Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Факультет компьютерных наук
Образовательная программа бакалавриата 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

ОТЧЕТ
по учебной практике

на факультете компьютерных наук НИУ ВШЭ
(название организации, предприятия)

Выполнил(а) студент(ка)
группы БПМИ 197
В. О. Копчев
(инициалы, фамилия)

(подпись)

Руководитель практики
Международная лаборатория алгебраической топологии и ее приложений, заведующий лабораторией
(подразделение ФКН, должность)
Айзенберг Антон Андреевич
(ФИО руководителя практики)

Дата 03.09.2021 (оценка) (подпись)

Москва – 2021

1 Аннотация отчета

Целью данной работы было изучить симплициальные комплексы некоторого типа, описать их гомотопический тип, научиться вычислять их гомологии с помощью специальных библиотек языка Python. В рамках работы я изучил статьи, посвященные этой теме, учебники по алгебраической топологии, решил ряд упражнений, провел вычислительный эксперимент. В результате был сделан вывод о том, что музыкальные свойства аккордов можно описать топологически и исследовать с помощью инструментов алгебраической топологии.

Содержание

1 Аннотация отчета **1**

2 Цель и задачи практики **3**

3 Описание места прохождения практики **4**

4 Обзор изученных материалов **5**

5 Обзор и описание использованных математических объектов **6**

5.1 Введение в музыкальную теорию 6

5.2 О понятии тоннеца 7

5.3 Основные определения и соглашения 8

5.4 Определение обобщенного тоннеца 9

5.5 Топологические свойства обобщенного тоннеца 10

5.6 Фундаментальная группа обобщенного тоннеца 11

5.7 Гомологии обобщенного тоннеца 12

5.8 Накрытия 13

5.9 Отображение Абеля – Якоби 14

5.10 Обобщенный тоннец как триангуляция тора 14

6 Описание полученных результатов **15**

6.1 Упражнения 15

6.2 Интерпретация и анализ результатов 16

7 Заключение **17**

8 Список использованных источников **18**

9 Рабочий план-график **18**

2 Цель и задачи практики

У работы есть две цели:

1. Образовательная: научиться вычислять гомологии симплициальных комплексов различными способами, изучить теорию гомологий бинарного отношения, и различные способы упрощения симплициальных комплексов, сохраняющие гомотопический тип.

2. Содержательная: описание гомотопического типа симплициальных комплексов нескольких разных видов.

Для этого необходимо решить несколько задач:

1. Теоретическое описание обобщенных тоннетцов для троек точек на окружности. Подготовка иллюстративных примеров.

2. Изучение статей Йевтича-Живалевича и Кюннеля-Лассмана про обобщенные тоннетцы.

3. Вычисление гомологий (чисел Бетти от 0-го до 3-го) для некоторых тоннетцов из 4-х точек на окружности.

4. Подготовка краткого отчета в TeX'е с описанием простых примеров, формулировками известных результатов, и результатами вычислительных экспериментов.

3 Описание места прохождения практики

Практику я прохожу в международной лаборатории алгебраической топологии и ее приложений НИУ ВШЭ. Она была создана в январе 2020 года и является подразделением факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ.

Лаборатория АТиП продолжает и расширяет научную деятельность Научно-учебной лаборатории прикладной геометрии и топологии, существовавшей в структуре Департамента больших данных и информационного поиска в 2019 году.

Сотрудники ведут исследования в областях, смежных с алгебраической топологией. Одно из направлений деятельности – торическая топология – лежит на пересечении теории действий топологических групп, комбинаторики, гомологической алгебры и дифференциальной геометрии. Другое направление – приложения геометрических методов к анализу данных, а также разработка новых методов на стыке топологии и теоретической информатики.

Цель лаборатории – развитие методов алгебраической топологии в связи с их приложениями как в теоретической математике, так и в анализе многомерных данных, включая топологический анализ нейробиологических данных.

4 Обзор изученных материалов

1. **Виро О. Я. «Общая топология».** Классический учебник по общей топологии, в котором можно найти все основные теорем и термины, используемые в топологии.

2. **Filip D. Jevtić, Rade T. Živaljević «Generalized Tonnetz and discrete Abel-Jacobi map».** Основная статья, в которой содержатся все основные сведения о типах комплексах, которые изучаются в данной работе.

3. **Айзенберг А. А. «Методичка по симплициальным комплексам и гомологиям».** Это также учебник по топологии, однако, отличие от учебника Виро, он содержит сведения из алгебраической топологии, полезные для данной работы.

5 Обзор и описание использованных математических объектов

5.1 Введение в музыкальную теорию

Основной премет изучения музыкальной теории — это музыкальный звук. Он характеризуется высотой. Для письменной записи музыкальных звуков используются ноты. Ноты в буквенной нотации: C, D, R, F, G, A, H (B).

В музыкальной теории сущпствует понятие интервала – соотношения двух музыкальных звуков по их высоте. Базовым музыкальным интервалом является целый тон. По отношению к нему определяется полутон – музыкальный интервал, равный половине целого тона.

Для математического выражения этих понятий используется музыкальный строй — система соответствия ступеней музыкального звукоряда звукам определенной высоты. Наиболее распространен равномерно темперированный строй, в котором каждый полутон равен $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$, и всего их 12.

Для упрощения записи «базовых» высот, пониженных или повышенных на полутон, используют символы диеза $\sharp$ и бемоля $\flat$. В результате получается ряд из 12 нот, отличающихся друг от друга на полутон: $C, C^{\sharp}, D, D^{\sharp}, E, F, F^{\sharp}, G, G^{\sharp}, A, A^{\sharp}, H(B)$.

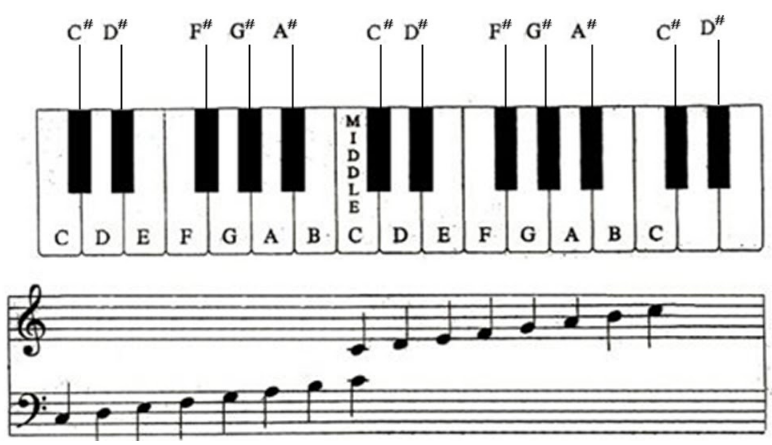


Рис. 1: Ноты

Введем еще несколько важных понятий. Октава — музыкальный интервал, соотношение частот между звуками в котором составляет $\frac{1}{2}$:

Теперь определим понятие высотного класса — это множество всех звуковых высот, отстоящих друг от друга на целое число октав. С точки зрения математики, высотный класс — это класс эквивалентности относительно отношения эквивалентности, определяемого следующим образом: звуки с частотами f_1, f_2 эквивалентны $\Leftrightarrow \frac{f_1}{f_2} = 2^n, n \in \mathbb{Z}$

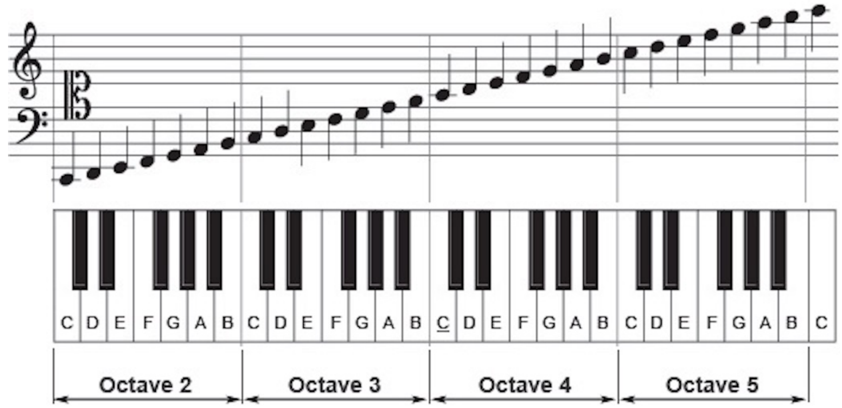


Рис. 2: Октавы

Звукоряд — последовательность звуков, расроложенных по высоту в восходящем или нисходящем порядке. В частности, гамма — это звукоряд, в котором выстроена последовательность нот внутри одной октавы. Первый и последний звуки гаммы одинаковы по названию, но расположены на расстоянии октавы.

Ступень — характеристика высоты музыкального звука по его положению в звукоряде. До, ре, ми, фа, соль, ля, си — 7 ступеней гаммы.

Терция — музыкальный интервал шириной в три ступени.

Одним из основных терминов музыкальной теории является аккорд — одновременное сочетание трех и более музыкальных звуков разных высотных классов (pitch classes). Мы будем изучать трезвучия (аккорды, состоящие из трех звуков, расположенных по терциям) и септаккорды (состоят из четырех звуков, расположенных по терциям).

Трезвучия бывают мажорными и минорными.

5.2 О понятии тоннеца

В музыкальной теории для представления отношения между высотами звуков используется тоннец, впервые описанный Эйлером.

По картинке (1) видно, что указанные 12 нот расположены на клавиатуре циклично. Тогда мы можем расположить их на единичном круге, занумеровав числами от 0 до 11. Трезвучия (12 минорных и 12 мажорных) на круге задаются 24 треугольниками. В результате мы можем получаем удобное представление тоннеца, эквивалентное описанному выше.

Будем считать, что 12 точкам на круге сопоставлены соответствующие элементы аддитивной

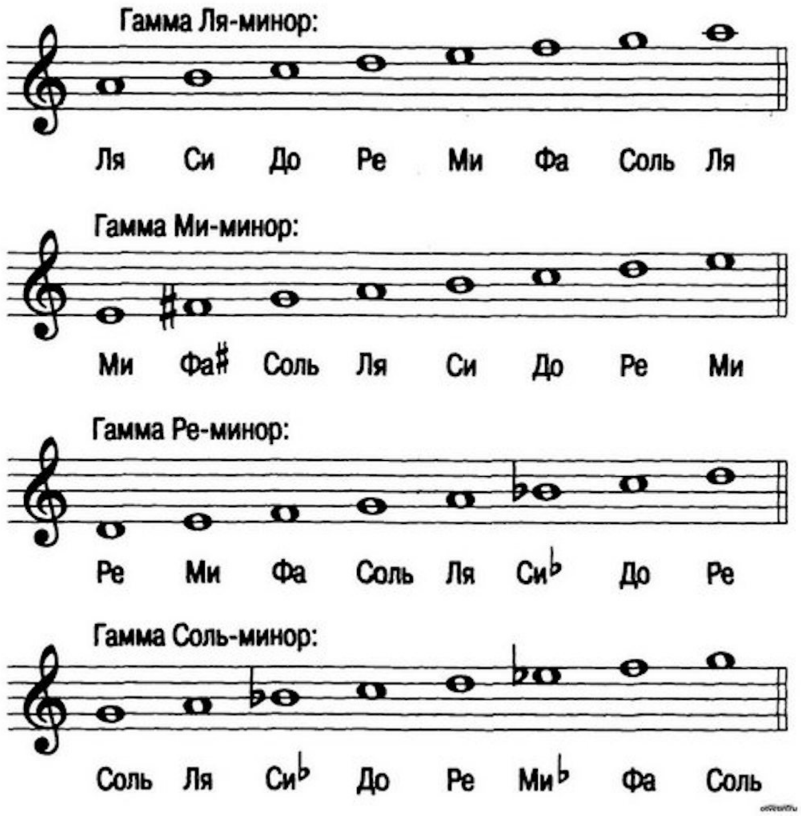


Рис. 3: Гаммы

группы $\mathbb{Z}_{12}$. Тогда можно дать формальное определение тоннеца:

Tonnetz = $\{\{x, x+3, x+7\} \mid x \in \mathbb{Z}_{12}\} \cup \{\{x, x+4, x+7\} \mid x \in \mathbb{Z}_{12}\}$.

Заметим, что Tonnetz — симплициальный комплекс. Мы можем обобщить полученные результаты на более общий класс симплициальных комплексов. Но для начала необходимо ввести несколько определений и соглашений.

5.3 Основные определения и соглашения

Определение 1. Пусть $L = \{l_1, \ldots, l_k\}, l_i \in \mathbb{N}_1, \sum\limits_{i=1}^{k} l_i = n$. Упорядоченный набор L называется простым, если $\forall I, J \in 2^{[n]}\ \sum\limits_{i \in I} l_i = \sum\limits_{j \in J} l_j \Rightarrow I = J$.

Определение 2. Упорядоченный набор L называется редуцированным, если НОД $(l_1, \ldots, l_k) = 1$

Соглашение. Элементы множества $[n] = \{0, \ldots, n-1\}$ будем отождествлять с элементами аддитивной группы $\mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$ или с набором вершин правильного n-угольника $\mathbb{V}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n - 1 = 0\}$.

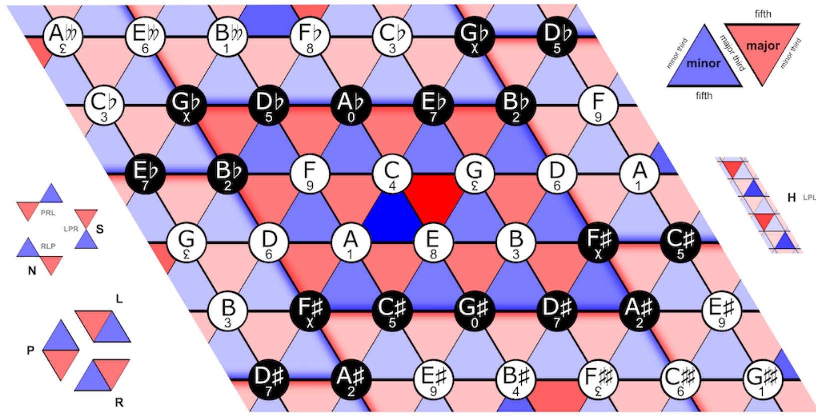
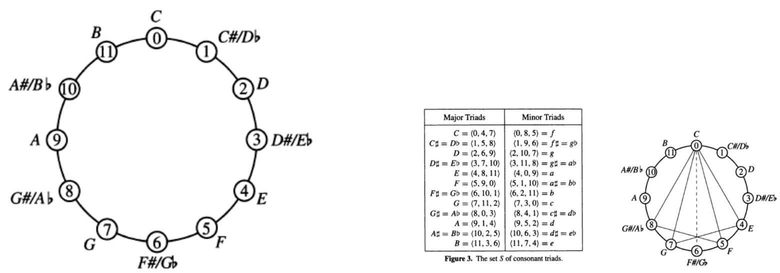


Рис. 4: Тоннец Эйлера



Major Triads	Minor Triads
$C = \langle 0, 4, 7\rangle$	$\langle 0, 8, 5\rangle = f$
$C\sharp = D\flat = \langle 1, 5, 8\rangle$	$\langle 1, 9, 6\rangle = f\sharp = g\flat$
$D = \langle 2, 6, 9\rangle$	$\langle 2, 10, 7\rangle = g$
$D\sharp = E\flat = \langle 3, 7, 10\rangle$	$\langle 3, 11, 8\rangle = g\sharp = a\flat$
$E = \langle 4, 8, 11\rangle$	$\langle 4, 0, 9\rangle = a$
$F = \langle 5, 9, 0\rangle$	$\langle 5, 1, 10\rangle = a\sharp = b\flat$
$F\sharp = G\flat = \langle 6, 10, 1\rangle$	$\langle 6, 2, 11\rangle = b$
$G = \langle 7, 11, 2\rangle$	$\langle 7, 3, 0\rangle = c$
$G\sharp = A\flat = \langle 8, 0, 3\rangle$	$\langle 8, 4, 1\rangle = c\sharp = d\flat$
$A = \langle 9, 1, 4\rangle$	$\langle 9, 5, 2\rangle = d$
$A\sharp = B\flat = \langle 10, 2, 5\rangle$	$\langle 10, 6, 3\rangle = d\sharp = e\flat$
$B = \langle 11, 3, 6\rangle$	$\langle 11, 7, 4\rangle = e$

Figure 3. The set S of consonant triads.

Рис. 5: Представление тоннеца на круге

Определение 3. Для каждой пары (x,y) элементов из $\mathbb{Z}_n$ можно определить интервал $I_{xy} = \{x, x+1, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}_n$, а также длину интервала $\mathfrak{L}(I_{x,y}) = |I_{x,y}| - 1 = y - x \in \mathbb{Z}_n$.

Соглашение. Если $\tau = \{v_0, \ldots, v_t\} \subseteq \mathbb{Z}_n$, мы предполагаем, что $v_j - v_i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ при $i < j$.

5.4 Определение обобщенного тоннеца

Итак, теперь можно определить обобщенный тоннец и исследовать его свойства.

Определение 4. Пусть $L = (l_1, \ldots, l_k), l_i \in \mathbb{N}_1, \sum\limits_{i=1}^{k} l_i = n$. Обобщенный тоннец $\mathrm{Tonn}^{n,k}(L) \subseteq 2^{[n]}$ — это $(k-1)$-мерный симплициальный комплекс, максимальные симплексы которого определяются следующим образом:

$$\Delta(x, \sigma) = \{x, x + l_{\sigma(1)}, \ldots, x + l_{\sigma(1)} + \ldots + l_{\sigma(k-1)}\},$$

где $x \in \mathbb{Z}_n, \sigma \in S_k$ — перестановка.

Соглашение. Если L задан явно, то $\mathrm{Tonn}^{n,k}(L) =: Tonn(l_1, \ldots, l_k)$

Итак, в пункте 2.1 было показано, что каждому набору из неупорядоченных трек чисел, задающих трезвучия, можно сопоставить симплициальынй комплекс Tonnetz = $Tonn(3,4,5)$. Рассмотрим $Tonn(3,4,5)$ подробнее. Мы можем заметить, что $Tonn(3,4,5)$ — триангуляция тора. Действительно, мы можем склеить соответствующие ребра на правой и левой границе. На верхней и нижней границе останутся также равные ребра. Соединим и их тоже. Получим триангуляцию тора. Этот результат верен и для более общих классов обобщенных тоннецев, что будет доказано в следующих пунктах.

5.5 Топологические свойства обобщенного тоннеца

Напоминание. Пусть $\{A_i \mid i \in I\}$ — семейство множеств, индексированное элементами из I. Дизъюнктным объединением этого семейства называется множество $\bigsqcup\limits_{i\in I} A_i := \bigcup\limits_{i\in I}\{(x,i) \mid x \in A_i\}$. В случае, когда $A_i = A\ \forall i$, $\sqcup A_i = A \times I$.

Утверждение 1. Пусть $pL := \{pl_1, \dots, pl_k\}$. $\mathrm{Tonn}^{pn,k}(pL) \subseteq 2^{[pn]}$ гомеоморфен дизъюнктному объединению p копий $\mathrm{Tonn}^{n,k}(L)$

Напоминание. Говорят, что топологическое пространство является n-многообразием, если любая точка имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству n-мерного евклидова пространства. Окружность, $\mathbb{R}^n$, диск, сфера, тор, лента Мебиуса являюстя многообразиями.

Утверждение 2. Если $L = (l_1, \dots, l_k)$ простой и редуцированный, то $\mathrm{Tonn}^{n,k}(L)$ является связным многообразием.

Напоминание. Пусть $\dim K = n-1$, f_j — число j-мерных симплексов в K. Набор $(f_0, \dots, f_{n-1})$ называется f-вектором K.

Утверждение 3. Пусть $L = (l_1, l_2, l_3)$ редуцированный и обычный. Тогда $\mathrm{Tonn}^{n,3}(L)$ — это триангуляция двумерного тора $T^2 = (S^1)^2$.

Доказательство. Уже известно, что $\mathrm{Tonn}^{n,3}(L)$ — это связное 2-многообразие. Пусть $l_1 < l_2 < l_3$. Тогда f-вектор комплекса $T = \mathrm{Tonn}^{n,3}(L)$ $f(T) = (n, 3n, 2n) \Rightarrow \chi(T) = 0$.

$\mathrm{Tonn}^{n,3}$ ориентируем. Действительно, множество всех треугольников в $\mathrm{Tonn}^{n,3}(L)$ разбивается на два класса мажорных и минорных триад. Первые ориентированы положительно, вторые отрицательно.

Итак, $\mathrm{Tonn}^{n,3}$ является связным ориентруемым 2-многообразием с нулевой эйлеровой характеристикой. Таким образом, это тор T^2.

Утверждение 4. Пусть L обычный и редуцированный, T = $\mathrm{Tonn}^{n,k}(L)$, $f(T) = (f_0, f_1, \dots, f_{k-1})$ — f-вектор обобщенного тоннеца T. Тогда $f_{m-1} = n \cdot \frac{P(k,m)}{m} = n \cdot \frac{m!}{m} \cdot S(k,m)$, где $S(k,m)$ — число

Стирлинга второго рода, $P(k,m)$ — число упорядоченных разбиений $I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_m = [k]$.

Утверждение 5. Если вектор L обычный и редуцированный, то эйлерова характеристика $\mathrm{Tonn}^{n,k}(L)$ равна нулю.

5.6 Фундаментальная группа обобщенного тоннеца

Напоминание. Гомотопность, будучи отношением эквивалентности, определяет разбиение множества $C(X,Y)$ всевозможных непрерывных отображений пространства X в пространство Y на классы эквивалентности. Они называются гомотопическими классами. Множество гомотопических классов отображений $X \to Y$ обозначается $\pi(X,Y)$. Для путей определено произведение, притом $[u][v] = [uv]$.

Определение (Виро). Пусть X — топологическое пространство, $x_0 \in X$. Петлей пространства X назовем путь в X, который начинается и заканчиваестя в точке x_0. Пусть $\Omega_1(X,x_0)$ — множество петель X в точке x_0, а через $\pi_1(X,x_0)$ обозначим множество гомотопических классов таких петель. В обоих множествах $\Omega_1(X,x_0)$ и $\pi_1(X,x_0)$ имеется операция умножения.

Замечание. Множество $\pi_1(X,x_0)$ любого топологического пространства X для любой точки $x_0 \in X$ гомотопических классов петель пространства X в точке x_0 с естественной операцией умножения гомотопических классов является группой. Группа $\pi_1(X,x_0)$ называется фундаментальной группой пространства X в точке x_0. Имеется бесконечная последовательность групп $\pi_n(X,x_0)$ с I^n вместо I, а также $\pi_0(X,x_0)$ — множество компонент линейной связности пространства X. В нем нет естественной операции умножения.

Определение. Если X — связный симплициальный комплекс, ломаная в X определяется как цепочка вершин, соединенных ребрами в X. Две ломаные называются эквивалентными, если одну можно получить из другой, последовательно заменяя ребро на два противоположных ребра в треугольнике из X. Ломаной-циклом называют ломаную, если она заканчивается и начинается в одной вершине. Группой ломаных $E(X,v)$ называется множество классов эквивалентностей ломаных-циклов, начинающихся и заканчивающихся в v, с естественной операцией умножения, аналогичной операции умножения в фундаментальной группе топологического пространства. Группа ломаных изоморфна $\pi_1(|X|,v)$, фундаментальной группе геометрической реализации X.

Рассмотрим группоид ломаных обобщенного тоннеца T. Каждая ломаная, соединяющая вершины $a = v_0$ и $b = v_m$ имеет вид $\alpha = X_1 \cdots X_m$, где $X_i = \overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ — ориентированная грань (1-симплекс) в тоннеце T. Вспомним, что $I_x = I_{u,v} \subseteq \mathbb{Z}_n$ — это (ориентированный) интервал, соответствующий $X = \vec{uv}$.

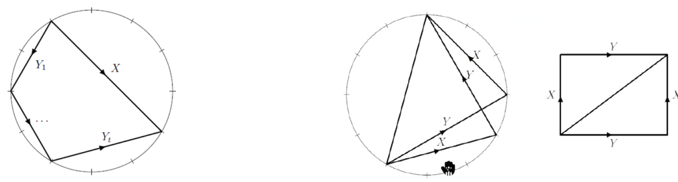


Рис. 6: Фундаментальная группа обобщенного тоннеца

Определение. Для $X = \vec{uv}$ L-тип X^L определяется как непустое подмножество $I \subseteq [k]$ такое, что $\mathfrak{L}(I_{u,v}) = \sum_{j \in I} l_j$. $X = \vec{uv}$ называется атомарным, если $v = u + l_i$ или $u = v + l_i$ для некоторого $i \in [k]$. Если X положительно ориентирован (то есть, $v = u + k_i$), то назовем X $\oplus$-атомарным, если же ориентирован отрицательно ($u = v + l_i$), то $\ominus$-атомарным. Если L-тип $\oplus$-атомарного 1-симплекса $X = \vec{uv}$ — это множество $\{i\}$, скажем, что X имеет тип i. Тогда $X^{-1} = \vec{vu}$ имеет тип $[k] \backslash \{i\}$.

Лемма 6. Каждый ориентированный 1-симплекс $X = \vec{uv}$ гомотопен произвдению $\oplus$-атомарных 1-симплексов Y_j: $X \simeq Y_1 \cdots Y_t$.

Утверждение 7. Если вектор L простой и редуцированный, то фундаментальная группа $\pi_1(\mathrm{Tonn}^{n,k}(L)$ абелева.

5.7 Гомологии обобщенного тоннеца

Мы уже знаем, что обобщенный тоннец T является связным комплексом с абелевой фундаментальной группой. Следовательно, его фундаментальная группа $\pi_1(T)$ изоморфна группе первых гомологий $H_1(T, \mathbb{Z}) := \mathbb{Z}_1 / B_1$, где $\mathbb{Z}_1$, B_1 — соответствующие группы циклов и границ.

В данный момент мы будем исследовать (ко)гомологии, поэтому выберем аддитивную нотацию. К примеру, $\oplus$-атомарное разложение $X =\simeq Y_1 Y_2 \cdots Y_t$ запишем как $X = \sum_{i=1}^{t} Y_i$.

Определение 8. Коцепи $\theta_{i,j} \in C^1 = Hom(C_1, \mathbb{Z})$ с $1 \leq i \neq j \leq k$ определены на $\oplus$-атомарных 1-симплексах следующим образом:

$$\theta_{i,j}(Y) = \begin{cases} +1, & Y \text{ имеет L-тип } i \\ -1, & Y \text{ имеет L-тип } j \\ 0, & L-\text{тип Y ни i, ни } j \end{cases}$$

Если $X = \vec{uv}$ — ориентированный 1-симплекс и $X \simeq Y_1 \cdots Y_t$ — его $\oplus$-атомарное разложение, то $\theta_{i,j}(X) = \sum_{m=1}^{t} \theta_{i,j}(Y_m)$. Коцепи — это коциклы, задающие элементы $H^1(T, \mathbb{Z})$. Эти коциклы называются элементарными классами $T = \mathrm{Tonn}^{n,k}(L)$.

Определение 9. Для каждого $i \in [n]$ пусть $\omega_i = \sum\limits_{j \neq i} \theta_{i,j}$. Такой коцикл называется каноническим коциклом на тоннеце. Пусть $c_i = \sum\limits_{x \in [n]} E_x^i$, где $E_x^i = \vec{xy}$ — такой $\oplus$-атомарный 1-симплекс L-типа i, что $y = x + l_i$ и x, y — его концы.

Будем писать $v_0 Y_1 \cdots Y_t$, есди необходимо уточнить, что начальной вершиной Y_1 (а, значит, и всего цикла) является v_0.. Если Y_j имеет L-тип i_j, пишем $X = E_{i_1} \cdots E_{i_t} = v_0 E_{i_1} \cdots E_{i_t}$, где E_j — шаг длиной l_j в положительном направлении.

Утверждение 10. Каждый гомологический цикл X имеет представление $X = E_1^{p_1} \cdots E_k^{p_k}$, p_i — неотрицательные целые числа такие, что $p_1 l_1 + \ldots + p_k l_k = p_0 n$ для некоторого $p_0 \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 11. Пусть $H_0^L = \{x \in \mathbb{R}^k \mid (x, L) = x_1 l_1 + \ldots + x_k l_k = 0\}$ — гиперплоскость, ортогональная L. Тогда существует изоморфизм $H_1(\mathrm{Tonn}^{m,k}(L); \mathbb{Z}) \to H_0^L \cap \mathbb{Z}^k$, где $\mathbb{Z}^k$ — решетка ранга $k-1$.

5.8 Накрытия

Напоминание. Пусть X, B — топологические пространства, $p : X \to B$ — непрерывное отображение. Если p сюръективно, притом у каждой точки из B найдется окрестность U такая, что ее прообраз $p^{-1}(U) = \cup_\alpha V_\alpha$: все V_α открыты и не пересекаются, а каждое из них посредством p гомеоморфно отображается на U. В этом случае $p : X \to B$ называется накрытием (пространства B), B — базой накрытия, X — накрывающим пространством. Универсальным накрывающим пространством называется односвязное накрывающее пространство. Универсальное накрытие — такое, что X односвязно.

Каждый конечный симплициальный комплекс K допускает универсальное накрытие $p : \tilde{K} \to K$. В классической конструкции вершинами $\tilde{K}$ являются гомотопические классы ломаных $\alpha = v_0 \alpha_x$ в K, соединяющих v_0 с (переменной) вершиной $x \in K$. По определению, симплекс в $\tilde{K}$ — это набор ломаных $\{\alpha_{i_{x_i}}\}_{i=0}^d$ таких, что концы образуют симплекс $\tau = \{x_0, \ldots, x_d\}$ в K, а $\forall i \neq j$ ломаные $a_{i_{x_i}}, a_{j_{x_j}}$ являются соседями в смысле нижеприведенного определения.

Определение 12. Две ломаные α_x, β_y называются соседями, если $\{x, y\}$ — ребро $\in K$ и ломаная $\alpha_x e \beta^{=1} y$ гомотопически эквивалентна тривиальному циклу, начинающемуся в точке v_0.

5.9 Отображение Абеля – Якоби

Итак, каждая ломаная $\alpha = v_0\alpha_x$, начинающаяся в v_0 и заканчивающаяся в x гомотопически эквивалентна ломаной вида $\alpha = v_0 E_1^{p_1} E_2^{p_2} \cdots E_k^{p_k} x, p_i \geq 0 \; \forall i \in [k]$. Канонические коциклы ω_i вместе определяют вектор-значный 1-коцикл $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k)$ на обобщенном тоннеце $Tonn^{n,k}(L)$, который принимает значения в $H_0 \subseteq \mathbb{R}^k$, а, более точно, в решетке $\Lambda = \{x \in \mathbb{Z}^k \mid x_1 + \ldots + x_k = 0, \forall x_i$ лежат в одном классе конгруэнтности $(\mathrm{mod}\, k)\}$. Это решетка типа $\mathbb{A}_{k-1}^*$.

Отображение ω индуцирует мономорфизм $\hat{\omega} : H_1(Tonn^{n,k}(L); \mathbb{Z}) \to \Lambda$. Тогда мы можем определить отображение $\Omega : \tilde{T} \to D_\Lambda$, где D_Λ — триангуляция Делоне $(k-1)$-мерного аффинного пространства $H_0 \subseteq \mathbb{Z}^k$, сопоставленного решетке Λ. То есть, если $\tilde{\tau} = \{a_{i_{x_i}}\}_{i=0}^d$ — симплекс в $\tilde{T}$, то $\Omega(\tilde{\tau}) = \{\omega(\alpha_{0_{x_0}}, \ldots, \omega(\alpha_{d_{x_d}}\}$. Притом Ω является изоморфизмом симплициальных комплексов.

5.10 Обобщенный тоннец как триангуляция тора

Рассмотренная в предыдущем пункте теория позволяет доказать, что любой обобщенный тоннец является триангуляцией тора. Сделаем это. Для этого докажем, что универсальное накрытие $\tilde{T}$ обобщенного тоннеца $T = Tonn^{n,k}(L)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^k \Rightarrow T$ гомеоморфно $(k-1)$-мерному тору $T^{k-1} \simeq \mathbb{R}^{k-1}/\Lambda$. Для этого мы построим дискретное отображение Абеля – Якоби $\Omega : \tilde{T} \to D_\Lambda$, где $H_0 = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_1 + \ldots + x_k = 0\}, \Lambda = H_0 \cap \mathbb{Z}^k$ — решетка, а D_Λ — соответствующая триангуляция Делоне.

Согласно пункту 3.5, изоморфизм очевидно является Γ-эквивалентным, где $\Gamma = H_1(Tonn^{n,k}(L); \mathbb{Z})$ отображается на D_Λ с помощью мономорфизма $\hat{\omega}$. Отсюда незамедлительно следует, что $Tonn^{n,k}(L)$ изоморфен симплициальному комплексу D_Λ/Λ_L, где $\Lambda_L := \hat{\omega} \subseteq \Lambda$ — абелева группа ранга $k-1$. Это и требовалось доказать

6 Описание полученных результатов

6.1 Упражнения

Упражнение 1. Фиксируем число k. Тогда $n = k+2 \Rightarrow \mathbb{Z}_n = \{0,\dots,k+1\}$. Пусть $\sigma(3) = 3$. Тогда $\Delta(0,\sigma) = \{0,1,2\}$. Тогда $\Delta(x,\sigma) = \{x, x+1, x+2\}$. Пусть теперь $\sigma(3) \neq 3$. Тогда $\Delta(0,\sigma) = \{0,k,k+1\}$, $\Delta(x,\sigma) = \{x, x+k, x+k+1\}$. Таким образом, расположим на круге $k+2$ точки от 0-й до $(k+1)$-й. Нарисуем треугольник на вершинах 0, 1, 2 $\{0,1,2\}$ и станем разворачивать его на $\frac{360}{k+2} \cdot m$ градусов, $m = 1,2,\dots,k+1$. Получатся треугольники $\{1,2,3\},\dots,\{k-1,k,k+1\}$. Случай $\sigma(3) = 3$ рассмотрен. Рассмотрим второй. Для этого соединим k-ю, $(k+1)$-ю и нулевую вершины. Они, также как и последние, идут подряд: предпоследняя, последняя, нулевая. Точно так же будем поворачивать на все те же углы этот треугольник $k+1$ раз. Получим снова $\{k,k+1,0\},\{k+1,0,1\},\{0,1,2\},\dots$ Получившийся набор из $(k+2)$ треугольников (второй случай не добавил еще треугольников) и всех их подмножеств и составят топологию $Tonn(1,1,k)$ — других открытых множеств нет.

Упражнение 2. Решение представлено на рисунке 7.

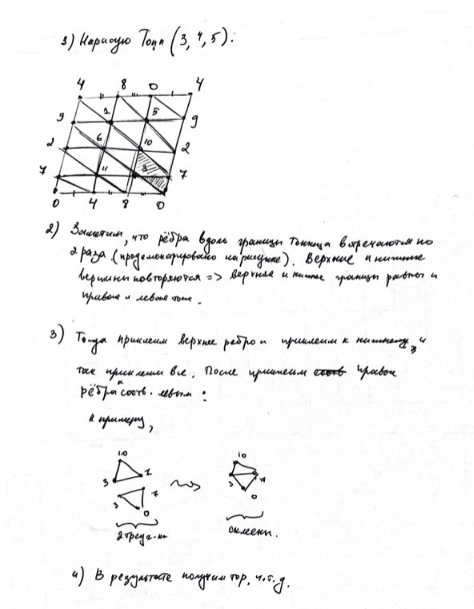


Рис. 7: Решение упр. 2

Упражнение 3.

Пусть $L = (1,\dots,1,2)$ — $(k-1)$ единица и одна двойка. Тогда $n = k+1 \Rightarrow \mathbb{Z}_n = \{0,\dots,k\}$. Пусть $\sigma(k) = k$. Тогда $\Delta(0,\sigma) = \{0, 0+1, 0+2, \dots, 0+k-1\} \Rightarrow \Delta(x,\sigma) = \{x, x+1, x+2, \dots, x+k-1\}$

— ситуация, аналогичная первому упражнению. Рисуем $k+1$ точку от 0 до k. Получаем правильный k-угольник на вершинах от 0 до $k-1$ и поворачиваем его на угол $\frac{360}{k+1} \cdot n, n = 1, \ldots, k$. Получаем $k+1$ правильный k-угольник.

Теперь пусть $\sigma(k) = j \neq k, \sigma(j) = k$. Тогда $\Delta(0, \sigma) = \{0, 1, 2, \ldots, j-1, j+1, j+2, j+3, \ldots, k\}$ — для каждого $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ получается еще один правильынй k-угольник, у которого удалена j-я вершина, что делает его неправильным $k-1$-угольником. После этого мы снова поворачиваем его на все возможные углы и получаем $\Delta(1, \sigma), \ldots, \Delta(k, \sigma)$. Итак, топология описана.

Упражнение 5. Решение расположено по ссылке:

`https://github.com/aefrt/project-topology/blob/main/Untitled.ipynb`

Упражнение 6. Объяснение приведено в пункте 4 – поскольку можно построить указанное отображение.

6.2 Интерпретация и анализ результатов

Как видно из решения упражнения 6, музыкальные аккорды можно описать с помощью симплициальных комплексов, гомологии которых отражают музыкальные свойства этих аккордов. Это позволяет применять топологические методы для исследования задач, связанных с музыкальной теорией. Также в предыдущих упражнениях был приведен анализ различных симплициальных комплексов, соответствующих другим аккордам, и теми же методами можно исследовать вообще любые комплексы. Таким образом, в работе было проанализировано применение топологии к музыкальной теории.

7 Заключение

Итак, в рамках данной работы была изучена статья о музыкальных симплициальных комплексах, а также два учебника по топологии, были рассмотрены различные примеры таких комплексов и изучены их свойства, вычислены гомологии таких комплексов с помощью библиотек языка Python. Был сделан вывод о том, что музыкальные свойства различных аккордов можно описать топологически.

8 Список использованных источников

1. Filip D. Jevtić, Generalized Tonnetz and discrete Abel-Jacobi map [Электронный ресурс] / Filip D. Jevtić, Rade T. Živaljević. — Электрон. текст. дан. — Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/2002.09184.pdf, свободный. (дата обращения 02.09.21)

2. Айзенберг, А. А. Методичка по симплициальным комплексам и гомологиям [Электронный ресурс] / А. А. Айзенберг. — Электрон. текст. дан. — Режим доступа: Google Drive https://drive.google.com/fil QmLna0XSH-FZPopj6cp5pmCL/view?usp=drive_open, свободный. (дата обращения: 08.02.21)

3. Элементарная топология / О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов. — 2-е изд., исправл. — М.: МЦНМО, 2010. — 358 + x с.

9 Рабочий план-график

01.07. Инструктаж по ознакомлению с требованиями охраны труда, техники безопасности, пожарной безопасности, а также правилами внутреннего трудового распорядка.

02.07–05.07. Теоретическое описание обобщенных тоннетцов для троек точек на окружности. Подготовка иллюстративных примеров.

06.07–09.07. Изучение статей Йевтича-Живалевича и Кюннеля-Лассмана про обобщенные тоннетцы.

10.07–13.07. Вычисление гомологий (чисел Бетти от 0-го до 3-го) для некоторых тоннетцов из 4-х точек на окружности.

14.07. Подготовка краткого отчета в TeX'е с описанием простых примеров, формулировками известных результатов, и результатами вычислительных экспериментов.