la siguiente tabla cada uno de los estados por los que pasa la tabla de dispersión al insertar las naves espaciales indicados, usando la técnica de direccionamiento abierto con sondeo lineal:

$$h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod 13 \quad (i = 0, 1, \dots, 12).$$

Si deja una casilla vacía, se asume que tiene el mismo valor que en el estado anterior. Indique en la última columna el número de colisiones ocurridas en cada inserción y el total (si deja una casilla vacía se asume que no hubo colisiones al efectuar esa operación). Después de la primera inserción fallida, el resto no suman puntos. [1 pto. cada inserción]

	Casilla / Letras que llevan a la casilla													
	0/AB	1/CD	2/EF	3/GH	4/IJ	5/KL	6/MN	7/OP	8/QR	9/ST	10/UV	11/WX	12/YZ	
Nave	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	N.º colisiones.
Atlantis	A							P						
Pathfinder														
Enterprise			E											
Challenger		C												
Discovery				D										2
Endeavor					E									2
Columbia						C								4
Falcon 9							F							4
Total														12

- b) Muestre en la siguiente tabla cada uno de los estados por los que pasa la tabla de dispersión al insertar las naves espaciales indicados, usando la técnica de direccionamiento abierto con sondeo exponencial

$$h(k, i) = (h'(k) + 2^i - 1) \bmod 13 \quad (i = 0, 1, \dots, 12).$$

Si deja una casilla vacía, se asume que tiene el mismo valor que en el estado anterior. Indique en la última columna el número de colisiones ocurridas en cada inserción y el total (si deja una casilla vacía se asume que no hubo colisiones al efectuar esa operación). Después de la primera inserción fallida, el resto no suman puntos. [10 pts.]

$$1 + 2^1 - 1 = 2 \quad 1 + 2^2 - 1 = 4 \quad 1 + 2^3 - 1 = 8$$

$$2 + 2^1 - 1 = 3 \quad 2 + 2^2 - 1 = 5$$

	Casilla / Letras que llevan a la casilla													
	0/AB	1/CD	2/EF	3/GH	4/IJ	5/KL	6/MN	7/OP	8/QR	9/ST	10/UV	11/WX	12/YZ	
Nave	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	N.º colisiones.
Atlantis	A													
Pathfinder								P						
Enterprise			Ent											
Challenger		Ch												
Discovery					D									2
Endeavor				End										1
Columbia									Co					3
Falcon 9						F								2
Total														8

- c) Muestre en la siguiente tabla cada uno de los estados por los que pasa la tabla de dispersión al insertar las naves espaciales indicados, usando la técnica de direccionamiento abierto con dispersión doble:

$$h(k, i) = (h'(k) + i h''(k)) \text{ mód } 13 \quad (i = 0, 1, \dots, 12).$$

Si deja una casilla vacía, se asume que tiene el mismo valor que en el estado anterior. Indique en la última columna el número de colisiones ocurridas en cada inserción y el total (si deja una casilla vacía se asume que no hubo colisiones al efectuar esa operación). Después de la primera inserción fallida, el resto no suman puntos. [10 pts.]

	Casilla / Letras que llevan a la casilla													
	0/AB	1/CD	2/EF	3/GH	4/IJ	5/KL	6/MN	7/OP	8/QR	9/ST	10/UV	11/WX	12/YZ	
Nave	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	N.º colisiones.
Atlantis	A													
Pathfinder								P						
Enterprise			Ent											
Challenger		Ch												
Discovery				D										1
Endeavor						End								1
Columbia										Co				4
Falcon 9									F					2
Total														8

$$1 + 1 \cdot (1+1) = 3$$

$$1 + 2 \cdot (1+1) = 5$$

$$1 + 3 \cdot (1+1) = 7$$

$$1 + 4 \cdot (1+1) = 9$$

$$2 + 1 \cdot (1+2) = 5$$

$$2 + 2 \cdot (1+2) = 8$$

- d) ¿Cuál es el factor de carga de las tablas? [1 pto.] ¿Está dentro del rango recomendado? Explique. [1 pto.]

4. Árboles rojinegros. [15 pts.] $n=8$ $m=13$, $8/13 \approx 8/12 \approx 0,6 \parallel$ Esta dentro del rango recomendado porque $\alpha=0,6$ y α debe ser menor o igual que 1 para estar dentro del rango.

Sean n_i y n_d el número de nodos de los subárboles izquierdo y derecho de la raíz de un árbol rojinegro de altura negra $a_N = 3$. ¿Cuál es el valor más

grande que puede tomar $m = n_d - n_i$? Explique su respuesta. [La cantidad de puntos obtenidos en esta pregunta es $\max\{0, \lfloor 10 \times (1 - |m - m'|/m) \rfloor\}$, donde m es el valor verdadero y m' es su respuesta.]

5. Pilas. [17 pts.]

La ecuación que se dice que llevó al hombre al espacio es la *ecuación del cohete ideal*, formulada por K. Tsiolkovsky (1857-1935):

$$v(t) = v_0 + v_e \ln \frac{M_0}{M(t)}$$

donde v_0 y M_0 son la velocidad y masa inicial de la nave, respectivamente, $v(t)$ y $M(t)$ con la velocidad y la masa después de t segundos, v_e es la velocidad de expulsión de la masa y \ln es el logaritmo natural.

- Escriba la ecuación que permita calcular la masa en el instante t , $M(t)$ con base en los otros términos. [5 pts.]
- Dibuje el árbol correspondiente a la expresión matemática del punto anterior. [4 pts. válidos solo si la ecuación es correcta.]
- Escriba la lista de términos producida por un recorrido en posorden del árbol. [4 pts., válidos solo si el árbol es correcto.]
- Use el algoritmo siguiente para calcular el dato solicitado. Muestre en la tabla de la derecha el estado de la pila (implementada con un arreglo) después de procesado cada término. *Si los términos de más a la izquierda están vacíos, se asume que tienen el mismo valor que en la iteración anterior.* [4 pts., válidos solo si la lista de términos es correcta].

S. a.
$$v(t) = v_0 + v_e \cdot \ln \left(\frac{M_0}{M(t)} \right)$$

$$v(t) - v_0 = v_e \cdot \ln \left(\frac{M_0}{M(t)} \right)$$

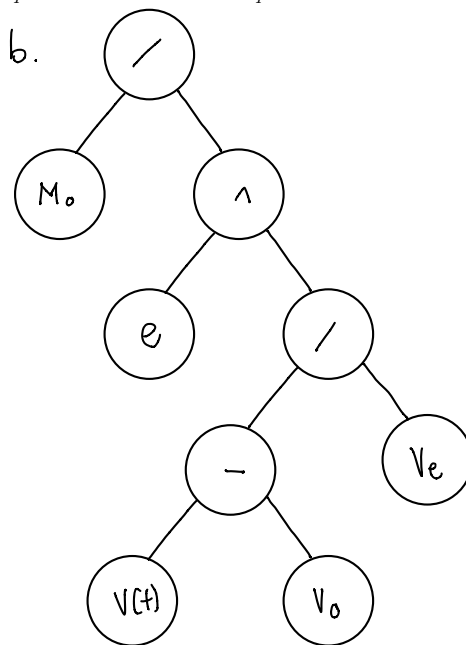
$$\frac{v(t) - v_0}{v_e} = \ln \left(\frac{M_0}{M(t)} \right)$$

$$\ln \left(\frac{M_0}{M(t)} \right) = \frac{v(t) - v_0}{v_e}$$

$$e^{\left(\frac{v(t) - v_0}{v_e} \right)} = \frac{M_0}{M(t)}$$

$$M(t) = \frac{M_0}{e^{\left(\frac{v(t) - v_0}{v_e} \right)}}$$

5. b.



5.c. $M_0, e, v(t), V_0, -, V_e, /, ^, /$

Mientras haya términos por leer:

Lea un término:

- Si es un operando:

1. Push(op)

- Si es un operador:

1. $y = \text{Pop}()$

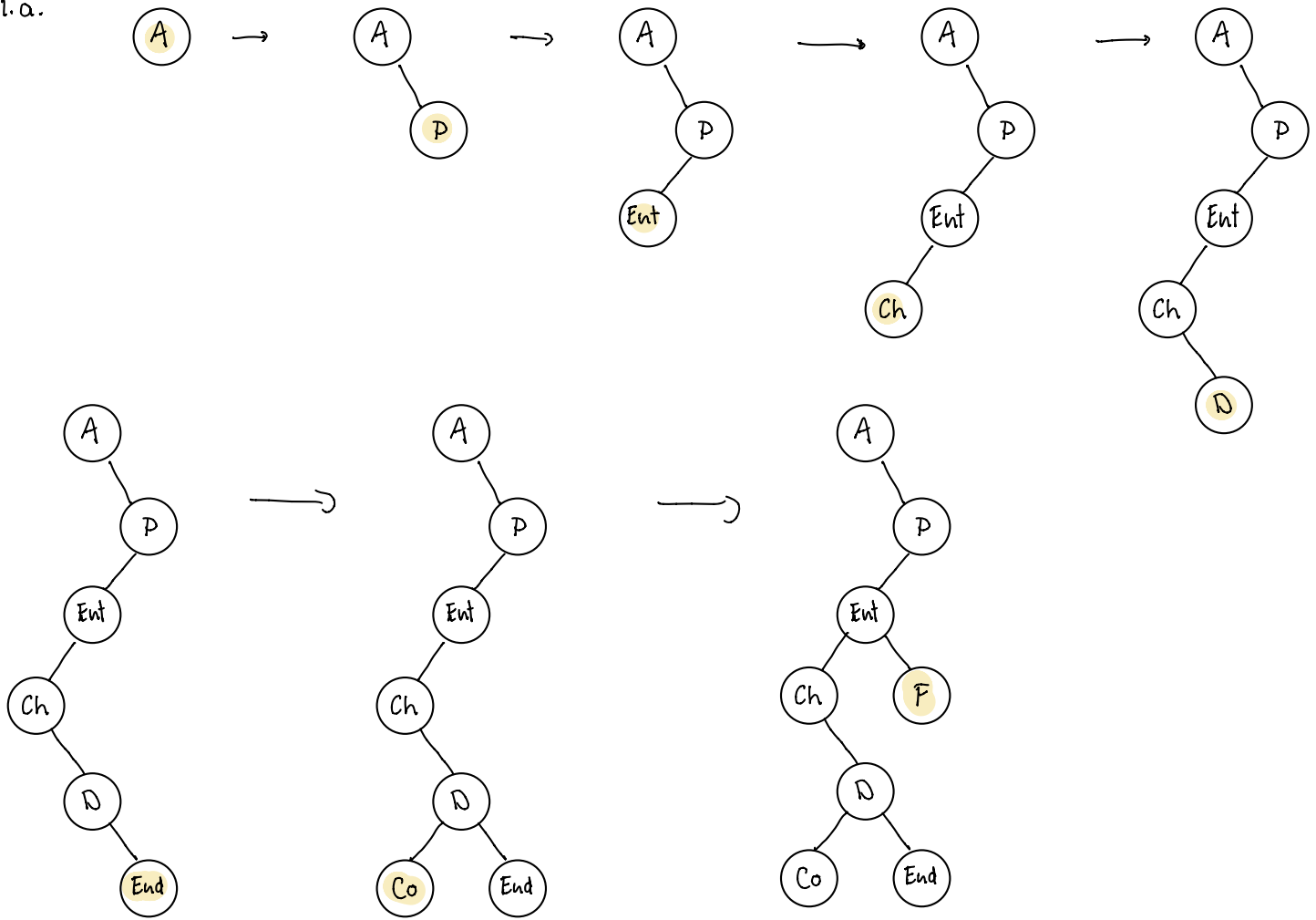
2. $x = \text{Pop}()$

3. $z = x \text{ op } y$

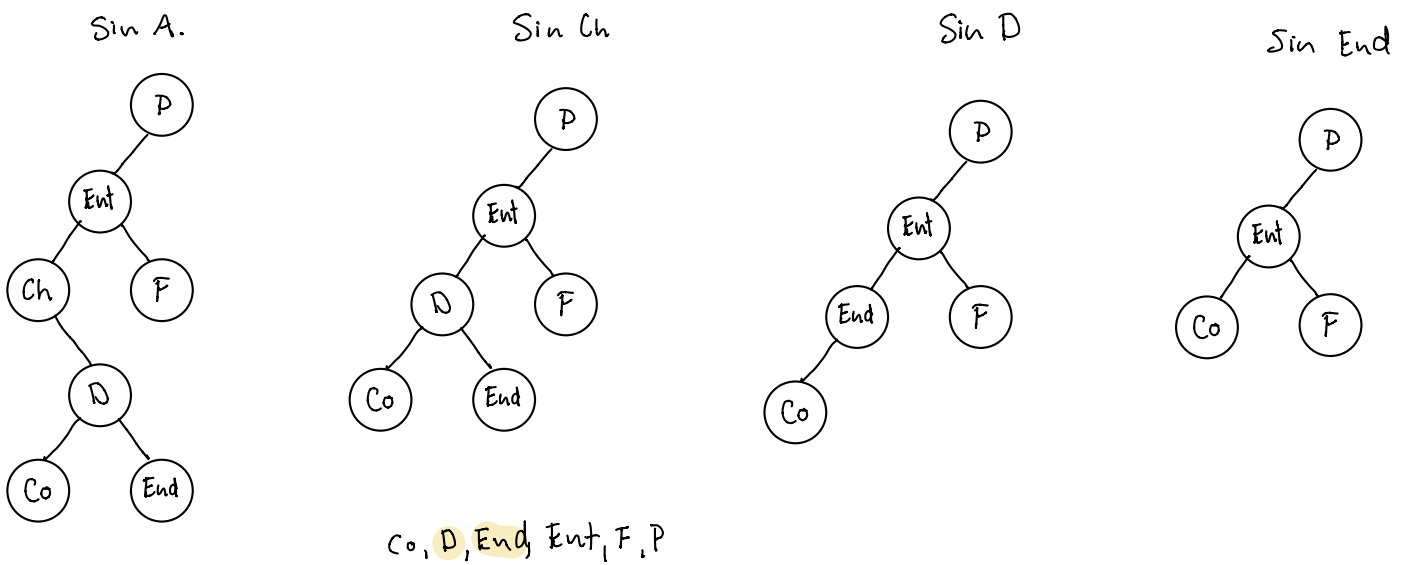
4. Push(z)

Término	Posición del arreglo					
	1	2	3	4	5	6
1.º	M_0					
2.º	M_0	e				
3.º	M_0	e	$v(t)$			
4.º	M_0	e	$v(t)$	V_0		
5.º	M_0	e	$v(t) - V_0$			
6.º	M_0	e	$v(t) - V_0$	V_e		
7.º	M_0	e	$(v(t) - V_0) / V_e$			
8.º	M_0	$e^{(v(t) - V_0) / V_e}$				
9.º	$M_0 / e^{(v(t) - V_0) / V_e}$					
10.º						
11.º						
12.º						

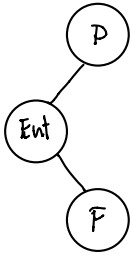
1.a.



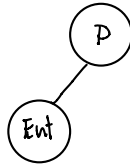
1.b. ~~A~~, ~~Ch~~, ~~D~~, ~~End~~, Co, F



Sin Co



Sin F



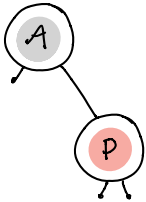
2.a. A P Ent Ch D End Co F

①



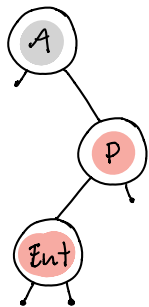
Sin caso

②

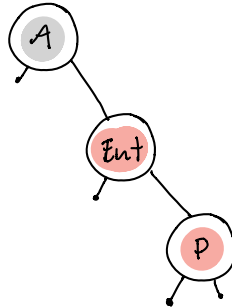


Sin caso

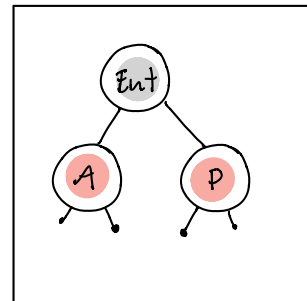
③



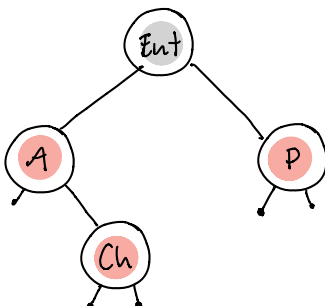
Caso 2



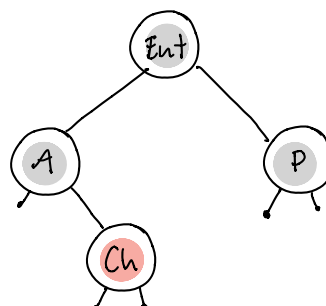
Caso 3



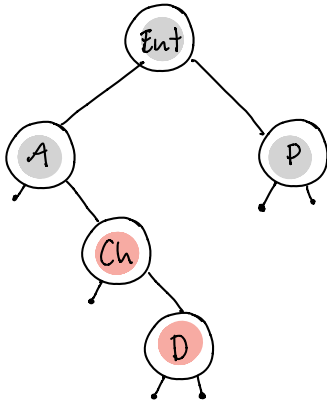
④



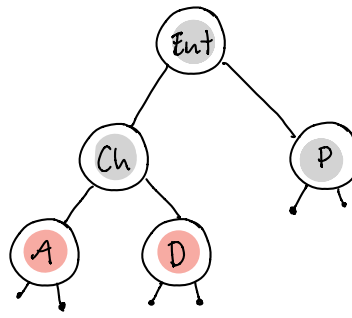
Caso 1



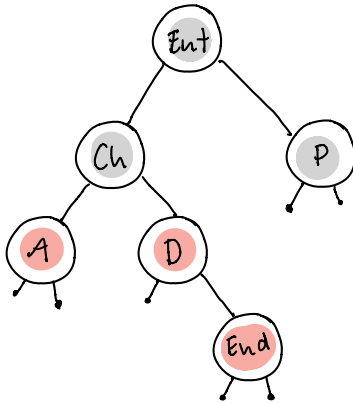
5



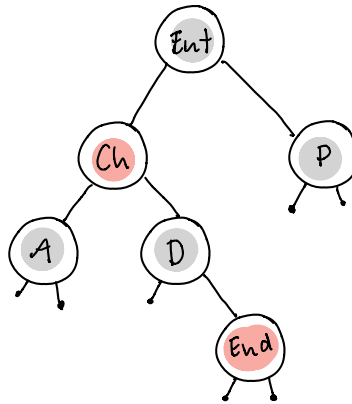
Caso 3



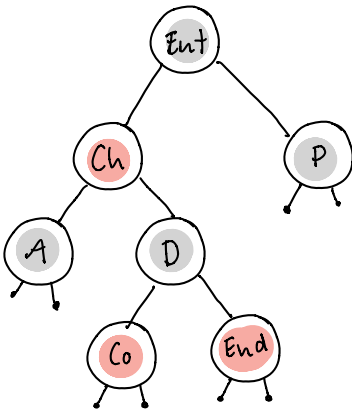
6



Caso 1

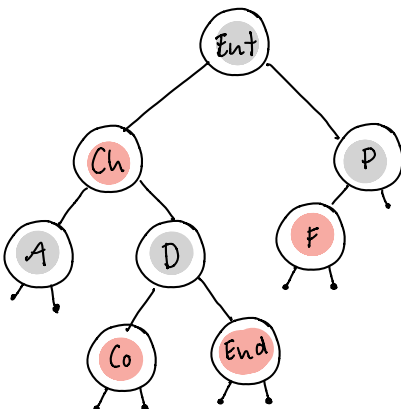


7



Sin caso

8



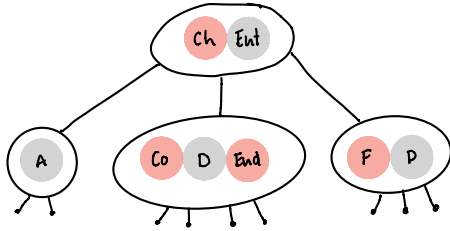
Sin caso

2.b. Altura = 3.

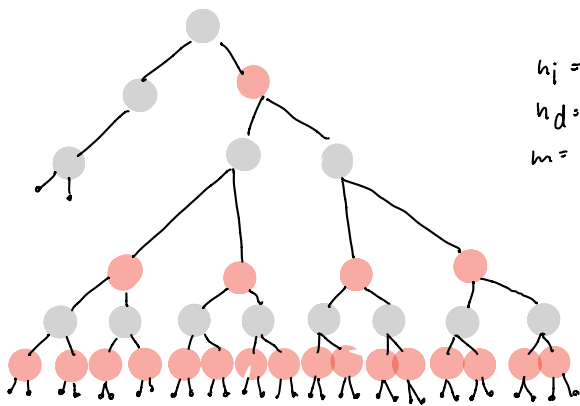
2.c. Sí, la altura del ABB es de 5, mientras que la del ARN es de 3. Disminuyó 2 niveles.

2.d. Altura negra: 2.

2.e.



4.



$$\begin{aligned}h_i &= 2 \\h_d &= 31 \\m &= 31 - 2 = 29\end{aligned}$$

En un caso hipotético, el subárbol izquierdo solo tiene los nodos que necesita para que el árbol cumpla con la altura negra. Por otro lado, el subárbol derecho intercala sus nodos entre rojos y negros y se asegura que todos los nodos tengan dos hijos y cumpla con la altura negra del árbol.