Pertemuan 4

Beberapa Aturan Peluang

- Bila A dan A’ adalah dua kejadian yang komplementer, maka

$$\mathbf{P(A) + P(A') = 1,} \text{ maka } \mathbf{P(A') = 1 - P(A)}$$

Contoh 1. sebuah koin yg fair dilempar sebanyak 6 kali. Berapa peluang paling sedikit satu kali muncul sisi angka (A) ?

Jawaban :

S = ruang sampel, |S| = 2x2x2x2x2x2 = 2^6 = 64

E = kejadian paling sedikit 1 kali muncul sisi angka

E’ = kejadian tidak muncul sisi angka 1 buah pun

P(E) = 63/64

Komplementer

- **Contoh 2**. sebuah kotak berisi 6 bola merah, 4 bola putih, dan 5 bola biru. Sebuah bola diambil dari kotak tersebut. Berapa peluang bahwa yang terambil adalah:
  a. Merah → $P(M) = 2/5$
  b. Biru → $P(B) = 1/3$
  c. Bukan merah → $P(M') = 3/5$
  d. Merah atau putih → $P(M \cup P) = 2/3$

Misal:

- M = kejadian yg terpilih bola merah
- P = kejadian yg terpilih bola putih
- B = kejadian yg terpilih bola biru

PELUANG BERSYARAT

- Peluang terjadinya suatu kejadian bila diketahui kejadian lain disebut **peluang bersyarat**.
- Misalkan sebuah dadu dilempar satu kali. Kita ingin menghitung kejadian angka yg dihasilkan adalah ganjil. Mudah dihitung $P(A) = 3/6 = ½$
- Misalkan B adalah kejadian angka yg muncul kurang dari 4, maka mudah dihitung bahwa $P(B) = 2/6 =1/2$
- Berapa peluang kejadian B jika diberikan informasi bahwa lemparan tersebut menghasilkan angka ganjil?

- Notasi: P(B|A)

$$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A) \text{ bila } P(A) > 0$$

- Pada contoh tadi, informasi tambahan bahwa pelemparan dadu menghasilkan angka ganjil membuat peluang naik dari ½ menjadi 1/3

- Dengan kata lain, keterangan tambahan mengubah peluang suatu kejadian. Pada contoh tersebut, $P(B|A) \neq P(B)$ yg menunjukkan bahwa B bergantung pada A.

- **Contoh 3**. Transbatam selalu berangkat tepat waktu dengan peluang 0.83, dan peluang sampai tepat waktu adalah 0.82, dan peluang berangkat dan sampai tepat waktu adalah 0.78. Berapa peluang
  a. Transbatam sampai tepat waktu bila diketahui berangkat tepat waktu → $P(B|A) = 0.94$
  b. Transbatam berangkat tepat waktu jika diketahui sampai tepat waktu → $P(A|B) = 0.95$

- Dua kejadian A dan B dikatakan **bebas** jika dan hanya jika

$$\mathbf{P(B|A) = P(B)} \text{ dan } \mathbf{P(A|B) = P(A)}$$

- Jika tidak demikian dikatakan **tidak bebas.**

- Pada kasus $P(B|A) = P(B)$, maka terjadinya A sama sekali tidak mempengaruhi terjadinyanya B.

- Begitu pula pada kasus $P(A|B) = P(A)$, maka terjadinya B sama sekali tidak mempengaruhi terjadinya A.

ATURAN PERKALIAN

- Karena $P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$, maka dengan mengalikan silang diperoleh

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)}$$

- Dikatakan bahwa kejadian A dan B terjadi secara serentak

- Karena kejadian $A \cap B$ dan $B \cap A$ ekuivalen, maka juga berlaku

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B)}$$

- Jadi tidak penting mengetahui kejadian mana yg terjadi, A atau B

- **Contoh 4**. Dari sebuah kotak yg berisi 20 bola, lima diantaranya berwarna merah. Dua bola diambil satu persatu secara acak tanpa mengembalikan bola pertama ke dalam kotak. Berapa peluang kedua bola yg terambil berwarna merah ?

Misal

- A = kejadian bola pertama yg diambil adalah merah
- B = kejadian bola kedua yg diambil adalah merah (B terjadi setelah A terjadi)
- $P(A) = 5/20 = 1/4$
- $P(B|A) = 4/19$
- $P(A \cap B) = ?$
- $P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A) = 1/4 \times 4/19 = 1/19$

- Bila kejadian A dan B bebas, maka $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.
- Dinyataan dengan teorema perkalian khusus

“Dua kejadian A dan B dikatakan bebas jika dan hanya jika $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$”

Contoh 5. dari contoh 4, jika bola pertama dikembalikan ke dalam kotak dan isi kotak diacak kembali sebelum mengambil bola kedua, berapa peluang kedua bola yg terambil berwarna merah?

Jawaban :

$P(A) = 5/20 = ¼$

$P(B) = 5/20 = ¼$

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/16$

ATURAN BAYES

- Teorema. Misalkan B_1, B_2, …, B_n adalah kejadian-kejadian yg terpisah (saling meniadakan) yg gabungannya adalah ruang sampel S, dengan kata lain salah satu dari kejadian tersebut harus terjadi. Jika A adalah kejadian sembarang dalam S dengan P(A) $\neq$ 0, maka

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|B_i)}$$

- Aturan bayes memungkinkan kita menentukan peluang berbagai kejadian B_1, B_2, …, B_n yang dapat menyebabkan A terjadi.

- Tiga orang dosen dicalonkan menjadi rektor sebuah perguruan tinggi, yaitu Ahmad, Budi, dan Catur. Peluang Ahmad terpilih 0.3, Budi 0.5, Catur 0.2. Bila Ahmad terpilih maka peluang SPP naik adalah 0.8, dan bila Budi yg terpilih peluang SPP naik adalah 0.1, dan bila Catur yg terpilih maka peluang SPP naik adalah 0.4. Bila setelah pemilihan diketahui bahwa SPP telah naik, berapakah peluang bahwa Catur yg terpilih?
- Misal:

  A: kejadian orang yg terpilih menaikkan SPP

  B1: kejadian Ahmad yg terpilih

  B2: kejadian Budi yg terpilih

  B3: kejadian Catur yg terpilih

Jawaban : 0.216

- Dalam industri perakitan, tiga mesin yaitu M1, M2, dan M3 menghasilkan 30%, 45%, dan 25% produk. Diketahui dari pengalaman sebelumnya bahwa 2%, 3%, dan 2% dari produk yang dihasilkan setiap mesin mengalami kerusakan (cacat). Diambil satu produk secara acak, tentukan peluang bahwa produk yang cacat itu berasal dari mesin M3.

latihan