

Masterarbeit

# KOMPLEXITÄT VON SUCHPROBLEMEN UND BEWEISSYSTEMEN

ANTON EHREMANNTAUT



6. Februar 2024

Betreuer: Prof. Dr. Christian Glaßer

Julius-Maximilians-Universität Würzburg  
Lehrstuhl für Informatik I  
Algorithmen und Komplexität



# Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	11
2.1	Notation	11
2.2	Maschinenmodell	13
2.3	Komplexitätsklassen	15
2.4	Orakel und Relativierungen	18
2.5	Beweissysteme	19
3	Zur Konzeptualisierung und Ordnung von Suchproblemen	25
3.1	Definition von Suchproblemen	25
3.2	Suchprobleme vs. Entscheidungsprobleme	30
3.3	Levin-Reduzierbarkeit	35
4	Suchprobleme und die Hypothese Q im Kontext des Pudlák- schen Programms	45
4.1	Karp-Vollständigkeit vs. Levin-Vollständigkeit	48
4.2	Hypothese Q und Suchprobleme	53
4.3	Bekannte Implikationen und Orakel, offene Trennungen	61
5	Orakel mit DisjNP, UP und Q	69
5.1	Relativierende Orakelkonstruktionen	70
5.2	Notation zur Orakelkonstruktion	71
5.3	Definition	73
5.4	Korrektheit	78
6	Fazit	89



# 1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit algorithmischen Suchproblemen. Hierbei ist eine Eingabeinstanz gegeben, für welche eine entsprechende Lösung gesucht wird. Beispiele für solche Suchprobleme sind:

1. Gegeben eine positive Zahl  $n$ , berechne die Primfaktorzerlegung von  $n$ .
2. Sei  $G$  eine kontextfreie Grammatik. Gegeben ein Wort  $w$ , berechne einen Ableitungsbaum von  $w$  über  $G$ , oder gebe sonst „ $w$  nicht von  $G$  generiert“ aus.
3. Gegeben ein Graph, berechne das größte Matching in diesem Graphen.
4. Gegeben ein Graph, berechne eine Knotenfärbung mit drei Farben, oder gebe sonst „nicht färbbar mit drei Farben“ aus.
5. Gegeben ein Graph, berechne eine größte Clique in diesem Graphen.
6. Gegeben ein Graph und eine positive Zahl  $k$ , berechne eine Clique mit  $\geq k$  Knoten in diesem Graphen, oder gebe sonst „keine Clique mit  $k$  Knoten möglich“ aus.
7. Gegeben eine aussagenlogische Formel  $\varphi$ , bestimme eine erfüllende Belegung für  $\varphi$ , oder gebe sonst „unerfüllbar“ aus.
8. Gegeben eine aussagenlogische Formel  $\varphi$ , bestimme einen Beweis (unter einem geeigneten Beweissystem, z.B. Resolution) für die Gültigkeit von  $\varphi$ , oder gebe sonst eine Belegung an, welche  $\varphi$  nicht erfüllt.
9. Gegeben einen prädikatenlogischen Satz  $\varphi$  in der Sprache der Arithmetik<sup>1</sup>, bestimme einen Beweis (unter einem geeigneten vollständigem Kalkül, z.B. Sequenzkalkül) für die Gültigkeit von  $\varphi$  ( $\varphi$  ist wahr in jeder Struktur), oder gebe sonst „ $\varphi$  ungültig“ aus.

1. Gemeint ist die prädikatenlogische Sprache mit einer Konstante 0, einer unären Nachfolgerfunktion, je binären Funktionen  $+$ ,  $\times$ , und binärer Relation  $\leq$ .

Innerhalb des Forschungsbereichs der theoretischen Informatik beschäftigt sich die Berechenbarkeitstheorie mit der Frage, welche dieser Aufgaben überhaupt algorithmisch berechenbar sind. Das Beispiel (9) ist z.B. überhaupt nicht berechenbar, in dem Sinn dass kein Algorithmus existiert, welcher für jeden Satz  $\varphi$  nach endlicher Zeit mit der korrekten Lösung antwortet. Alle anderen Probleme (1)–(8) sind im Prinzip algorithmisch lösbar, indem alle möglichen Lösungsmöglichkeiten durchsucht werden.

Der Unterbereich der algorithmischen Komplexitätstheorie ist weniger an den prinzipiellen Grenzen von Berechenbarkeit interessiert, sondern fokussiert sich unter den berechenbaren Aufgaben damit, welche Ressourcen (Rechenzeit, Speicherplatz, zugeführte Zufälligkeit) hierfür notwendig sind. Die Komplexitätstheorie interessiert sich also dafür, welche dieser Aufgaben effizient durchgeführt werden können, und somit als umsetzbar für Computer angesehen werden.

In der Disziplin hat sich für „Effizienz“ bzw. „Umsetzbarkeit“ insbesondere folgender Konsens durchgesetzt: ein Algorithmus ist „effizient“ wenn die Laufzeit des Algorithmus polynomiell mit der Eingabegröße wächst. Ein Algorithmus, bspw. für das Suchproblem (3), muss also der Art sein, dass eine Konstante  $c > 0$  existiert, sodass bei der Verarbeitung eines doppelt so großen Graphen dieser Algorithmus nur  $c$ -mal so lang rechnet.

Unter den oben genannten Suchproblemen ist ein solcher Algorithmus mit polynomieller Laufzeit nur für Probleme (2) und (3) bekannt. Für die Suchprobleme (1), (4), (5), (6), (7), (8) lässt sich aber ein trivialer Suchalgorithmus mit exponentieller Laufzeit angeben. Für Suchproblem (4) bedeutet das z.B., alle möglichen exponentiell vielen Zuweisungen von Farben auszuprobieren.

In der Komplexitätstheorie wurden solche Suchprobleme wie (1)–(8) sehr früh in den Hintergrund verschoben, und stattdessen wurden die korrespondierenden *Entscheidungsprobleme* in den Blick genommen. Anstelle nach einer Lösung zu suchen, wird sich darauf beschränkt zu entscheiden, ob eine Lösung existiert. Der Algorithmus muss also nur die Antwort „ja“ oder „nein“ ausgeben. Zugehörige Entscheidungsprobleme zu den oben genannten Suchproblemen wären:

- 2'. Sei  $G$  eine kontextfreie Grammatik. Gegeben ein Wort  $w$ , entscheide ob  $w$  aus  $G$  generiert werden kann.
- 4'. Gegeben ein Graph, entscheide ob dieser Graph mit drei Farben färbbar ist.
- 6'. Gegeben ein Graph und eine positive Zahl  $k$ , entscheide ob eine Clique mit  $\geq k$  Knoten in diesem Graphen existiert.
- 7'. Gegeben eine aussagenlogische Formel  $\varphi$ , entscheide ob  $\varphi$  erfüllbar ist.
- 8'. Gegeben eine aussagenlogische Formel  $\varphi$ , entscheide ob  $\varphi$  gültig ist.
- 9'. Gegeben einen prädikatenlogischen Satz  $\varphi$  in der Sprache der Arithmetik, entscheide ob  $\varphi$  gültig ist.
- 10'. Gegeben eine Turing-Maschine  $M$  und eine Eingabe  $x$ , entscheide ob  $M$  auf Eingabe  $x$  nach endlich vielen Rechenschritten terminiert.

Beachte dass zu Suchproblemen (1), (3) und (5) keine unmittelbare Variante als Entscheidungsproblem existiert: es existiert immer eine Primfaktorzerlegung von  $n$ , analog existiert immer ein größtes Matching bzw. eine größte Clique in einem Graphen. Zusätzlich führen wir auch noch das Entscheidungsproblem 10' ein, für das analog keine sinnvolle Variante als Suchproblem angegeben werden kann.

Auf dem ersten Blick erscheint dieser Schwerpunkt unnatürlich. In der Praxis sind wir interessiert, effizient Lösungen zu finden, um z.B. eine Karte einzufärben (Suchproblem 4), oder um einen Sourcecode zu parsen (Suchproblem 2). Die Feststellung „Karte ist dreifärbbar“, „Sourcecode ist wohlgeformt“ der Entscheidungsalgorithmen erscheint auf dem ersten Blick wenig hilfreich.

Für diese Fokussierung auf Entscheidungsprobleme gibt es durchaus Gründe. Zum einen ist klar, dass das Suchproblem nicht einfacher sein kann, als das zugehörige Entscheidungsproblem. Die Unberechenbarkeit eines Entscheidungsproblems schließt also auch die Berechenbarkeit des Suchproblems aus. Das entspricht genau der historischen Forschungsentwicklung zum „*Hilbertschen Entscheidungsproblem*“ (9'), worauf Turing das *Halteproblem* (10') reduziert hat. Mit der Unentscheidbarkeit des Halteproblems folgt die Unentscheidbarkeit des Entscheidungsproblems (9'), und damit der Unentscheidbarkeit des entsprechenden Suchproblems (9). Das Argument lässt sich auch auf die potentiell effizient lösbaren Entscheidungsprobleme übertragen. Die Komplexitätstheorie gibt Indizien, dass die Entscheidungsprobleme (4'), (6')–(8') wahrscheinlich nicht in Polynomialzeit lösbar sind, womit unmittelbar folgt, dass auch die Suchprobleme (4)–(8) nicht in Polynomialzeit lösbar sind.

Für die Fokussierung auf Entscheidungsprobleme innerhalb der Komplexitätstheorie gibt es zweitens auch fachgeschichtliche Gründe: zunächst war die Trennung *Entscheidungsproblem* vs. *Suchproblem* innerhalb der Berechenbarkeitstheorie meist nicht strikt notwendig, da „Berechenbarkeit“ zwischen den beiden Varianten meist äquivalent war. So ist die Berechenbarkeit des Hilbertschen Entscheidungsproblems (9') tatsächlich äquivalent zur Berechenbarkeit des Suchproblems (9). (Falls der Entscheidungsalgorithmus „ $\varphi$  ist gültig“ ausgibt, dann enumeriere so lange alle Sequenzbeweise, bis einer  $\varphi$  beweist. Das terminiert nach Vollständigkeit des Sequenzkalküls.) Dann stand die Komplexitätstheorie der späten 1950er Jahre nah an der Automatentheorie und der Theorie der formalen Sprachen, als diese einen ersten Vorschlag zur Unterteilung der berechenbaren Aufgaben in „einfach“ und „schwer“ machten (vgl. Koucký, 2023). Eine zentrale Unterteilung in „Schwierigkeit“ bzw. Komplexität war z.B. die Hierarchie der formalen Sprachen von Chomsky (die Regulären als sehr einfach, die Kontextfreien als etwas komplexer, die Kontextsensitiven als noch komplexer). Die einzig relevanten Suchprobleme – Parsing wie in (2) – haben sich dann aber auch relativ schnell geklärt (z.B. CYK-Parsing für die Kontextfreien), womit die zentralen Untersuchungsfragen wohl eher waren, welche Sprachen durch welche Grammatiken (nicht) generiert werden können, bzw. welche Automaten welche Sprachen (nicht) erkennen können. Dafür ist die Beschränkung auf die Entscheidungsvariante („Generiert die Grammatik  $G$  genau die Sprache  $L$ ? Erkennt der Kellerautomat  $A$  genau die Sprache  $L$ ?“) ausreichend zur Etablierung unterer Schranken, und ist insbesondere auch dienlich im pragmatischen Sinn. Stellvertretend sei hier Kozen zitiert: „We do this for mathematical simplicity and because the behavior we want to study is already present at this level“ (1997, S. 7).

Dieser Pragmatismus setzt sich in der ressourcenfokussierten Komplexitätstheorie fort, die seit den 1960er Jahren den Ressourcenverbrauch von Algorithmen als zentraler Indikator für „Schwierigkeit“ versteht. Das betrifft insbesondere die Klassen  $P$  und  $NP$ ; hierzu lassen sich die Aufgaben (1)–(8) und (2')–(8') zählen. Wieder reicht es in den meisten Fällen aus, sich auf die Entscheidungsprobleme zu beschränken. Diese Fokussierung ist durchaus fundiert: Einerseits, weil die zentralen algorithmischen Herausforderungen schon bei der Entscheidungsvariante auftreten („behavior we want to study is already present at this level“). So kann zum Beispiel die  $P$ - $NP$ -Frage äquivalent als Frage über Entscheidungsprobleme auch als Frage über Suchprobleme formuliert werden. Andererseits lässt sich zeigen, dass für viele relevante Aufgaben das Suchproblem nicht schwerer ist als das Entscheidungsproblem (unter polynomieller Unschärfe). Dieses Argument wird üblicherweise als *search reduces to decision* formuliert: gegeben ein effizienter Algorithmus, welcher das Entscheidungsproblem löst, kann auch ein effizienter Algorithmus angegeben werden, welcher das Suchproblem löst. Mit diesem Argument kann z.B. die Aussage „Suchproblem (7) ist effizient lösbar“ äquivalent zu „Entscheidungsproblem (7') effizient lösbar“ gesetzt werden. Die Konzentration auf Entscheidungsprobleme kommt dann unter anderem auch mit dem Vorteil, dass viele theoretische Konzepte einfacher zu fassen sind und kompakter zu formulieren sind („mathematical simplicity“). Wir können uns zum Beispiel auf (laufzeitbeschränkte) Algorithmen ohne Ausgabe konzentrieren, die Eingaben nur akzeptieren und ablehnen müssen.

#### NP-Suchprobleme als Forschungsgegenstand

Diese Arbeit setzt genau an dieser Festhaltung an Entscheidungsproblemen an. Die zentrale Motivation dieser Arbeit besteht darin, diese identifizierte Leerstelle auf Seite der

Suchprobleme zu adressieren. Vor diesem Hintergrund wird sich diese Arbeit in vier Forschungsdesiderata den *NP-Suchproblemen* im Gegensatz zu den sonst üblichen NP-Entscheidungsproblemen nähern. Diese können als die Suchprobleme verstanden werden, die zu NP-Sprachen korrespondieren. Als Suchprobleme lässt sich eine einfache Charakterisierung formulieren: NP-Suchprobleme sind solche Suchprobleme, bei der

- die Lösung – falls sie existieren sollte – höchstens polynomiell länger als die Eingabe ist, und
- effizient (d.h. in Polynomialzeit) verifiziert werden kann, ob ein fraglicher Lösungskandidat tatsächlich eine korrekte Lösung für eine Eingabe darstellt.

Das entspricht der sonst auch üblichen „Zertifikats-Definition“ der Komplexitätsklasse NP. Insbesondere induziert jede nichtdeterministische Polynomialzeit-Turing-Maschine ein NP-Suchproblem („gegeben Eingabe, finde einen akzeptierenden Rechenweg, oder gebe ‚lehnt ab‘ aus“) und umgekehrt.

Viele der anfangs genannten Suchprobleme bilden NP-Suchprobleme. Hierbei werden die „negativen Antworten“ als „es existiert keine Lösung“ verstanden. Dann ist beispielsweise das Suchproblem (4) ein NP-Suchproblem: die Färbung (Zuordnung von Knoten zu einer der drei Farben) ist höchstens so lang wie der Eingabegraph, und zu einer beliebigen Färbung (valide oder nicht) kann in Polynomialzeit überprüft werden, ob diese Färbung tatsächlich jeden zwei adjazenten Knoten eine unterschiedliche Farbe zugewiesen wird. Die Suchprobleme (1)–(4), (6), (7) sind ebenso NP-Suchprobleme.

Das Suchproblem (5) ist dagegen mutmaßlich kein NP-Suchproblem, denn es ist nicht bekannt wie verifiziert werden kann, dass eine Teilmenge  $C$  an Knoten in einem Graph tatsächlich eine *größte* Clique ist.<sup>2</sup> Das Suchproblem (8) ist auch mutmaßlich kein NP-Suchproblem, denn kein Beweissystem ist bekannt, dass Gültigkeit mit polynomiell langen Beweisen ausdrücken kann. Zumindest für das Resolutionskalkül existieren spezielle gültige Formeln  $\varphi$  mit exponentiell langen Resolutionsbeweisen.

Die Einschränkung auf NP-Suchprobleme ist im Wesentlichen eine Konsequenz der hohen Wichtigkeit und Relevanz der Komplexitätsklasse NP, sowohl theoretisch innerhalb der Komplexitätstheorie („Wie viel hilft Nichtdeterminismus den Polynomialzeit-Berechnungen?“), als auch in der Praxis, da sehr viele interessante und in der industriellen Anwendung aufkommenden Berechnungsaufgaben als NP-Suchprobleme formuliert werden können. Hinzu kommt die Beobachtung, dass jene Suchprobleme, welche nicht den Bedingungen von NP-Suchproblemen genügen, so gut wie definitiv zu komplex und schwer sind, um zu erwarten dass sie überhaupt effizient gelöst werden können. Für die NP-Suchprobleme (und insbesondere die nicht-vollständigen NP-Suchprobleme) ist es zumindest noch plausibel, effiziente Suchalgorithmen entwickeln zu können.

Wie aber bereits oben angesprochen, werden üblicherweise in der Literatur nicht die NP-Suchprobleme untersucht, sondern meist nur die entsprechenden NP-Entscheidungsprobleme. Das geschieht mit der Begründung, dass sich die meisten Suchprobleme auf das jeweilige Entscheidungsproblem reduzieren lassen können (*search reduces to decision*).

Als erstes Forschungsdesiderat möchte diese Arbeit genau jene Beziehung zwischen NP-Suchproblemen und NP-Entscheidungsproblemen näher untersuchen. Insbesondere wollen wir das *search-reduces-to-decision*-Argument präzise einordnen und auch zeigen, dass dieses Argument nicht immer zutrifft, also Situationen in denen eine reine Betrachtung der Entscheidungsvarianten eigentlich nicht ausreicht.

2. Suchproblem (3) fragt auch nach einer optimalen Lösung, ist aber ein pathologisches NP-Suchproblem, denn ein größtes Matching kann ohnehin in Polynomialzeit berechnet werden. Die „Verifikation“ besteht also darin zu überprüfen, ob die fragliche Lösung genau so viele Pärchen bildet wie die ad hoc berechnete optimale Lösung.



Tatsächlich gilt das für viele interessante Suchprobleme. Das sind zum Beispiel schon jene NP-Suchprobleme, die immer eine Lösung haben; hier kann zunächst nicht unmittelbar ein entsprechendes Entscheidungsproblem formuliert werden. Das haben wir bereits bei den Suchproblemen (1) und (3) gesehen. Diese *totalen* NP-Suchprobleme sind insofern interessant, da viele effizient lösbar sind (z.B. Suchproblem 3), andererseits für viele die effiziente Lösbarkeit noch offen ist. Gleichzeitig wird erwartet, dass die totalen NP-Suchprobleme nicht NP-hart sind; damit ist die effiziente Lösbarkeit zumindest dieser Suchprobleme durchaus in Reichweite. Das trifft zum Beispiel auf das Suchproblem (1) der Faktorisierung zu. Dieses totale NP-Suchproblem ist momentan nicht effizient lösbar, aber gleichzeitig auch nicht NP-hart. Die Untersuchung solcher totalen NP-Suchprobleme geht im Wesentlichen auf Johnson, Papadimitriou und Yannakakis (1988) und Megiddo und Papadimitriou (1991) zurück.

Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003) können die Vermutung „alle totalen NP-Suchprobleme sind effizient lösbar“ in verschiedenen äquivalenten Formulierungen charakterisieren, so zum Beispiel als Invertierbarkeit von surjektiven Funktionen, oder als das effiziente Lösen des Suchproblems (7) unter Angabe einer nichtdeterministischen Turing-Maschine, welche die Menge SAT der erfüllbaren aussagenlogischen Formeln erkennt. Fenner, Fortnow, Naik und Rogers fassen diese jeweils äquivalenten Charakterisierungen unter der Hypothese Q zusammen. Für diese Arbeit wird hier folgende Formulierung von Q angewendet, die über nichtdeterministische Turing-Maschinen spricht, welche jede Eingabe akzeptieren:

**Vermutung 1.1** (Q, Fenner, Fortnow, Naik und Rogers, 2003). *Für jede nichtdeterministische Turing-Maschine  $N$  mit polynomieller Laufzeitbeschränkung, und  $L(N) = \Sigma^*$  existiert eine Funktion  $g \in \text{FP}$  sodass für alle  $x$  das Bild  $g(x)$  eine akzeptierender Rechenweg von  $N(x)$  ist.*

In dieser Formulierung wird auch die Schwierigkeit dieser Vermutung klar: wir bekommen zwar versprochen, dass  $N(x)$  akzeptiert, wir wissen aber nicht, *welcher* nichtdeterministische Rechenweg  $x$  akzeptiert, und nicht wie wir einen solchen Rechenweg effizient berechnen könnten.

Obwohl Q zunächst nur über totale Suchprobleme spricht, hat die Hypothese Q große Nähe und Verwandtschaft zu analogen Aussagen, die NP-Suchprobleme einerseits und die sogenannten Beweissysteme andererseits betreffen. Als zweites Desiderat will daher diese Arbeit an den Charakterisierungen von Q weiter arbeiten, sowie die Beziehung zwischen Q und NP-Suchproblemen, den Beweissystemen (nach Cook und Reckhow, 1979) bzw. dem *Pudlák'schen Programm* (2017) näher untersuchen.

#### Beweissysteme und das Pudlák'sche Programm

NP-Suchprobleme wie oben eingeführt korrespondieren auf natürliche Weise zu „Beweissystemen“ im intuitiven Sinn. Wir gehen das beim Suchproblem (7) durch: sollte eine Formel  $\varphi$  erfüllbar sein, dann existiert ein „Beweis“ für die Erfüllbarkeit von  $\varphi$ , nämlich eben eine Belegung  $w$  welche  $\varphi$  erfüllt. Damit ist dieses Beweissystem gewissermaßen vollständig. Dieser Beweis ist nicht nur kurz, sondern kann effizient (gemeint ist: mit einem Algorithmus in Polynomialzeit) überprüft werden, ob der Beweis  $w$  tatsächlich zu  $\varphi$  „passt“, also ob  $w$  die Formel  $\varphi$  erfüllt. Damit ist dieses Beweissystem auch korrekt.

Jedes NP-Suchproblem nach der obigen Definition induziert dann ein solches korrektes und vollständiges Beweissystem. Diese Beweissysteme sind sogar insofern besonders

stark, als da zu jeder korrekten Instanz ein Beweis existiert, der sogar nur polynomiell länger ist. Insbesondere induziert ein solches Beweissystem mit polynomiell kurzen Beweisen ein NP-Suchproblem (gegeben Instanz, suche einen korrekten Beweis für die Instanz) und umgekehrt.

Das bei Suchproblem (8) angedeutete Beweissystem der Resolution für die Gültigkeit aussagenlogischer Formeln ist ein Beweissystem für die Tautologien, aber wie bereits angesprochen keins mit *polynomiell langen* Beweisen. Zumindest für die Resolution bildet damit (8) kein NP-Suchproblem. Existiert ein polynomiell beschränktes Beweissystem für die aussagenlogischen Tautologien?

Dieser Frage gingen Cook und Reckhow (1979) nach, und erarbeiten hierfür zunächst eine knappe und elegante Definition von aussagenlogischen Beweissystemen: *Eine Polynomialzeit-berechenbare Funktion  $f$  ist ein aussagenlogisches Beweissystem, wenn der Bildbereich von  $f$  mit der Menge TAUT der Tautologien übereinstimmt.* Wenn  $f(w) = \varphi$ , dann wissen wir dass  $\varphi$  eine Tautologie ist, und dieser Fakt wird insbesondere über den Beweis  $w$  im Beweissystem  $f$  erfasst. Diese Definition erfasst damit genau die oben genannten intuitiven Eigenschaften:

- Die Relation „ $w$  ist ein Beweis für  $\varphi$ “ ist in Polynomialzeit entscheidbar.
- Das Beweissystem ist korrekt:  $f$  beweist nur Tautologien.
- Das Beweissystem ist vollständig: zu jeder Tautologie  $\varphi$  existiert ein Beweis  $w$ , d.h.  $f(w) = \varphi$ .

Für das Resolutionskalkül könnte ein solches aussagenlogisches Beweissystem in dieser Form so aufgeschrieben werden:

$$h(\varphi, w) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \varphi & w \text{ ist Resolutionsbeweis für die Gültigkeit von } \varphi, \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hat ein aussagenlogisches Beweissystem  $f$  für jede Tautologie  $\varphi$  einen höchstens polynomiell längeren Beweis  $w$  für  $\varphi$ , sagen wir dass  $f$  *kurze Beweise hat*. Das aussagenlogische Beweissystem  $h$  hat *keine* kurzen Beweise. Die obere Frage, ob (8) ein NP-Suchproblem ist, lässt sich äquivalent charakterisieren mit der Frage, ob ein aussagenlogisches Beweissystem mit kurzen Beweisen existiert. Tatsächlich beobachten Cook und Reckhow sogar, dass diese Existenz äquivalent zur Aussage  $\text{NP} = \text{coNP}$  ist.

Diese Einsicht motivierte das sogenannte *Cook-Reckhow-Programm* (Buss, 1996): Hierbei nähern wir uns der Frage  $\text{NP}$  vs.  $\text{coNP}$  durch Untersuchen immer stärkere aussagenlogische Beweissysteme. Um  $\text{NP} \neq \text{coNP}$  zu erreichen, könnten wir entweder zeigen dass kein (längen-)optimales aussagenlogisches Beweissystem (d.h. ein Beweissystem welches höchstens polynomiell längere Beweise als jedes andere Beweissystem hat) existiert, oder ein optimales aussagenlogisches Beweissystem angeben, sodass dieses keine kurzen Beweise hat. Aufbauend auf dieser Verbindung wurden zunehmend auch untere und obere Schranken von speziellen aussagenlogischen Beweissystemen untersucht, sowie auch Beweissysteme allgemein für beliebige Mengen (und nicht nur Tautologien) betrachtet.

Die Existenz von optimalen Beweissystemen bzw. P-optimalen (d.h. optimal in dem Sinn dass sogar die Beweise zwischen den Beweissystemen effizient übersetzt werden können) Beweissystemen wurde von Krajíček und Pudlák (1989) in Beziehung gesetzt mit endlicher Konsistenz von mathematischen Theorien. Darauf aufbauend zeigt Pudlák (2013, Kap. 6, 2017) ferner Verbindungen zwischen P-optimalen bzw. optimalen Beweis-

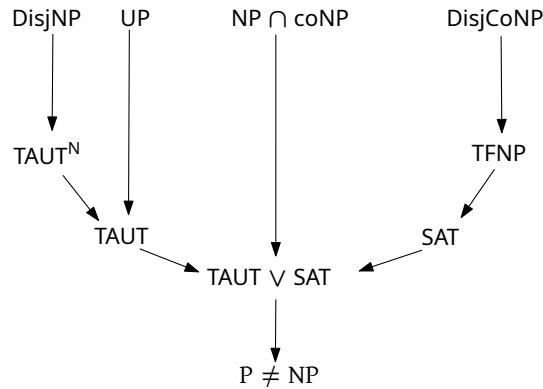


Abbildung 1: Implikationen zwischen Pudlák's Hypothesen (2017). Beachte dass diese Implikationen relativieren.

systemen, Arithmetik mit exponentiell beschränkten Quantoren („*bounded arithmetic*“) und der Existenz von vollständigen Elementen sogenannter *Promise-Klassen*. Promise-Klassen sind solche Komplexitätsklassen, die durch speziell operierende Turing-Maschinen mit speziellen Eigenschaften erkannt werden können, wobei diese Eigenschaften üblicherweise über (Nicht)determinismus und polynomiell Laufzeit hinaus gehen. Für die Klasse  $\text{UP} \subseteq \text{NP}$  bedeutet das z.B., dass die Sprache (wie bei NP) von einer nichtdeterministischen Polynomialzeit-Turing-Maschine erkannt werden muss, die aber – das ist der Promise – auch nur auf höchstens einem nichtdeterministischen Rechenweg akzeptieren darf.

Razborov (1994) zeigt hierbei als erstes eine Verbindung zwischen der Promise-Klasse DisjNP und der Existenz von optimalen aussagenlogischen Beweissystemen. Viele weitere Beziehungen zur Existenz vollständiger Elemente der Promise-Klassen UP,  $\text{NP} \cap \text{coNP}$ , DisjCoNP wurden ausgemacht (vgl. auch Messner, 2000; Köbler, Messner und Torán, 2003; Beyersdorff und Sadowski, 2011). Beyersdorff, Köbler und Messner (2009) und Pudlák (2017) zeigen ferner analoge Verbindungen zu den Funktionenklassen  $\text{NPMV}_t$  und TFNP.

Motiviert durch Fragen der endlichen Widerspruchsfreiheit von Theorien und *bounded arithmetic* formuliert Pudlák (2017) folgende Hypothesen, die hier in ihrer Komplexitätstheoretischen Fassung genannt werden:

SAT	: es ex. keine $\leq_m^P$ -vollst. Menge für NP mit P-opt. Beweissystem
TAUT	: es ex. keine $\leq_m^P$ -vollst. Menge für coNP mit P-opt. Beweissystem
$\text{TAUT}^N$	: es ex. keine $\leq_m^P$ -vollst. Menge für coNP mit opt. Beweissystem
$\text{NP} \cap \text{coNP}$	: es ex. keine $\leq_m^P$ -vollst. Menge für UP
UP	: es ex. keine $\leq_m^P$ -vollst. Menge für $\text{NP} \cap \text{coNP}$
DisjNP	: es ex. kein $\leq_m^{PP}$ -vollst. disjunktes NP-Paar für DisjNP
DisjCoNP	: es ex. kein $\leq_m^{PP}$ -vollst. disjunktes coNP-Paar für DisjCoNP

Seien an dieser Stelle auch schon die folgenden zwei wichtigen natürlichen Mengen definiert:

$$\begin{aligned} \text{SAT} &\stackrel{\text{df}}{=} \{\varphi \mid \varphi \text{ ist eine erfüllbare aussagenlogische Formel}\}, \\ \text{TAUT} &\stackrel{\text{df}}{=} \{\varphi \mid \varphi \text{ ist eine gültige aussagenlogische Formel}\}. \end{aligned}$$

Zur Notation: natürliche Mengen wie TAUT werden in Schreibmaschinenschrift notiert, während Hypothesen in serifenloser Schrift notiert werden.

Es muss hervorgehoben werden, dass Pudlák die Hypothese TAUT nicht in dieser Form formuliert hat, sondern als Aussage über die Nicht-Existenz eines P-optimalen Beweissystems speziell für TAUT, genau wie anfangs des Abschnitts gefragt wurde. (In seiner

Notation die Hypothese CON.) Die beiden Charakterisierungen sind aber äquivalent; Gesagtes gilt analog auch für SAT (vgl. Abschnitt 2.5).

Insbesondere arbeitet Pudlák die Beziehung zwischen diesen einzelnen Hypothesen heraus, und kommt hierbei zu Abbildung 1, die anzeigt, wie die bekannten Implikationen zwischen den oberen Hypothesen verlaufen. Auf der Seite der Komplexitätstheorie fragt Pudlák im Speziellen nach natürlichen plausiblen stärkeren Hypothesen (die z.B. sowohl TAUT als auch TFNP implizieren, wobei Pudlák diese beiden Hypothesen jeweils als plausibel ansieht), sowie im Allgemeinen nach Separationen zwischen diesen Hypothesen. Zum Beispiel kann durch Angabe von Orakeln gezeigt werden, dass zwei Hypothesen unter relativierbaren Beweisen nicht gleich sind, oder stärker sogar unabhängig unter relativierbaren Beweisen sind. Dieses allgemeine Forschungsdesiderat fasse ich für diese Arbeit lose als *Pudláksches Programm* zusammen.

Die vorliegende Arbeit will drittens an genau diesem Pudlákschen Programm beitragen, indem im Wesentlichen die Übersicht in Abbildung 1 verfeinert wird, und dabei stärkere (und schwächere) Hypothesen eingeordnet werden. Hierbei fokussiere ich mich insbesondere auf jene Hypothesen, die mit NP-Suchproblemen im Zusammenhang stehen, wie z.B. Q. Im Folgenden sei noch auf den „Orakel“-Teil des Pudlákschen Programms eingegangen.

#### Orakel und Relativierungen

Orakel und Orakel-Turing-Maschinen sind ein Begriff aus der Berechenbarkeitstheorie um die relative Schwierigkeit von algorithmischen Entscheidungsproblemen zu untersuchen, die über *berechenbar vs. unberechenbar* hinaus gehen. Wenn eine Turing-Maschine eine Abstraktion eines Computers darstellt, dann ist ein Orakel eine Abstraktion einer Datenbank in der Cloud, die vom Computer angerufen werden kann, um zu fragen, ob ein gewisser Eintrag in der Datenbank liegt. Dieses Abfragen des Entscheidungsproblems („Ist Eintrag in Datenbank?“) kann der Computer gewissermaßen gratis durchführen.

Formal werden Orakel als Mengen  $A$  realisiert, und Orakel-Turing-Maschinen dürfen für beliebige aufgeschriebene Wörter  $w$  abfragen, ob  $w \in A$  liegt. Ist nun  $A$  insbesondere eine unberechenbare Menge, dann kann die zugehörige Turing-Maschine auch komplexere Mengen entscheiden, die sonst unberechenbar wären. Post (1944) arbeitet aus diesem Begriff die Turing-Reduzierbarkeit aus:  $A$  ist auf  $B$  Turing-reduzierbar wenn  $A$  über eine Orakel-Turing-Maschine mit Orakel  $B$  entschieden werden kann. In anderen Worten:  $A$  kann mittels Hilfe von Orakel  $B$  entschieden werden. Damit können sonst unberechenbare Mengen  $A$  und  $B$  nach ihrer relativen Schwierigkeit *über einfache Berechenbarkeit hinaus* geordnet werden können. Diese Ordnung ermöglicht zum Beispiel die Unterteilung der unentscheidbaren Mengen in *Grade der Unlösbarkeit*.

Cook (1971) überträgt diese Form von Reduzierbarkeit auf den polynomiellen Bereich der Komplexitätstheorie, um so die relative Komplexität zwischen zwei Mengen  $A$  und  $B$  unter polynomieller Unschärfe einzuschätzen:  $A$  ist auf  $B$  Cook-reduzierbar wenn  $A$  mit einer Orakel-Turing-Maschine mit Orakel  $B$  in Polynomialzeit entschieden werden kann. Auf ähnliche Weise wurde der Begriff von Orakeln im polynomiellen Bereich eingesetzt, um die Polynomialzeit-Hierarchie zu definieren, womit NP generalisiert wird, und der Komplexitätsraum zwischen P und PSPACE verfeinert werden kann.

Neben diesen deskriptiven Eigenschaften haben sich Orakel als nützliches beweistheoretisches Werkzeug in der Komplexitätstheorie erwiesen. Die zentrale Einsicht hierbei ist, dass viele der „üblichen“ mathematischen Beweismethoden, welche in der

Komplexitätstheorie eingesetzt werden, *relativieren*. Das bedeutet, dass diese mathematischen Beweise nicht nur die eigentliche Aussage (wie z.B. der Hierarchiesatz  $P \neq E$ ) beweisen, sondern für jedes Orakel  $A$  diese Beweise auch die *relativierte* Aussage beweisen, bei der alle beteiligten Turing-Maschinen Zugriff auf das Orakel  $A$  bekommen. Die Aussage  $P \neq E$  relativiert so zur Aussage  $P^A \neq E^A$  für jedes  $A$ , das bedeutet dass eine Menge  $L$  existiert, die von einer Exponentialzeit-Orakel-Turing-Maschine mit Zugriff auf  $A$  erkannt wird, aber keine Polynomialzeit-Turing-Maschine (selbst mit Orakel-Zugriff auf  $A$ ) kann  $L$  entscheiden.

Damit werden speziell konstruierte Orakel zu einem Indiz, dass gewisse Aussagen schwer zu beweisen sind. Beispielsweise konstruieren Baker, Gill und Solovay (1975) ein Orakel  $A$  sodass  $P^A \neq NP^A$ . Mit diesem Fakt ist die Aussage „ $P = NP$ “ nicht mit relativierbaren Methoden beweisbar, da sonst ja auch  $P^A = NP^A$  gelten würde. Tatsächlich zeigen Baker, Gill und Solovay sogar zusätzlich, dass  $P^B = NP^B$  für ein zweites Orakel  $B$ . Damit kann also auch die Aussage „ $P \neq NP$ “ nicht mit relativierbaren Methoden bewiesen werden. Nimmt man diese beiden Indizien zusammen, ergibt sich dass die  $P$ - $NP$ -Frage *unabhängig* unter relativierbaren Beweisen ist.

Im Kontext des Pudlák'schen Programms wurde für viele potentielle Implikationen (wie z.B.  $\text{DisjCoNP} \Rightarrow \text{TAUT}$ ) ein Orakel konstruiert, relativ zu diesem diese Implikationen nicht gelten (es existiert ein Orakel, relativ zu dem  $\text{DisjCoNP}$  gilt aber nicht  $\text{TAUT}$ ). Entsprechende Konstruktionen wurden unter anderem von Glaßer, Selman, Sengupta und Zhang (2004), Dose und Glaßer (2019), Dose (2020b,c), Dingel (2022), Ehrmanntraut, Egidy und Glaßer (2022) und Khaniki (2022) entwickelt. Damit wird plausibilisiert, dass gewisse Hypothesen des Pudlák'schen Programms tatsächlich unterschiedlich sind.

Diese Arbeit reiht sich in dieses Arbeitsvorhaben direkt ein, und wird viertens ein weiteres Orakel konstruieren, um Hypothesen (unter relativierbaren Beweisen) zu trennen.

## Beitrag und Überblick

Der Aufbau der Arbeit und die einzelnen Beiträge sind hier noch einmal zusammengefasst.

Im nächsten Kapitel 2 klären wir die notwendigen mathematischen Grundlagen. Insbesondere definieren wir präzise den Begriff des (Cook-Reckhow-)Beweissystems und den der Relativierungen, welche bereits oben angesprochen wurden.

Im Kapitel 3 formalisieren wir den oben bereits intuitiv erfassten Begriff der NP-Suchprobleme und totalen NP-Suchprobleme. Wir werden diese außerdem mit Funktionenklassen gegenüberstellen und einen Reduktions- und Vollständigkeitsbegriff über die sogenannte Levin-Reduzierbarkeit auf NP-Suchproblemen definieren.

Der Rest dieses Kapitels hat dabei den Charakter eines Überblickswerks bzw. eines Surveys. Einerseits wird die Beziehung zwischen NP-Suchproblemen und NP-Entscheidungsproblemen erläutert, was auch das *search-reduces-to-decision*-Argument umfasst. Es werden Ergebnisse zusammengetragen, wann dieses Argument zutrifft, und wann es insbesondere nicht zutrifft. Andererseits werden Arbeiten vorgestellt und eingeordnet, welche gemeinsame Eigenschaften und Strukturen von NP-Suchproblemen untersuchen. Besonders interessant sind hierbei die vollständigen NP-Suchprobleme, die sich ähnlich zu den sonst üblichen NP-vollständigen Mengen/Entscheidungsproblemen verhalten. Hierbei lässt sich – analog zur Berman-Hartmanis-Isomorphievermutung – zu vielen NP-vollständigen Suchproblemen eine gemeinsame Struktur bzw. Isomorphie erkennen.

In Kapitel 4 werden wir Hypothesen zu NP-Suchproblemen und die Aussage  $Q$  in das Pudlák'sche Programm einordnen. Erstens untersuchen wir, ob die (Levin-)Vollständigkeit eines NP-Suchproblems mit der (Karp-)Vollständigkeit des entsprechenden NP-Entscheidungsproblems übereinstimmt. Insbesondere wird plausibilisiert, dass diese Übereinstimmung nicht gilt. Zweitens werden wir (nicht-relativierbare) Charakterisierungen von  $Q$  durch Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003) und Köbler und Messner (2000) verallgemeinern und relativieren, womit wir als Nebeneffekt auch präzise zu (relativierbaren) Implikationen zwischen  $Q$  und den Pudlák'schen Hypothesen kommen. Drittens wird zum Abschluss des Kapitels, wieder in Form eines Surveys, das Pudlák'sche Programm durch das Hinzufügen weiterer Hypothesen erweitert und verfeinert, welche in der Literatur diskutiert werden. Hinzu erarbeiten wir eine Übersicht über die Implikationen zwischen diesen Hypothesen, sowie Orakeln welche diese Implikationen unter relativierbaren Beweisen trennen. Im Wesentlichen wird Abbildung 1 zu Abbildung 6 und 7 (S. 47, 65) vergrößert.

Im Sinne dieser Trennung unter relativierbaren Beweisen wird in Kapitel 5 ein Orakel konstruiert, relativ zu diesem  $\text{DisjNP}$  und  $\text{UP}$  und  $Q$  gilt. Damit gibt es also keinen relativierbaren Beweis für  $\neg Q$ , selbst wenn man beide Pudlák'schen Hypothesen  $\text{DisjNP}$  und  $\text{UP}$  annimmt. Insbesondere wird damit der erste Schritt unternommen, die relative Stärke der Hypothese  $Q$  gegenüber den anderen der Pudlák'schen Hypothesen unter relativierbaren Beweismethoden abzugrenzen.

Die Arbeit endet mit einer abschließenden Diskussion in Kapitel 6, erläutert die Ergebnisse noch einmal, und trägt die offenen Fragen zusammen, welche in den vorigen Kapiteln gestellt wurden.

## 2 Grundlagen

Dieses Kapitel legt die definitorischen Grundlagen für die folgenden Kapitel fest. Abschnitt 2.1 erläutert mathematische Notationen für diese Arbeit. Abschnitt 2.2 spezifiziert das Maschinenmodell. Abschnitt 2.3 wiederholt einige Standarddefinitionen aus der Komplexitätstheorie. Abschnitt 2.4 setzt das hier verwendete Verständnis von Relativierungen fest. Abschließend geht Abschnitt 2.5 kurz auf Beweissysteme im Sinne von Cook und Reckhow (1979) ein.

### 2.1 Notation

Sei  $\Sigma$  das standardmäßige Alphabet mit  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Elemente von  $\Sigma^*$  nennen wir (endliche) *Wörter*, sind also endliche Sequenzen von Zeichen aus  $\Sigma$ . Die Menge  $\Sigma^\omega$  entspricht der Menge der  $\omega$ -unendlichen Wörter. Teilmengen von  $\Sigma^*$  nennen wir auch Sprachen. Wir bezeichnen die Länge eines Wortes  $w \in \Sigma^*$  mit  $|w|$ . Das leere Wort bezeichnen wir mit  $\varepsilon$ . Das  $i$ -te Zeichen eines Wortes  $w \in \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$  für  $0 \leq i < |w|$  identifizieren wir mit  $w[i]$ . Diese Notation erweitern wir auf Sequenzen von Indizes: für  $0 \leq i_1, i_2, \dots, i_k < |w|$  und  $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_k)$  sei  $w[\alpha] \stackrel{\text{df}}{=} w[i_1]w[i_2] \dots w[i_k]$ . Insbesondere ist damit  $w[0, 1, 2, \dots, |w| - 1] = w$  für  $w \in \Sigma^*$ . Falls  $w$  ein (echter) Präfix von  $v$  ist dann schreiben wir  $w \sqsubseteq v$  (bzw.  $w \subsetneq v$ ). In manchen Fällen identifizieren wir Mengen  $A \subseteq \mathbb{N}$  mit ihrem charakteristischem  $\omega$ -Wort aus  $\Sigma^\omega$ , wobei  $A = a_0a_1a_2 \dots$  und  $a_i = 1$  wenn  $i \in A$ , sonst  $a_i = 0$ . Heißt, es gilt  $A[i] = 1$  genau dann wenn  $i \in A$ .

Die Menge aller natürlichen (nicht-negativen) Zahlen wird mit  $\mathbb{N}$  bezeichnet. Die leere Menge notieren wir wie üblich als  $\emptyset$ . Die Kardinalität einer Menge  $A$  notieren wir wie üblich als  $|A|$ . Für eine Menge  $A \subseteq \Sigma^*$  und  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $A^{\leq n} \stackrel{\text{df}}{=} \{w \in A \mid |w| \leq n\}$ . Außerdem bezeichnet  $\ell(A) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{w \in A} |w|$ . Für solche Teilmengen  $A$  von  $\Sigma^*$  verstehen wir das Komplement  $\bar{A}$  als  $\Sigma^* - A$ . Wir sagen, dass zwei Mengen  $A, B$  auf Menge  $D$  *übereinstimmen* wenn  $x \in A$  genau dann wenn  $x \in B$  für alle  $x \in D$ , bzw. äquivalent dazu  $A \cap D = B \cap D$ .

Für zwei Mengen  $A, B \subseteq \Sigma^*$  bezeichnet der *Join*  $A \oplus B$  die Menge

$$A \oplus B \stackrel{\text{df}}{=} \{0a \mid a \in A\} \cup \{1b \mid b \in B\}.$$

#### Relationen und Funktionen

Zweistellige bzw. binäre Relationen  $R \subseteq A \times B$  können wir mit den üblichen Eigenschaften beschreiben: die Relation  $R$  ist

- *(links-)total* wenn jedes Element aus  $A$  mit mindestens einem Element aus  $B$  reliert,
- *rechtstotal* bzw. *surjektiv* wenn jedes Element aus  $B$  mit mindestens einem Element aus  $A$  reliert,
- *linkseindeutig* bzw. *injektiv* wenn jedes Element aus  $B$  mit höchstens einem Element aus  $A$  reliert,

- (rechts-)eindeutig bzw. *funktional* wenn jedes Element aus  $A$  mit höchstens einem Element aus  $B$  reliert,
- *bijektiv* wenn jedes Element aus  $B$  mit genau einem Element aus  $A$  reliert, also genau dann wenn  $R$  surjektiv und injektiv ist.

Binäre Relationen nennen wir eine (partielle) *Funktion* wenn diese Relation funktional ist. Eine Funktion sei im Folgenden also im Allgemeinen nicht total. Sollte (Links-)Totalität explizit gefordert sein, sprechen wir von *totalen Funktionen*. Beachte, dass eine totale bijektive Funktion  $A \rightarrow B$  einen Mengenisomorphismus zwischen  $A$  und  $B$  bildet. Binäre Relationen über Wörtern aus  $\Sigma^*$ , welche nicht unbedingt Funktionen sind, verstehen wir manchmal auch aus historischen Gründen als (partielle) Multifunktionen, dem Begriff der „*partial multivalued function*“ nachempfunden.

Für eine binäre Relation  $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$  schreiben wir  $\text{Proj}(R)$  für die Menge  $\{x \mid (x, y) \in R\}$ . Für ein Wort  $x \in \Sigma^*$  schreiben wir  $\text{set-}R(x) = \{y \mid (x, y) \in R\}$  für die Bildmenge von  $x$  auf  $R$ . Manchmal werden wir binäre Relationen auch über die Spezifikation der jeweiligen Bildmengen definieren, also z.B.  $\text{set-}Q(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \dots, n\}$  schreiben um die Relation  $Q = \{(a, b) \mid b \leq a\}$  zu definieren. Falls  $f$  eine Funktion bzw. funktional ist, meinen wir mit  $f(x)$  wie üblich das *Bildelement* der Funktion  $f$ , und nicht die *Bildmenge*.

Für eine Funktion  $f$  bezeichnen wir die Urbild- bzw. Bildmenge (*domain* und *image*) mit  $\text{dom}(f)$  und  $\text{img}(f)$ . (Beachte dass  $\text{Proj}(f) = \text{dom}(f)$ ). Wir führen diese Unterscheidung nur wegen den Gewohnheiten dieser zwei Notationen ein.) Ist  $f$  eine Funktion, dann bezeichnen wir mit  $f^{-1}$  dessen binäre Umkehrrelation. Beobachte dass  $f^{-1}$  funktional ist, wenn  $f$  injektiv ist. Ist  $f$  zusätzlich surjektiv, dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  eine totale Funktion.

Eine Funktion  $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  nennen wir *verlängernd* wenn  $|f(x)| \geq |x|$  für alle  $x \in \text{dom}(f)$ . Die Funktion  $f$  nennen wir *polynomiell längenbeschränkt* wenn ein Polynom  $p$  existiert sodass  $|f(x)| \leq p(|x|)$  für alle  $x \in \text{dom}(f)$ . Die Funktion  $f$  nennen wir *ehrlich* wenn ein Polynom  $q$  existiert sodass  $q(|f(x)|) \geq |x|$  für alle  $x \in \text{dom}(f)$ . Manchmal übertragen wir diese Begrifflichkeiten auf allgemeine binäre Relationen, und sprechen z.B. von polynomiell längenbeschränkten Relationen  $R$  wenn  $|y| \leq p(|x|)$  für alle  $(x, y) \in R$ .

Beachte dass Funktionen nur spezielle binäre Relationen sind. Wenn also  $f$  eine Funktion ist, meinen wir mit „ $f \in P$ “ dass der *Graph* von  $f$  in Polynomialzeit entschieden werden kann („Gegeben Tupel  $(x, y)$ , gilt  $f(x) = y$ ?“). Das ist eine schwächere Aussage als „ $f \in \text{FP}$ “ die wie in üblicher Interpretation besagen soll, dass aus  $x$  das Bild  $f(x)$  in Polynomialzeit berechnet werden kann.

Im Folgenden definieren wir noch den Begriff der *Verfeinerung* auf Multifunktionen. Seien  $F, G$  zwei Multifunktionen. Wir nennen  $G$  eine *Verfeinerung* von  $F$  wenn  $\text{Proj}(F) = \text{Proj}(G)$  und  $\text{set-}G(x) \subseteq \text{set-}F(x)$  für alle  $x \in \text{Proj}(F)$  (bzw. äquivalent  $\in \text{Proj}(G)$ ). Ist  $F$  eine Multifunktion, und  $\mathcal{G}$  eine Klasse von Multifunktion, schreiben wir  $F \in_c \mathcal{G}$  wenn  $\mathcal{G}$  eine Verfeinerung  $G \in \mathcal{G}$  von  $F$  enthält. Für zwei Klassen  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  von Multifunktionen schreiben wir  $\mathcal{F} \subseteq_c \mathcal{G}$  falls für jede Multifunktion  $F \in \mathcal{F}$  auch  $F \in_c \mathcal{G}$  gilt.

#### Codierungen, Identifikation von Zahlen und Wörtern

Die endlichen Wörter  $\Sigma^*$  können über ihre quasi-lexikographischen Ordnung  $<_{\text{lex}}$  linear geordnet werden. Diese ist eindeutig definiert indem wir  $0 <_{\text{lex}} 1$  fordern. Unter dieser Definition existiert ein Ordnungsisomorphismus zwischen  $(\Sigma^*, <_{\text{lex}})$  und  $(\mathbb{N}, <)$ , welcher insbesondere eine totale bijektive Abbildung zwischen  $\Sigma^*$  und  $\mathbb{N}$  induziert, die so-



wohl in Polynomialzeit berechenbar als auch invertierbar ist. (Eine solcher Isomorphismus wird zum Beispiel durch eine dyadische Codierung realisiert.) Durch diese Identifikation können wir Wörter aus  $\Sigma^*$  als Zahlen aus  $\mathbb{N}$  behandeln und umgekehrt. Es können also auch Notationen, Beziehungen und Operationen für  $\Sigma^*$  auf  $\mathbb{N}$  übertragen werden und umgekehrt. Insbesondere können wir dann von einer Länge  $|n|$  des Wortes sprechen, welches von  $n \in \mathbb{N}$  repräsentiert wird. Insbesondere meint dieser Ausdruck nicht den Betrag von  $n$ . Ebenso bezeichnet die Ordnung  $\leq$  sowohl die Kleiner-oder-gleich-Ordnung auf den natürlichen Zahlen als auch der quasi-lexikographischen Ordnung  $\leq_{\text{lex}}$  auf den endlichen Wörtern. Diese Übereinstimmung ist nach den Eigenschaften des Ordnungs- isomorphismus auch kompatibel mit der Identifikation von Wörtern mit Zahlen. Beachte dass der Längenoperator  $|\cdot|$  ordnungserhaltend ist: wenn  $a \leq b$  (oder eben äquivalent  $a \leq_{\text{lex}} b$ ) für zwei Wörter  $a, b \in \Sigma^*$  dann ist auch  $|a| \leq |b|$ , bzw. ist das Wort  $a$  höchstens so lang wie das Wort  $b$ . Mit den Ausdrücken  $0^n$  und  $1^n$  meinen wir immer die Wörter  $000 \dots$  und  $111 \dots$  aus  $\Sigma^n$ .

Wir definieren mit  $\langle \dots \rangle$  eine Paarungsfunktion von  $\bigcup_{i \geq 0} (\Sigma^*)^i \rightarrow \Sigma^*$ , welche injektiv und in Polynomialzeit sowohl berechenbar als auch invertierbar ist, und die im folgenden Sinne längeneffizient ist:  $|\langle u_1, \dots, u_n \rangle| = 2(|u_1| + \dots + |u_n| + n)$ . Eine solche Paarungsfunktion kann beispielsweise über  $\langle u_1, \dots, u_n \rangle \mapsto f(\#u_1\# \dots \#u_n\#)$  realisiert werden, wobei  $f$  eine Codierung vom Alphabet  $\{0, 1, \#\}$  auf  $\Sigma^*$  mittels  $\{0 \mapsto 00, 1 \mapsto 11, \# \mapsto 01\}$  ist. Diese Paarungsfunktion werden wir häufig verwenden, um Tupel an Wörtern zu codieren, z.B. damit eine Turing-Maschine ein Tupel an Wörtern als Eingabe entgegen nehmen kann. Auf die konkrete Angabe dieser Paarungsfunktion wird aber im Folgenden meist verzichtet und sie wird nur implizit mitgedacht. So meinen wir mit dem Tupel  $(a, b)$  für  $a, b \in \Sigma^*$  je nach Kontext entweder mathematisch präzise das Element aus dem Produkt  $\Sigma^* \times \Sigma^*$ , oder das Wort  $\langle a, b \rangle \in \Sigma^*$ . Ebenso verstehen wir je nach Kontext eine binäre Relation  $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$  auch als eine Sprache im Sinne einer Teilmenge von  $\Sigma^*$ , die bspw. von einer Turing-Maschine entschieden werden kann. Algorithmen und Turing-Maschinen verarbeiten nicht nur Wörter, sondern auch andere Objekte wie z.B. Graphen oder Turing-Maschinen. Daher werden wir die obige implizit mitgedachte Codierung auch auf andere Objekte ausweiten. Hierbei seien die jeweiligen Codierungen angemessen effizient, in dem Sinne dass die Codierungen kompakt sind und entsprechende Operationen auf den codierten Objekten in Polynomialzeit zulassen. Zum Beispiel lässt sich ein Graph mit Knotenmenge  $V$  und Kantenmenge  $E$  in polynomieller Länge abh. von  $|V|$  und  $|E|$  codieren, und auf der entsprechenden Codierung kann z.B. die Nachbarschaft eines ausgezeichneten Knotens ebenso in Polynomialzeit aufgezählt werden.

## 2.2 Maschinenmodell

Diese Arbeit baut auf dem Berechnungsmodell der Turing-Maschine (TM) auf. Wir betrachten hierbei sowohl die deterministische als auch die nichtdeterministische Variante. In dieser Arbeit haben TM sowohl ein Eingabeband, ein Arbeitsband, und ein Ausgabeband. Jede TM besitzt einen ausgezeichneten Zustand zum Akzeptieren. In jedem Rechenschritt einer TM geht die TM von einer Konfiguration in eine nächste Konfiguration über (wobei diese in der nichtdeterministischen Variante nicht eindeutig sein muss). Mit Konfiguration meinen wir hier eine Beschreibung der Bandinhalte, der Kopfpositionen und dem Zustand.

Für (nichtdeterministische oder deterministische) TM  $M$  und Eingabe  $x \in \Sigma^*$  sagen wir, dass  $\alpha$  ein Rechenweg der Berechnung  $M(x)$  ist, wenn  $\alpha$  eine Sequenz  $C_0, C_1, \dots$  von Konfigurationen ist, diese mit der initialen  $C_0$  Konfiguration startet, und in der die Konfiguration  $C_{i+1}$  aus  $C_i$  über einen (bzgl.  $M$ ) legalen Rechenschritt hervorgeht.

Wir sagen, dass ein Rechenweg  $\alpha = (C_0, \dots, C_m)$  terminierend ist, wenn kein weiterer legaler Rechenschritt (bzgl.  $M$ ) mehr nach  $C_m$  möglich ist. Ein Rechenweg ist akzeptierend wenn dieser terminierend ist, und der Zustand der letzten Konfiguration  $C_m$  der akzeptierende Zustand ist. Entsprechend sagen wir auch, dass  $M(x)$  bezüglich  $\alpha$  mit Ausgabe  $y$  akzeptiert wenn  $\alpha$  ein akzeptierender Rechenweg ist, und  $y$  auf dem Ausgabeband steht.

Wir betrachten nun konkret deterministische TM. Nachdem höchstens ein terminierender Rechenweg  $\alpha$  einer Berechnung  $M(x)$  einer deterministischen TM  $M$  auf Eingabe  $x$  existiert, können wir verkürzend auch sagen, dass  $M(x)$  mit Ausgabe  $y$  akzeptiert oder kurz  $M(x)$  akzeptiert, wenn  $M(x)$  bezüglich  $\alpha$  mit Ausgabe  $y$  akzeptiert. Sollte  $\alpha$  dagegen ablehnend sein, oder überhaupt nicht existieren, dann sagen wir, dass  $M(x)$  ablehnt.<sup>3</sup>

Eine solche deterministische TM  $M$  setzt nun gleichzeitig zwei unterschiedliche Berechnungsweisen um. Einerseits die eines Akzeptors einer Menge, und andererseits die einer Funktion:

- Die von  $M$  entschiedene Sprache ist die Menge  $L(M) \stackrel{\text{df}}{=} \{x \in \Sigma^* \mid M(x) \text{ akzeptiert}\}$ .
- Die von  $M$  berechnete Funktion ist die Funktion  $f_M: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  mit

$$f_M(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} y & \text{wenn } M(x) \text{ mit Ausgabe } y \text{ akzeptiert,} \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn wir  $M$  im Kontext der zweiten Berechnungsweise verstehen, dann sprechen wir auch von einem Turing-Transduktor. Wir kürzen dann auch „die von  $M$  berechnete Funktion“ durch „die Funktion  $M$ “ ab und verstehen den Turing-Transduktor  $M$  als genuine Funktion, und schreiben dann z.B.  $M(x) = y$  anstelle  $f_M(x) = y$ .

Diese zwei Arten von Berechnungsweisen einer TM erweitern wir nun auf nichtdeterministische TM. Sei  $N$  eine nichtdeterministische TM, und  $x$  eine Eingabe. Dann existieren bezüglich Berechnung  $N(x)$  nicht nur eine, sondern ggf. mehrere terminierende Rechenwege. Im Sinne eines existentiellen Akzeptierungsverhaltens sagen wir dass  $N(x)$  akzeptiert wenn mindestens ein akzeptierender Rechenweg  $\alpha$  auf  $N(x)$  existiert. Ansonsten sagen wir, dass  $N(x)$  ablehnt.

Analog ergeben sich nun wieder zwei Berechnungsweisen, einerseits als Akzeptor, andererseits als Multifunktion:

- Die von  $N$  entschiedene Sprache ist die Menge  $L(N) \stackrel{\text{df}}{=} \{x \in \Sigma^* \mid N(x) \text{ akzeptiert}\} = \{x \in \Sigma^* \mid \text{ex. akz. Rechenweg auf } N(x)\}$ .
- Die von  $N$  berechnete Multifunktion ist die Multifunktion  $f_N \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$  mit

$$f_N(x) \stackrel{\text{df}}{=} \{y \mid N(x) \text{ akz. auf einem Rechenweg mit Ausgabe } y\}$$

Die berechnete Multifunktion kann in anderen Worten auch so verstanden werden, dass  $x$  den Ausgaben von  $N(x)$  zugeordnet wird, wobei jeder akzeptierender Rechenweg eine Ausgabe macht, nämlich jenes Wort, was auf dem Ausgabeband steht. Wie im deterministischen Fall können wir von nichtdeterministischen Turing-Transduktoren sprechen,

3. Ein solcher Rechenweg  $\alpha$  existiert genau dann nicht, wenn  $M(x)$  nicht hält. Im Verlauf dieser Arbeit müssen wir aber solche unbeschränkt lang rechnenden TM nicht berücksichtigen, um identifizieren daher „Ablehnen“ als Negation von „Akzeptieren“ also mit „ablehnend terminieren oder nicht terminieren“.

wenn wir die zweite Berechnungsweise betonen wollen. Ebenso können wir wieder abkürzend von „der Multifunktion  $N$ “ sprechen.

Sowohl im deterministischen als auch dem nichtdeterministischen Fall können wir Berechnungen eine *Laufzeit* zuordnen: für eine TM  $M$  und Eingabe  $x \in \Sigma^*$  sei

$$\text{time}_M(x) \stackrel{\text{df}}{=} \max\{\text{Anz. Rechenschritte in } \alpha \mid \alpha \text{ ist ein Rechenweg von } M(x)\}.$$

Ist  $\text{time}_M(x)$  durch ein Polynom in Abhängigkeit von  $|x|$  beschränkt, und  $M$  eine deterministische (bzw. nichtdeterministische) TM, sagen wir auch dass  $M$  eine *deterministische* (bzw. *nichtdeterministische*) *Polynomialzeit-Turing-Maschine* (PTM bzw. NPTM) ist.

Eine PTM bzw. NPTM  $M$  nennen wir *total* falls  $L(M) = \Sigma^*$ , heißt  $M(x)$  akzeptiert für jede Eingabe  $x$ .

## 2.3 Komplexitätsklassen

Auf Basis der Turing-Maschinen als Berechnungsmodell können die üblichen Komplexitätsklassen der Entscheidungsprobleme bzw. Sprachen  $P$ ,  $NP$ ,  $\text{coNP}$  usw. definiert werden:

$$P \stackrel{\text{df}}{=} \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{ex. PTM } M \text{ mit } L = L(M)\},$$

$$NP \stackrel{\text{df}}{=} \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{ex. NPTM } M \text{ mit } L = L(M)\},$$

$$UP \stackrel{\text{df}}{=} \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{ex. NPTM } M \text{ mit } L = L(M),$$

und  $M(x)$  akz. auf höchstens einem Rechenweg\},

$$\text{coNP} \stackrel{\text{df}}{=} \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in NP\}.$$

Die Einfach- und Doppelt-Exponentialzeitklassen definieren wir wie folgt:

$$E \stackrel{\text{df}}{=} \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{ex. TM } M \text{ mit } L = L(M), \text{ ex. } c > 0 \text{ mit } \text{time}_M(x) \leq 2^{c|x|} \text{ für alle } x\},$$

$$EE \stackrel{\text{df}}{=} \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{ex. TM } M \text{ mit } L = L(M), \text{ ex. } c > 0 \text{ mit } \text{time}_M(x) \leq 2^{2^{c|x|}} \text{ für alle } x\}.$$

Die nichtdeterministischen Varianten  $NE$ ,  $NEE$  und Komplementklassen  $\text{coNE}$ ,  $\text{coNEE}$  sind analog definiert.

Die Funktionenklassen  $FP$ ,  $NPMV$ ,  $NPSV$  ist analog definiert (Selman, 1994):

$$FP \stackrel{\text{df}}{=} \{f \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \mid f \text{ ist funktional, ex. PTM-Transduktor } M, \text{ der } f \text{ berechnet}\},$$

$$NPSV \stackrel{\text{df}}{=} \{f \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \mid f \text{ ist funktional, ex. NPTM-Transduktor } M, \text{ der } f \text{ berechnet}\},$$

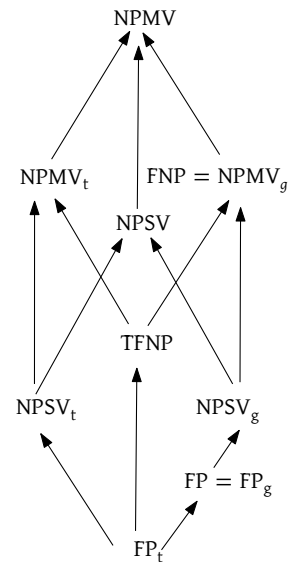
$$NPMV \stackrel{\text{df}}{=} \{f \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \text{ex. NPTM-Transduktor, } M \text{ der } f \text{ berechnet}\}.$$

Wir definieren  $NPMV_t$  als die Teilmenge von  $NPMV$  der Multifunktionen, die linkstotal sind. Analog  $NPSV_t$ . Die Inklusionen zwischen den einzelnen Funktionenklassen ist in Abbildung 2 skizziert. Ist für eine Funktion  $f \in FP$  auch  $f^{-1} \in_c FP$ , also eine (funktionale) Verfeinerung  $g$  von  $f^{-1}$  in  $FP$ , dann sagen wir auch, dass  $f$  *P-invertierbar* ist. Falls  $f$  injektiv ist, dass ist die Ehrlichkeit von  $f$  eine notwendige Bedingung für die P-Invertierbarkeit von  $f$  ist.

Grollmann und Selman (1988) erarbeiten in ihrer Untersuchung zu Public-Key-Kryptosystemen den Begriff von *disjunkten NP-Paaren* heraus.

**Definition 2.1** (DisjNP, DisjCoNP). Zwei Mengen  $A, B \in \Sigma^*$  bilden ein *disjunktes NP-Paar*  $(A, B)$  falls  $A, B \in NP$  und  $A \cap B = \emptyset$ . Die Klasse aller disjunkten NP-Paare schreiben wir mit  $\text{DisjNP}$ .

Analog können wir die Klasse  $\text{DisjCoNP}$  aller disjunkten  $\text{coNP}$ -Paare definieren.  $\triangleleft$



**Abbildung 2:** Inklusionen zwischen den in dieser Arbeit definierten Funktionenklassen. Ein Pfeil von  $\mathcal{F}$  nach  $\mathcal{G}$  sagt aus dass  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ .

Intuitiv mit dieser Definition verknüpft ist das folgende „Promise-Problem“: gegeben eine Instanz  $x \in A \cup B$ , entscheide ob  $x \in A$  oder  $x \in B$ . Das Versprechen bzw. Promise ist hierbei, dass  $x$  sicher in  $A$  oder  $B$  enthalten ist; ein entsprechender Entscheidungsalgorithmus kann sich beliebig verhalten für Eingaben  $x' \notin A \cup B$ .

Entsprechend diesem Promise-Problem ergibt sich formal folgende Definition von „Lösbarkeit“: Wir nennen ein disjunktes NP-Paar  $(A, B)$  *P-separierbar* wenn ein Separator  $S \in P$  existiert sodass  $A \subseteq S$  und  $B \subseteq \bar{S}$ .

### Reduktionen

Wie üblich können wir mittels Reduktionen die Sprachen der Komplexitätsklassen nach ihrer Schwierigkeit ordnen. Seien  $A, B$  zwei Sprachen:

- $A \leq_T^P B$  wenn  $A$  mittels einer Orakel-PTM mit Orakel  $B$  entschieden werden kann, bzw.  $A \in P^B$  (Turing- bzw. Cook-Reduzierbarkeit; siehe unten für einen präzisen Orakel-Begriff).
- $A \leq_m^P B$  wenn eine Funktion  $f \in FP$  existiert mit  $x \in A \iff f(x) \in B$  (Many-one- bzw. Karp-Reduzierbarkeit).
- $A \leq_1^P B$  wenn eine injektive Funktion  $f \in FP$  existiert mit  $x \in A \iff f(x) \in B$  (One-one-Reduzierbarkeit).
- $A \leq_{1,i}^P B$  wenn eine injektive und P-invertierbare Funktion  $f \in FP$  existiert mit  $x \in A \iff f(x) \in B$ .

Für die Funktionenklassen hat sich folgender sehr starke Begriff von Many-one-Reduzierbarkeit herausgebildet (vgl. Köbler und Messner, 2000; Beyersdorff, Köbler und Messner, 2009; Pudlák, 2017). Seien  $g, h$  zwei Multifunktionen:

- $g \leq_m^P h$  wenn eine Funktion  $f \in FP$  existiert mit  $set-g(x) = set-h(f(x))$ .

Insbesondere für zwei Funktionen  $g, h \in FP$  gilt

- $g \leq_m^P h$  wenn eine Funktion  $f \in FP$  existiert mit  $g(x) = h(f(x))$ .

Auf den Paaren aus DisjNP und DisjCoNP hat sich folgender Begriff von Reduzierbarkeit herausgebildet.<sup>4</sup> Seien  $(A, B), (C, D)$  zwei disjunkte NP-Paare (bzw. zwei disjunkte coNP-Paare):

- $(A, B) \leq_m^{PP} (C, D)$  wenn eine Funktion  $f \in FP$  existiert mit  $f(A) \subseteq B$  und  $f(B) \subseteq C$ .

Jede dieser Ordnungsrelationen ist reflexiv und transitiv, also eine Quasiordnung. Beachte, dass (auf Mengen)  $\leq_{1,i}^P$  feiner als  $\leq_1^P$  ist, und diese feiner als  $\leq_m^P$ , und diese feiner als  $\leq_T^P$  ist. Beachte auch, dass  $P$  und  $NP$  auf  $\leq_m^P$  (und  $\leq_T^P$ ) nach unten abgeschlossen sind. Ebenso ist die Teilmenge  $FP$  der Multifunktionen auf  $\leq_m^P$  nach unten abgeschlossen, und die P-separierbaren Paare auf  $\leq_m^{PP}$  nach unten abgeschlossen:

$$\begin{aligned}
 A \leq_m^P B \text{ und } B \in NP &\implies A \in NP \\
 A \leq_m^P B \text{ und } B \in P &\implies A \in P \\
 g \leq_m^P h \text{ und } h \in_c FP &\implies g \in_c FP \\
 (A, B) \leq_m^{PP} (C, D) \text{ und } (C, D) \text{ ist P-sep.} &\implies (A, B) \text{ ist P-sep.}
 \end{aligned}$$

Sei  $C$  eine Komplexitätsklasse und  $\leq$  eine der obigen Reduktionsordnungen. Wie üblich nennen wir nun eine Sprache  $A \leq\text{-hart}$  für  $C$  wenn  $A$  eine obere Schranke für  $C$  geordnet

4. Vgl. insb. Glaßer, Selman, Sengupta und Zhang (2004) und Glaßer, Selman und Sengupta (2005) für einen ausführlichen Vergleich und Diskussion der Reduktions- und Vollständigkeitsbegriffe. Insgesamt zeigen die Arbeiten, dass dieser schwache Begriff von Reduktion geeignet gewählt ist, denn er ist insbesondere äquivalent zu alternativen stärker wirkenden Reduktionsbegriffen ist.

über  $\leq$  ist (d.h.  $B \leq A$  für alle  $B \in C$ ). Wir nennen  $A \leq$ -vollständig für  $C$  wenn  $A \in C$  ein größtes Element von  $C$  geordnet über  $\leq$  ist (d.h.  $B \leq A$  für alle  $B \in C$  und  $A \in C$ ). Geht die Klasse  $C$  aus dem Kontext hervor, lassen wir manchmal auch die Angabe „für  $C$ “ weg. Auf Mengen betrachten wir üblicherweise die Reduktionsordnung  $\leq_m^p$ , und nennen daher manchmal eine Sprache  $A$   $C$ -vollständig wenn  $A \leq_m^p$ -vollständig für  $C$  ist. Auf Grundlage der Existenz universeller effizienter Turing-Maschinen können für die Klassen  $P$  und  $NP$  jeweils eine kanonische  $\leq_m^p$ -vollständige Menge angegeben werden. Für  $NP$  ist diese

**Definition 2.2.**

$$KAN \stackrel{\text{df}}{=} \{(N, x, 1^n) \mid N \text{ ist eine NTM und ex. Rechenweg } \alpha \text{ auf } N(x) \text{ mit } \leq n \text{ vielen Schritten}\}. \quad \triangleleft$$

**Lemma 2.3.** Die Menge  $KAN$  ist  $\leq_{1,i}^p$ -vollständig.

*Beweis.* Die Zugehörigkeit  $KAN \in NP$  folgt unmittelbar aus der Existenz universeller nichtdeterministischer Turing-Maschinen mit polynomiellen Overhead.

Wir zeigen nun, dass  $KAN$  auch  $\leq_{1,i}^p$ -hart für  $NP$  ist. Sei hierfür  $A \in NP$ . Wir wollen zeigen dass  $A \leq_{1,i}^p KAN$ . Sei nun  $N$  eine NPTM welche  $A$  entscheidet. Es gibt also auch ein Polynom  $p$  welches die Laufzeit von  $N$  beschränkt. Definiere nun die Funktion  $f(x) \stackrel{\text{df}}{=} (N, x, 1^{p(|x|)})$ . Es gilt nun

$$\begin{aligned} x \in A &\iff N(x) \text{ akz. auf RW mit } \leq p(|x|) \text{ Schritten} \\ &\iff (N, x, 1^{p(|x|)}) \in KAN \iff f(x) \in KAN. \end{aligned}$$

Ferner ist leicht zu sehen, dass  $f \in FP$ , dass  $f$  injektiv und auch  $P$ -invertierbar ist.  $\square$

**Polynomialzeit-Isomorphie**

Auf Mengen erzeugen die obigen Reduktionsordnungen je eine kanonische Äquivalenzordnung („Duplikatrelation“):

- $A \equiv_m^p B \stackrel{\text{df}}{\iff} A \leq_m^p B \text{ und } B \leq_m^p A.$
- $A \equiv_1^p B \stackrel{\text{df}}{\iff} A \leq_1^p B \text{ und } B \leq_1^p A.$
- $A \equiv_{1,i}^p B \stackrel{\text{df}}{\iff} A \leq_{1,i}^p B \text{ und } B \leq_{1,i}^p A.$

Wir definieren nun auch noch die  $P$ -Isomorphie als eine Verfeinerung von  $\equiv_{1,i}^p$ :

- $A \equiv^p B \stackrel{\text{df}}{\iff}$  es existiert eine bijektive und  $P$ -invertierbare Funktion  $f \in FP$  mit  $x \in A \leftrightarrow f(x) \in B.$

Gilt  $A \equiv^p B$  dann sagen wir auch dass  $A$  und  $B$   $P$ -isomorph sind. Im Folgenden werden noch die wichtigsten bekannten Aussagen bezüglich  $P$ -Isomorphie zusammengefasst:

Berman und Hartmanis (1977) zeigen dass  $\equiv_{1,i}^p$ -äquivalente Sprachen dann  $P$ -isomorph sind, wenn die jeweiligen Reduktionsfunktionen verlängernd sind.

**Satz 2.4** (Berman und Hartmanis, 1977). Gilt  $A \leq_{1,i}^p B$  via  $f$  und  $B \leq_{1,i}^p A$  via  $g$ , und  $f$  und  $g$  sind verlängernd, dann gilt  $A \equiv^p B$ .

Um die Voraussetzungen vom vorigen Satz 2.4 zu vereinfachen, führen sie den Begriff der *paddability* ein.

**Definition 2.5.** Eine Sprache  $A \neq \emptyset$  heißt (Berman–Hartmanis-)paddable genau dann wenn eine injektive und P-invertierbare Funktion  $g \in \text{FP}$  existiert sodass für alle  $x, y \in \Sigma^*$  gilt:

$$x \in A \iff g(x, y) \in A.$$

Das heißt,  $g$  fügt einen beliebigen String  $y$  zur „Problemistanz“  $x$  hinzu, sodass die Mitgliedschaft zu  $A$  unverändert bleibt, und die beiden originalen Strings  $x$  und  $y$  wieder rekonstruiert werden können.  $\triangleleft$

Es gilt:

**Satz 2.6** (Berman und Hartmanis, 1977, Thm. 5, 7). (1) Ist  $A$  paddable so gibt es für jedes  $B$  mit  $B \leq_m^P A$  eine injektive P-invertierbare verlängernde Funktion die  $B \leq_{1,1}^P$  realisiert.

(2) Sind  $A, B$  paddable, so folgt aus  $A \equiv_m^P$  stets  $A \equiv^P$ .

Alle bekannten  $\leq_m^P$ -vollständigen Mengen für NP sind paarweise P-isomorph. Berman und Hartmanis vermuteten, dass das für alle  $\leq_m^P$ -vollständigen Mengen gilt:

**Vermutung 2.7 (IC).** Alle  $\leq_m^P$ -vollständigen Mengen für NP sind P-isomorph. In anderen Worten: die  $\leq_m^P$ -Äquivalenzklasse der vollständigen Mengen ist gleich der  $\equiv^P$ -Äquivalenzklasse von KAN.

Mit obigem Begriff von Paddability lässt sich die  $\equiv^P$ -Äquivalenzklasse von KAN folgendermaßen charakterisieren:

**Satz 2.8.** Eine Menge  $A \in \text{NP}$  ist genau dann P-isomorph zu KAN wenn  $A \leq_m^P$ -vollständig und unpaddable ist.

Als Konsequenz ergibt sich hieraus, dass die bekannten  $\leq_m^P$ -vollständigen Mengen alle paddable sind. (Das ist die eigentliche empirische Beobachtung von Berman und Hartmanis, auf welcher diese IC vermuteten.)

## 2.4 Orakel und Relativierungen

Wie in der Einleitung schon angesprochen, ist die Idee hinter Orakel-Berechnungen die Untersuchung, welche Probleme  $B$  effizient(er) durch einen Algorithmus gelöst werden können, wenn der Algorithmus eine (fiktive) Möglichkeit hat, ein (ggf. sehr schweres) Problem  $A$  ohne Rechenaufwand zu lösen. Der Zugriff auf  $A$  kann also wie ein „Nachschlagewerk“ oder „Blackbox-Funktion“ verstanden werden, die auf magische Weise  $A$  augenblicklich löst.

Diese Idee wird im Berechnungsmodell der Orakel-Turing-Maschine (OTM) formalisiert. Orakel-Turing-Maschinen sind eine Erweiterung der (deterministischen und nichtdeterministischen) Turing-Maschinen, die zum Eingabe-, Arbeits- und Ausgabeband auch noch ein separates Orakelband haben. Ferner existieren drei ausgezeichnete Zustände  $q_?$ ,  $q_{\text{yes}}$ ,  $q_{\text{no}}$ .

Gegeben ein Orakel  $A \subseteq \Sigma^*$  können OTM nun Fragen der Form  $x \stackrel{?}{\in} A$  an das Orakel stellen, indem sie ein Wort  $x$  auf das Frageband schreiben, und in den Zustand  $q_?$  übergeht. Im unmittelbar nächsten deterministischen Schritt der Berechnung wird der Zustand  $q_{\text{yes}}$  eingenommen falls  $x \in A$ , sonst der Zustand  $q_{\text{no}}$ .

Aus dieser Beschreibung wird klar, dass eine Berechnung einer OTM sowohl von der Eingabe  $x$  abhängig ist, als auch vom Orakel  $A$ , *relativ* zu diesem  $M(x)$  rechnet. Wir schreiben dann auch kurz  $M^A$  wenn wir die OTM  $M$  mit festem Orakel  $A$  meinen, und  $M^A(x)$  die Berechnung der OTM  $M$  auf Eingabe  $x$  mit Orakel  $A$ . Entsprechend können wir auch die Laufzeit  $\text{time}_M^A(x)$  definieren, und von (deterministischen bzw. nichtdeterministischen) Polynomialzeit-Orakel-Turing-Maschinen (POTM, NPOTM) sprechen, wenn die Laufzeit auf allen Eingaben und für alle Orakeln polynomiell durch die Eingabelänge beschränkt ist.

Wir können nun die relativierten Komplexitätsklassen  $P^O, NP^O, FP^O, NPMV^O, \dots$  relativ zu einem gegebenen Orakel  $O$  definieren, wobei in der jeweiligen Definition die TM durch OTM ersetzt werden, die Zugriff auf das Orakel  $O$  haben. Diese Relativierung überträgt sich auch auf unsere weiteren Definitionen, wie z.B. Reduktion und Vollständigkeit. Wir schreiben z.B.  $A \leq_m^{p,O} B$  wenn eine Funktion  $f \in FP^O$  existiert mit  $x \in A \leftrightarrow f(x) \in B$ . Die kanonische NP-vollständige Menge KAN kann ebenso zu  $KAN^O$  relativiert werden. Zur Vollständigkeit

$$KAN^O \stackrel{\text{def}}{=} \{(N, x, 1^n) \mid N \text{ ist eine NOTM und akz. } x \text{ relativ zu } O \text{ auf einem RW mit } \leq n \text{ vielen Schritten}\}.$$

Die Vollständigkeit relativiert insbesondere, heißt wir haben  $A \leq_m^{p,O} KAN^O$  für alle Orakel  $O$  und Menge  $A \in NP^O$ . Für *natürliche* Mengen wie SAT usw. werden wir in dieser Arbeit dagegen keine relativierte Variante definieren. In diesem Sinne ist SAT im Allgemeinen *nicht*  $\leq_m^{p,O}$ -vollständig, in dem Sinne dass ein Orakel  $O$  existiert und eine Menge  $A \in NP^O$  sodass  $A \not\leq_m^{p,O} SAT$ .<sup>5</sup>

In allgemeineren Beweisen, die nicht konkrete natürliche Mengen betreffen, lassen sich üblicherweise alle beteiligten TM mit OTM auswechseln, ohne die Gültigkeit der Aussage zu verändern. Aussagen bzw. Beweise, die in solchen relativierten Umgebungen relativ zu jedem beliebigen Orakel  $O$  gelten, nennen wir *relativierende* Aussagen bzw. Beweise. Das Diagonalargument in einem typischen Beweis des Hierarchiesatzes  $P \subsetneq E$  relativiert beispielsweise. Das lässt sich intuitiv so erklären, dass bei diesem Argument Polynomialzeit-Turing-Maschinen durch eine Exponentialzeit-Turing-Maschine simuliert werden. Es ist aber klar, dass eine solche Simulation auch analog mit Orakeln funktioniert: Orakel-Polynomialzeit-Turing-Maschinen relativ zu  $O$  lassen sich auch durch eine Exponentialzeit-Turing-Maschine relativ zu  $O$  simulieren. Damit sehen wir, dass auch  $P^O \subsetneq E^O$  für jedes beliebige Orakel  $O$  gilt. Auf ähnliche Weise relativiert die Aussage „ $KAN \in NP$  ist  $\leq_m^P$ -vollständig“ (zu „ $KAN^O \in NP^O$  ist  $\leq_m^{p,O}$ -vollständig“).

Im Folgenden soll jede Aussage als relativierbar verstanden werden, es sei denn es wird auf die Nichtrelativierbarkeit hingewiesen, oder von konkreten natürlichen Mengen gesprochen, welche ohnehin nicht relativieren.

## 2.5 Beweissysteme

Beweissysteme wurden in der Einleitung schon kurz definiert. In diesem Abschnitt wird die präzise Definition von Cook und Reckhow (1979) wiedergegeben.

**Definition 2.9.** Eine Funktion  $f \in FP$  ist ein *Beweissystem* für  $L$  wenn  $\text{img}(f) = L$ . Ist  $f(w) = x$  schreiben wir auch, dass  $w$  ein  $f$ -Beweis für  $x$  ist.

Existiert zudem ein Polynom  $q$  sodass für jedes  $x \in L$  ein  $f$ -Beweis  $w$  der Länge  $\leq q(|x|)$  existiert, sagen wir dass  $f$  *kurzen Beweise* hat.  $\triangleleft$

5. Es ist durchaus möglich, SAT so zu verallgemeinern dass eine entsprechende Variante auch relativiert vollständig bleibt. Um das zu erreichen, ergänzt man üblicherweise die SAT-Formeln durch  $n$ -stellige Prädikate  $X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  und interpretiert diesen Term als wahr genau dann wenn  $x_1 x_2 \dots x_n$  im Orakel liegt. So zum Beispiel bei Dingel (2022).

Hieraus stellt sich die erste Frage, welche Mengen Beweissysteme mit kurzen Beweisen haben.

Ein einfaches Beweissystem für die Menge  $\text{SAT} \in \text{NP}$  wäre z.B. das *Standardbeweissystem*  $\text{sat}$  für SAT:

$$\text{sat}(\varphi, w) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \varphi & \text{wenn } w \text{ eine erfüllende Belegung für } \varphi \text{ ist,} \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieses Beweissystem hat kurze Beweise.

Cook und Reckhow machen dagegen die Beobachtung, dass im Fall von der Menge TAUT der aussagenlogischen Tautologien die Beobachtung, dass TAUT genau dann ein Beweissystem mit kurzen Beweisen hat, wenn  $\text{NP} = \text{coNP}$ . Diese Einsicht motivierte das sogenannte *Cook-Reckhow-Programm*: man nähert sich der Frage  $\text{NP} \neq \text{coNP}$  mittels Untersuchung immer stärkerer Beweissysteme. Um nun die relative Stärke unterschiedlicher Beweissysteme zu vergleichen, führen Cook und Reckhow den Begriff der Simulation ein.

**Definition 2.10.** Seien  $f, g$  zwei Beweissysteme für  $L$ . Wir sagen dass  $f$  das Beweissystem  $g$  *simuliert* wenn eine (nicht notwendigerweise effizient oder berechenbare) polynomiell längenbeschränkte Funktion  $\pi$  existiert sodass

$$f(\pi(w)) = g(w).$$

Heißt, für jeden  $g$ -Beweis  $w$  für  $x$  existiert auch ein  $f$ -Beweis  $\pi(w)$  für das gleiche  $x$ , und dieser  $f$ -Beweis  $\pi(w)$  ist nur polynomiell länger als  $w$ .

Ist zusätzlich  $\pi \in \text{FP}$ , dann sagen wir, dass  $f$  das Beweissystem  $g$  *P-simuliert*.  $\triangleleft$

Wenn klar ist, dass  $f$  und  $g$  Beweissysteme für die gleiche Menge sind, können wir abkürzend alternativ auch äquivalent  $g \leq_m^P f$  schreiben, um zu sagen, dass  $f$  das Beweissystem  $g$  *P-simuliert*.

Die Beweissysteme mit kurzen Beweisen sind unter Simulation abgeschlossen, und die P-Invertierbarkeit von Beweissystemen sind unter P-Simulation abgeschlossen:

**Beobachtung 2.11.** Seien  $h, h'$  zwei Beweissysteme für  $L$ .

- (1) Wenn  $h$  kurze Beweise hat, und  $h'$  das Beweissystem  $h$  simulieren kann, dann hat auch  $h'$  kurze Beweise.
- (2) Wenn  $h$  P-invertierbar ist, und  $h'$  das Beweissystem  $h$  P-simulieren kann, dann ist auch  $h'$  P-invertierbar.

Die Relation der (P-)Simulation generiert wieder eine Quasiordnung, die nach der Existenz von größten Elementen untersucht werden kann. Hieraus ergibt sich der Begriff der (P-)Optimalität.

**Definition 2.12.** Ein Beweissystem  $f$  für  $L$  ist (P-)optimal wenn es jedes Beweissystem  $g$  für  $L$  (P-)simulieren kann.

Die P-Optimalität von  $f$  ist äquivalent zur  $\leq_m^P$ -Vollständigkeit von  $f$  für die Teilmenge der Funktionen aus FP mit Bildmenge  $L$ .  $\triangleleft$

Die beiden Definition relativieren natürlicherweise, und wir können so z.B. von  $\text{P}^0$ -optimalen Beweissystemen  $f \in \text{FP}^0$  sprechen, wenn für jedes Beweissystem  $g \in \text{FP}^0$  eine Funktion  $h \in \text{FP}^0$  existiert mit  $f(h(w)) = g(w)$ .

Jedes Beweissystem mit kurzen Beweisen ist auch optimal.



**Beobachtung 2.13.** Sei  $f \in \text{FP}$  ein Beweissystem für  $L$ . Hat  $f$  kurze Beweise, dann ist  $f$  optimal.

*Beweis.* Sei  $g \in \text{FP}$  ein Beweissystem für  $L$ . Wir zeigen, dass  $f$  das Beweissystem  $g$  simulieren kann. Nachdem  $f$  kurze Beweise hat, existiert auch eine (nicht notwendigerweise berechenbare) Funktion  $\mu$  und ein Polynom  $q$ , sodass  $\mu$  jedem  $x \in L$  einen  $f$ -Beweis  $\mu(x)$  mit  $|\mu(x)| \leq q(|x|)$  zuweist. Damit gilt insbesondere  $f(\mu(x)) = x$ .

Sei nun  $\pi(w) \stackrel{\text{df}}{=} \mu(g(w))$ . Zum einen gilt

$$f(\pi(w)) = f(\mu(g(w))) = g(w),$$

heißt  $g$ -Beweise können in  $f$ -Beweise umgeschrieben werden. Außerdem ist  $\pi$  polynomiell längenbeschränkt: es gilt

$$|\pi(w)| = |\mu(g(w))| \leq q(|g(w)|) \leq q(p(|w|)),$$

wobei  $p$  das Polynom ist, welches die Laufzeit von  $g$  beschränkt.  $\square$

Im Zusammenhang mit dem Cook-Reckhow-Programm weisen Krajíček und Pudlák (1989) darauf hin, dass die Existenz eines optimalen Beweissystems für TAUT wahrscheinlich schwächer ist, als die Existenz eines Beweissystems mit kurzen Beweisen, denn Ersteres folgt schon aus  $\text{NE} = \text{coNE}$ . (Köbler, Messner und Torán, 2003, schwächen diese Voraussetzung auf  $\text{NEE} = \text{coNEE}$  ab.)

Für die Mengen aus  $\text{P}$  bzw.  $\text{NP}$  existieren  $\text{P}$ -optimale bzw. optimale Beweissysteme:

**Beobachtung 2.14.** (1) Ist  $A \in \text{P}$ , dann existiert ein  $\text{P}$ -optimales Beweissystem für  $A$  mit kurzen Beweisen.

(2) Ist  $A \in \text{NP}$ , dann existiert ein optimales Beweissystem für  $A$  mit kurzen Beweisen.

*Beweis.* Zu (1): Betrachte die Funktion

$$h(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} x & \text{wenn } x \in A \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}.$$

Diese Funktion ist definitiv ein Beweissystem für  $A$ . Sie ist in  $\text{FP}$ , da der Test „ $x \in A$ “ in Polynomialzeit möglich. Klar ist auch dass  $h$  kurze Beweise hat. Dieses Beweissystem ist  $\text{P}$ -optimal, denn wenn  $g$  ein weiteres Beweissystem für  $A$  ist, und wenn  $w$  ein  $g$ -Beweis für  $x$  ist, dann ist  $h(g(w)) = h(x) = x$ , also  $g(w)$  ein  $h$ -Beweis für  $x$ , wie gewünscht.

Zu (2): Kann durch die bekannte Zertifikats-Definition von  $\text{NP}$  gezeigt werden (was im späteren Teil der Arbeit auch geschieht), zur Vollständigkeit lässt sich an dieser Stelle aber auch ein Beweis über die NPTM-Definition von oben angeben. Sei  $N$  eine NPTM, die  $A$  mit polynomieller Laufzeit  $p$  entscheidet. Definiere nun

$$h(x, \alpha) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} x & N(x) \text{ akz. auf Rechenweg } \alpha \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Nachdem  $L(N) = A$  ist  $h$  definitiv ein Beweissystem für  $A$ . Es ist leicht zu sehen dass  $h \in \text{FP}$ , ist der Test „ $\alpha$  ist ein gültiger Rechenweg und akzeptiert“ in Polynomialzeit möglich. Ferner existiert für jedes  $x \in A$  auch ein akzeptierender Rechenweg  $\alpha$  auf  $N(x)$  der Länge polynomiell in  $|x|$ , womit der Beweis  $(x, \alpha)$  auch nur polynomiell länger als  $x$  ist. Da Beweissystem  $h$  hat also kurze Beweise, und ist damit auch optimal.  $\square$

Insbesondere mit dem letzten Punkt können die optimalen Beweissysteme der Mengen aus  $\text{NP}$  auch als Beweissysteme mit kurzen Beweisen charakterisiert werden:

**Beobachtung 2.15.** Sei  $A \in \text{NP}$  und  $f$  ein Beweissystem für  $A$ . Das Beweissystem  $f$  ist optimal genau dann wenn  $f$  kurze Beweise hat.

*Beweis.* Richtung von rechts nach links klar, das gilt schon im allgemeinen Fall nach Beobachtung 2.13. Für die andere Richtung sei  $f$  ein optimales Beweissystem für  $A$ . Dann muss  $f$  auch das Beweissystem  $h$  mit kurzen Beweisen aus voriger Beobachtung simulieren. Für jeden kurzen  $h$ -Beweis  $w$  für  $x$  existiert dann ein höchstens polynomiell längerer  $f$ -Beweis  $\pi(w)$ .  $\square$

Die Existenz eines (P-)optimalen Beweissystems für eine Menge  $L$  ist eine Eigenschaft, die sich bzgl.  $\leq_m^P$  nach unten überträgt:

**Lemma 2.16** (Messner, 2000, Thm. 3.2). *Hat  $A$  ein (P-)optimales Beweissystem und  $B \leq_m^P A$ , dann hat auch  $B$  ein (P-)optimales Beweissystem.*

*Beweis.* Sei  $f$  die Reduktionsfunktion, die  $B \leq_m^P A$  realisiert, und sei  $h$  ein P-optimales Beweissystem für  $A$ . Definiere

$$h'(x, w) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} x & \text{wenn } h(w) = f(x), \text{ also } w \text{ ein } h\text{-Beweis für } f(x) \text{ ist,} \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen dass  $h'$  ein Beweissystem für  $B$  ist.

Wir zeigen nun dass  $h'$  auch P-optimal ist. Sei hierfür  $g'$  ein Beweissystem für  $B$ . Wir definieren nun

$$g(y) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} f(g'(w)) & \text{wenn } y = 1w, \\ h(w) & \text{wenn } y = 0w. \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen dass  $g$  ein Beweissystem für  $A$  ist. Dann kann  $h$  auch das Beweissystem  $g$  via  $\pi \in \text{FP}$  P-simulieren. Beachte dass  $1w$  ein  $g$ -Beweis für  $f(g'(w))$  ist, und damit  $\pi(1w)$  ein  $h$ -Beweis für  $f(g'(w))$  ist. Damit

$$h'(\underbrace{g'(w), \pi(1w)}_{\pi'(w)}) = g'(w).$$

bzw. kann jeder  $g'$ -Beweis  $w$  für  $x$  in einen  $h'$ -Beweis  $\pi'(w)$  übersetzt werden.

Der Beweis für die Aussage mit optimalen Beweissystemen läuft ähnlich.  $\square$

Beachte insbesondere, dass dieser Beweis relativiert. In Kombination mit vollständigen Mengen erhalten wir hieraus folgendes Korollar:

**Korollar 2.17.** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (1) *Es existiert eine  $\leq_m^P$ -vollständige Menge  $A$  für NP, für welche ein (P-)optimales Beweissystem  $h$  existiert. (Das ist die Aussage  $\neg \text{SAT}$ .)*
- (2) *Für jede Menge  $B \in \text{NP}$  existiert ein (P-)optimales Beweissystem.*

Analoge Äquivalenzen gelten für coNP.

Das erklärt auch die Form, in der wir in der Einleitung die Hypothese SAT, TAUT gewählt haben. Ursprünglich sagte die Hypothese TAUT aus, dass kein P-optimales aussagenlogische Beweissystem existiert, also kein Beweissystem für die coNP-vollständige Menge TAUT existiert. Mit dem vorigen Korollar ist klar, dass diese Aussage im unrelativierten Fall äquivalent zu unserer hier gewählten Definition von TAUT ist: *Keine  $\leq_m^P$ -vollständige Menge  $A$  für NP hat ein P-optimales Beweissystem.* Denn wenn ein P-optimales

Beweissystem für TAUT existiert, dann auch für *eine* coNP-vollständige Menge. Für die andere Richtung, wenn für *eine* coNP-vollständige Menge ein P-optimales Beweissystem existiert, dann auch für alle Mengen in coNP, also insbesondere auch für TAUT.

Die hier gewählte Charakterisierung hat vor allem den Vorteil, dass SAT, TAUT, TAUT<sup>N</sup> auf natürliche Weise relativieren. So relativiert beispielsweise SAT auf Orakel  $O$  zur Aussage „kein  $\leq_m^{p,O}$ -vollständiges  $L \in NP^O$  für  $NP^O$  hat ein  $p^O$ -optimales Beweissystem  $f \in FP^O$ “. Das entspricht genau der Form von Relativierung, welche als erstes von Dose (2020a) vorgeschlagen wurde.



### 3 Zur Konzeptualisierung und Ordnung von Suchproblemen

In diesem Kapitel werden wir grundsätzlich überlegen, wie NP-Suchprobleme in der Komplexitätstheorie erfasst werden können, wie wir diese in ihrer Schwierigkeit vergleichen können, und welche Ähnlichkeiten zwischen den NP-Suchproblemen erkennbar sind. In Abschnitt 3.1 werden wir eine formal präzise Definition von NP-Suchproblemen erarbeiten, wie sie bereits in der Einleitung intuitiv vorgestellt wurden. Das umfasst auch die Unterklasse TFNP der totalen NP-Suchprobleme.

In Abschnitt 3.2 gehen wir auf die Beziehung zwischen NP-Suchproblemen und den entsprechenden NP-Entscheidungsproblemen ein; insbesondere zeigen wir, in welchen Situationen das Entscheidungsproblem „gleich schwer“ wie das Suchproblem ist (das ist das Argument *search reduces to decision*), und in welchen nicht.

Um die Schwierigkeit der unterschiedlichen NP-Suchproblemen zu vergleichen, werden wir – analog wie auf den Entscheidungsproblemen – ein Begriff der Levin-Reduzierbarkeit definieren. In Abschnitt 3.3 definieren wir diesen Reduzierbarkeits-Begriff präzise und betrachten Eigenschaften des entsprechenden Vollständigkeitsbegriff. In diesem Zusammenhang betrachten wir auch die bekannteren verwandten sparsamen („parsimonious“) Reduktionen.

#### 3.1 Definition von Suchproblemen

Wir geben hier noch einmal die Definition von Suchproblemen wieder, welche schon in der Einleitung erarbeitet wurde. Als Suchprobleme verstehen wir das algorithmische Problem, gegeben eine Probleminstanz  $x$ , entweder eine entsprechende positive Lösungsinstanz  $y$  zu berechnen, oder negativ abzulehnen. Hier noch einmal das Beispiel (7) aus der Einleitung: gegeben eine aussagenlogische Formel  $\varphi$ , berechne entweder eine Belegung  $y$  welche  $\varphi$  erfüllt, oder gebe „unerfüllbar“ aus. Die wesentliche Einschränkung, welche wir auch schon in der Einleitung festgelegt haben, ist die Einschränkung auf *NP-Suchprobleme*. Zur Erinnerung: wir meinen damit, dass

- die Lösungen nur polynomiell länger als die Probleminstanzen sind, und
- effizient in Polynomialzeit verifiziert werden kann, ob zu einer gegebenen Probleminstanz  $x$  ein beliebiges Wort  $y$  tatsächlich eine (positive) Lösung im Sinne des Suchproblems darstellt oder nicht.

(Wir fordern im Übrigen nicht, dass negatives Ablehnen effizient verifiziert werden kann.) Um das Beispiel wieder aufzugreifen: Zum einen haben Formeln  $\varphi$ , welche überhaupt erfüllbar sind, eine erfüllende Belegung in der Länge von  $\varphi$ . Zum anderen kann effizient geprüft werden, ob  $y$  tatsächlich eine erfüllbare Belegung von  $\varphi$  ist.

Wir können die beiden obigen Punkte noch einmal in eine formale Definition gießen:

**Definition 3.1** (NP-Relation, FNP). Eine *NP-Relation* ist eine binäre Relation  $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ , sodass diese

- (1) in Polynomialzeit entscheidbar ist, d.h.  $R \in P$ , bzw. genauer  $\{\langle x, y \rangle \mid (x, y) \in R\} \in P$  und
- (2) polynomiell längenbeschränkt ist, d.h. es existiert ein Polynom  $q$ , sodass

$$(x, y) \in R \implies |y| \leq q(|x|) \quad \text{für alle } x, y \in \Sigma^*. \quad (3.1)$$

Die Wörter der ersten Komponente nennen wir *Probleminstanzen* oder *Instanzen* oder *Probleme* von  $R$ , die Wörter der zweiten Komponente nennen wir die *Zertifikate* (oder manchmal *Lösungen*) von  $R$ . Wir sagen dann für  $(x, y) \in R$ , dass  $y$  ein Zertifikat für  $x$  ist. In diesem Sinne sagt (3.1) aus, dass Zertifikate  $y$  für  $x$  nicht superpolynomiell länger als  $x$  sein dürfen. Das Polynom  $q$  nennen wir auch die *Zertifikatsschranke* zu  $R$ .

Wir schreiben FNP für die Klasse aller NP-Relationen. ◁

Das oben diskutierte Suchproblem zu einer NP-Relation  $R$  kann jetzt wie folgt formal formuliert werden:

**Suchproblem zur NP-Relation  $R$ :**

**Gegeben:** Instanz  $x$ .

**Gesucht:** Zertifikat  $y$  mit  $(x, y) \in R$  falls ein solches  $y$  überhaupt existiert, sonst „keine Lösung“ ausgeben.

Zur Erinnerung:

$$\text{Proj}(R) = \{x \mid \exists y \in \Sigma^*, (x, y) \in R\} \in \text{NP}.$$

Die Menge  $\text{Proj}(R)$  ist also die Menge der Probleminstanzen, für welche ein zugehöriges Zertifikat existiert; damit entspricht  $\text{Proj}(R)$  derjenigen Menge, die üblicherweise bei algorithmischen Entscheidungsproblemen betrachtet wird. Um die beiden Varianten noch einmal gegenüberzustellen: das entsprechende Entscheidungsproblem einer NP-Relation  $R$  lautet

**Entscheidungsproblem zur NP-Relation  $R$ :**

**Gegeben:** Instanz  $x$ .

**Gesucht:** Akzeptieren falls ein Zertifikat  $y$  mit  $(x, y) \in R$  existiert, sonst ablehnen.

Das entspricht also dem Entscheiden der Sprache  $\text{Proj}(R)$ . Damit wird auch klar, dass das entsprechende Entscheidungsproblem bzw. die Sprache  $\text{Proj}(R)$  nicht von der konkreten Relation  $R$  abhängig ist. Vielmehr: es existieren zur Sprache  $L$  ggf. unendlich viele NP-Relationen  $R$  mit  $\text{Proj}(R) = L$ . Für eine Sprache  $L$  sagen wir dann auch, dass  $R$  eine NP-Relation für  $L$  ist.

Die Zugehörigkeit des entsprechenden Suchproblems zu NP folgt hierbei unmittelbar aus der Definition von NP-Relationen. (Rate nichtdeterministisch ein Zertifikat und akzeptiere wenn dieses korrekt ist.) Im nächsten Abschnitt wird die Beziehung zwischen Suchproblemen bzw. NP-Relationen einerseits, und Entscheidungsproblemen bzw. Mengen aus NP andererseits, weiter behandelt. Festhalten können wir hier aber schon, dass das Suchproblem offenbar „schwieriger“ ist als das alleinige Entscheidungsproblem.

Im Folgenden werden einige Beispiele von natürlichen NP-Relationen angegeben. Um diese von den sonst üblicherweise verwendeten Labels für Mengen bzw. Suchprobleme

abzugrenzen, sind im Verlauf dieser Arbeit NP-Relationen zu natürlichen Suchproblemen immer mit einem  $r$  am Anfang gekennzeichnet.

- $r\text{PERFECTMATCHING} \stackrel{\text{df}}{=} \{(G, M) \mid G \text{ ist ein Graph, } M \text{ ein größtes Matching auf } G\}$ . Das korrespondiert zum Suchproblem (3) aus der Einleitung.
- $r\text{SAT} \stackrel{\text{df}}{=} \{(\varphi, w) \mid \varphi \text{ ist eine aussagenlogische Formel, } w \text{ erfüllende Belegung für } \varphi\}$ . Das korrespondiert zum Suchproblem (7) aus der Einleitung.
- $r\text{VC} \stackrel{\text{df}}{=} \{((G, k), C) \mid G \text{ ist ein Graph, } C \text{ eine Knotenüberdeckung, und } |C| \leq k\}$ .
- $r\text{HAMCYCLE} \stackrel{\text{df}}{=} \{(G, P) \mid G \text{ ist ein Graph, } P \text{ ein Zyklus der jeden Knoten genau einmal berührt}\}$ .
- $r\text{ANOTHERHAMCYCLE} \stackrel{\text{df}}{=} \{((G, P), P') \mid G \text{ ist ein Graph, } P, P' \text{ je ein Zyklus der jeden Knoten genau einmal berührt, } P \neq P'\}$ .
- $r\text{FACTORIZATION} \stackrel{\text{df}}{=} \{(n, (p_1, p_2, \dots, p_k)) \mid n \in \mathbb{N}, n > 1, \text{ alle } p_i \text{ Primzahlen ungleich 2 oder } n, \text{ und } n \stackrel{\text{df}}{=} p_1 \cdots p_k\}$ . Das korrespondiert zum Suchproblem (1) aus der Einleitung.
- $r\text{FACTOR} \stackrel{\text{df}}{=} \{(n, p) \mid n \in \mathbb{N}, n > 1 \text{ ist nicht prim, und } p \text{ ist ein nichttrivialer Faktor von } n\}$ .
- $r\text{SMALLFACTOR} \stackrel{\text{df}}{=} \{((n, a), p) \mid n \in \mathbb{N}, n > 1 \text{ ist nicht prim, und } p \text{ ist ein nichttrivialer Faktor von } n \text{ und } p \leq a\}$ .
- $r\text{GI} \stackrel{\text{df}}{=} \{((G, H), \sigma) \mid G, H \text{ sind Graphen mit gleicher Knotenmenge, und } \sigma \text{ ist ein Graphisomorphismus von } G \text{ nach } H\}$ .

Jede dieser Relationen ist auch eine NP-Relation. Beachte, dass die Menge der Primzahlen in Polynomialzeit entscheidbar ist (Agrawal, Kayal und Saxena, 2004). Bei jeder der obigen natürlichen Relationen gilt, dass die Projektion auch der sonst üblichen Sprache aus NP zum Entscheidungsproblem entspricht. Wir haben z.B.

$$\text{Proj}(r\text{VC}) = \{(G, k) \mid \text{ex. Knotenüberdeckung } C \text{ von Graph } G \text{ mit } |C| \leq k\}.$$

Die Definition von Suchproblemen als NP-Relationen lässt es zu, Suchprobleme bzw. NP-Relationen als „partielle Multifunktionen“ zu verstehen. Selman (1994) definiert in seiner Taxonomie der Funktionsklassen die Klasse  $\text{NPMV}_g$  als die Klasse derjenigen Multifunktionen  $f \in \text{NPMV}$ , für die (der Graph)  $f$  in  $P$  liegt. Es lässt sich leicht sehen, dass die hier definierte Klasse  $\text{FNP}$  identisch zu Selman definierten Klasse  $\text{NPMV}_g$  ist, solange man Multifunktionen mit binären Relationen identifiziert.

Mit dieser Perspektivierung ist auch einfach zu definieren, was mit „Suchproblem lösen“ gemeint ist. Wir machen hierbei Gebrauch von Verfeinerungen (von Multifunktionen). Wir sagen, dass das Suchproblem zur NP-Relation  $R$  in Polynomialzeit lösbar ist, wenn  $R \in_c \text{FP}$ . Diese Aussage bedeutet ja, dass eine Verfeinerung  $f$  von  $R$  existiert, und  $f$  ist dabei eine (partielle) in Polynomialzeit berechenbare Funktion. Es existiert also ein deterministischer Polynomialzeit-Transduktor  $T$ , welcher  $f$  berechnet. Für eine Eingabeinstanz  $x$  wird also entweder  $T(x)$  einen Wert  $y$  ausgeben für den  $y \in \text{set-}R(x)$  gilt, bzw. in anderen Worten, eine Lösung  $y$  für  $x$ . Oder, falls  $T(x)$  ablehnt, dann ist  $x \notin \text{dom}(f) = \text{Proj}(R)$ , heißt „ $f(x)$  lehnt ab“ bedeutet dass  $x$  keine Lösung hat.

Damit haben wir für die intuitive Aussage argumentiert, dass das NP-Suchproblem „schwieriger“ ist als das entsprechende NP-Entscheidungsproblem, in dem Sinne dass sich das NP-Entscheidungsproblem auf das NP-Suchproblem reduzieren lässt:

**Beobachtung 3.2.** Sei  $R$  eine NP-Relation. Falls  $R \in_c \text{FP}$ , dann gilt  $\text{Proj}(R) \in P$ .

Der aktuelle Stand zur Lösbarkeit der oben genannten natürlichen Suchprobleme ist:

- $\text{rPERFECTMATCHING} \in_c \text{FP}$ .
- $\text{NP} = P \iff \text{rSAT} \in_c \text{FP} \iff \text{rVC} \in_c \text{FP} \iff \text{rHAMCYCLE} \in_c \text{FP} \iff \text{rANOTHERHAMCYCLE} \in_c \text{FP}$ .
- Unklar, ob  $\text{rSMALLFACTOR}, \text{rFACTOR}, \text{rFACTORIZATION} \stackrel{?}{\in}_c \text{FP}$ . Wir haben aber  $\text{UP} \cap \text{coUP} = P \implies \text{rSMALLFACTOR} \in_c \text{FP} \iff \text{rFACTOR} \in_c \text{FP} \iff \text{rFACTORIZATION} \in_c \text{FP}$ .
- Unklar, ob  $\text{rGI} \stackrel{?}{\in}_c \text{FP}$ .

Bevor nun im nächsten Abschnitt die Suchprobleme den Entscheidungsproblemen näher gegenübergestellt werden, schließen wir diesen Abschnitt noch mit einer kurzen Diskussion zu *totalen* Suchproblemen ab.

#### Totale NP-Suchprobleme

Die oben formulierte Definition von FNP ist genau diejenige, die von Megiddo und Papadimitriou (1991) zuerst in dieser Form und Bezeichnung definiert wurde. Ihre Motivation war hierbei, insbesondere die *totalen* NP-Suchprobleme in den Blick zu nehmen. Also solche Suchprobleme, bei denen jede Probleminstanz immer mindestens ein Zertifikat bzw. Lösung hat. Die Faktorisierung ist beispielsweise ein solches totales Suchproblem, da ja jede natürliche Zahl sich faktorisieren lässt.

Das sind – entsprechend dieser Definition von FNP bzw. Konzeptualisierung von Suchproblemen – genau jene NP-Relationen, welche (links-)total sind: für jedes  $x \in \Sigma^*$  existiert ein  $y \in \Sigma^*$  mit  $(x, y) \in R$ . Die Relationen  $\text{rFACTORIZATION}$  und  $\text{rFACTOR}$  wie oben definiert sind nicht total; nachdem die negativen Instanzen aber besonders „einfach“ sind, können für beide NP-Relationen effektiv äquivalente Relationen angegeben werden, die total sind:

- $\text{rFACTORIZATION}' \stackrel{\text{df}}{=} \text{rFACTORIZATION} \cup \{(n, \text{„ungültig“}) \mid n \leq 1\}$ .
- $\text{rFACTOR}' \stackrel{\text{df}}{=} \text{rFACTOR} \cup \{(n, \text{„ungültig“}) \mid n \leq 1 \text{ oder } n \text{ ist prim}\}$ .

Megiddo und Papadimitriou (1991) fassen diese totalen NP-Relationen zur Klasse TFNP zusammen:

**Definition 3.3** (TFNP). Die Klasse TFNP ist die Teilmenge von FNP derjenigen NP-Relationen  $R$ , welche linkstotal sind, heißt zu jedem  $x \in \Sigma^*$  existiert ein  $y \in \Sigma^*$  mit  $(x, y) \in R$ . ◁

Hierzu gehören die oben genannten Varianten  $\text{rFACTORIZATION}'$  und  $\text{rFACTOR}'$ . Für Megiddo und Papadimitriou befinden sich in TFNP eine Vielzahl von interessanten und schwierigen Suchproblemen, bei denen die Frage der Lösbarkeit in Polynomialzeit noch offen ist. Das betrifft u.a. zahlentheoretische Probleme aus der Kryptographie wie Faktorisierung oder diskreter Logarithmus. Beachte, dass TFNP nicht identisch ist zur Klasse  $\text{NPMV}_t$ ; es macht sich hier die gleiche Unterscheidung wie bei FNP vs. NPMV auf: Die Klasse TFNP ist eine Teilmenge von  $\text{NPMV}_t$  jener totalen Multifunktionen  $f \in \text{NPMV}_t$ , für die der (der Graph)  $f$  in  $P$  liegt. Man könnte also TFNP äquivalent als  $(\text{NPMV}_t)_g$  schreiben. Beachte, dass TFNP sogar eine echte Teilmenge von  $\text{NPMV}_t$  ist, außer  $P = \text{NP}$ :



**Beobachtung 3.4** (vgl. Fenner, Fortnow, Naik und Rogers, 2003, Prop. 5). *Wenn für alle  $f \in \text{NPMV}_t$  auch (der Graph)  $f \in P$  ist, dann gilt  $P = NP$ .*

*Beweis.* Betrachte folgenden NPTM-Transduktor  $N$  auf Eingabe  $\varphi \in \Sigma^*$ : zunächst spaltet sich die Berechnung nichtdeterministisch auf. In der ersten Rechnung wird sofort 1 ausgegeben. In der zweiten Rechnung wird eine Belegung  $w$  für die aussagenlogische Formel  $\varphi$  geraten, und 2 ausgegeben wenn  $w$  die Formel  $\varphi$  erfüllt. Sei  $f$  die Multifunktion, welche von  $N$  berechnet wird. Damit gilt:

$$\text{set-}f(x) = \begin{cases} \{1, 2\} & \text{falls } x \in \text{SAT}, \\ \{1\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

und  $f \in \text{NPMV}_t$ . Nach Annahme ist  $f \in P$ . Nun kann aber SAT in Polynomialzeit entschieden werden, denn  $\varphi \in \text{SAT}$  genau dann wenn  $(\varphi, 2) \in f$ .

Die Aussage relativiert, wenn anstelle SAT z.B. das kanonische vollständige Problem gewählt wird.  $\square$

Wie in der Einleitung angesprochen kann sich die Aussage „alle Suchprobleme in TFNP lassen sich effizient lösen“ äquivalent als Hypothese Q formulieren.

**Beobachtung 3.5** (Fenner, Fortnow, Naik und Rogers, 2003). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (1) *Aussage Q: für jede totale NPTM  $N$  (d.h.  $L(N) = \Sigma^*$ ) existiert eine Funktion  $g \in \text{FP}$  sodass für alle  $x$  das Bild  $g(x)$  ein akzeptierender Rechenweg von  $N(x)$  ist.*
- (2)  $\text{TFNP} \subseteq_c \text{FP}$ .

*Beweis.* (1)  $\implies$  (2): Sei  $R \in \text{TFNP}$  mit Zertifikatsschranke  $p$ . Definiere die NPTM  $N$  die auf Eingabe  $x$  erst ein Zertifikat  $y \in \Sigma^{\leq p(|x|)}$  rät, und genau dann akzeptiert wenn  $(x, y) \in R$ . Es ist klar, dass  $L(N) = \text{Proj}(R) = \Sigma^*$ . Nach (1) existiert also  $g \in \text{FP}$  sodass  $g(x)$  ein akzeptierender Rechenweg von  $N(x)$  ist. Aus diesem Rechenweg lässt sich nun effizient das geratene Zertifikat extrahieren: sei  $g'(x)$  definiert als der geratene Zeuge  $y$ . Dann ist  $(x, g'(x)) \in R$  und damit  $g'$  eine Verfeinerung von  $R$ . Da  $g' \in \text{FP}$  ist  $R \in_c \text{FP}$ .

(2)  $\implies$  (1): Sei  $N$  eine NPTM mit  $L(N) = \Sigma^*$ . Klar ist, dass die Relation  $R \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, \alpha) \mid N(x) \text{ akz. auf Rechenweg } \alpha\}$  eine totale NP-Relation ist. Mit (2) existiert also eine Verfeinerung  $g \in \text{FP}$  von  $R$ . Für  $x \in \Sigma^*$  ist also  $(x, g(x)) \in R$  und nach Definition akzeptiert also  $N(x)$  auf Rechenweg  $g(x)$ , wie gewünscht.  $\square$

Aus der Beschäftigung mit TFNP-Problemen kam es ferner zu einer umfassenden Theoriebildung. So kam z.B. eine verfeinerte Betrachtung durch Unterklassen von TFNP hinzu. Jede dieser Unterklassen verinnerlicht hierbei jeweils das kombinatorische Prinzip, „warum“ ein Suchproblem total ist (vgl. den Überblick von Goldberg und Papadimitriou, 2018). Exemplarisch seien hier zwei Unterklassen skizziert:

- Die Unterklasse PLS („polynomial local search“) umfasst die Suchprobleme, welche in die Form eines Suchgraphen mit polynomiellen Grad gebracht werden können, worauf ein lokales Optimum gesucht ist. Das zugrunde liegende kombinatorische Prinzip zur Totalität wäre „endliche Suchgraphen haben immer ein lokales Optimum“ oder allgemeiner „Jeder endliche gerichtete azyklische Graph hat eine Senke“.

Ein Beispiel hierfür wäre die Suche nach einem lokal optimalen Schnitt in einem Graphen; hier meint „lokal optimal“, dass kein Flip eines Knotens zu mehr Kantenschnitten führt. Nachdem es nur exponentiell viele Schnitte gibt, muss mindestens einer davon lokal optimal sein. Beachte außerdem, dass „lokale Optimalität“ in Polynomialzeit überprüft werden kann, denn es muss nur getestet werden, ob einer der linear vielen möglichen Flips eines Knotens zu einer Verbesserung führt.

- Die Unterklasse PPP („polynomial pigeon principle“) umfasst Suchprobleme, welche aufgrund des kombinatorischen Schubfachprinzips total sind.

Ein Beispiel hierfür ist das Gleiche-Summe-Suchproblem: gegeben  $n$  positive ganze Zahlen die sich zu  $< 2^n - 1$  aufsummieren, finde zwei unterschiedliche nicht-leere Teilmengen dieser Zahlen welche die gleiche Summe haben. Diese zwei Teilmengen existieren immer nach Schubfachprinzip: es existieren  $2^n - 1$  viele nicht-leere Teilmengen, jede davon mit Summe  $< 2^n - 1$ , die Summen können also nicht alle unterschiedlich sein.

Auf die weitere Theorie der TFNP-Probleme wird in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen. Wir werden aber in Abschnitt 3.3 noch Reduktionen auf NP-Relationen definieren; dieser Reduktionsbegriff identisch zu dem sonst üblichen Reduktionsbegriff auf den TFNP-Problemen (Megiddo und Papadimitriou, 1991).

### 3.2 Suchprobleme vs. Entscheidungsprobleme

Wie in der Einleitung schon ausgeführt, konzentriert sich die algorithmische Komplexitätstheorie primär auf die Entscheidungsprobleme und weniger auf die Suchprobleme. Das ist durchaus fundiert: es geht mit einer Vereinfachung der Konzepte, Definitionen und Theorien einher, und gleichzeitig lässt sich für viele relevante Instanzen das Suchproblem auf das entsprechende Entscheidungsproblem „reduzieren“. Dieses Argument wird gerne als *search reduces to decision* beschrieben.

In diesem Abschnitt werden detailliert Suchprobleme und Entscheidungsprobleme gegenübergestellt und Forschungsergebnisse hierzu aus der Literatur präsentiert. Zum einen wird die eben genannte Reduzierbarkeit und das *search-reduces-to-decision*-Argument ausgeführt, und zum anderen werden Ergebnisse vorgestellt, die darauf hinweisen dass genau dieses Argument nicht für alle Suchprobleme zutrifft.

Zunächst sei auf die Beziehungen zwischen NP-Relationen und NP-Sprachen hingewiesen. Tatsächlich haben wir bereits gesehen, dass wir über die Projektion jedem NP-Suchproblem bzw. NP-Relation ein korrespondierendes Entscheidungsproblem aus NP zuordnen konnten. Tatsächlich lässt sich diese Zuordnung auch umkehren: zu jeder Sprache bzw. Entscheidungsproblem  $L \in \text{NP}$  existiert (mind.) eine NP-Relation  $R$  mit  $L = \text{Proj}(R)$ , und zu jeder NP-Relation bzw. NP-Suchproblem  $R$  ist  $\text{Proj}(R) \in \text{NP}$ . Das ist die übliche „Zertifikats-Charakterisierung“ von NP aus den Lehrbüchern.

**Beobachtung 3.6** (Zertifikats-Definition von NP).

$$\text{NP} = \{\text{Proj}(R) \mid R \text{ ist eine NP-Relation}\}.$$

*Beweis.* Wir müssen nur noch die Inklusion von links nach rechts zeigen. Sei hierfür  $L \in \text{NP}$  eine Sprache und  $N$  eine NPTM die  $L$  entscheidet, wobei die Laufzeit durch das Polynom  $p$  beschränkt ist. Definiere nun die Relation

$$R_N \stackrel{\text{df}}{=} \{(x, \alpha) \mid N(x) \text{ akz. mit RW } \alpha, \alpha \text{ hat } \leq p(|x|) \text{ viele Schritte}\}$$

Diese Relation ist eine NP-Relation. Der Test ist offenbar in Polynomialzeit möglich, und die Relation ist polynomiell längenbeschränkt, ist  $|\alpha| \in O(\# \text{ Schritte von } \alpha) \in O(p(|x|))$ . Aus Definition geht hervor dass  $L(N) = \text{Proj}(R_N)$ .  $\square$

Damit ist im Übrigen die obige Definition von NP-Relationen auch nicht „neu“ sondern schon immer mitgedacht. Die eben formulierte Charakterisierung findet sich in allen üblichen Einführungswerken zur Komplexitätstheorie. Dagegen machen die unterschiedlichen Lehrbücher ihren Zugang manchmal stärker von der Perspektive der Suchprobleme abhängig, und manchmal stärker von der typischen Herangehensweise über Entscheidungsprobleme. Vgl. z.B. Goldreich (2008) welcher in seinem Lehrbuch die P-vs.-NP-Frage zunächst als die äquivalente Frage der Beziehung zwischen den „efficiently solvable search problems“ und den „search problems with efficiently checkable solutions“ (letzteres sind genau die NP-Relationen) formuliert. Erst später wird mittels *search-reduces-to-decision*-Argumenten dafür argumentiert, NP-Entscheidungsprobleme als die zentralen Untersuchungsobjekte der Komplexitätstheorie anzusehen.

Zumindest für die P-NP-Frage ist es irrelevant, ob man sich auf Suchprobleme von NP-Relationen oder auf Entscheidungsproblemen von NP-Mengen bezieht. Jedes NP-Suchproblem ist in Polynomialzeit lösbar genau dann wenn jede Menge in NP in deterministischer Polynomialzeit entscheidbar ist.

**Lemma 3.7.**  $\text{FNP} \subseteq_c \text{FP} \iff \text{P} = \text{NP}$ .

*Beweis.* Die Richtung von links nach rechts ist klar, sind ja Suchprobleme schwieriger als Entscheidungsprobleme (Beobachtung 3.2 mit Beobachtung 3.6).

Die Richtung von rechts nach links zeigen wir mittels Präfixsuche. Sei  $R$  eine beliebige NP-Relation mit Zertifikatsschranke  $q$ . Wir zeigen dass  $R \in_c \text{FP}$ . Betrachte folgende Menge

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, z) \mid \exists y \in \Sigma^{\leq q(|x|)}, (x, y) \in R, z \sqsubseteq y\}$$

Es ist leicht zu sehen dass  $A \in \text{NP}$ . Also gilt nach Annahme auch  $A \in \text{P}$ . Nun kann gegeben eine Instanz  $x$  iterativ ein Präfix eines Zertifikats verlängert werden:

```

1  $z \leftarrow \varepsilon$ 
2 solange  $|z| \leq q(|x|)$  tue (Invariante: wenn ein Zertifikat  $y$  für  $x$  ex., dann  $z \sqsubseteq y$ )
3   wenn  $(x, z) \in R$  dann
4     | akzeptiere mit  $z$ 
5   sonst wenn  $(x, z0) \in A$  dann
6     |  $z \leftarrow z0$ 
7   sonst wenn  $(x, z1) \in A$  dann
8     |  $z \leftarrow z1$ 
9   sonst
10  | ablehnen
11 ablehnen
```

Korrektheit klar. Unter Annahme  $A \in \text{P}$  ist auch klar, dass diese Funktion von einem PTM-Transduktor berechnet werden kann. Damit  $R \in_c \text{FP}$ .  $\square$

*Search reduces to decision*

Es ist leicht zu sehen, dass der Suchalgorithmus von obigem Beweis so geändert werden kann, dass anstelle der Entscheidung von  $A$  auch Orakelfragen an ein (externes) Ora-

kel  $A$  gestellt werden können, d.h. das Suchproblem von  $R$  kann *à la Cook* auf das Entscheidungsproblem von  $A$  reduziert werden. In anderen Worten,  $R \in_c \text{FP}^A$ . Das generalisiert sogar, wenn statt  $A$  ein beliebiges Orakel gewählt wird, welches  $\leq_m^T$ -vollständig für NP ist. Ist also  $\text{Proj}(R) \leq_m^T$ -vollständig für NP, dann gilt trivialerweise der Spezialfall  $R \in_c \text{FP}^{\text{Proj}(R)}$ . Das ist genau das *search-reduces-to-decision*-Argument: ist das Entscheidungsproblem zu  $R$  effizient lösbar, dann auch das Suchproblem zu  $R$  effizient lösbar.

**Korollar 3.8** (*Search reduces to decision* für die NP-Vollständigen). *Sei  $R$  eine NP-Relation, für die  $\text{Proj}(R)$  auch  $\leq_m^T$ -vollständig für NP ist. Dann gilt  $R \in_c \text{FP}^{\text{Proj}(R)}$ .*

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage mit einem Relativierbarkeits-Argument.

Relativ zum Orakel  $\text{Proj}(R)$  gilt  $P = NP$ , ist ja  $\text{Proj}(R)$  vollständig für NP. Damit gilt mit vorigem Lemma 3.7 auch  $\text{FNP} \subseteq_c \text{FP}$  relativ zu  $\text{Proj}(R)$ . Da  $R \in \text{FNP}$ , gilt also auch  $R \in_c \text{FP}$  relativ zu  $\text{Proj}(R)$ .  $\square$

Für die NP-Intermediates, also Entscheidungsprobleme aus NP, die weder in P liegen, noch  $\leq_m^P$ -vollständig für NP sind, ist aber unklar, ob immer das Suchproblem auf das Entscheidungsproblem reduziert werden kann.

Wie beim Suchalgorithmus aus obigem Beweis ist aber klar, dass Suchprobleme immer auf eine Präfix- bzw. Bisektion-Entscheidungsvariante reduziert werden können. Im allgemeinen Fall: für jede NP-Relation  $R$  mit Laufzeitschranke  $q$  gilt

$$R \in_c \text{FP}^{L_R} \text{ wobei } L_R = \{(x, z) \mid \exists y \in \Sigma^{\leq q(|x|)} \mid (x, y) \in R, z \sqsubseteq y\}$$

und

$$R \in_c \text{FP}^{L'_R} \text{ wobei } L'_R = \{(x, z) \mid \exists y \in \Sigma^{\leq q(|x|)} \mid (x, y) \in R, y \leq z\},$$

jeweils mit einer polynomiellen Anzahl an Orakelfragen.

Konkret ist das zum Beispiel der Fall bei der NP-Relation  $\text{rSMALLFACTOR}$ . Zur Erinnerung, wir haben

$$\text{Proj}(\text{rSMALLFACTOR}) = \{(n, a) \mid n > 1 \text{ nicht prim, ex. Faktor } p > 1 \text{ von } n \text{ mit } p \leq a\}.$$

Durch polynomiell viele Orakelfragen an  $\text{Proj}(\text{rSMALLFACTOR})$  kann dann mit binärer Suche ein solcher Faktor auch gefunden werden. In anderen Worten, es gilt  $\text{rSMALLFACTOR} \in_c \text{FP}^{\text{Proj}(\text{rSMALLFACTOR})}$ .

Es lässt sich im Übrigen zeigen, dass  $\text{Proj}(\text{rSMALLFACTOR}) \in \text{UP} \cap \text{coUP}$ . Die Projektion ist einerseits in UP: gegeben  $(n, a)$ ,  $n$  nicht prim, rate zunächst eine Primfaktorzerlegung von  $n$  mit aufsteigenden Primfaktoren. Akzeptiere genau dann wenn ein Faktor  $p \leq a$  in dieser Zerlegung erhalten ist. Der Fundamentalsatz der Arithmetik sichert, dass die (aufsteigend geordnete) Primfaktorzerlegung eindeutig ist, heißt der oben skizzierte nichtdeterministische Polynomialzeit-Algorithmus akzeptiert auf höchstens einem Rechenweg. Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen dass die Projektion in coUP liegt. Damit ergibt sich auch der auf S. 28 angegebene Stand, dass ein Kollaps von  $\text{UP} \cap \text{coUP}$  mit P zur Folge hätte, dass  $\text{rSMALLFACTOR} \in_c \text{FP}$ .

Das *search-reduces-to-decision*-Argument hat aber auch Grenzen: Diese Technik scheitert insbesondere, wenn wir wirklich immer die exakte Projektion als Entscheidungsproblem verstehen. Betrachte zum Beispiel die NP-Relation zur linearen Teilbarkeit:

$$\text{rLINDIV} \stackrel{\text{df}}{=} \{((a, b), k) \mid a, b, k \in \mathbb{N}, a \cdot k + 1 \text{ teilt } b\} \in \text{NP}.$$

Wir wissen, dass  $\text{Proj}(\text{rLINDIV}) \notin P$  außer  $NP = \text{coNP}$  (Adleman und Manders, 1977); ob  $\text{Proj}(\text{rLINDIV})$  auch  $\leq_m^P$ -vollständig für NP ist, bleibt unklar. Bei dieser NP-Relation

wäre nun nicht ersichtlich, wie das Suchproblem auf das Entscheidungsproblem reduziert werden könnte; eine triviale binäre Suche wie oben ist ja nicht möglich.

Für andere Suchprobleme existieren aber nichttriviale Möglichkeiten das Suchproblem auf das (natürliche) Entscheidungsproblem zu reduzieren, auch wenn das Entscheidungsproblem nicht in der Form einer Bisektion/Präfixsuche ist. Hierbei wird die spezifische Struktur des Problems ausgenutzt. Ein Beispiel ist  $\text{rSAT}$ : Gegeben Formel  $\varphi$ , teste mittels dem Orakel, ob  $\varphi[x_1/0] \in \text{SAT}$  oder  $\varphi[x_1/1] \in \text{SAT}$ . Hier meint  $\varphi[x_1/0]$  die Formel, welche entsteht wenn alle Vorkommen von Variable  $x_1$  in  $\varphi$  mit 0 ersetzt werden,  $\varphi[x_1/1]$  analog. Sollte jetzt  $\varphi[x_1/0] \in \text{SAT}$  stimmen, dann wissen wir dass es eine Belegung für  $\varphi$  existiert die  $\varphi$  erfüllt und gleichzeitig  $x_1$  auf 0 setzt. Wir können dann iterativ auf dem gleichen Weg eine Belegung für die nächste Variable  $x_2$  bestimmen usw. (Der Fall dass  $\varphi[x_1/1] \in \text{SAT}$  ist analog.) Es gilt daher  $\text{rSAT} \in \text{FP}^{\text{Proj}(\text{rSAT})}$ . (Beachte aber, dass  $\text{Proj}(\text{rSAT}) = \text{SAT}$  schon  $\leq_m^p$ -vollständig ist. Damit folgt  $\text{rSAT} \in \text{FP}^{\text{SAT}}$  schon aus Korollar 3.8.)

Ein weiteres nichttriviales Beispiel wäre die NP-Relation  $\text{rGI}$ . Zur Erinnerung: dieses Suchproblem sucht nach einem Graphisomorphismus zwischen zwei gegebenen Graphen. Deren Projektion ist mutmaßlich nicht  $\leq_m^p$ -vollständig für NP. Gleichzeitig gilt  $\text{rGI} \in \text{FP}^{\text{Proj}(\text{rGI})}$ : es lässt sich ein Graphisomorphismus zwischen  $G$  und  $H$  bestimmen, indem mehrmals mittels des Orakels bei (anderen) Paaren von Graphen getestet wird, ob diese isomorph sind (vgl. Goldreich, 2008, S. 65, 100). Ob eine solche nichttriviale Reduktion für  $\text{rLINDIV}$  möglich ist, scheint in der Literatur nicht untersucht zu sein.

Abschließend wollen wir noch theoretische Resultate diskutieren. Die ersten zwei plausibilisieren, dass wahrscheinlich eine NP-Relation existiert, für die das Suchproblem nicht auf das entsprechende Entscheidungsproblem reduziert werden kann (also wie bei  $\text{rLINDIV}$  vermutet).

**Satz 3.9** (Impagliazzo und Sudan, 1991; Borodin und Demers, 1976, Thm. 5). *Angenommen  $E \neq \text{NE}$  oder  $P \neq \text{NP} \cap \text{coNP}$ . Dann existiert eine NP-Relation  $R$  mit  $\text{Proj}(R) \in \text{NP} - P$ , für die  $R \notin \text{FP}^{\text{Proj}(R)}$  gilt.*

Unter stärkeren Bedingungen lässt sich sogar zeigen, dass sogar Mengen  $L \in \text{NP}$  existieren, für die das Suchproblem jeder NP-Relation für  $L$  nicht auf das Entscheidungsproblem reduziert werden kann. In anderen Worten, unabhängig davon wie das „Zertifikatssystem“ für  $L$  aussieht, ist keins so einfach dass Zertifikate mit Hilfe eines Orakels für das Suchproblem gefunden werden können.

**Satz 3.10** (Bellare und Goldwasser, 1994, Thm. 1.1; Impagliazzo und Sudan, 1991). *Angenommen  $\text{EE} \neq \text{NEE}$  oder  $\text{NE} \neq \text{coNE}$ . Dann existiert eine Menge  $L \in \text{NP} - P$  sodass  $R \notin \text{FP}^L$  für jede NP-Relation  $R$  für  $L$ , d.h. für die  $\text{Proj}(R) = L$  gilt.*

Beachte, dass für jede dieser Relationen  $R$  aus den beiden vorigen Sätzen die entsprechende Projektion  $\text{Proj}(R)$  eine NP-Intermediate ist;  $\text{Proj}(R)$  kann nicht  $\leq_m^p$ -vollständig für NP sein, denn das wäre ein Widerspruch zu Korollar 3.8.

Folgendes Resultat charakterisiert diejenigen Sprachen  $L \in \text{NP}$ , die zumindest eine NP-Relation  $R$  für  $L$  haben, sodass das Suchproblem (bzgl.  $R$ ) auf das Entscheidungsproblem reduzierbar ist.

**Definition 3.11.** (1) Eine deterministische OTM heißt *robust für  $A$*  falls  $L(M^O) = A$  für alle Orakel  $O$ .

(2) Eine Menge  $A$  heißt *selbsthelfend* falls eine OTM  $M$  existiert, welche robust für  $A$  ist,

und für die  $\text{time}_M^A(x)$  polynomiell in  $\text{abh. von } |x|$  wächst, d.h. zusammen mit dem Orakel  $A$  ist  $M^A$  eine POTM.  $\triangleleft$

Balcázar fasst die Intuition hinter dieser Definition wie folgt zusammen: man will die Situation abbilden, dass ein Entscheidungsalgorithmus existiert, der, mit genug Zeit, immer zu einem korrekten Ergebnis kommt, aber auch mit einem externen „Helfer“ interagieren darf, welcher dem Algorithmus helfen kann, schneller fertig zu rechnen.

**Satz 3.12** (Balcázar, 1989). *Sei  $A \in \text{NP}$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (1)  *$A$  ist selbsthelfend.*
- (2) *Es existiert eine NP-Relation  $R$  sodass  $\text{Proj}(R) = A$  und  $R \in_c \text{FP}^A$ .*

#### Selbstreduzierbarkeit in TFNP

Für *totale* Suchprobleme (also genau jene aus TFNP) kann nicht sinnvoll gefragt werden, ob hier das Suchproblem auf das Entscheidungsproblem reduziert werden kann, ist ja für  $R \in \text{TFNP}$  das entsprechende Entscheidungsproblem  $\text{Proj}(R) = \Sigma^*$  trivial.

Stattdessen können wir uns aber fragen, ob das Suchproblem eines Zertifikats zu  $x$  einfacher wird, wenn wir Lösungen zu „kleineren“ Instanzen  $x'$  gratis abfragen dürfen. Hierzu können wir folgenden Begriff von Reduzierbarkeit definieren: Betrachte hierbei folgende Variante eines POTM-Transduktors relativ zu  $R \in \text{TFNP}$ : Dieser Transduktor ist wie ein üblicher PTM-Transduktor, hat zusätzlich aber Zugriff auf ein *funktionales* Orakel, in dem Sinne dass er Orakelfragen der Form „gib mir ein Zertifikat  $y$  für  $x'$ “ stellen kann. Das Orakel antwortet dann mit einem solchen Zertifikat  $y$  mit  $(x', y) \in R$ . Das existiert, ist ja  $R$  total.

Es ist klar, dass mit einem solchen Transduktor relativ zu  $R$  auch das Suchproblem zu  $R$  lösbar ist. (Gegeben  $x$ , stelle einfach die Frage „gib mir Zertifikat für  $x$ “.) Deshalb nehmen wir folgende Einschränkung vor: der Transduktor darf bei Eingabe  $x$  in den Orakelfragen nur nach Zertifikaten für  $x'$  fragen, die kürzer sind als  $x$ . Falls selbst unter dieser Einschränkung der Fragen das Suchproblem durch einen solchen Transduktor relativ zu  $R$  gelöst werden kann, sagen wir, dass  $R$  *nach unten selbstreduzierbar* ist.

Zum Verständnis erinnern wir uns an die TFNP-Relation  $\text{rFACTOR}'$ , welche nach einem nichttrivialem Faktor für  $n$  sucht, oder „ $n$  ist prim“ ausgibt. Wäre nun  $\text{rFACTOR}'$  nach unten selbstreduzierbar, dann würde das bedeuten dass ein Faktor von  $n$  effizient gefunden werden kann, wenn wir nach Faktoren von Zahlen  $\leq n/2$  fragen dürfen. Welche TFNP-Probleme nach unten selbstreduzierbar sind, ist erstaunlich wenig untersucht, und eine Beforschung in dieser präzisen Formulierung wurde wohl erst durch Harsha, Mitropolsky und Rosen (2023) angetreten. Sie zeigen die Selbstreduzierbarkeit nach unten für folgendes TFNP-Problem „Iterate with source“, welches als ein kanonischer Repräsentant für die Unterklasse PLS (zur Erinnerung: *polynomial local search*) gilt.

#### Iterate with Source:

**Gegeben:**  $n \in \mathbb{N}$ , und ein Nachfolger-Schaltkreis  $S: \Sigma^n \rightarrow \Sigma^n$  polynomieller Größe abhängig von  $n$ , und ein Startknoten  $u \in \Sigma^n$  mit  $u < S(u)$ . (Der Schaltkreis  $S$  induziert einen gerichteten Graphen auf den Knoten  $\Sigma^n$ , d.i.  $S(v)$  ist einziger Nachfolger von  $v$ . Dabei entspricht  $v$  interpretiert als Zahl dem Gewicht von  $v$ .)

**Gesucht:** Knoten  $v \in \Sigma^n$  sodass  $v < S(v) \not\prec S(S(v))$  gilt. (D.h. gesucht ist ein Knoten  $S(v)$  welcher höheres Gewicht als sein Nachfolger hat.

Dieser existiert immer, denn es existieren nur endlich viele Knoten, bzw. ist Gewicht nach oben beschränkt.)

Die Selbstreduktion macht dabei nur Orakelfragen mit kleineren Schaltkreisen  $S' : \Sigma^{n-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$  (die auch eine kürzere Repräsentation haben) und Startknoten  $\Sigma^{n-1}$ .

Für natürliche TFNP-Probleme ist offen, welche davon nach unten selbstreduzierbar sind. Harsha, Mitropolsky und Rosen fragen explizit danach, ob z.B. die Suche nach einem maximalen Schnitt in der Flip-Umgebung auch nach unten abgeschlossen ist.

Zumindest im Bezug auf die Faktorisierung zeigen Harsha, Mitropolsky und Rosen, dass diese wahrscheinlich nicht nach unten selbstreduzierbar ist.

**Satz 3.13** (Harsha, Mitropolsky und Rosen, 2023). *Die NP-Relation  $\text{rFACTOR}' \in \text{TFNP}$  ist nicht nach unten selbstreduzierbar, außer  $\text{rFACTOR}' \in \text{PLS}$ .*

Es ist offen ob  $\text{rFACTOR}' \stackrel{?}{\in} \text{PLS}$  und zumindest unplausibel, weil unklar ist wie Faktorisierung als lokales Suchproblem repräsentiert werden kann. Tatsächlich zeigen die Autorinnen sogar die stärkere Konsequenz  $\text{rFACTOR}' \in \text{UEOPL}$ , was auch noch  $\text{rFACTOR}' \in \text{PPAD}$  zur Folge hätte. Auch die Frage ob  $\text{rFACTOR}' \in \text{PPAD}$  ist offen, und wurde breit untersucht. Eine positive Antwort wäre zumindest sehr überraschend (vgl. Harsha, Mitropolsky und Rosen, 2023, 67:15; siehe ebd. auch für eine Def. von UEOPL, PPAD). Insgesamt ist die Forschung bezüglich Selbstreduzierbarkeit für Suchprobleme, sowohl TFNP-Probleme als auch FNP-Probleme, sehr klein. Harsha, Mitropolsky und Rosen stellen fest: „Almost all the study of downward self-reducibility, to date, has been focused in the decisional landscape Harsha, Mitropolsky und Rosen (2023). Es bedarf auf jeden Fall weiterer Untersuchungen, unter anderem auch in Richtung einer Konzeptualisierung von „kleinerer Instanz“, die robuster als „kürzerer String“ ist. Hier könnte eine Konzeptualisierung wie bei der *disjunktiver Selbstreduzierbarkeit* auf Entscheidungsproblemen (vgl. Meyer und Paterson, 1979; Balcázar, 1989; Selman, 1988; Wechsung, 2000, Abschn. 9.5) produktiv gemacht werden, welche die Ordnungsrelation „kürzer“ über eine beliebige polynomiell wohlfundierte und längenbeschränkte Halbordnung auf den Wörtern verallgemeinert.

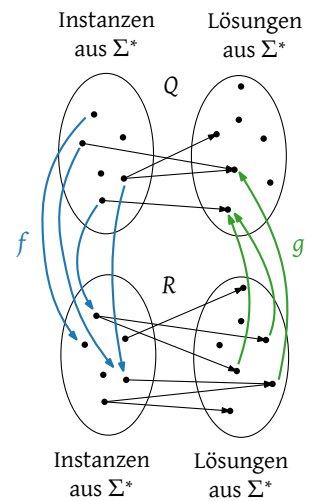
### 3.3 Levin-Reduzierbarkeit

Ähnlich wie auf den üblichen Entscheidungsproblemen können wir auch von Reduzierbarkeiten zwischen verschiedenen Suchproblemen sprechen. In der Literatur hat sich folgender Begriff von Reduzierbarkeit zwischen NP-Relationen herausgebildet (vgl. Papadimitriou, 1994, S. 229; Goldreich, 2008, S. 61; Arora und Barak, 2009, S. 50):

**Definition 3.14** (Levin-Reduzierbarkeit). Seien  $Q, R$  zwei NP-Relationen. Wir sagen dass  $Q$  sich auf  $R$  (Polynomialzeit-)Levin-reduzieren lässt, bzw.  $Q \leq_L^P R$  wenn zwei Funktionen  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*, g : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*, f, g \in \text{FP}$  existieren sodass

- (1)  $x \in \text{Proj}(Q) \iff f(x) \in \text{Proj}(R),$
- (2)  $(f(x), y) \in R \implies (x, g(x, y)) \in Q.$

Punkt (1) sagt also nur aus, dass  $f$  eine Many-one-Polynomialzeit-Reduktion zwischen den entsprechenden Entscheidungsproblemen ist. Punkt (2) sagt nun aus, dass wenn  $y$  ein Zertifikat für die Instanz  $f(x)$  aus  $R$  ist, dann lässt sich aus  $y$  wieder ein Zertifikat  $g(x, y)$  für die originale Instanz  $x$  berechnen.



**Abbildung 3:** Schematische Skizze einer Levin-Reduktion  $Q \leq_L^P R$  über Reduktionsfunktion  $f$  und Translationsfunktion  $g$ . Beachte, wie  $f$  Instanzen ohne Lösungen in  $R$  zu Instanzen ohne Lösungen in  $Q$  reduziert.

Die Funktion  $f$  nennen wir *Reduktionsfunktion*, die Funktion  $g$  nennen wir *Translationsfunktion*.

Wir schreiben  $Q \leq_{L,1}^P R$  falls  $f$  zusätzlich injektiv ist. Wir schreiben  $Q \leq_{L,1,i}^P R$  falls  $f$  zusätzlich injektiv und  $P$ -invertierbar ist. Klar ist:

$$Q \leq_{L,1,i}^P R \Rightarrow Q \leq_{L,1}^P R \Rightarrow Q \leq_L^P R \Rightarrow \text{Proj}(Q) \leq_m^P \text{Proj}(R).$$

Definiere die Duplikatrelation  $\equiv_L^P$  entsprechend.  $\triangleleft$

Die Bezeichnung *Levin-Reduktion* ist hier in Anlehnung an bisherige Verwendung gewählt, und bezieht sich darauf, dass in der Etablierung der NP-Vollständigkeit durch Karp (1972), Cook (1971) und Levin (1973) gerade Levin die Suchprobleme in den Blick genommen hat, während Karp und Cook sich auf Entscheidungsprobleme konzentriert haben. Die Formalisierung von NP-Suchproblemen durch NP-Relationen (Definition 3.1) findet sich in Grundzügen schon in Levins Präsentation. Es sei aber darauf hingewiesen, dass sich die hier genannte Definition der Levin-Reduzierbarkeit (Definition 3.14) eine schwächere Form der Reduzierbarkeit ist als die eigentliche von Levin vorgeschlagene. Die hier genannte Definition ist jedoch hinreichend für alle relevanten Eigenschaften, sowie für die Aussagen aus Levins eigener Publikation.

Beachte dass  $\leq_L^P$ -Reduktionen eine Verstärkung von  $\leq_m^P$ -Reduktionen auf den jeweiligen Projektionen darstellt:

**Beobachtung 3.15.** Wenn  $R \leq_L^P Q$  dann gilt  $\text{Proj}(R) \leq_m^P \text{Proj}(Q)$ .

Die Relationen  $\leq_L^P$ ,  $\leq_{L,1}^P$  und  $\leq_{L,1,i}^P$  sind reflexiv und transitiv, bilden also eine Quasiordnung. Intuitiv formt die Levin-Reduktion  $\leq_L^P$  auf den Suchproblemen das Analog der Many-one-Reduktion  $\leq_m^P$  auf den Entscheidungsproblemen.

Genau so wie wir es bei der üblichen  $\leq_m^P$ -Reduktion auf den Suchproblemen gewohnt sind, ordnet  $\leq_L^P$  die Suchprobleme der NP-Relationen nach ihrer „Schwierigkeit“: wenn  $Q \leq_L^P R$  dann ist  $Q$  höchstens so „schwer“ wie  $R$ : gegeben einen Lösungsalgorithmus für  $R$  lässt sich auch  $Q$  effizient lösen, und das sogar mit nur einer Anfrage an den Lösungsalgorithmus. Damit folgt: wenn das Suchproblem zu  $R$  effizient gelöst werden kann, dann kann auch das Suchproblem zu  $Q$  gelöst werden. Formal ausgedrückt ist FP nach unten abgeschlossen unter der  $\leq_L^P$ -Ordnung:

**Lemma 3.16.** Wenn  $Q \leq_L^P R$  und  $R \in_c \text{FP}$  dann ist  $Q \in_c \text{FP}$ .

*Beweis.* Seien  $f, g$  die Reduktions- bzw. Translationsfunktion, welche  $Q \leq_L^P R$  realisieren, und sei  $r \in \text{FP}$  eine Verfeinerung von  $R$ . Definiere nun

$$q(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} g(x, r(f(x))) & \text{falls } r(f(x)) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

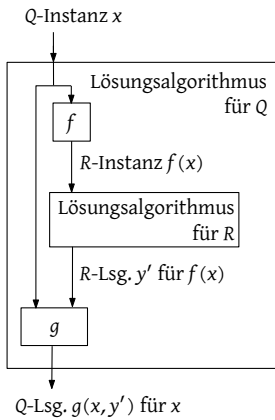
Offenbar ist  $q \in \text{FP}$ . Wir zeigen nun dass  $q$  eine Verfeinerung von  $Q$  ist. Zum einen gilt  $\text{dom}(q) = \text{Proj}(Q)$ :

$$\begin{aligned} x \in \text{Proj}(Q) &\iff f(x) \in \text{Proj}(R) \iff f(x) \in \text{dom}(r) \\ &\iff q(x) \neq \perp \iff x \in \text{dom}(q). \end{aligned}$$

Hierbei folgt die erste Äquivalenz nach Definition 3.14(1). Zum anderen haben wir

$$\begin{aligned} x \in \text{Proj}(Q) &\implies f(x) \in \text{Proj}(R) \implies (f(x), r(f(x))) \in R \\ &\implies (x, g(x, r(f(x)))) \in Q \implies q(x) \in \text{set-}Q(x) \text{ nach Definition 3.14(2),} \end{aligned}$$

i.e.,  $q(x)$  ist ein Zertifikat für  $x$ , wie gewünscht.  $\square$



**Abbildung 4:** Skizze, wie eine Levin-Reduktion  $Q \leq_L^P R$  von NP-Relation  $Q$  auf NP-Relation  $R$  genutzt werden kann, einen Algorithmus für  $Q$  mithilfe eines Algorithmus für  $R$  anzugeben. Hierbei ist  $f$  die Reduktions- und  $g$  die Translationsfunktion.



Genau so wie bei der Many-one-Reduktion auf den Suchproblemen können wir nach größten Elementen auf der  $\leq_L^P$ -Ordnung fragen.

**Definition 3.17.** Sei  $\mathcal{F}$  eine Klasse von Multifunktionen (z.B. FNP oder TFNP). Wir nennen  $R \in \mathcal{F}$   $\leq_L^P$ -vollständig für  $\mathcal{F}$  wenn  $R$  ein größtes Element von  $\mathcal{F}$  geordnet über  $\leq_L^P$  ist: Für alle  $Q \in \mathcal{F}$  gilt  $Q \leq_L^P R$ .

Die  $\leq_{L,1}^P$ - und  $\leq_{L,1,i}^P$ -Vollständigkeit ist analog definiert.  $\triangleleft$

Wie schon bei  $\leq_m^P$ -Reduktionen geschehen, lassen wir die Angabe der Klasse  $\mathcal{F}$  gelegentlich auch weg, wenn  $\mathcal{F}$  klar aus dem Kontext hervorgeht.

Es existiert eine  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relation für FNP. Diese ist im Wesentlichen die natürliche Erweiterung der kanonischen  $\leq_m^P$ -vollständigen Menge KAN:

$$\text{rKAN} \stackrel{\text{def}}{=} \{((N, x, 1^n), \alpha) \mid N \text{ ist NPTM,} \\ \alpha \text{ ist ein akz. Rechenweg auf } N(x) \text{ mit } \leq n \text{ Schritten}\}.$$

Beachte dass  $\text{Proj}(\text{rKAN}) = \text{KAN}$ .

**Satz 3.18.** Die kanonische NP-Relation  $\text{rKAN}$  ist  $\leq_{L,1,i}^P$ -vollständig für FNP.

*Beweis.* Es ist leicht zu sehen dass  $\text{rKAN} \in P$ , da „ $\alpha$  ist Rechenweg für  $N(x)$ “ in Polynomialzeit (abh. von  $|\alpha|, |N|, |x|, n$ ) verifiziert werden kann. Um zu sehen, dass  $\text{rKAN}$  zu polynomiell längenbeschränkt ist, können wir voraussetzen, dass jeder Schritt eines Rechenwegs  $\alpha$  als Konfiguration codiert ist, also Inhalt der Bänder, Kopfpositionen und Zustände. Damit ist jede Konfiguration als ein polynomiell langes Wort abhängig von  $|N|, |x|, n$  beschreibbar, also auch  $\alpha$  als Liste von  $\leq n$  vielen Konfigurationen nur polynomiell länger als  $|N|, |x|, n$ . Damit  $\text{rKAN} \in \text{FNP}$ .

Sei  $R$  eine beliebige NP-Relation mit Zertifikatsschranke  $r$ , heißt  $(x, y) \in R \implies |y| \leq r(|x|)$ . Sei  $M$  die PTM welche  $R$  entscheidet, mit Laufzeitschranke  $p$ . Sei  $N$  eine NPTM welche auf Eingabe  $x$  zunächst ein Zertifikat  $y, |y| \leq r(|x|)$  rät, und dann testet ob  $M(x, y)$  akzeptiert. Die Laufzeit von  $N$  ist beschränkt auf  $p(|(x, y)|) \in O(p(r(|x|)))$  (hier nutzen wir die effiziente Listencodierung von Abschnitt 2.1 aus). Sei daher  $q$  ein Polynom, welches die Laufzeit von  $N$  beschränkt.

Definiere die Reduktionsfunktion  $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (N, x, 1^{q(|x|)})$ . Wir zeigen zunächst dass

$$x \in \text{Proj}(R) \iff f(x) \in \text{Proj}(\text{rKAN}).$$

Wenn  $x \in \text{Proj}(R)$ , dann existiert ein  $y, |y| \leq r(|x|)$  sodass  $(x, y) \in R$ . Dann wird auch  $N(x)$  akzeptieren, nämlich auf jenem Pfad welcher  $y$  rät. Es existiert also ein Rechenweg  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq q(|x|)$  sodass  $N(x)$  auf  $\alpha$  akzeptiert. Dann gilt aber auch  $(f(x), \alpha) = ((N, x, 1^{q(|x|)}), \alpha) \in \text{rKAN}$ . Die Rückrichtung  $x \notin \text{Proj}(R) \implies f(x) \notin \text{Proj}(R)$  folgt analog. Es ist klar, dass  $f$  injektiv ist, dass  $f$  Polynomialzeit-berechenbar und -invertierbar ist.

Es lässt sich außerdem einfach eine Translationsfunktion  $g \in \text{FP}$  angeben, die aus  $\alpha$  das entsprechende geratene Zertifikat  $y$  aus  $\alpha$  berechnen kann, also  $g(f(x), \alpha) = y$ .  $\square$

Die Ordnung  $\leq_L^P$  und dessen Vollständigkeitsbegriff verhält sich auch sonst wie bei dem Analog  $\leq_m^P$  gewohnt.

**Lemma 3.19.** Sei  $R$  eine  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relation für FNP. Es gelten folgende Aussagen:

- (1)  $\text{Proj}(R)$  ist eine  $\leq_m^P$ -vollständige Menge für NP.
- (2) Wenn  $Q$  eine NP-Relation ist und  $R \leq_L^P Q$ , dann ist auch  $Q \leq_L^P$ -vollständig für FNP.
- (3)  $R \in_c \text{FP} \iff \text{FNP} \subseteq_c \text{FP} \iff \text{NP} = P$ .

Es existieren auch natürliche NP-Relationen, die  $\leq_L^P$ -vollständig für FNP sind. Das Bekannteste ist rSAT. Zur Erinnerung:

$$\text{rSAT} = \{(\varphi, w) \mid \varphi \text{ ist eine aussagenlogische Formel, } w \text{ erfüllende Belegung für } \varphi\}.$$

Die Aussage „rSAT ist  $\leq_L^P$ -vollständig“ entspricht dem üblichen Cook-Levin-Satz, und wird hier nur wiederholt:

**Satz 3.20** (Satz von Cook und Levin). *Die NP-Relation rSAT ist  $\leq_{L,1,i}^P$ -vollständig für FNP.*

*Skizze.* Wir zeigen nur, dass  $\text{rCSAT} = \{(C, w) \mid C \text{ ist SAT-Schaltkreis und } C(w) = 1\}$ , also Schaltkreiserfüllbarkeit,  $\leq_{L,1,i}^P$ -vollständig ist. Es ist leicht zu sehen dass  $\text{rCSAT} \leq_{L,1,i}^P \text{rSAT}$  mit den gleichen Argumenten wie  $\text{CSAT} \leq_m^P \text{SAT}$ . Klar ist, dass  $\text{rCSAT} \in \text{FNP}$ .

Ein üblicher Beweis des Satzes von Cook und Levin (welcher auf der Seite der Entscheidungsprobleme operiert) zeigt als erstes, dass eine PTM  $M$  und eine „Eingabegröße“  $n$  effizient als Schaltkreis  $C_{M,n}$  repräsentiert werden kann, sodass  $C_{M,n}(x) = 1 \iff M(x)$  akzeptiert, für alle  $x \in \Sigma^n$ .

Sei nun  $R$  eine beliebige NP-Relation mit Laufzeitschranke  $q$ . Ohne Beschränkung können wir in diesem Beweis annehmen, dass alle Zertifikate für  $x$  bezüglich  $R$  genau die Länge  $q(|x|)$  haben. Dann existiert eine PTM  $M$  die  $R$  entscheidet. Sei  $x \in \Sigma^*$  gegeben. Für geeignetes  $n$  haben wir

$$\forall y \in \Sigma^{q(|x|)}. \quad C_{M,n}(x, y) = 1 \iff M(x, y) \text{ akz.} \iff (x, y) \in R.$$

Wenn wir jetzt  $x$  in  $C_{M,n}$  „hart verdrahten“ erhalten wir einen Schaltkreis  $C_{M,n,x}$  und es gilt

$$\forall y \in \Sigma^{q(|x|)}. \quad C_{M,n,x}(y) = 1 \iff C_{M,n}(x, y) = 1 \iff (x, y) \in R.$$

Und damit ist  $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} C_{M,n,x}$ ,  $f \in \text{FP}$  eine Reduktionsfunktion von  $R$  nach rCSAT:

$$\begin{aligned} x \in \text{Proj}(R) &\iff \exists y \in \Sigma^{q(|x|)}. (x, y) \in R \iff \exists y \in \Sigma^{q(|x|)}. C_{M,n,x}(y) = 1 \\ &\iff C_{M,n,x} \in \text{Proj}(\text{rCSAT}) \iff f(x) \in \text{Proj}(\text{rCSAT}). \end{aligned}$$

Eine Translationsfunktion  $g$  kann auch einfach angegeben werden: wenn  $(f(x), y) \in \text{rCSAT}$  dann gilt  $C_{M,n,x}(y) = 1$  und damit  $(x, y) \in R$ .

Es ist leicht zu sehen dass  $f$  injektiv ist, denn wenn die Schaltkreise  $f(x), f(x')$  identisch sind, dann muss auch  $x = x'$ . Genauso ist klar, dass aus  $f(x) = C_{M,n,x}$  einfach das „hineincodierte“  $x$  wieder ausgelesen werden kann, und damit ist  $f$  auch P-invertierbar.  $\square$

Die bekannten NP-Relationen  $R$  mit  $\leq_m^P$ -vollständiger Projektion  $\text{Proj}(R) \in \text{NP}$  sind auch Levin-vollständig. Typische Präsentationen von  $\leq_m^P$ -Vollständigkeit erfolgten über die  $\leq_m^P$ -Reduktion von einer bereits bekannten  $\leq_m^P$ -vollständige Menge, z.B.  $\text{SAT} \leq_m^P \text{VC}$ . Diese Beweise geben uns üblicherweise nicht nur eine  $\leq_m^P$ -Reduktionsfunktion  $f$  von Instanzen  $x$  der einen Menge (z.B. SAT) zu Instanzen  $f(x)$  der anderen Menge (z.B. VC), sondern beinhalten meist im Beweis eine (implizit mitgedachte) effiziente Übersetzung von Zertifikaten von  $x$  nach  $f(x)$  und umgekehrt. Die Reduktionsfunktion  $f$  mit der Rückübersetzung der Zertifikate für  $f(x)$  nach Zertifikaten für  $x$  reichen dann aus, um eine  $\leq_L^P$ -Reduktion zu realisieren, und damit Levin-Vollständigkeit zu zeigen.

Nach Goldreich (2008, S. 104) sind die folgenden NP-Relationen jedenfalls definitiv  $\leq_{L,1,i}^P$ -vollständig: rSAT, rSETCOVER, rVC, rCLIQUE, r3COLORABILITY. Die von Papadimitriou (1994, S. 193–198) angegebene Reduktion  $\text{SAT} \leq_m^P \text{HAMCYCLE}$  lässt sich leicht

zu  $\text{rSAT} \leq_L^P \text{rHAMCYCLE}$  erweitern, womit  $\text{rHAMCYCLE}$  auch  $\leq_L^P$ -vollständig ist. Ebenso ist  $\text{rANOTHERHAMCYCLE}$  auch  $\leq_L^P$ -vollständig (1994, S. 232). Damit gilt mit Lemma 3.19(3) auch die in Abschnitt 3.1 angegebene Äquivalenz  $\text{NP} = \text{P}$  genau dann wenn  $\text{rSAT}, \text{rVC}, \dots \in_c \text{FP}$ .

NP-Relationen  $R$  für welche die Projektion  $\text{Proj}(R)$  zwar  $\leq_m^P$ -vollständig für NP ist, aber  $R$  nicht  $\leq_L^P$ -vollständig für FNP sind, scheinen nicht bekannt zu sein. Aus dieser empirischen Beobachtung ergibt sich die Frage, ob das auch für *alle* NP-Relationen  $R$  gilt:

**Frage 3.21.** Sei  $R$  eine NP-Relation. Wenn  $\text{Proj}(R)$  eine  $\leq_m^P$ -vollständige Menge für NP ist, ist dann auch  $R$  eine  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relation für FNP?

Aus Präsentationsgründen wollen wir die pessimistische negative Antwort auf diese Frage als Vermutung formulieren:

**Vermutung 3.22** (Karp-vs-Levin-Vermutung; KvL). Es existiert eine NP-Relation  $R$  sodass  $\text{Proj}(R) \leq_m^P$ -vollständig für NP ist, aber  $R$  ist nicht  $\leq_L^P$ -vollständig für FNP.

Obwohl diese Frage erstaunlich auf natürlich scheint, und zwei umfassende Reduktionsbegriffe der Komplexitätstheorie in Beziehung setzen versucht, gibt es erstaunlicherweise kaum Forschung welche sich dieser Hypothese annähert. Ein Beweis von KvL ist jedenfalls mindestens so schwer wie die P-NP-Frage, denn  $\text{KvL} \Rightarrow \text{P} \neq \text{NP}$ . In Abschnitt 4.1 werden wir diese Hypothese und dessen Beziehung zu anderen Hypothesen erarbeiten.

Die oben genannte Frage lässt sich auf natürliche Weise abschwächen, indem man von der konkreten NP-Relation abstrahiert: Wenn  $L$  eine  $\leq_m^P$ -vollständige Menge für NP ist, existiert dann zumindest eine NP-Relation  $R_L$  für  $L$  (d.h.  $\text{Proj}(R_L) = L$ ) sodass  $R_L \leq_L^P$ -vollständig ist? In anderen Worten, existiert ein hinreichend ausdrucksstarkes „Zertifikatssystem“  $R$  für  $L$  sodass  $R \leq_L^P$ -vollständig ist? Diese abgeschwächte Frage lässt sich positiv beantworten, falls man die Berman–Hartmanis-Vermutung IC annimmt:

**Beobachtung 3.23** (Buhrman, Kadin und Thierauf, 1998). Für jede Menge  $L \in \text{NP}$  die P-isomorph zu SAT ist, existiert eine NP-Relation  $R_L$  sodass  $\text{Proj}(R_L) = L$  und  $R_L$  auch  $\leq_L^P$ -vollständig für FNP ist.

*Beweis.* Nach Voraussetzung haben wir eine bijektive P-invertierbare Funktion  $h \in \text{FP}$  mit  $x \in L \iff h(x) \in \text{SAT}$ . Definiere nun

$$R_L \stackrel{\text{df}}{=} \{(x, w) \mid (h(x), w) \in \text{rSAT}\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass  $R_L$  eine NP-Relation ist. Es ist auch leicht zu sehen dass  $\text{Proj}(R_L) = L$ .

Wir zeigen nun, dass  $R_L$  auch  $\leq_L^P$ -vollständig ist. Sei hierfür  $Q$  eine beliebige NP-Relation. Nachdem  $\text{rSAT}$  ja  $\leq_L^P$ -vollständig ist, existieren Reduktions- und Translationsfunktionen  $f, g$  die  $Q \leq_L^P \text{rSAT}$  realisieren. Definiere nun

$$f'(x) \stackrel{\text{df}}{=} h^{-1}(f(x)).$$

Insbesondere ist  $h^{-1}(\cdot)$  wohldefiniert, ist ja  $h$  surjektiv. Damit gilt zum einen für  $f'$

$$x \in \text{Proj}(Q) \iff f(x) \in \text{SAT} \iff \underbrace{h(h^{-1}(f(x)))}_{f'(x)} \in \text{SAT} \iff f'(x) \in \text{Proj}(R_L),$$

und zum anderen gilt

$$\begin{aligned} (f'(x), w) \in R_L &\implies (h(h^{-1}(f(x))), w) \in \text{rSAT} \\ &\implies (f(x), w) \in \text{rSAT} \implies (x, g(x, w)) \in Q. \end{aligned}$$

Damit erfüllen also  $f'$  und  $g$  die Voraussetzungen an eine Reduktions- bzw. Translationsfunktion und  $Q \leq_L^P R_L$ , wie gewünscht.  $\square$

(Es ist leicht zu sehen, dass diese Aussage relativiert, wenn anstelle  $\text{rSAT}$  eine andere beliebige  $\leq_L^P$ -vollständige Relation  $R$  gewählt wird.)

Damit haben (im unrelativierten Fall) insbesondere alle *bekannten* NP-vollständigen Mengen, d.h. die zu SAT P-isomorphen Mengen, eine entsprechende  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relation. Es muss aber gleichzeitig darauf hingewiesen werden, dass die Zertifikate in den entsprechenden Relationen  $R_L$  nicht natürlich sind; die Zertifikate sind nur Belegungen für die Formeln  $h(x)$  und haben an sich keinen Bezug zur Interpretierbarkeit gegenüber der Instanz  $x$ .

Abschließend wollen wir noch Vollständigkeit für TFNP diskutieren. Zum einen ist klar, dass unter dem hier vorgeschlagenen Reduktionsbegriff keine Reduktion von einer nicht-totalem NP-Relation auf eine (totale) TFNP-Relation möglich ist:

$$R \not\leq_L^P Q, \text{ für alle } Q \in \text{TFNP}, R \in \text{FNP}, \text{Proj}(R) \neq \Sigma^*,$$

denn jede potentielle Reduktion würde Definition 3.14(1), also die Many-one-Reduktion auf den jeweiligen Projektionen, verletzen.

Andererseits kann gefragt werden, ob TFNP-Relationen existieren die  $\leq_L^P$ -vollständig für TFNP sind. In der Literatur (vgl. Pudlák, 2017) wird hierauf eine negative Antwort vermutet:

**Vermutung 3.24** (TFNP). *Es existiert keine NP-Relation  $R \in \text{TFNP}$  die  $\leq_L^P$ -vollständig für TFNP ist.*

Auch hier ist ein Beweis für diese Vermutung mindestens so schwer wie ein Beweis für  $\text{NP} \neq \text{coNP}$ . Die Beziehung dieser Vermutung mit weiteren Vermutungen betreffend Promise-Problemen wird in Kapitel 4 erarbeitet.

#### Sparsame Reduktionen

Wir wollen hier noch auf den Begriff der *sparsamen* („parsimonious“) Reduktionen eingehen. Diese ist einerseits verwandt mit der oben betrachteten Levin-Reduktion, andererseits aber wesentlich breiter bekannt und untersucht, insbesondere aufgrund der Relevanz von sparsamen Reduktion in der Komplexitätstheorie des Zählens.

Aus den Erfahrungen in der Entwicklung der NP-Vollständigkeit von Entscheidungsproblemen wurde schnell deutlich, dass die NP-vollständigen Mengen sich viele nicht-offensichtliche Eigenschaften teilen. In stärkster Ausprägung ist das z.B. die (Berman–Hartmanis-)Isomorphievermutung IC, in der postuliert wird, dass es im Wesentlichen nur *eine* NP-vollständige Menge gibt, und die verschiedenen Ausprägungen unterschiedlicher NP-vollständiger Mengen nur triviale Umcodierungen des selben Problems sind. Diese Forschung betrachtete aber insbesondere primär die NP-Entscheidungsprobleme, und nicht NP-Suchprobleme. Nichtsdestotrotz wurde intuitiv aber die Beobachtung gemacht, dass auch viele der entsprechenden *Suchprobleme* eine inhärente strukturelle Ähnlichkeit untereinander haben, auch wenn diese oft nicht explizit mitgedacht wurden (vgl. auch die Diskussion von Hemaspaandra, 1998).

Hieraus entwickelte sich u.a. der Begriff der sparsamen Reduktionen. Simon (1975, S. 83) machte beispielsweise die Beobachtung, dass die ihm bekannten Reduktionsfunktionen  $f: A \rightarrow B$  in den Beweisen zur NP-Vollständigkeit so gebaut sind, dass die Instanz  $x$  genau  $k$  „Lösungen“ bezüglich  $A$  hat genau dann wenn  $f(x)$  genau  $k$  „Lösungen“ bezüglich  $B$  hat. „Lösung“ hier in Anführungszeichen weil auf Mengen überhaupt kein Begriff von Lösungen bzw. Zertifikaten existiert; Simon dachte in seinen Überlegungen die zugrunde liegende kombinatorischen (Such-)Probleme zu  $A$  und  $B$  nur unausgesprochen mit.

Auf NP-Relationen lässt sich sein Reduktionsbegriff aber formal präzise formulieren:

**Definition 3.25** (Sparsame Reduktionen). Seien  $Q, R$  NP-Relationen. Wir sagen dass sich  $Q$  auf  $R$  (in Polynomialzeit) *sparsam* („parsimonious“) reduzieren lässt, bzw.  $Q \leq_{\text{pars}}^p R$  wenn eine Funktion  $f \in \text{FP}$  existiert mit

$$|\text{set-}Q(x)| = |\text{set-}R(f(x))|. \quad \triangleleft$$

Beachte, dass sparsame Reduktionen immer eine Many-one-Reduktion realisieren: wir haben

$$x \in \text{Proj}(Q) \iff |\text{set-}Q(x)| > 0 \iff |\text{set-}R(f(x))| > 0 \iff f(x) \in \text{Proj}(R).$$

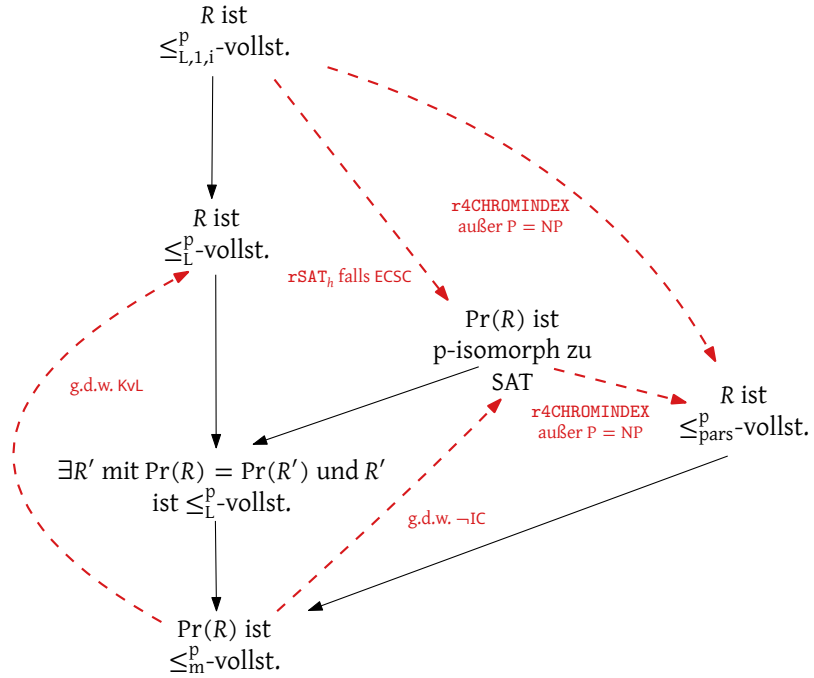
Sparsame Reduktionen wurden insbesondere in der Komplexitätstheorie des Zählens aufgegriffen (Simon, 1975; Valiant, 1979). Typische algorithmische Probleme sind z.B. „wie viele Belegungen  $w$  erfüllen die aussagenlogische Formel  $\varphi$ “ oder, kanonischer, „Auf wie vielen Rechenwegen akzeptiert die Berechnung  $N(x)$  der NPTM  $N$ ?“. Es ist einfach zu sehen, dass sich sparsame Reduktionen  $\text{rSAT} \leq_{\text{pars}}^p \text{rKAN}$  und  $\text{rKAN} \leq_{\text{pars}}^p \text{rSAT}$  angeben lassen können. Damit kann das Zählproblem zur  $\text{rSAT}$ -Instanz  $x$  als  $\text{rKAN}$ -Instanz  $f(x)$  repräsentiert werden und umgekehrt – die beiden Zählprobleme sind relativ zum jeweils anderem gleich schwer. Auf eine weitere Präsentation der Komplexitätstheorie des Zählens muss hier verzichtet werden (siehe Wechsung, 2000, Kap. 7; Arora und Barak, 2009, Chap. 17).

Beachte, dass sparsame Reduktionen nicht mit Levin-Reduktionen vergleichbar sind. Levin-Reduktionen erhalten im Allgemeinen nicht die Anzahl an Zertifikaten, während umgekehrt sparsame Reduktionen keine effektive Übersetzung zwischen den Zertifikaten für  $f(x)$  auf Zertifikate für  $x$  zulassen.

An dieser Stelle sei noch auf zwei weitere verwandte Arbeiten verwiesen, die hier nur kurz skizziert werden sollen: zum einen gehen Fischer, Hemaspaandra und Torenvliet (1995) noch einen Schritt über sparsame Reduktionen hinaus, und erforschen „*witness-isomorphic reductions*“ zwischen NP-Relationen. Hier erhält die Reduktionsfunktion  $A \rightarrow B$  auf den Instanzen nicht nur die *Anzahl* der Zertifikate, sondern es werden zusätzlich die Zertifikate für  $x \in A$  mit den Zertifikaten für  $f(x) \in B$  in eine effiziente in Polynomialzeit berechenbare und invertierbare Eins-zu-Eins-Korrespondenz gesetzt. Damit sind *witness-isomorphic reductions* insbesondere eine Verstärkung von Levin-Reduktionen und sparsamen Reduktionen.

Zum anderen geben Agrawal und Biswas (1992a) strukturelle Kriterien an, die zur  $\leq_L^p$ -Vollständigkeit von NP-Relationen  $R$  ausreichen. Diese Kriterien lauten intuitiv, dass sich bezogen auf das Suchproblem  $R$  gewisse „Gadgets“ mit geeigneten Eigenschaften konstruieren lassen können, wie wir sie auch aus einigen NP-Vollständigkeitsbeweisen kennen. Agrawal und Biswas nennen dann  $R$  *universell*. Rein aus diesen *strukturellen* Eigenschaften lässt sich dann nachweisen, dass Universalität von  $R$  hinreichend für  $\leq_L^p$ -

**Abbildung 5:** Implikationen zwischen den Vollständigkeitsbegriffen, wobei  $R$  eine beliebige aber feste NP-Relation ist. Ein unterbrochener Pfeil von A nach B sagt aus, dass ein Gegenbeispiel  $Q$  für die Implikation  $A \Rightarrow B$  existiert, also eine NP-Relation  $Q$  die A erfüllt und gleichzeitig  $\neg B$  erfüllt.



Vollständigkeit von  $R$  ist. Agrawal und Biswas (1992a) überprüfen insbesondere die Universalität den ihnen bekannten vollständigen Entscheidungsproblemen, und können so in einer uniformen Weise die  $\leq_L^P$ -Vollständigkeit vieler natürlicher NP-Suchprobleme ableiten.

Nun wollen wir abschließend noch die einzelnen Vollständigkeitsbegriffe in Beziehung setzen. Zusammen mit Beobachtung 3.23 sehen wir bereits die eingezeichneten Implikationen aus Abbildung 5.

Nun zu den eingezeichneten Trennungen: zunächst halten wir erstens fest, dass die  $\leq_L^P$ -Vollständigkeit eine Eigenschaft ist, welche sogar bezüglich Problemen gilt, die mutmaßlich nicht P-isomorph sind. Angenommen, es existiert eine Einwegfunktion  $f \in \text{FP}$ , das heißt  $f$  ist injektiv, aber  $f$  ist nicht P-invertierbar. Unter der *Encrypted Complete Set Conjecture* (ECSC) wird die Vermutung genannt, nach der die Menge

$$f(\text{SAT}) \stackrel{\text{df}}{=} \{f(\varphi) \mid \varphi \in \text{SAT}\} \in \text{NP}$$

nicht paddable ist, damit also auch nicht P-isomorph zu SAT ist. Gleichzeitig ist  $\text{SAT} \leq_m^P f(\text{SAT})$  über Reduktionsfunktion  $f$ , und damit  $f(\text{SAT})$  auch  $\leq_m^P$ -vollständig für NP. Damit ist  $f(\text{SAT})$ , zu verstehen als eine „verschlüsselte“ Variante zu SAT; ein vermutetes Gegenbeispiel für die Berman–Hartmanis-Isomorphievermutung IC. Gleichzeitig ist leicht zu sehen, dass eine entsprechende natürliche NP-Relation

$$r\text{SAT}_f \stackrel{\text{df}}{=} \{(z, (\varphi, w)) \mid z = f(\varphi), \text{ und } w \text{ ist erfüllende Belegung für } \varphi\}$$

$\leq_L^P$ -vollständig ist. Wir haben  $r\text{SAT} \leq_L^P r\text{SAT}_f$  über Reduktionsfunktion  $f$  und über Translationsfunktion  $g(\varphi, (\varphi, w)) = w$ .

Nun werden wir uns auf die sparsamen Reduktionen konzentrieren. Die Suche nach einem maximalen Schnitt ist ein triviales Beispiel einer  $\leq_L^P$ -vollständigen NP-Relation, welche nicht unter sparsamen Reduktionen vollständig ist.

Zu einem Graphen  $G$  mit Knotenmenge  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  können wir einen *Schnitt* als

einen String  $w \in \Sigma^n$  schreiben, wobei  $V_0 \stackrel{\text{df}}{=} \{i \mid i < n, w[i] = 0\}$  und  $V_1 \stackrel{\text{df}}{=} \{i \mid i < n, w[i] = 1\}$  den Graphen in zwei Teile partitioniert. Einem Schnitt  $w$  können wir dann ein Gewicht zuordnen: die Anzahl an Kanten in  $G$  die zwischen  $V_0$  und  $V_1$  laufen. Sei nun

$$\text{rMAXCUT} \stackrel{\text{df}}{=} \{((G, r), w) \mid G \text{ ist Graph mit Knotenmenge } \{0, 1, \dots, n-1\}, \\ \text{und } w \in \Sigma^n \text{ ist ein Schnitt mit Gewicht } \geq r\}.$$

Die  $\leq_L^P$ -Vollständigkeit von lässt sich leicht aus den üblichen  $\leq_m^P$ -Reduktionen verstärken. Wir behaupten nun dass  $\text{rSAT} \not\leq_{\text{pars}}^P \text{rMAXCUT}$ . Angenommen es existiert eine solche sparsame Reduktion  $f$ . Beachte dass die SAT-Instanz  $\varphi = „x_1“$  genau eine erfüllende Belegung hat. Dann wäre

$$1 = |\text{set-rSAT}(\varphi)| = |\text{set-rMAXCUT}(f(\varphi))|.$$

Es lässt sich aber leicht sehen, dass  $|\text{set-rMAXCUT}(x)|$  für jede  $\text{rMAXCUT}$ -Instanz gerade sein muss: ist  $w$  Schnitt mit Gewicht  $\geq r$ , dann ist auch der komplementäre String  $\bar{w}$  auch ein Schnitt mit Gewicht  $\geq r$ ; die Mengen  $V_0$  und  $V_1$  werden einfach vertauscht. Damit erhalten wir den Widerspruch.

An dieser Stelle muss aber kritisch hervorgehoben werden, dass dieses Gegenbeispiel auf einem kontingenten „Hütchenspielertrick“ aufbaut: Die Schnitte  $w$  und  $\bar{w}$  werden als unterschiedliche Zertifikate gehandhabt, *repräsentieren* doch aber die *identische* Partitionierung des Graphen. Das Problem löst sich auf, wenn anstelle der naiven Formulierung von  $\text{rMAXCUT}$  folgende Verfeinerung gewählt wird:

$$\text{rMAXCUT}' \stackrel{\text{df}}{=} \{((G, r), w) \mid G \text{ ist Graph mit Knotenmenge } \{0, 1, \dots, n-1\}, \\ w \in \Sigma^n \text{ ist ein Schnitt mit Gewicht } \geq r, \text{ und startet mit } 0\}.$$

In anderen Worten, ein Schnitt für eine  $\text{rMAXCUT}'$ -Instanz hat immer den Knoten 0  $\in V_0$ . Dann ist auch möglich, eine sparsame Reduktion von  $\text{rSAT}$  auf  $\text{rMAXCUT}'$  anzugeben.

Ein filigraneres Beispiel ist Kantenfärbung: Wir werden zeigen dass das Problem der 4-Kantenfärbung nicht vollständig unter sparsamen Reduktionen ist, außer  $P = NP$ .

Zu einem Graphen  $G$  mit Kantenmenge  $\{0, 1, \dots, m-1\}$  können wir eine  $k$ -Kantenfärbung als String  $w$  der Länge  $m$  über dem Alphabet  $\{1, 2, \dots, k\}$  darstellen, wobei Kante  $j$  die Farbe  $w[j]$  erhält. Wir wollen im Folgenden die Anzahl der möglichen Kantenfärbungen als *Partitionierung* zählen, und sind dabei insbesondere nicht an redundanten Lösungen interessiert, die aus reiner Permutation der Farben entsteht. Ähnlich zu  $\text{rMAXCUT}'$  setzen wir für eine *gültige* Färbung  $w$  daher voraus, dass  $w$  die unter Permutationen lexikographisch kleinste Färbung ist, in dem Sinne dass keine Permutation  $\pi$  auf  $\{1, 2, \dots, k\}$  existiert sodass  $\pi(w)$  lexikographisch kleiner ist als  $w$ . (Beachte: wir suchen *nicht* nach einer „global“ lexikographisch kleinsten Färbung von  $G$ .) Definiere nun

$$\text{r4CHROMINDEX} \stackrel{\text{df}}{=} \{((G, k), w) \mid G \text{ ist Graph mit Kantenmenge } \{0, 1, \dots, m-1\} \\ G \text{ hat maximalem Grad } 4, \\ \text{und } w \in \{1, 2, 3, 4\}^m \text{ ist gültige Färbung mit 4 Farben}\}.$$

**Satz 3.26** (Cai und Govorov, 2021 nach Edward und Welsh<sup>6</sup>). *Die NP-Relation  $\text{r4CHROMINDEX}$  ist nicht  $\leq_{\text{pars}}^P$ -vollständig, außer  $P = NP$ .*

*Skizze.* Sei  $\chi'(G)$  die minimale Anzahl an Farben, die zur Kantenfärbung eines Graphen  $G$  benötigt werden. Cai und Govorov können sämtliche Graphen charakterisieren, welche eine eindeutige (modulo Permutationen der Farben) 4-Kantenfärbung haben:

6. Dieses Beispiel geht auf ein unpubliziertes Preprint von Edward und Welsh mit dem Titel „On the Complexity of Uniqueness Problems“ welches offenbar in den 1980ern zirkuliert ist; viele der Arbeiten aus diesem Abschnitt nehmen auf genau dieses Preprint Bezug. Tatsächlich ist überliefert, dass dieses Preprint über die Kantenfärbbarkeit sogar ein „Gegenbeispiel“ zur Berman–Hartmanis-Isomorphievermutung gefunden hätte. Hierbei gingen Edward und Welsh aber von einer wesentlichen stärkeren abweichenden Interpretation der Isomorphievermutung aus: neben der Isomorphie zwischen allen NP-vollständigen Entscheidungsproblemen würde diese Interpretation der Isomorphievermutung auch eine Isomorphie auf den jeweiligen Zertifikatsmengen umfassen. Das würde (mindestens) eine sparsame Interreduzierbarkeit zwischen allen NP-vollständigen Suchproblemen implizieren. Diese Aussage ist nun aber so stark, dass diese durch eben das Beispiel der Kantenfärbbarkeit widerlegt werden kann.

Vgl. Hemaspaandra (1998), Fischer, Hemaspaandra und Torenvliet (1995), Cai und Govorov (2021) und Welsh (1993, S. 118).

- Unter den Graphen mit  $\chi'(G) = 4$  ist  $K_{1,k}$  der einzige Graph mit eindeutiger 4-Kantenfärbung. (Das ist der Satz von Thomason, 1978.)
- Unter den Graphen mit  $\chi'(G) = 3$  sind  $C_3$  und  $K_{1,3}$  die einzigen Graphen mit eindeutiger 4-Kantenfärbung.
- Unter den Graphen mit  $\chi'(G) = 2$  ist  $K_{1,2}$  der einzige Graph mit eindeutiger 4-Kantenfärbung.
- Unter den Graphen mit  $\chi'(G) = 1$  ist  $K_{1,1}$  der einzige Graph mit eindeutiger 4-Kantenfärbung.

In allen Fällen können isolierte Knoten ignoriert werden. Sei hier nur der Beweis für den Fall  $\chi'(G) = 3$  skizziert. Sei hierfür  $G$  ein solcher Graph, dann existiert also mindestens eine Kantenfärbung  $C$  von  $G$  mit drei Farben. Sei  $C_i$  die Teilmenge der Kanten in Farbe  $i$ . Wir haben ohne Beschränkung also  $C_1, C_2, C_3 \neq \emptyset, C_4 = \emptyset$ . In je  $C_1, C_2, C_3$  ist dann auch nur genau eine Kante enthalten, denn andernfalls könnte die zweite Kante auch in Farbe 4 gefärbt sein; das widerspräche der eindeutigen 4-Kantenfärbung. Damit folgt schon mal, dass  $G$  aus genau drei Kanten besteht. Gleichzeitig müssen alle Kanten paarweise zueinander inzident sein: wenn  $e \in C_i$  nicht mit  $f \in C_j$  inzident ist, könnten wir auch  $e$  mit der Farbe  $j$  färben; wieder Widerspruch zur eindeutigen 4-Kantenfärbung. Also kann  $G$  nur die Form eines Kreises  $C_3$  oder eines Sterns  $K_{1,3}$  haben.

Die Fälle  $\chi'(G) = 2$  und  $\chi'(G) = 1$  gehen analog. Insgesamt ergibt sich also, dass in Linearzeit überprüft werden, ob ein gegebener Graph  $G$  eine eindeutige 4-Kantenfärbung zulässt. Sei  $A \in P$  diese Menge der eindeutig färbbaren Graphen.

Mit diesem Fakt zeigen wir nun die Aussage. Angenommen,  $r4CHROMINDEX$  ist  $\leq_{\text{pars}}^P$ -vollständig, dann existiert auch eine sparsame Reduktion  $f$  von  $rSAT$  auf  $r4CHROMINDEX$ . Sei  $\varphi$  eine beliebige SAT-Formel, in der nur die Variablen  $x_1, \dots, x_n$  vorkommen. Wir werden nun in Polynomialzeit entscheiden ob  $\varphi \in SAT$ . Definiere eine zweite SAT-Formel

$$\varphi' \stackrel{\text{def}}{=} (\neg y \wedge \varphi) \vee (y \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \dots \wedge x_n),$$

wobei  $y$  ein neues Variablensymbol ist. Es ist leicht zu sehen, dass  $\varphi'$  genau eine erfüllende Belegung mehr als  $\varphi$  hat.

Wir haben nun

$$\begin{aligned} \varphi \notin SAT &\iff |\text{set-rSAT}(\varphi)| = 0 \iff |\text{set-rSAT}(\varphi')| = 1 \\ &\iff |\text{set-r4CHROMINDEX}(f(\varphi'))| = 1 \iff f(\varphi') \in A, \end{aligned}$$

und damit  $SAT \in P$ . □

Leven und Galil (1983) zeigen, dass die Menge  $\text{Proj}(r4CHROMINDEX) \in NP \leq_m^P$ -vollständig ist. Mit den Konstruktionen aus deren Beweis ist es leicht zu sehen, dass die NP-Relation  $r4CHROMINDEX$  auch  $\leq_L^P$ -vollständig ist. Es ist auch leicht zu sehen, dass  $\text{Proj}(r4CHROMINDEX)$  paddable ist, also auch P-isomorph zu SAT ist. Wir kommen zum Resultat:

**Beobachtung 3.27.** Die NP-Relation  $r4CHROMINDEX$  ist  $\leq_L^P$ -vollständig für FNP, und die zugehörige Projektion  $\text{Proj}(r4CHROMINDEX)$  ist  $\leq_m^P$ -vollständig für NP, und P-isomorph zu SAT. Diese NP-Relation ist insbesondere nicht  $\leq_{\text{pars}}^P$ -vollständig für FNP, außer  $P = NP$ .



## 4 Suchprobleme und die Hypothese Q im Kontext des Pudlák'schen Programms

In der Einleitung dieser Arbeit wurde bereits angedeutet, dass die Hypothese Q von Fenner, Fortnow, Naik und Rogers große Nähe und Verwandtschaft zu Hypothesen hat, die Suchprobleme im Allgemeinen und Beweissystemen im Speziellen betreffen. Damit ergeben sich Beziehungen zu Hypothesen aus dem Pudlák'schen Programm, insbesondere  $\neg\text{SAT}$  (also dass eine NP-vollständige Mengen mit P-optimalem Beweissystem für diese Menge existiert). In diesem Kapitel werden wir diese Beziehungen näher erarbeiten. Zur Erinnerung:

**Vermutung 1.1** (Q, Fenner, Fortnow, Naik und Rogers, 2003). *Für jede totale NPTM  $N$  (d.h.  $L(N) = \Sigma^*$ ) existiert eine Funktion  $g \in \text{FP}$  sodass für alle  $x$  das Bild  $g(x)$  ein akzeptierender Rechenweg von  $N(x)$  ist.*

Im Kapitel werden wir uns grob folgenden drei Desiderata widmen: erstens, nähern wir uns in Abschnitt 4.1 erneut der Frage zwischen Levin- und Karp-Vollständigkeit bzw. der Hypothese KvL aus vorigem Kapitel. Insbesondere analysieren wir die Beziehungen von KvL zu Q und versuchen, KvL in das Pudlák'sche Programm einzuordnen.

Zweitens, in Abschnitt 4.2, verallgemeinern wir Charakterisierungen von Q, die sich insbesondere auf Suchprobleme und deren assoziierte Beweissysteme beziehen. Insbesondere zeigen wir für die vollständigen NP-Suchprobleme  $R$  dass das zu  $R$  assoziierte Standardbeweissystem  $((x, y)$  mit  $R(x, y)$  ist ein Standardbeweis für  $x$ ) P-optimal ist, genau dann wenn Q. Damit wird die P-Optimalität des entsprechenden Standardbeweissystems zu einer Invariante, die entweder für *alle* vollständigen NP-Suchprobleme zutrifft, oder für *keins*.

Drittens ergänzen wir im gesamten Verlauf dieses Kapitels das Pudlák'sche Programm um weitere Hypothesen (KvL, Q, ...), sodass Abbildung 1 der Beziehungen zwischen den Pudlák'schen Hypothesen vergrößert wird. Damit erreichen wir den Stand, der in Abbildung 6 dargestellt wird. Damit einher wird abschließend ein Überblick über Orakel angegeben, welche Hypothesen des Pudlák'schen Programms (ergänzt um Q, KvL, ...) trennen.

Für alle dieser drei Desiderata ist es zunächst notwendig, auf die Hypothese Q einzugehen. Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003) beobachten, dass das Invertieren von surjektiven ehrlichen FP-Funktionen eine erstaunlich robuste Aussage ist, die eine Vielzahl von äquivalenten „fundamentalen“ (Fenner, Fortnow, Naik und Rogers, 2003) Charakterisierungen aus der Komplexitätstheorie zulässt, so zum Beispiel die effiziente Lösbarkeit von TFNP-Suchproblemen, oder das effiziente Ausrechnen akzeptierender Rechenwege einer totalen NPTM. Wir können jetzt schon festhalten, dass die aktuelle Forschung diese Hypothese als sehr stark einschätzt, und eher die negative Beantwortung  $\neg Q$  vermutet.

**Satz 4.1** (Äquivalente Formulierungen der Hypothese Q; Fenner, Fortnow, Naik und Rogers, 2003). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (1) Hypothese Q.
- (2)  $\text{NPMV}_t \subseteq_c \text{FP}$ .
- (3)  $\text{TFNP} \subseteq_c \text{FP}$ .
- (4)  $P = \text{NP} \cap \text{coNP}$  und  $\text{NPMV}_t \subseteq_c \text{NPSV}_t$ .
- (5) Jede surjektive ehrlichen Funktion  $f \in \text{FP}$  ist P-invertierbar.
- (6) Für jede Menge  $L \in P$  und jede NPTM  $N$  mit  $L(N) = L$  existiert eine Funktion  $h \in \text{FP}$  mit
$$x \in L \implies N(x) \text{ akz. mit Rechenweg } h(x).$$

Dieser Satz relativiert insbesondere.

Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003) und Köbler und Messner (2000) charakterisieren Q noch durch zwei weitere Formen, diesmal über je eine Aussage über die Menge SAT:

**Satz 4.2** (Fenner, Fortnow, Naik und Rogers, 2003). *Es gilt Q genau dann wenn Folgendes gilt: Für jede NPTM  $N$  mit  $L(N) = \text{SAT}$  existiert eine Funktion  $h \in \text{FP}$  sodass*

$$N(\varphi) \text{ akz. mit Rechenweg } w \implies h(w) \text{ ist eine erfüllende Belegung für } \varphi.$$

**Satz 4.3** (Köbler und Messner, 2000). *Es gilt Q genau dann wenn das Standardbeweissystem sat*

$$\text{sat}(\varphi, w) = \begin{cases} \varphi & \text{wenn } w \text{ eine erfüllende Belegung für } \varphi \text{ ist} \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

*für rSAT P-optimal ist.*

Diese zwei Sätze relativieren nicht.

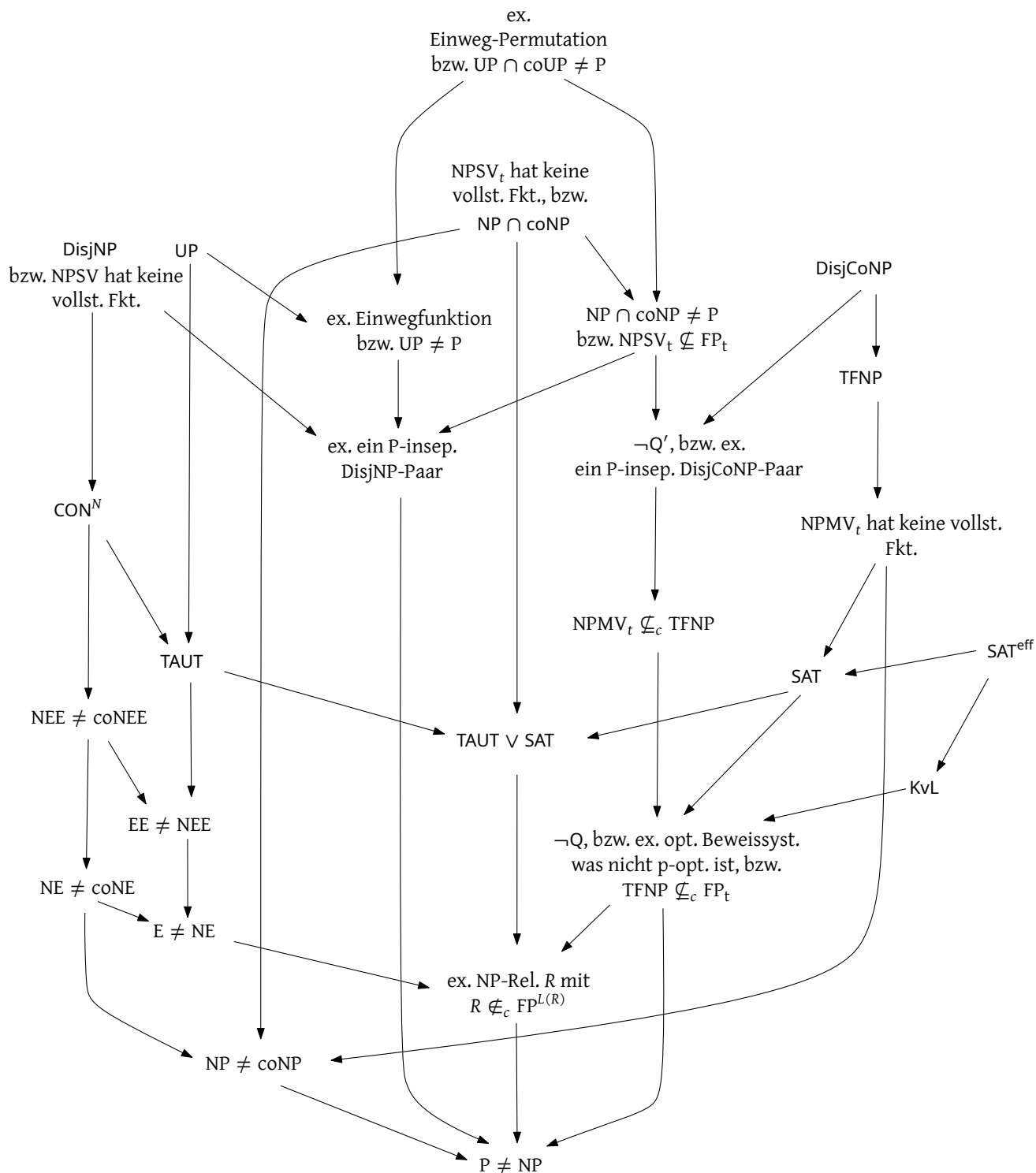
In anderen Worten sagt Satz 4.2 aus, dass unter Annahme von Q es modulo Umcodieren nur einen einzigen SAT-Solver gibt, und insbesondere alle SAT-Solver äquivalent zum trivialen Solver sind, welcher nur alle möglichen Belegungen ausprobiert. Satz 4.3 macht eine analoge Aussage über Beweissysteme: egal wie komplex ein Beweissystem  $h$  für SAT ist, wir können immer einen  $h$ -Beweis für  $\varphi$  in eine erfüllende Belegung für  $\varphi$  (quasi ein trivialer Beweis für  $\varphi \in \text{SAT}$ ) transformieren. Damit ist auch leicht zu sehen, dass  $Q \implies \neg\text{SAT}$ , zumindest im unrelativierten Fall.

In Abschnitt 4.2 werden wir sehen, dass sich die obigen Charakterisierungen auf weitere (aber möglicherweise nicht alle) vollständigen NP-Relationen generalisiert, womit insbesondere auch die beiden Charakterisierungen von Fenner, Fortnow, Naik und Rogers und Köbler und Messner zu einer *relativierbaren* Variante verallgemeinert werden. Mit dieser Verallgemeinerung ist es dann auch für uns möglich, Q formal in das Pudlák'sche Programm (u.a. durch  $Q \implies \neg\text{SAT}$ ) einzuordnen. Hierfür führen wir jetzt schon den Begriff eines Standardbeweissystems formal ein.

**Definition 4.4** (Standardbeweissystem einer NP-Relation). Sei  $R$  eine NP-Relation. Wir definieren bezüglich  $R$  das Standardbeweissystem  $\text{std}_R$  für  $\text{Proj}(R)$  wie folgt:

$$\text{std}_R(w) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} x & \text{wenn } w = (x, y) \text{ und } (x, y) \in R, \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

◁



**Abbildung 6:** Bekannte (relativierende) Implikationen zwischen den betrachteten Hypothesen und weiteren Aussagen. Satz 4.25 gibt Belegstellen für jede dieser Implikationen an.

Damit ist, wie durch die Formulierung oben suggeriert,  $\text{sat} = \text{std}_{\text{rSAT}}$ . Bevor wir nun mit einer Diskussion zwischen Karp-Vollständigkeit und Levin-Vollständigkeit fortsetzen, schließen wir diesen Einstieg mit folgender einfachen Beobachtung ab:

**Beobachtung 4.5.** Für jede NP-Relation  $R$  ist das Standardbeweissystem  $\text{std}_R$  für  $\text{Proj}(R)$  ehrlich, optimal, und hat kurze Beweise.

*Beweis.* Nachdem  $R$  polynomiell längenbeschränkt ist, folgt sofort dass  $\text{std}_R$  kurze Beweise hat. Nach Beobachtung 2.13 damit auch optimal. Insbesondere hat  $\text{std}_R$  nur polynomiell längere Beweise, also ist  $\text{std}_R$  ehrlich.  $\square$

## 4.1 Karp-Vollständigkeit vs. Levin-Vollständigkeit

Wir wiederholen hier erneut die zentrale offene Frage und Vermutung aus Abschnitt 3.3:

**Frage 3.21.** Wenn  $\text{Proj}(R)$  eine  $\leq_m^P$ -vollständige Menge für NP ist, ist dann auch  $R$  eine  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relation für FNP?

**Vermutung 3.22 (KvL).** Es existiert eine NP-Relation  $R$  sodass  $\text{Proj}(R)$   $\leq_m^P$ -vollständig für NP ist, aber  $R$  ist nicht  $\leq_L^P$ -vollständig für FNP.

Zunächst sei hier noch einmal hervorgehoben, dass eine Beantwortung der Frage 3.21 schwer ist. Zum einen haben wir bereits gesehen, dass ein Beweis KvL auch sofort  $P \neq NP$  beweisen würde. Insbesondere ist ein relativierender Beweis von KvL ausgeschlossen, denn existiert ein Orakel, relativ zu diesem  $\neg\text{KvL}$  (z.B. ein PSPACE-vollständiges Orakel, welches NP auf P kollabiert).

Wir werden uns daher im Folgenden insbesondere auf Beziehungen zwischen KvL und gewissen anderen Hypothesen konzentrieren. In diesem Sinne möchte ich argumentieren, dass die obige Frage bzw. Vermutung eng mit der Hypothese Q zusammenhängt. Im Speziellen werden wir sehen, dass die Hypothese Q so charakterisiert werden kann, dass sie einer Verstärkung der Vermutung  $\neg\text{KvL}$  entspricht.<sup>7</sup>

**Satz 4.6.** Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) Hypothese Q, bzw.  $\text{TFNP} \subseteq_c \text{FP}$ .
- (2) Für jedes Paar von NP-Relationen  $A, B$  gilt:

$$\text{Proj}(A) \leq_m^P \text{Proj}(B) \iff A \leq_L^P B.$$

*Beweis.* (1)  $\implies$  (2): Die Richtung von rechts nach links ist klar. Für die andere Richtung sei  $\text{Proj}(A) \leq_m^P \text{Proj}(B)$  mit  $A, B$  NP-Relationen. Sei  $q$  hierbei das Polynom was die Zertifikatslänge in  $A$  begrenzt. Wir wollen nun eine Levin-Reduktion von  $A$  auf  $B$  angeben. Sei  $f \in \text{FP}$  die Funktion, welche die Reduktion  $\text{Proj}(A) \leq_m^P \text{Proj}(B)$  realisiert.

Definiere folgende Relation  $R$  mit

$$\text{set-}R(w) = \begin{cases} \{y \mid y \in \Sigma^{\leq q(|x|)}, (x, y) \in A\} & \text{falls } w = (x, y'), (f(x), y') \in B \\ \{\varepsilon\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass  $R$  eine totale NP-Relation ist. Nach (1) existiert nun eine (totale) Verfeinerung  $g \in \text{FP}$  von  $R$ .

<sup>7</sup> Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003) gaben hierbei eine ähnliche Aussage an (Cor. 3: „Q holds iff every Karp reduction from  $A$  to  $B$  can be extended to a Levin reduction“), es ist aber hervorzuheben, dass die Autoren von einem unüblichen Begriff von Levin-Reduktionen ausgehen, der sich von dem hier verwendeten unterscheidet. Dieser umfasst nicht eine „Rückwärts-Translation“ von Zertifikaten für  $B$ -Instanzen zu  $A$ -Instanzen, sondern eine „Vorwärts-Translation“ von Zertifikaten für  $A$ -Instanzen zu  $B$ -Instanzen.

Damit lässt die Levin-Reduktion von  $A$  auf  $B$  angeben: wähle  $f$  als Reduktionsfunktion, und sei die Funktion  $g$  von oben die Translationsfunktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} (f(x), y') \in B &\implies (x, y') \in \text{Proj}(R) \\ &\implies ((x, y'), g(x, y')) \in R \\ &\implies (x, g(x, y')) \in A \text{ nach Def. von } R \end{aligned}$$

wie gewünscht. Wir haben  $A \leq_L^P B$  via  $f, g$ .

(2)  $\implies$  (1): Sei  $A$  eine totale NP-Relation. Definiere nun die NP-Relation

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, \varepsilon) \mid x \in \Sigma^*\}.$$

Es ist leicht zu sehen dass  $\text{Proj}(A) = \Sigma^* = \text{Proj}(B)$  und dass  $\text{Proj}(A) \leq_m^P \text{Proj}(B)$  über die Identitätsfunktion. Nach Annahme (2) lässt sich nun diese Reduktion zu einer Levin-Reduktion  $A \leq_L^P B$  verstärken, mit Reduktionsfunktion  $f \in \text{FP}$  und Translationsfunktion  $g \in \text{FP}$ . Für alle  $x$  gilt nun  $(f(x), \varepsilon) \in B$  nach Definition, nach Levin-Reduktion also auch  $(x, g(x, \varepsilon)) \in A$ . Definieren wir nun  $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, \varepsilon)$ , dann ist  $(x, h(x)) \in A$  für alle  $x$ , also  $h \in \text{FP}$  eine Verfeinerung von  $A$ , also  $A \in_c \text{FP}$ , wie gewünscht.  $\square$

Beachte, dass in Aussage (2) die Implikation von rechts nach links ohnehin immer gilt. Damit lässt sich Aussage (2) auch so formulieren, dass jede Karp-Reduktion zu einer Levin-Reduktion verstärkt werden kann, indem zur Reduktionsfunktion  $f$  eine geeignete Translationsfunktion  $g$  hinzugefügt wird. Mit dieser Charakterisierung folgt auch unmittelbar, dass  $\text{Q}$  hinreichend für  $\neg \text{KvL}$  ist.

**Korollar 4.7.**  $\text{KvL} \implies \neg \text{Q}$ .

*Beweis.* Wir zeigen die Kontraposition, und starten mit der Voraussetzung  $\text{Q}$ . Wir wollen nun  $\neg \text{KvL}$  zeigen. Sei hierfür  $R$  eine beliebige NP-Relation sodass  $\text{Proj}(R) \leq_m^P$ -vollständig für NP ist. Damit gilt also schon für alle weiteren NP-Relationen  $A$ , dass  $\text{Proj}(A) \leq_m^P \text{Proj}(R)$ . Nach Satz 4.22 gilt also auch die Aussage 4.22(6), und damit  $A \leq_L^P R$ . Also ist  $R$  auch  $\leq_L^P$ -vollständig für FNP, wie gewünscht und wir haben  $\neg \text{KvL}$  gezeigt.  $\square$

#### Effektive P-Simulation

Was sind natürlich notwendige Bedingungen für die Hypothese  $\text{KvL}$ ? Diese Frage erscheint tatsächlich wesentlich schwieriger als gedacht. Insbesondere scheint es unklar, ob aus irgend einer von Pudlák's Hypothesen die Aussage  $\text{KvL}$  folgt.

Um uns dieser Frage dennoch zu nähern, beginnen wir zunächst, die Hypothese  $\text{KvL}$  auf weitere Weisen zu charakterisieren. Es ist intuitiv klar, dass für eine feste Sprache  $L$  die NP-Relationen für  $L$ , die ehrlichen Beweissysteme für  $L$ , und die NPTMs, welche  $L$  entscheiden, alle im breitesten Sinn „Zertifikatsschemata“ sind, und alle diese Berechnungsmodelle untereinander umgeschrieben werden können.

Wir wollen nun die existierende  $\leq_L^P$ -Ordnung auf den NP-Relationen nehmen, und diese auf die ehrlichen Beweissysteme übertragen. Wir definieren hierfür eine abgeschwächte Variante der P-Simulation, welche der  $\leq_L^P$ -Reduktion nachempfunden ist.

**Definition 4.8.** Seien  $h, h'$  Beweissysteme für  $L$ . Das Beweissystem  $h$  *P-simuliert effektiv*  $h'$  falls Funktionen  $f, g \in \text{FP}$  existieren sodass

- (1)  $x \in L \iff f(x) \in L$ ,
- (2)  $h'(w) = f(x) \implies h(g(x, w)) = x$ .



In anderen Worten, falls  $h$  das Beweissystem  $h'$  effektiv P-simuliert, dann kann  $h$  zwar nicht *jeden*  $h'$ -Beweis  $w$  für  $x \in L$  in einen  $h$ -Beweis für (das gleiche)  $x$  effizient umrechnen, es kann aber zumindest alle *relevanten*  $h'$ -Beweise effizient umrechnen, nämlich für jedes  $x \in L$  die  $h'$ -Beweise für  $f(x)$  in  $h$ -Beweise für  $x$ . Klar ist: P-Simulation impliziert effektive P-Simulation impliziert Simulation. Ferner ist diese Art von Simulation eine *effektive* Simulation, in dem Sinn dass die P-invertierbaren Beweissysteme selbst unter effektiver P-Simulation abgeschlossen sind.

Die intuitive Aussage von  $\neg K_v L$  „Alle NP-Relationen für NP-vollständige Sprache  $L \in NP$  sind im Wesentlichen gleich“ überträgt sich nun auch auf *ehrliche* Beweissysteme:

**Satz 4.9.** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (1) Aussage  $\neg K_v L$ .
- (2) Für alle NP-Relationen  $R$  mit  $\text{Proj}(R) \leq_m^P$ -vollständig, alle NPTM  $N$  mit  $L(N) = \text{Proj}(R)$  gilt

$$R \leq_L^P \stackrel{\text{df}}{=} R_N = \{(x, w) \mid N(x) \text{ akz. auf Rechenweg } w\}.$$

- (3) Für alle NP-Relationen  $R$  mit  $\text{Proj}(R) \leq_m^P$ -vollständig, alle ehrlichen Beweissysteme  $h$  mit  $\text{img}(h) = \text{Proj}(R)$  gilt

$$R \leq_L^P \stackrel{\text{df}}{=} R_h = \{(x, w) \mid h(w) = x\},$$

- (4) Für alle NP-Relationen  $R$  mit  $\text{Proj}(R) \leq_m^P$ -vollständig, alle ehrlichen Beweissysteme  $h$  mit  $\text{img}(h) = \text{Proj}(R)$  gilt

$$\text{std}_R \text{ P-simuliert effektiv } h.$$

*Beweis.* (1)  $\implies$  (2): Klar, denn die Relation  $R_N$  ist eine NP-Relation und es gilt  $\text{Proj}(R_N) = L(N) = \text{Proj}(R)$  und damit die Projektion von  $R_N \leq_m^P$ -vollständig. Nach Aussage (1) gilt also nun, dass  $R \leq_L^P R_N$ , wie gewünscht.

(2)  $\implies$  (3): Sei  $h$  ein solches ehrliches Beweissystem, und  $q$  so gewählt, dass  $q(|h(w)|) \geq |w|$ . Betrachte nun die NPTM  $N$ , welche auf Eingabe  $x$  einen Beweis  $w$  der Länge  $\leq q(|x|)$  rät, und genau dann akzeptiert wenn  $h(w) = x$ . Es ist klar, dass  $L(N) = \text{Proj}(R)$ , und nach (2) haben wir  $R \leq_L^P R_N$ . Seien  $f, g \in FP$  die Reduktions- bzw. Translationsfunktion, welche die obige  $\leq_L^P$ -Reduktion realisieren.

Aus Ehrlichkeit von  $h$  lässt sich leicht sehen, dass  $R_h$  tatsächlich eine NP-Relation (mit Zertifikatsschranke  $q$ ) ist. Wir haben nun

$$\begin{aligned} (f(x), w) \in R_h &\implies h(w) = f(x) \\ &\implies N(f(x)) \text{ akz. auf Rechenweg } \alpha_w \end{aligned}$$

wobei  $\alpha_w$  derjenige Rechenweg sein soll, welcher den Beweis  $w$ ,  $|w| \leq q(|h(w)|) = q(|x|)$  rät,

$$\begin{aligned} &\implies (f(x), \alpha_w) \in R_N \\ &\implies (x, \underbrace{g(x, \alpha_w)}_{g'(x, w)}) \in R. \end{aligned}$$

Damit sehen wir, dass mittels  $f$  und  $g'$ ,  $g'(x, w) = g(x, \alpha_w)$  die Reduktion  $R \leq_L^P R_h$  realisiert wird, wie gewünscht

(3)  $\implies$  (4): Sei  $h$  ein solches ehrliches Beweissystem, und  $q$  so gewählt, dass  $q(|h(w)|) \geq |w|$ . Nach (3) gilt  $R \leq_L^P R_h$ . Seien  $f, g \in \text{FP}$  die Reduktions- bzw. Translationsfunktion, welche diese  $\leq_L^P$ -Reduktion realisieren.

Nun gilt  $x \in \text{Proj}(R) \leftrightarrow f(x) \in \text{Proj}(R)$ , und wir haben

$$h(w) = f(x) \implies (f(x), w) \in R_h \implies (x, g(x, w)) \in R \implies \text{std}_R(\underbrace{x, g(x, w)}_{g'(x, w)}) = x.$$

Damit realisieren  $f$  und  $g'$ ,  $g'(x, w) = (x, g(x, w))$  die effektive P-Simulation von  $h$  durch  $\text{std}_R$ .

(4)  $\implies$  (1): Sei  $R$  eine NP-Relation, wobei  $\text{Proj}(R) \leq_m^P$ -vollständig ist. Wir werden zeigen, dass  $\text{rKAN} \leq_L^P R$ , wobei dann auch  $R \leq_L^P$ -vollständig ist (Beob. 3.19), wie gewünscht.

Sei zunächst  $f \in \text{FP}$  die Funktion, welche die Reduktion  $x \in \text{KAN} \leftrightarrow f(x) \in \text{Proj}(R)$  realisiert. Nun konstruieren wir folgendes ehrliche Beweissystem  $h$  für KAN:

$$h(x, y) = \begin{cases} x & \text{falls } (f(x), y) \in R \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass  $h$  ein Beweissystem ist. Wir zeigen nun, dass  $h$  auch ehrlich ist. Sei hierfür  $p$  die Laufzeitschranke von  $f$ , und  $q$  die Zertifikatsschranke von  $R$ . Seien hierfür  $x, y$  gegeben sodass  $h(x, y) = x$ . Damit gilt  $(f(x), y) \in R$ , also

$$|(x, y)| = 2 + 2|x| + 2|y| \leq 2 + 2|x| + 2q(|f(x)|) \leq 2 + 2|x| + 2q(p(|x|)),$$

und damit die Ausgabe  $x$  nicht superpolynomiell kürzer als die Eingabe  $(x, y)$ .

Nach (4) kann nun  $\text{std}_{\text{rKAN}}$  das Beweissystem  $h$  effektiv P-simulieren. Seien  $f', g' \in \text{FP}$  diejenigen Funktion, welche dies realisieren. Wir zeigen nun  $\text{rKAN} \leq_L^P R$ . Die zugehörige Reduktionsfunktion ist hierbei  $f'' = f \circ f'$ . Wir haben

$$(f(f'(x)), y) \in R \implies h(f'(x), y) = f'(x) \implies \text{std}_{\text{rKAN}}(g'(f'(x), y)) = x,$$

und wir können insbesondere  $g'(f'(x), y)$  als  $(x, w)$  schreiben. Dann gilt  $(x, w) \in \text{rKAN}$ . Die Rückübersetzung  $g''(x, y) = (x, w)$  ist dabei effizient möglich.

Damit realisieren  $f'', g''$  die Reduktion  $\text{rKAN} \leq_L^P R$ , wie gewünscht.  $\square$

Mittels unserem Begriff der effektiven P-Simulation können wir nun auch die Hypothese SAT auf natürliche Weise verstärken:

**Vermutung 4.10** ( $\text{SAT}^{\text{eff}}$ ). *Es existiert keine  $\leq_m^P$ -vollständige Menge  $L$  für NP mit einem Beweissystem  $h$ , welches alle anderen ehrlichen Beweissysteme für  $L$  effektiv P-simulieren kann.*

Diese Verstärkung ist am sichtbarsten, wenn wir uns überlegen, wie die Negation  $\neg\text{SAT}$  zu  $\neg\text{SAT}^{\text{eff}}$  in zwei Dimensionen abgeschwächt wird. Erstens der Umfang: es wird nicht mehr verlangt, dass ein Beweissystem  $h$  existiert, welche *alle* Beweissysteme P-simulieren kann, sondern nur noch alle *ehrlichen* Beweissysteme. Zweitens die Beziehung: es wird nicht mehr P-Simulation, sondern nur noch *effektive* P-Simulation vorausgesetzt.

Wir sehen nun, dass  $\text{SAT}^{\text{eff}}$  eine Verstärkung von sowohl SAT als auch KvL ist:

**Korollar 4.11.** (1)  $\text{SAT}^{\text{eff}} \implies \text{SAT}$

(2)  $\text{SAT}^{\text{eff}} \implies \text{KvL}$

*Beweis.* Zu (1): Klar aus Kontraposition. Wenn  $\neg\text{SAT}$ , dann existiert für eine  $\leq_m^P$ -vollständige Menge  $L \in \text{NP}$  ein P-optimales Beweissystem  $h$  für  $L$  existiert. Also kann  $h$  alle anderen Beweissysteme P-simulieren, und damit insbesondere auch alle ehrlichen Beweissysteme  $h'$  effektiv P-simulieren.

Zu (2): Wieder klar aus Kontraposition. Unter  $\neg\text{KvL}$  folgt mit der Formulierung aus Satz 4.9(4), dass für jede NP-Relation  $R$  mit  $\text{Proj}(R) \leq_m^P$ -vollständig, das Standardbeweissystem  $\text{std}_R$  alle ehrlichen Beweissysteme für  $\text{Proj}(R)$  effektiv P-simulieren kann. Das gilt dann insbesondere auch für die  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relation  $\text{rKAN}$ , also hat die  $\leq_m^P$ -vollständige Menge  $\text{KAN}$  ein Beweissystem, welches alle ehrlichen Beweissysteme effektiv P-simulieren kann.  $\square$

Wir haben damit also je eine notwendige ( $\neg Q$ ) und eine hinreichende Hypothese ( $\text{SAT}^{\text{eff}}$ ) für  $\text{KvL}$ . Durch die Charakterisierung von  $\neg\text{KvL}$  durch Satz 4.9 über Beweissysteme ergibt sich eine interessante Ähnlichkeit zur Hypothese Q. Wir wollen diese beiden Hypothesen im Folgenden kurz gegenüberstellen. Zur Anschaulichkeit beziehe ich mich hierbei auf die NP-Relation  $\text{rSAT}$ . (Durch Ergebnisse im nächsten Abschnitt wird klar, dass sich dieses Argument auch auf  $\text{rKAN}$  relativierend überträgt.) Wir haben

8. Satz 4.2 macht zwar nur Aussagen über NPTMs, aber es ist leicht zu sehen, dass diese mit den ehrlichen Beweissystemen identifiziert werden können. Vgl. auch Satz 4.15.

- Q genau dann wenn *sat* jedes ehrliche Beweissystem P-simulieren kann (Satz 4.2),<sup>8</sup>
- $\neg\text{KvL}$  genau dann wenn *sat* jedes ehrliche Beweissystem effektiv P-simulieren kann (Satz 4.9).

Insbesondere vermute ich, dass möglicherweise sogar  $Q \Leftrightarrow \neg\text{KvL}$  gelten könnte. Die Richtung von links nach rechts haben wir bereits in Korollar 4.7 gesehen. Für die Richtung von rechts nach links möchte ich nun plausibilisieren, dass  $\neg\text{KvL} \wedge \neg Q$  zu einem Widerspruch führt.

Unter Annahme von  $\neg Q$  folgt nach Satz 4.2, dass das Standardbeweissystem *sat* von  $\text{rSAT}$  ein bestimmtes ehrliche Beweissystem  $h$  nicht P-simulieren kann. Wir haben also für alle Funktionen  $f \in \text{FP}$

$$h(w) = \psi \not\Rightarrow f(w) \text{ erfüllt } \psi. \quad (4.1)$$

In anderen Worten: obwohl wir einen  $h$ -Beweis  $w$  für die Erfüllbarkeit der Formel  $\varphi$  haben, können wir nicht effizient eine erfüllende Belegung aus  $w$  berechnen.

Nun gilt aber nach Annahme auch  $\neg\text{KvL}$ . Über Satz 4.9(4) gilt, dass *sat* das ehrliche Beweissystem  $h$  effektiv P-simulieren kann. Wir haben also zwei Funktionen  $f', g' \in \text{FP}$  sodass

$$h(w) = f'(\varphi) \Rightarrow g'(\varphi, w) \text{ erfüllt } \varphi. \quad (4.2)$$

Beachte, dass die Funktion  $f'$  notwendigerweise ungleich  $\text{id}$  ist. Wir können  $f'$  so verstehen, dass diese  $\varphi$  gewissermaßen in eine einfachere Form bringt, für welche  $h$ -Beweise effizient verarbeitet werden können.

Es ist also einerseits nicht möglich, aus dem  $h$ -Beweis  $w$  effizient eine akzeptierende Belegung für  $f(\varphi)$  zu bestimmen, obwohl  $w$  bezeugt dass  $f(\varphi)$  erfüllbar ist. (Ersetze in (4.1)  $\psi$  mit  $f(\varphi)$ .) Andererseits reicht der  $h$ -Beweis  $w$  aber aus, um (zusammen mit der Information  $\varphi$ ) effizient wieder eine erfüllende Belegung für  $\varphi$  zu berechnen. Diese Argumentation *plausibilisiert* zwar einen Widerspruch, bzw. dass  $\neg Q \wedge \neg\text{KvL}$  wahrscheinlich falsch ist, ist aber natürlich kein solcher. Die Umkehrung von Korollar 4.7 bleibt offen.

Es bleiben auch noch weitere Fragen offen, die wir hier aus Platzgründen nicht weiter verfolgen werden. Zum einen zur Charakterisierung von  $\text{KvL}$ : Wir konnten zwar  $\text{KvL}$  u.a.



als Aussage über Beweissysteme formulieren, aber sind auch noch weitere äquivalente Charakterisierungen möglich, z.B. ähnlich wie bei Q?

Zum anderen die Beziehungen zwischen KvL und anderen Hypothesen bzw. Annahmen. Gibt es natürliche (z.B. kryptographische) Annahmen die hinreichend für KvL sind? Wie ist die Beziehung zu den anderen Pudlák'schen Hypothesen? Wie verhält sich insbesondere SAT zu  $\text{SAT}^{\text{eff}}$ ? Diese Fragen werden wir zum Teil in Kapitel 5 klären; dort wird ein Orakel konstruiert, welches zeigt, dass selbst unter der Annahme von DisjNP und UP es nicht möglich ist, mit relativierenden Beweismethoden auf KvL zu schließen. Wir kommen hierauf am Ende dieses Kapitels noch einmal zurück.

Insgesamt ist durch die vorherigen Überlegungen aber ein erster Schritt getan, die Beziehung zwischen Levin- und Many-one-Vollständigkeit über die Vermutung KvL im Kontext des Pudlák'schen Programms einzuordnen. Weitere Forschung in diese Richtung erscheint vielversprechend.

## 4.2 Hypothese Q und Suchprobleme

Wie im Einstieg des Kapitels angesprochen, geben Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003) bzw. Köbler und Messner (2000) äquivalente Charakterisierungen der Hypothese Q an, welche sich im Wesentlichen auf der  $\leq_L^P$ -Vollständigkeit von rSAT aufbauen (Satz 4.2 und 4.3). Wir wiederholen hier noch einmal die Aussagen, aber mit einer etwas abstrakteren Notation. Ganz ähnlich wie NP-Relationen ein Standardbeweissystem induzieren, können wir auch das Standardbeweissystem bezüglich einer NPTM definieren:

**Definition 4.12** (Standardbeweissystem von NPTM). Sei  $N$  eine NTM. Wir definieren bezüglich  $N$  das Standardbeweissystem  $\text{std}_N$  für  $L(N)$  wie folgt:

$$\text{std}_N(w) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} x & \text{wenn } w = (x, \alpha) \text{ und } N(x) \text{ akzeptiert auf RW } \alpha, \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases} \quad \triangleleft$$

Ähnlich wie bei Standardbeweissysteme für NP-Relationen ist  $\text{std}_N$  für jede nichtdeterministische *Polynomialzeit*-TM  $N$  ehrlich, optimal, und hat kurze Beweise. So können wir die anfangs genannten Charakterisierungen folgendermaßen notieren:

**Satz 4.2** (Fenner, Fortnow, Naik und Rogers, 2003). *Es gilt Q genau dann wenn  $\text{std}_N \leq_m^P \text{sat}$  für jede NPTM  $N$  mit  $L(N) = \text{SAT}$ .*

**Satz 4.3** (Köbler und Messner, 2000). *Es gilt Q genau dann wenn das Standardbeweissystem  $\text{std}_{\text{rSAT}}$  P-optimal ist.*

Diese beiden Charakterisierungen wollen wir im Folgenden verallgemeinern und auf beliebige  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relationen  $R$  übertragen. Hieraus ergibt sich schon unmittelbar der technische Beitrag, dass dann diese Charakterisierungen auch in einer relativierten Umgebung angewendet werden können, um z.B. ein geeignetes Orakel zu konstruieren, was Q von anderen Hypothesen trennt.

Das ist für den zweiten Satz 4.3 ohne weitere zusätzliche Bedingungen möglich. Beachte, dass sich der hier präsentierte Beweis maßgeblich von dem ursprünglichen Beweis von Messner (vgl. 2000, Thm. 5.2) unterscheidet, und insbesondere ohne sein (nichtrelativierendes) Padding-Argument auskommt.

**Satz 4.13.** Sei  $R$  eine beliebige  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relation. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) Aussage Q.
- (2) Das Standardbeweissystem  $std_R$  ist P-optimal.

*Beweis.* (1)  $\implies$  (2): Sei  $p$  die Zertifikatsschranke von  $R$ . Nach Satz 4.1 können wir voraussetzen, dass  $TFNP \subseteq_c FP$ . Wir zeigen nun, dass  $std_R$  P-optimal ist. Sei dafür  $h$  ein beliebiges Beweissystem für  $Proj(R)$ . Definiere nun die NP-Relation  $Q$  mit

$$set-Q(x, w) = \begin{cases} \{y \mid y \in \Sigma^{\leq p(|x|)}, (x, y) \in R\} & \text{wenn } h(w) = x \\ \{\varepsilon\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass  $Q$  eine totale NP-Relation ist. Insbesondere im ersten Fall gilt  $x \in \text{img}(h) = Proj(R)$ , also existiert auch mindestens ein  $y \in set-R(x)$ . Nach Annahme gilt also  $Q \in_c FP$ , sei also  $q \in FP$  eine Verfeinerung von  $Q$ .

Wir zeigen nun  $h \leq_m^P std_R$ . Sei hierfür ein  $h$ -Beweis  $w$  für  $x$  gegeben. Es gilt nun

$$\begin{aligned} h(w) = x &\implies set-Q(x, w) = set-R(x) \\ &\implies q(x, w) \in set-Q(x, w) = set-R(x) \\ &\implies (x, q(x, w)) \in R \implies std_R(x, q(x, w)) = x. \end{aligned}$$

Wir haben also den  $h$ -Beweis  $w$  in den  $std_R$ -Beweis  $q(x, w)$  umschreiben können. Es ist einfach zu sehen, dass dies, gegeben  $w$ , effizient in FP möglich ist.

(2)  $\implies$  (1): Wieder reicht es nach Satz 4.1 aus zu zeigen, dass  $TFNP \subseteq_c FP$ . Sei daher  $Q \in TFNP$  beliebig. Wir wollen eine Verfeinerung von  $Q$  in FP angeben, bzw. in anderen Worten effizient Zertifikate für Instanzen finden.

Nachdem  $R \leq_L^P$ -vollständig ist, haben wir Funktionen  $f, g \in FP$  mit

$$x \in Proj(Q) = \Sigma^* \implies f(x) \in Proj(R), \quad (f(x), y') \in R \implies (x, g(x, y')) \in Q.$$

Definiere nun

$$h(w) = \begin{cases} x & \text{wenn } w = 0\langle x, y \rangle, (x, y) \in R \\ x & \text{wenn } w = 1\langle x, z \rangle, f(z) = x \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir verifizieren, dass  $h$  ein Beweissystem für  $Proj(R)$  ist. Wenn im ersten Fall  $(x, y) \in R$  gilt, dann offenbar auch  $h(0\langle x, y \rangle) = x \in Proj(R)$ . Wenn im zweiten Fall  $f(z) = x$  gilt, dann insbesondere  $f(z) \in Proj(R)$  und wir haben  $h(1\langle x, z \rangle) = x = f(z) \in Proj(R)$ .

Also ist  $h$  ein Beweissystem für  $Proj(R)$ . Nach (2) ist nun also auch  $h \leq std_R$ , heißt es existiert  $r \in FP$  sodass  $h(w) = std_R(r(w))$ .

Sei nun ein beliebiges  $x \in \Sigma^*$  gegeben. Wir zeigen nun, wie wir effizient ein  $y$  finden können sodass  $(x, y) \in Q$ . Es gilt nun

$$h(\underbrace{1\langle f(x), x \rangle}_w) = f(x) \implies std_R(r(w)) = f(x)$$

Nach Definition muss dabei  $r(w) = (f(x), y')$  für geeignetes  $y'$  gelten. Wir haben also  $std_R(f(x), y') = f(x)$  und es gilt  $(f(x), y') \in R$ . Nach Wahl von  $g$  gilt dann  $(x, g(x, y')) \in Q$ , heißt  $g(x, y')$  ist unser gesuchtes Zertifikat.  $\square$

Die andere Charakterisierung von Fenner, Fortnow, Naik und Rogers ist umfangreicher. Einerseits ist klar, dass „ $std_N \leq_m^P std_R$ “ schwächer ist als „ $std_R$  ist P-optimal“, was ja nach vorigem Satz äquivalent zu Q ist. Andererseits gilt die Umkehrung scheinbar nicht

für alle  $\leq_L^P$ -vollständigen NP-Relationen  $R$ . Die Autoren zeigen diese Umkehrung für die NP-Relation  $\text{rSAT}$  aus, und nutzen hierbei die Eigenschaft aus, dass die entsprechenden Reduktionsfunktionen alle  $P$ -invertierbar sind, bzw. in anderen Worten, die  $\leq_{L,1,i}^P$ -Vollständigkeit von  $\text{rSAT}$ .

Wir werden im Folgenden diese Voraussetzung abschwächen, und betrachten dabei folgende Verstärkung der  $\leq_m^P$ -Reduktion.

**Definition 4.14** (Ehrliche Levin-Reduzierbarkeit). Seien  $Q, R$  zwei NP-Relationen. Wir sagen dass  $Q$  sich auf  $R$  ehrlich Levin-reduzieren lässt, bzw.  $Q \leq_{L,h}^P R$  wenn  $Q \leq_L^P R$ , und die zugehörige Reduktionsfunktion  $f$  ehrlich ist.

Definiere  $\leq_{L,h}^P$ -Vollständigkeit entsprechend.  $\triangleleft$

Beachte, dass  $\leq_{L,h}^P$  zwischen  $\leq_L^P$  und  $\leq_{L,1,i}^P$  (d.h. die Reduktionsfunktion ist  $P$ -invertierbar) liegt. Damit impliziert  $\leq_{L,1,i}^P$ -Vollständigkeit eine  $\leq_{L,h}^P$ -Vollständigkeit, und diese eine  $\leq_L^P$ -Vollständigkeit.

Unter der Voraussetzung der  $\leq_{L,h}^P$ -Vollständigkeit können wir nun Satz 4.2 generalisieren und relativieren:

**Satz 4.15.** Sei  $R$  eine beliebige  $\leq_{L,h}^P$ -vollständige NP-Relation. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) Aussage Q.
- (2) Für jedes ehrliche Beweissystem für  $\text{Proj}(R)$  gilt  $h \leq_m^P \text{std}_R$ .
- (3) Für jede NPTM  $N$  mit  $L(N) = \text{Proj}(R)$  gilt  $\text{std}_N \leq_m^P \text{std}_R$ .

*Beweis.* (1)  $\implies$  (2): Klar, denn mit Satz 4.13 folgt aus Q, dass  $\text{std}_R$   $P$ -optimal ist, heißt es gilt auch  $h \leq_m^P \text{std}_R$ .

(2)  $\implies$  (3): Klar, denn  $\text{std}_N$  ist ein ehrliches Beweissystem.

(3)  $\implies$  (1): Sei zunächst  $p$  die Zertifikatsschranke von  $R$ . Wir zeigen erneut  $\text{TFNP} \subseteq_c \text{FP}$  für Q. Sei hierfür  $Q \in \text{TFNP}$  beliebig. Da  $R$  ja vollständig ist, gilt  $Q \leq_{L,h}^P R$  via  $f, g \in \text{FP}$  und die Reduktionsfunktion  $f$  ist ehrlich; es existiert ein also Polynom  $q$  sodass  $q(|f(x)|) \geq |x|$ .

Definiere nun die folgende NPTM  $N(w)$ :

- 1 Rate nichtdeterministisch  $x \in \Sigma^{\leq q(|w|)}$
- 2 **wenn**  $f(x) = w$  **dann** akzeptiere  
(Ab hier kann man  $x$  wegwerfen)
- 3 Rate nichtdeterministisch  $y \in \Sigma^{\leq p(|w|)}$
- 4 Akzeptiere genau dann wenn  $(w, y) \in R$ .

Wir zeigen nun, dass  $L(N) = \text{Proj}(R)$ . Wir müssen hierfür nur die Fälle betrachten, wenn  $N(w)$  in Z. 2 akzeptiert. In diesem Fall gilt  $f(x) = w$ , und wir haben

$$x \in \Sigma^* \implies x \in \text{Proj}(Q) \implies f(x) \in \text{Proj}(R) \implies w \in \text{Proj}(R),$$

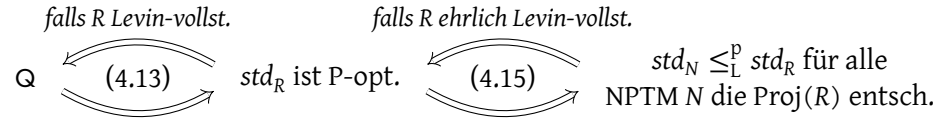
wie gewünscht.

Nach (2) gilt nun  $\text{std}_N \leq_m^P \text{std}_R$ . Insbesondere haben wir eine Funktion  $r \in \text{FP}$  mit  $\text{std}_N(w, \alpha) = \text{std}_R(h(w, \alpha))$ . Sei nun ein beliebiges  $x \in \Sigma^*$  gegeben. Wir zeigen nun, wie wir effizient ein  $y$  finden können sodass  $(x, y) \in Q$ . Es lässt sich leicht ein akzeptierender Rechenweg  $\alpha_x$  für  $N(f(x))$  angeben, welcher in Z. 1 das Wort  $x$  rät. Es gilt nun

$$\text{std}_N(f(x), \alpha_x) = f(x) \implies \text{std}_R(r(f(x), \alpha_x) = f(x).$$

Nach Definition muss dabei  $r(f(x), \alpha_x) = (f(x), y')$  für geeignetes  $y'$  gelten. Wir haben also  $std_R(f(x), y') = f(x)$  und es gilt  $(f(x), y') \in R$ . Nach Wahl von  $g$  gilt dann  $(x, g(x, y')) \in Q$ , heißt  $g(x, y')$  ist unser gesuchtes Zertifikat.  $\square$

Wir fassen kurz den aktuellen Stand zusammen. Sei  $R$  eine NP-Relation. Wir haben nun folgendes Bild:



### Levin-Paddability

Die stärkere Voraussetzung an die NP-Relation  $R$ , dass diese *ehrlich* Levin-vollständig sein muss, wollen wir hier noch einmal kurz beleuchten. Ganz ähnlich zur Berman–Hartmanis-Paddability lässt sich auch die ehrliche Levin-Vollständigkeit von  $R$  äquivalent als strukturelle Eigenschaft von  $R$  formulieren. Hierbei machen wir einen sehr schwachen Begriff von Paddability auf Suchproblemen produktiv, welcher von Köbler und Messner (2000) konkret auf  $rSAT$  eingesetzt wurde.

Ähnlich wie bei der Berman–Hartmanis-Paddability wollen wir beliebige Instanzen  $x$  zu längeren Instanzen  $x'$  vergrößern. Zusätzlich verlangen wir, dass wir auch auf Zertifikaten  $y$  für  $x'$  wieder Zertifikate  $y$  für  $x$  zurückrechnen können. In anderen Worten: wir codieren „redundante Teile“ in  $x$  hinein, um  $x'$  zu erhalten. Für Zertifikate  $y'$  für  $x'$  können wir dann den Teil des Zertifikats wegwerfen, welcher sich ohnehin nur auf das redundanten Padding bezieht, und erhalten wieder ein Zertifikat für  $x$ .

**Definition 4.16** (Levin-Paddability). Eine NP-Relation  $R$  ist *Levin-paddable* wenn Funktionen  $pad \in FP$  und  $padsol \in FP$  existieren, sowie ein Polynom  $r$  sodass

- (1)  $x \in \text{Proj}(R) \iff pad(x, 1^n) \in \text{Proj}(R)$ ,
- (2)  $(pad(x, 1^n), y) \in R \implies (x, padsol(x, 1^n, y)) \in R$ ,
- (3)  $r(|pad(x, 1^n)|) \geq n$ . (Funktion  $pad$  ist ehrlich bzgl. der zweiten Komponente.)  $\triangleleft$

Beachte dass wir im Gegensatz zur Berman–Hartmanis-Paddability keine Invertierbarkeit der Padding-Funktion verlangen.

Wir sehen einfach, dass  $rSAT$  Levin-paddable ist: padde Formeln  $\varphi$  auf, indem z.B. Disjunktionen neue Variablen hinzugefügt werden, also z.B.

$$\varphi' = pad(\varphi, 1^n) = \varphi \vee x_k \vee x_{k+1} \vee \dots \vee x_{k+n},$$

wobei  $k$  hinreichend groß sein soll, dass  $x_k, x_{k+1}, \dots$  nicht als Variable in  $\varphi$  vorkommt. Ist nun  $w'$  eine erfüllende Belegung für  $\varphi'$ , dann entferne alle Variablenbelegungen  $x_k, x_{k+1}, \dots$  aus  $w'$ ; es ergibt sich eine erfüllende Belegung  $w$  für  $\varphi$ .

Diese Eigenschaft lässt sich auch leicht für die kanonische NP-Relation  $rKAN$  überprüfen, und gilt insbesondere auch im relativierten Fall.

**Beobachtung 4.17.** Die kanonische Levin-vollständige NP-Relation  $rKAN$  ist Levin-paddable.

*Skizze.* Padde Instanzen  $(N, x, 1^n)$  zu  $(N', x, 1^n)$  auf, wobei die NTM  $N'$  aus  $N$  hervorgeht, indem Zustände hinzugefügt werden die über die Transitionsrelation von  $N$  nicht erreichbar sind. Ein akzeptierender Rechenweg auf  $N'(x)$  ist dann (modulo Umcodieren) genau ein akzeptierender Rechenweg auf  $N(x)$ .  $\square$

Folgendes Lemma zeigt zunächst, dass Levin-Paddability unter den vollständigen Relationen hinreichend für ehrliche Vollständigkeit ist.

**Lemma 4.18.** *Sei  $R$  eine  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relation. Wenn  $R$  Levin-paddable ist, dann ist  $R$  auch  $\leq_{L,h}^P$ -vollständig.*

*Beweis.* Sei  $Q$  eine beliebige NP-Relation. Wir wollen zeigen, dass  $Q \leq_{L,h}^P R$ . Nachdem  $R$  vollständig ist, gilt  $Q \leq_L^P R$ ; sei  $f, g \in FP$  die Reduktions- bzw. Translationsfunktion, welche diese Reduktion realisieren. Wir werden nun Funktionen  $f', g' \in FP$  angeben, welche die gleiche Reduktion realisieren, aber  $f'$  ehrlich, wie gewünscht.

Sei  $pad, padsol$  die zu  $R$  zugehörigen Padding-Funktionen. Definiere

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} pad(f(x), 1^{|x|}).$$

Es gilt

$$x \in \text{Proj}(Q) \iff f(x) \in \text{Proj}(R) \iff pad(f(x), 1^{|x|}) = f'(x) \in \text{Proj}(R),$$

wobei erste Implikation die Eigenschaft der Reduktionsfunktion  $f$  ist, und die zweite aus der Definition von Levin-Paddability folgt. Aus der Definition von Levin-Paddability folgt auch  $r(|f'(x)|) \geq |x|$  für ein geeignetes Polynom  $r$ , und damit ist auch  $f'$  ehrlich.

Definiere

$$g'(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, padsol(f(x), 1^{|x|}, z)).$$

Sei nun  $(f'(x), z) \in R$ . Die Funktion  $g'$  berechnet nun ein Zertifikat  $y$  für  $x$ : Wir haben  $(pad(f(x), 1^{|x|}), z) \in R$ , also gilt nach Levin-Paddability dass

$$(f(x), padsol(f(x), 1^{|x|}, z)) \in R,$$

und nach Definition der Translationsfunktion  $g$  gilt dann

$$(x, g(x, padsol(f(x), 1^{|x|}, z))) \in Q,$$

und das ist genau  $(x, g'(x, z)) \in Q$ , wie gewünscht.  $\square$

Für die andere Richtung sehen wir, dass sich Levin-Paddability auf  $\leq_{L,h}^P$  nach oben überträgt.

**Lemma 4.19.** (1) *Gilt  $rKAN \leq_{L,h}^P R$ , dann ist  $R$  Levin-paddable (und  $\leq_L^P$ -vollständig für FNP).*

(2) *Jede  $\leq_{L,h}^P$ -vollständige NP-Relation  $R$  ist auch Levin-paddable.*

*Beweis zu Beobachtung 4.19.* Aussage (2) folgt unmittelbar aus (1).

Für (1) nutzen wir die Levin-Paddability von  $rKAN$  aus: übersetze Instanz  $x$  von  $R$  nach  $rKAN$ , padde dort hoch, und übersetze zu  $R$ -Instanz  $x'$  zurück. Ist dann  $y'$  ein Zertifikat für  $x'$ , dann lässt sich dies auf ähnlichem Weg wieder zu einem Zertifikat für  $x$  zurückrechnen.

Seien  $f, g$  die Reduktions- bzw. Translationsfunktion, welche  $rKAN \leq_L^P R$  bezeugen, und seinen analog  $f', g'$  jene Funktionen, welche  $R \leq_L^P rKAN$  bezeugen. Erstere existieren nach Voraussetzung, zweitere existieren weil  $rKAN \leq_L^P$ -vollständig ist. Nach Voraussetzung ist  $f$  ehrlich. Und nach Beobachtung 4.17 existieren für  $rKAN$  Padding-Funktionen  $pad_{rKAN}, padsol_{rKAN}$ . Sei  $q$  ein entsprechendes Polynom mit  $q(|pad_{rKAN}(x, 1^n)|) \geq n$ ,  $q(|f(x)|) \geq |x|$ .

Definiere nun

$$\text{pad}_R(x, 1^n) \stackrel{\text{df}}{=} f(\text{pad}_{\text{rKAN}}(f'(x), 1^n)).$$

Die Zugehörigkeit zu  $\text{Proj}(R)$  bleibt erhalten:

$$\begin{aligned} x \in \text{Proj}(R) &\iff f'(x) \in \text{KAN} \iff \text{pad}_{\text{rKAN}}(f'(x), 1^n) \in \text{KAN} \\ &\iff f(\text{pad}_{\text{rKAN}}(f'(x), 1^n)) \in \text{Proj}(R) \iff \text{pad}_R(x, 1^n) \in \text{Proj}(R). \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} &q(q(|\text{pad}_R(x, 1^n)|)) \\ &= q(q(|f(\text{pad}_{\text{rKAN}}(f'(x), 1^n)|))) \\ &\geq q(|\text{pad}_{\text{rKAN}}(f'(x), 1^n)|) \\ &\geq n. \end{aligned}$$

und damit ist  $\text{pad}_R$  wie gewünscht ehrlich bzgl.  $n$  (mit Polynom  $q \circ q$ ).

Es verbleibt noch die Funktion  $\text{padsol}_R$  anzugeben. Nehme hierfür an, dass wir ein  $y'$  gegeben haben mit  $(\text{pad}_R(x, 1^n), y') \in R$ . Wir können über  $g, g'$  das Zertifikat  $y'$  zu Zertifikat  $y$  mit  $(x, y) \in R$  zurück übersetzen: Sei  $p \stackrel{\text{df}}{=} \text{pad}_{\text{rKAN}}(f'(x), 1^n)$ , dann gilt

$$(f(p), y') \in R \implies (p, \underbrace{g(p, y')}_z) \in \text{rKAN}.$$

Definiere  $z = g(p, y')$ . Nun haben wir

$$\begin{aligned} (p, z) &= (\text{pad}_{\text{rKAN}}(f'(x), 1^n), z) \in \text{rKAN} \\ &\implies (f'(x), \underbrace{\text{padsol}_{\text{rKAN}}(f'(x), 1^n, z)}_{z'}) \in \text{rKAN} \end{aligned}$$

und mit  $z' = \text{padsol}_{\text{rKAN}}(f'(x), 1^n, z)$  gilt

$$(f'(x), z') \in \text{rKAN} \implies (x, \underbrace{g'(x, z')}_y) \in R.$$

Es ist leicht zu sehen, dass sich eine Funktion  $\text{padsol}_R \in \text{FP}$  angeben kann, die aus  $x, 1^n, y'$  dieses entsprechende  $y$  berechnen kann.  $\square$

Wir erhalten damit als Korrolar folgende Äquivalenz:

**Korollar 4.20.** Sei  $R$  eine  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relation. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $R$  ist  $\leq_{L,h}^P$ -vollständig.
- (2)  $R$  ist Levin-paddable.

Für die üblichen natürlichen NP-Relationen (wie  $\text{rSETCOVER}$ ,  $\text{rVC}$ ,  $\text{rCLIQUE}$ ,  $\text{r3COLORABILITY}$ ,  $\text{rHAMCYCLE}$ ,  $\text{rMAXCUT}$ ) ist leicht zu sehen, dass diese alle Levin-paddable sind.

Hieraus ergibt sich die Frage, ob Levin-Paddability für *alle* vollständigen NP-Relationen zutrifft. Unter Annahmen einer geeigneten Einwegfunktion ist dies nicht der Fall. Die Argumentation verläuft hier ähnlich zur *Encrypted Complete Set Conjecture*. Wir setzen hier eine stärkere *secure one-way function* (Grollmann und Selman, 1988)  $f$  voraus, die selbst mithilfe funktionaler Orakel-Queries nur auf einer dünnen Menge  $P$ -invertierbar ist. Präzise meinen wir damit folgendes: sei  $A$  ein beliebiger Polynomialzeit-Algorithmus, der auf Eingabe  $w$  versucht, das Urbild  $f^{-1}(w)$  zu berechnen. Zusätzlich darf  $A$  das Urbild  $f^{-1}(w')$  von einem Wort  $w' \neq w$  erfragen. Selbst dann wird  $A$  nur auf einer dünnen Menge  $W \subseteq \Sigma^*$  das korrekte Urbild aller  $w \in W$  bestimmen können. (Vgl. die Ähnlichkeit

zur Selbstreduzierbarkeit aus Abschnitt 3.2.) Die Existenz einer solchen Einwegfunktion erscheint aus kryptographischer Perspektive naheliegend.

Betrachte nun, analog zur Encrypted Complete Set Conjecture, die NP-Relation

$$\text{rSAT}_f = \{(z, (\varphi, w)) \mid z = f(\varphi), \text{ und } w \text{ ist erfüllende Belegung für } \varphi\}$$

Es ist leicht zu sehen dass  $\text{rSAT} \leq_L^P \text{rSAT}_f$  und damit ist  $\text{rSAT}_f$  auch  $\leq_L^P$ -vollständig. Gleichzeitig kann dann  $\text{rSAT}_f$  nicht Levin-paddable sein. Denn angenommen,  $\text{rSAT}_f$  ist Levin-paddable, dann lässt sich  $f$  mit einem funktionalen Orakel-Query *zumindest auf den Werten*  $f(\text{SAT})$  P-invertieren: gegeben  $w \in f(\text{SAT})$ , berechne erst eine zweite Instanz  $w' = \text{pad}(w, 1^n) \in \text{Proj}(\text{rSAT}_f)$  mit hinreichend langem  $n$  sodass  $w' \neq w$ . Frage dann an das Orakel und erhalte  $(x', z') \in \text{set-rSAT}_f(w')$ . Dann gilt  $(x, z) = \text{padsol}(w, 1^n, (x', z'))$  mit  $f(x) = w$ ; damit ist  $x$  das gesuchte Urbild von  $w$ . Wir können also auf der Bildmenge  $f(\text{SAT})$  die Einwegfunktion  $f$  invertieren. Diese Menge ist tatsächlich nicht dünn: unabhängig der gewählten Codierung von SAT folgt aus der Existenz der Einwegfunktion  $f$  schon  $P \neq NP$ , und damit ist insbesondere die  $\leq_m^P$ -vollständige Menge  $f(\text{SAT})$  eine nicht-dünne Menge nach dem Satz von Mahaney (1982). Das widerspräche nun den Eigenschaften von  $f$ , also ist  $\text{rSAT}_f$  nicht Levin-paddable. (Diese Argumentation relativiert, wenn anstelle  $\text{rSAT}$  eine relativierbare vollständige Menge gewählt wird, die z.B.  $\text{rKAN}$ .)

Im Zusammenhang mit Korollar 4.20 ergibt sich ferner, dass  $\text{rSAT}_f$  auch nicht  $\leq_{L,h}^P$ -vollständig sein kann. Damit ergäbe sich aus der Existenz einer solchen Funktion  $f$ , dass die Reduktion  $\leq_{L,1,i}^P$  eine nichttriviale Verfeinerung von  $\leq_m^P$  ist.

Dennoch bleibt die allgemeine Frage zwischen  $\leq_L^P$ -Vollständigkeit und Levin-Paddability offen, die wir im Folgenden nicht weiter bearbeiten werden:

**Frage 4.21.** Wenn eine NP-Relation  $R \leq_L^P$ -vollständig für FNP ist, ist dann  $R$  auch Levin-paddable? Existiert ggf. ein Gegenbeispiel in einer geeigneten relativierten Umgebung?

#### Charakterisierungen von Q

Unabhängig von voriger Frage können wir nun aber abschließend die vorigen Ergebnisse in folgendem Satz zusammenfassen. Beachte dass diese Charakterisierungen relativieren. Die Äquivalenz zu Aussage (8) ist hierbei eine einfache relativierbare Generalisierung von zwei Beweisen von Messner (2000, Thm. 5.3).

**Satz 4.22** (Äquivalente Formulierungen der Hypothese Q). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (1) *Hypothese Q: Für jede totale NPTM  $N$  existiert eine Funktion  $g \in \text{FP}$  sodass für alle  $x$  das Bild  $g(x)$  ein akzeptierender Rechenweg von  $N(x)$  ist.*
- (2)  $\text{TFNP} \subseteq_c \text{FP}$
- (3)  $\text{NPMV}_t \subseteq_c \text{FP}$
- (4)  $P = NP \cap \text{coNP}$  und  $\text{NPMV}_t \subseteq_c \text{NPSV}_t$
- (5) *Jede surjektive ehrliche Funktion  $f \in \text{FP}$  ist P-invertierbar, heißt die Umkehrrelation  $f^{-1}$  hat eine Verfeinerung in FP.*
- (6) *Für jede Menge  $L \in P$  und jede NPTM  $N$  mit  $L(N) = L$  existiert eine Funktion  $h \in \text{FP}$  mit*  

$$x \in L \implies N(x) \text{ akz. mit Rechenweg } h(x).$$

(7) Für jedes Paar von NP-Relationen  $A, B$  gilt:

$$\text{Proj}(A) \leq_m^P \text{Proj}(B) \iff A \leq_L^P B.$$

(8) Für jedes Beweissystem  $h$  gilt:  $h$  ist optimal  $\iff h$  ist P-optimal.

(9) Es existiert eine  $\leq_{L,h}^P$ -vollständige NP-Relation  $R$  sodass für alle NPTM  $N$  mit  $L(N) = \text{Proj}(R)$  auch  $\text{std}_N \leq_m^P \text{std}_R$  gilt.

(10) Es existiert eine  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relation  $R$  für welche das Standardbeweissystem  $\text{std}_R$  P-optimal ist.

Beweis. 1. (1)  $\iff$  (2)  $\iff$  (4)  $\iff$  (5)  $\iff$  (6): nach Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003, Thm. 2).

2. (1)  $\iff$  (3): nach Beobachtung 3.5.

3. (1)  $\iff$  (7): nach Lemma 4.6.

4. (1)  $\iff$  (9): nach Satz 4.15 und der  $\leq_{L,h}$ -Vollständigkeit von  $\text{rKAN}$ .

5. (1)  $\iff$  (10): nach Satz 4.13 und der  $\leq_L^P$ -Vollständigkeit von  $\text{rKAN}$ .

6. (2)  $\implies$  (8): Die Richtung von rechts nach links ist klar. Sei für die andere Richtung  $h$  ein optimales Beweissystem für eine Menge  $L$ . Wir wollen zeigen, dass  $h$  auch P-optimal ist. Sei dafür  $g$  ein weiteres Beweissystem für  $L$ . Nach Voraussetzung kann  $h$  das Beweissystem  $g$  simulieren, das heißt es existiert eine (nicht notwendigerweise effiziente) Funktion  $\pi$  sodass  $g(w) = h(\pi(w))$ , und gleichzeitig ist  $|\pi(w)| \leq q(|w|)$  für ein geeignetes Polynom  $q$ .

Betrachte folgende Multifunktion  $f'$ :

$$\text{set-}f'(w) \stackrel{\text{df}}{=} \{y \mid \exists y \in \Sigma^{\leq q(|w|)}, g(w) = h(y)\}.$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass  $f' \in \text{NPMV}$ , über einen geeigneten NPTM-Transduktor. Es ist sogar  $f' \in \text{NPMV}_t$ , denn für jedes  $w$  mindestens  $\pi(w) \in \text{set-}f'(w)$ .

Nach (2) gilt also  $f' \in \text{NPMV}_t \subseteq_c \text{FP}$ , also existiert eine Funktion  $f'' \in \text{FP}$  welche eine Verfeinerung von  $f'$  ist. Diese Funktion übersetzt  $g$ -Beweise  $w$  für  $x$  effizient in  $h$ -Beweise für  $x$ : Sei  $g(w) = x$ , dann gilt

$$f''(w) = y \quad \text{mit } y \in \text{set-}f'(w), \text{ also gilt } y \in \Sigma^{\leq q(|w|)}, x = g(w) = h(y).$$

Damit ist  $h(f''(w)) = x$  bzw.  $f''(w)$  ein  $h$ -Beweis für  $x$ , wie gewünscht.

7. (8)  $\implies$  (10): klar, denn  $\text{rKAN}$  ist  $\leq_L^P$ -vollständig und das Standardbeweissystem  $\text{std}_{\text{rKAN}}$  ist (wie jedes Standardbeweissystem einer NP-Relation) optimal. Zusammen mit (7) ist es also auch P-optimal.  $\square$

Analysiert man die Beweise bezüglich der Äquivalenz von Aussage Q zu (9) und (10) können wir sogar feststellen, dass die Wahl der Relation  $R$  beliebig ist. Wir können daher Q über universell quantifizierte Varianten von (9) und (10) charakterisieren.



**Satz 4.23.** Entweder gelten die Aussagen (1), (9), (10) oder die Aussagen (1'), (9'), (10'):

- (1)  $\mathcal{Q}$ .
- (9) Für alle  $\leq_{L,h}^P$ -vollständigen NP-Relationen  $R$ , alle NPTM  $N$  mit  $L(N) = \text{Proj}(R)$  gilt  $\text{std}_N \leq_m^P \text{std}_R$ .
- (10) Für alle  $\leq_L^P$ -vollständigen NP-Relationen  $R$  ist das Standardbeweissystem  $\text{std}_R$  P-optimal.
- (1')  $\neg \mathcal{Q}$ .
- (9') Es existiert keine  $\leq_{L,h}^P$ -vollständige NP-Relation  $R$ , sodass für alle NPTM  $N$  mit  $L(N) = \text{Proj}(R)$  auch  $\text{std}_N \leq_m^P \text{std}_R$  gilt.
- (10') Es existiert keine  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relation  $R$  ist das Standardbeweissystem  $\text{std}_R$  P-optimal.

Beachte dass (9') nicht die negierte Version von (9) ist, für (10) gilt dies analog.

### 4.3 Bekannte Implikationen und Orakel, offene Trennungen

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden wir nun die in Abbildung 6 abgebildeten Implikationen und Äquivalenzen nachweisen. Damit werden insbesondere auch die Hypothesen  $\mathcal{Q}$  und  $\text{KvL}$  in das Pudlák'sche Programm eingeordnet. Zum Schluss wird noch angegeben, welche der Hypothesen im (vergrößerten) Pudlák'schen Programm durch ein Orakel separiert sind, und welche Separierungen noch offen sind.

Zunächst führen wir noch eine abgeschwächte Variante von  $\mathcal{Q}$  ein, die von Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003) vorgeschlagen wurde.

**Vermutung 4.24** ( $\mathcal{Q}'$ , Fenner, Fortnow, Naik und Rogers, 2003). Für jede totale NPTM  $N$  existiert eine Funktion  $g \in \text{FP}$  sodass für alle  $x$  das Bild  $g(x) \in \{0, 1\}$  das erste Bit eines akzeptierenden Rechenwegs von  $N(x)$  ist.

Jetzt können wir auch die in Abbildung 6 abgebildeten Implikationen und Äquivalenzen nachweisen.

**Satz 4.25.** Es gelten die in Abbildung 6 abgebildeten Implikationen und Äquivalenzen.

*Beweis.* Es gelten die notierten Äquivalenzen:

1.  $\neg \mathcal{Q} \Leftrightarrow \exists$  optimales Beweissystem was nicht P-optimal ist  $\Leftrightarrow \text{TFNP} \not\subseteq_c \text{FP}$ , nach Satz 4.22.
2.  $\neg \mathcal{Q}' \Leftrightarrow \exists$  P-inseparierbares DisjCoNP-Paar, nach Fortnow und Rogers (1993, Lemma 2.12, vgl. Appendix).
3.  $\text{NP} \cap \text{coNP} \neq \text{P} \Leftrightarrow \text{NPSV}_t \not\subseteq \text{FP}$ , nach Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003, Prop. 1).
4.  $\text{UP} \neq \text{P} \Leftrightarrow \exists$  Einwegfunktionen, nach Grollmann und Selman (1988, Thm. 10).
5.  $\text{UP} \cap \text{coUP} \neq \text{P} \Leftrightarrow \exists$  Einwegpermutationen, nach Homan und Thakur (2003).
6.  $\text{NP} \cap \text{coNP} \Leftrightarrow \text{NPSV}_t$  hat keine vollständige Funktion, nach Beyersdorff, Köbler und Messner (2009, Prop. 3).
7.  $\text{DisjNP} \Leftrightarrow \text{NPSV}$  hat keine vollständige Funktion, nach Glaßer, Selman und Sengupta (2005, Thm. 9).

Es gelten die eingezeichneten Implikationen:

1.  $\text{DisjNP} \Rightarrow \text{TAUT}^N$  nach Köbler, Messner und Torán (2003, Cor. 6.1).
2.  $\text{UP} \Rightarrow \text{TAUT}$  nach Köbler, Messner und Torán (2003, Cor. 4.1).

3.  $\text{TAUT}^N \Rightarrow \text{NEE} \neq \text{coNEE}$  nach Köbler, Messner und Torán (2003, Cor. 7.1).
4.  $\text{NP} \cap \text{coNP} \neq \text{P} \Rightarrow \neg \text{Q}' \Rightarrow \text{NPMV}_t \not\subseteq_c \text{TFNP} \Rightarrow \neg \text{Q}$  nach Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003, Prop. 9, Thm. 6).
5.  $\text{E} \neq \text{NE} \Rightarrow \exists \text{ NP-Relation die nicht auf Entscheidung reduzierbar ist, nach Impagliazzo und Sudan (1991).$
6.  $\text{UP} \neq \text{P} \Rightarrow \exists \text{ P-inseparierbares DisjNP-Paar, nach Grollmann und Selman (1988, Thm. 5).$
7.  $\text{NP} \cap \text{coNP} \Rightarrow \text{TAUT} \vee \text{SAT}$  nach Köbler, Messner und Torán (2003, Cor. 5.1).
8.  $\text{NPMV}_t$  hat keine vollständige Funktion  $\Rightarrow \text{SAT}$  nach Beyersdorff, Köbler und Messner (2009, Thm. 25). Es ist leicht zu sehen, dass der Beweis auch auf unsere relativierte Variante von SAT generalisiert.
9.  $\text{NPMV}_t$  hat keine vollständige Funktion  $\Rightarrow \text{NP} \neq \text{coNP}$  nach Satz 4.26.
10.  $\text{SAT}^{\text{eff}} \Rightarrow \text{SAT}, \text{SAT}^{\text{eff}} \Rightarrow \text{KvL}$ , nach Korollar 4.11.
11.  $\text{KvL} \Rightarrow \neg \text{Q}$ , nach Korollar 4.7.
12.  $\neg \text{Q} \Rightarrow \exists \text{ NP-Relation die nicht auf Entscheidung reduzierbar ist, denn unter } \neg \text{Q gilt mit Satz 4.22 auch die Negation von 4.22(1), also eine NPTM } N \text{ mit } L(N) = \Sigma^* \text{ wobei keine Funktion } g \in \text{FP existiert, welche für alle } x \text{ durch } g(x) \text{ einen akzeptierenden Rechenweg von } N(x) \text{ bestimmt. Definiere die NP-Relation } R_N \text{ mit } (x, \alpha) \in R_N \text{ genau dann wenn } N(x) \text{ mit Rechenweg } \alpha \text{ existiert. Nun gilt nach Vorigem auch } R \notin_c \text{FP} = \text{FP}^{\Sigma^*} = \text{FP}^{L(R)}.$
13.  $\text{DisjCoNP} \Rightarrow \text{TFNP} \Rightarrow \text{NPMV}_t$  hat keine vollständig Funktion, nach Pudlák (2017, Prop. 5.6, 5.10).
14.  $\text{NP} \cap \text{coNP} \neq \text{P} \Rightarrow \exists \text{ P-inseparierbares DisjNP-Paar, denn wenn alle DisjNP-Paare P-separierbar, dann ist auch für jede Menge } L \in \text{NP} \cap \text{coNP} \text{ jeweils das DisjNP-Paar } (L, \bar{L}) \text{ P-separierbar und damit } L \in \text{P}.$
15.  $\text{DisjNP} \Rightarrow \exists \text{ P-inseparierbares DisjNP-Paar; ist klar, denn wenn alle DisjNP-Paare P-separierbar wären, dann wären auch alle Paare trivialerweise } \leq_m^{\text{PP}} \text{-vollständig.}$
16.  $\text{DisjCoNP} \Rightarrow \exists \text{ P-inseparierbares DisjCoNP-Paar; ist aus selben Gründen klar.}$
17.  $\text{TAUT}^N \Rightarrow \text{TAUT}$  klar, weil aus P-Optimalität auch Optimalität folgt.
18.  $\text{SAT} \Rightarrow \neg \text{Q}$  klar: wen Q, dann ist nach Satz 4.22 jedes optimale Beweissystem auch P-optimal. Dann gilt auch  $\neg \text{SAT}$ : jede Menge  $L \in \text{NP}$  hat ein optimales Beweissystem  $h$  (Beobachtung 2.14) und das ist nach Voraussetzung P-optimal.
19.  $\text{UP} \Rightarrow \text{UP} \neq \text{P}$  klar.
20.  $\text{NP} \cap \text{coNP} \Rightarrow \text{NP} \cap \text{coNP} \neq \text{P}$  klar.
21.  $\text{NP} \cap \text{coNP} \Rightarrow \text{NP} \neq \text{coNP}$  klar, denn wenn  $\text{NP} = \text{coNP}$  dann ist  $\text{NP} \cap \text{coNP} = \text{NP}$  und damit existiert auch eine vollständige Menge.
22.  $\exists \text{ P-inseparierbares DisjNP-Paar} \Rightarrow \text{P} \neq \text{NP}$  klar.
23.  $\text{UP} \cap \text{coUP} \neq \text{P} \Rightarrow \text{UP} \neq \text{P}, \text{UP} \cap \text{coUP} \Rightarrow \text{NP} \cap \text{coNP} \neq \text{P}$  klar.
24.  $\text{NEE} \neq \text{coNEE} \Rightarrow \text{NE} \neq \text{coNE} \Rightarrow \text{NP} \neq \text{coNP} \Rightarrow \text{P} \neq \text{NP}$  klar.
25.  $\text{NEE} \neq \text{coNEE} \Rightarrow \text{EE} \neq \text{NEE} \Rightarrow \text{E} \neq \text{NE}$  klar. □

Der verbleibende Beweis ist eine Generalisierung von Dingel (2022).

**Satz 4.26.** Wenn  $\text{NP} = \text{coNP}$  dann existiert eine  $\leq_m^{\text{P}}$ -vollständige Multifunktion  $f$  für  $\text{NPMV}_t$ .

*Beweis.* Betrachte die Menge

$$U \stackrel{\text{df}}{=} \{(T, x, 1^n) \mid T \text{ ist NTM-Transduktor} \\ \text{und für jeden Rechenweg } \alpha \text{ von } T(x) \text{ der Länge } \leq n \text{ gilt:} \\ \alpha \text{ ist nicht terminierend oder } \alpha \text{ terminiert ablehnend}\}.$$

Nach Definition ist klar, dass  $U \in \text{coNP}$ :  $(T, x, 1^n) \notin U$  wenn ein Rechenweg  $\alpha$  der Länge  $\leq n$  existiert sodass  $T(x)$  auf  $\alpha$  akzeptiert. Nach Voraussetzung gilt also  $U \in \text{NP}$  und es existiert eine NPTM  $N_u$  welche  $U$  entscheidet, und zwar in Laufzeit  $q(|(T, x, 1^n)|)$  für geeignetes Polynom  $q$ .

Für eine NPTM  $T$  und einer Berechnung  $T(x)$  nennen wir einen Rechenweg  $\alpha$  mit  $n$  Schritten *verlängerbar auf  $m$  Schritte*,  $m > n$  wenn  $\alpha$  um weitere Rechenschritte zu Rechenweg  $\alpha'$  ergänzt werden kann, sodass  $\alpha'$  aus  $m$  Schritten besteht.

Betrachte nun die Multifunktion  $f$ , die durch folgenden nichtdeterministischen Transduktor  $T'(T, x, 1^n)$  berechnet wird:

- 1 **wenn**  $T$  kein NTM-Transduktor ist **dann**
- 2   | Gebe  $\varepsilon$  aus
- 3 Rate nichtdeterministisch einen Rechenweg  $\alpha$  von  $T$  der Länge  $\leq n$
- 4 Rate nichtdeterministisch einen Rechenweg  $\beta$  von  $N_u$  der Länge  $\leq q(|(T, x, 1^n)|)$
- 5 **wenn**  $\alpha$  auf  $n + 1$  Schritte verlängerbar ist **dann**
- 6   | Gebe  $\varepsilon$  aus
- 7 **sonst wenn**  $T(x)$  mit  $\alpha$  akzeptierend terminiert **dann**
- 8   |  $y \leftarrow$  Ausgabe von  $T(x)$  auf  $\alpha$
- 9   | Gebe  $y$  aus
- 10 **sonst wenn**  $N_u(i, x, 1^n)$  mit  $\beta$  akzeptiert **dann**
- 11   | Gebe  $\varepsilon$  aus
- 12 **sonst**
- 13   | Lehne ab

Es ist leicht zu sehen dass  $T'$  in Polynomialzeit arbeitet. Wir bestimmen nun die Outputs von  $T'$  in Abhängigkeit der Eingabe  $(T, x, 1^n)$ . Wir untersuchen hierfür drei Fälle:

1. Es existiert ein Rechenweg von  $T(x)$  mit  $> n$  Schritten. In diesem Fall existiert dann auch Rechenweg  $\alpha$  mit genau  $n$  Schritten, welcher auf  $n + 1$  Schritte verlängerbar ist. Damit terminiert  $T$  auf mindestens einem Rechenweg in Z. 6 und wir haben  $\text{set-}f(T, x, 1^n) \supseteq \{\varepsilon\}$ .
2. Jeder Rechenweg von  $T(x)$  hat nur  $\leq n$  viele Schritte, und  $\text{set-}T(x) \neq \emptyset$ . Dann existiert für jedes  $y \in \text{set-}T(x)$  ein akzeptierender Rechenweg  $\alpha$  mit  $\leq n$  Schritten, welcher auf  $T(x)$  den Output  $y$  macht. Dieser ist insbesondere nicht verlängerbar. Damit wird auch  $f$  dieses  $y$  in Z. 9 ausgeben. Gleichzeitig ist auch  $(T, x, 1^n) \notin U$  und Z. 11 wird daher niemals erreicht. Ebenso wird kein anderer geratener Rechenweg  $\alpha'$  auf  $n + 1$  viele Schritte verlängerbar sein, heißt auch Z. 6 wird niemals erreicht. Es gilt also  $\text{set-}f(T, x, 1^n) = \text{set-}T(x)$ .
3. Jeder Rechenweg von  $T(x)$  hat nur  $\leq n$  viele Schritte, und  $\text{set-}T(x) = \emptyset$ . Dann wird kein Rechenweg der Länge  $\leq n$  von  $T(x)$  akzeptierend terminieren, heißt  $T'$  wird definitiv nicht in Z. 9 eine Ausgabe tätigen. Gleichzeitig gilt  $(T, x, 1^n) \in U$ , heißt  $T'$  wird auf mindestens einem Rechenweg in Z. 11 mit Ausgabe  $\varepsilon$  akzeptieren. Es gilt also  $\text{set-}f(T, x, 1^n) = \{\varepsilon\}$ .

Damit ist klar, dass  $f \in \text{NPMV}_t$ . Wir zeigen nun, dass  $f$  auch  $\text{NPMV}_t$ -vollständig ist. Sei hierfür  $g$  eine beliebige Multifunktion aus  $\text{NPMV}_t$ . Dann existiert auch ein NPTM-Transduktor  $T_g$  sodass dieser  $g$  in berechnet, und dabei terminiert  $T_g(x)$  in  $\leq p(|x|)$  vielen Schritten für geeignetes Polynom  $p$ .

Nun gilt nach obiger Beobachtung schon dass

$$\text{set-}g(x) = \text{set-}T_g(x) \neq \emptyset \implies \text{set-}f(\underbrace{T_g, x, 1^{p(|x|)}}_{h(x)}) = \text{set-}T(x) = \text{set-}g(x)$$

und  $h(x) = (T_g, x, 1^{p(|x|)})$  realisiert die Reduktion von  $g$  auf  $f$ , wie gewünscht.  $\square$

Abbildung 7 zeigt, welche Hypothesen unter relativierbaren Beweisen durch ein Orakel voneinander getrennt sind. Beachte, dass im Gegensatz zur Abbildung 6 aus Übersichtlichkeit einige Hypothesen ausgelassen wurden, nämlich jene der Exponentialzeitklassen, und jene der Reduzierbarkeit von Such- auf Entscheidungsprobleme. Das blau hervorgehobene Orakel  $O$  wird im folgenden Kapitel 5 konstruiert, vgl. Satz 5.1.

Für viele Paare von Hypothesen  $A, B$  haben wir damit entweder eine relativierende Implikation  $A \Rightarrow B$  oder es existiert ein Orakel welches  $A$  und  $B$  trennt, also ein Orakel relativ zu diesem  $A \wedge \neg B$  gilt, und damit einen relativierenden Beweis für diese Implikation ausschließen.

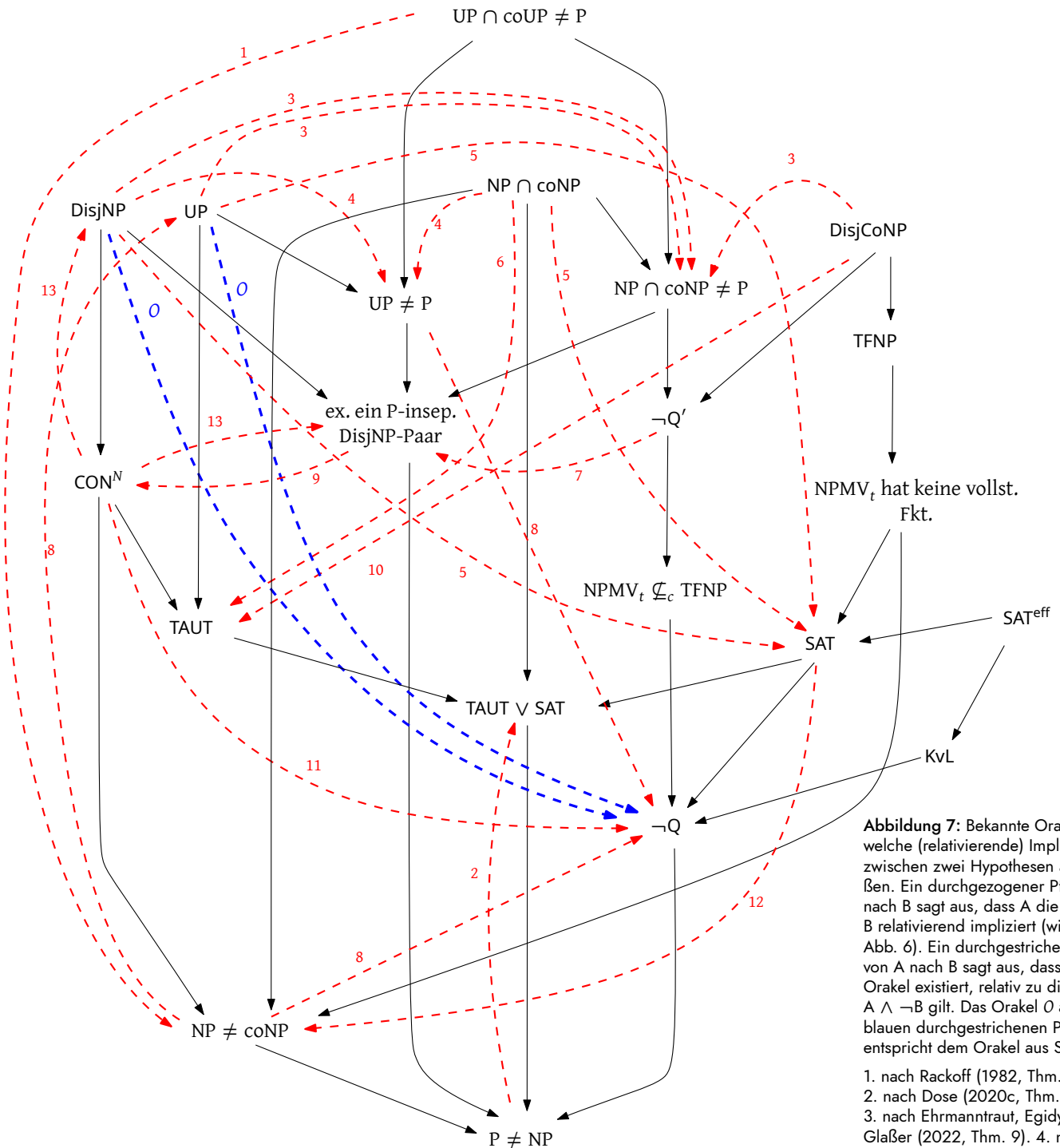
Die Stellung von  $Q$  sei hier hervorgehoben: mittels Orakelkonstruktionen erkennen wir eine weitestgehende Unabhängigkeit zwischen der Hypothese  $\neg Q$  auf der einen Seite und den anderen Hypothesen des Pudlák'schen Programms. Zum einen wissen wir über ein Orakel von Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003, Thm. 12.3, Nr. 8 in der Abb.), dass die Annahme von  $UP \neq P \wedge NP \neq \text{coNP}$  unter relativierenden Beweisen nicht ausreicht, um  $\neg Q$  zu zeigen, also diese Annahme auch nicht ausreicht um KvL zu zeigen. Auf ähnliche Weise ergibt sich aus dem in Kapitel 5 konstruierten Orakel ( $O$  in der Abb.), dass auch die Annahme  $\text{DisjNP} \wedge UP$  nicht ausreicht, um  $\neg Q$  zu zeigen. Symmetrisch sehen wir über zwei Orakel von Dose (2020a, Cor. 3.3, 2020c, Thm. 3.2, siehe Nr. 5 u. 6 in der Abb.) dass die Annahme  $\neg Q$  (bzw. sogar die stärkere Annahme  $\neg Q'$ ) nicht ausreicht, um TAUT bzw. SAT zu zeigen, also auch nicht um die stärkeren ursprünglichen Pudlák'schen Hypothesen ( $\text{DisjNP}$ ,  $UP$ ,  $\text{DisjCoNP}$ , usw.) zu beweisen.

Teile dieser Beobachtung übertragen sich entsprechend auch auf die Verstärkung KvL von  $\neg Q$ . Weder  $UP \neq P \wedge NP \neq \text{coNP}$  noch  $\text{DisjNP} \wedge UP$  reicht als Annahme aus, um relativierend KvL zu beweisen. Damit wissen wir zumindest schon, dass KvL (wieder unter relativierenden Beweisen) nicht äquivalent zu einer der Aussagen „ $UP \neq P$ “, „ $NP \neq \text{coNP}$ “, „ $\text{DisjNP}$ “, „ $UP$ “ ist. Andererseits wären einige weitere Orakel wünschenswert, um KvL besser zu situieren. Existiert ein Orakel relativ zu diesem KvL (also relativierende Beweise für  $\neg \text{KvL}$  ausschließt)? Existiert ein Orakel relativ zu diesem KvL  $\wedge Q$  (und damit KvL von  $Q$  trennt)?

In diesem Sinne können wir auch allgemein fragen, für welche Paare  $A, B$  von Hypothesen sowohl unbekannt ist, ob  $A \Rightarrow B$  über einen relativierbaren Beweis, noch ob ein Orakel existiert relativ zu diesem  $A \wedge \neg B$ . Das sei im Folgenden nun abschließend noch zusammengefasst (vgl. Tabelle 1).

- Unter dem ursprünglichen Hypothesen des Pudlák'schen Programms (SAT, TAUT,  $\text{CON}^N$ , Vollständigkeit von  $\text{DisjNP}$ ,  $\text{DisjCoNP}$ ,  $UP$ ,  $NP \cap \text{coNP}$ ,  $\text{TFNP}$ ,  $\text{NPMV}_t$ , Kollaps  $NP = \text{coNP}$ ,  $NP \cap \text{coNP} = P$ ; die zusammengesetzte Hypothese  $\text{SAT} \vee \text{TAUT}$  wird hier dagegen noch nicht diskutiert) kennen wir für fast alle Paare an Hypothesen eine relativierende Implikation oder ein entsprechendes Orakel, relativ zu diesem die Implikation nicht gilt. Offen bleiben nur diese neun Paare:

- (i)  $\text{TAUT} \stackrel{?}{\Rightarrow} \text{CON}^N$ ,
- (ii)  $\text{TAUT} \stackrel{?}{\Rightarrow} NP \neq \text{coNP}$ ,



**Abbildung 7:** Bekannte Orakel, welche (relativierende) Implikationen zwischen zwei Hypothesen ausschließen. Ein durchgezogener Pfeil von A nach B sagt aus, dass A die Aussage B relativierend impliziert (wie in Abb. 6). Ein durchgestrichener Pfeil von A nach B sagt aus, dass ein Orakel existiert, relativ zu diesem  $A \wedge \neg B$  gilt. Das Orakel O an den blauen durchgestrichenen Pfeilen entspricht dem Orakel aus Satz 5.1.

1. nach Rackoff (1982, Thm. 5).
2. nach Dose (2020c, Thm. 4.1).
3. nach Ehrmanntraut, Egidy und Glaßer (2022, Thm. 9).
4. nach Dose und Glaßer (2019, Thm. 4.1).
5. nach Dose (2020a, Cor. 3.3).
6. nach Dose (2020c, Thm. 3.2).
7. nach Fortnow und Rogers (2002, Thm. 3.2).
8. nach Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003, Thm. 12.3).
9. nach Glaßer, Selman, Sengupta und Zhang (2004, Cor. 6.6).
10. nach Khaniki (2022, Thm. 5.1).
11. nach Khaniki (2022, Thm. 5.2).
12. nach Dingel (2022, Satz 3.12).
13. nach Glaßer, Selman, Sengupta und Zhang (2004, Cor. 6.34).

- (iii)  $UP \stackrel{?}{\Rightarrow} CON^N$ ,
- (iv)  $UP \stackrel{?}{\Rightarrow} DisjNP$ ,
- (v)  $UP \stackrel{?}{\Rightarrow} NP \neq coNP$ ,
- (vi) „ $NPMV_t$  hat keine vollst. Fkt.“  $\stackrel{?}{\Rightarrow} TFNP$ ,
- (vii)  $TFNP \stackrel{?}{\Rightarrow} DisjCoNP$ ,
- (viii) „ $NPMV_t$  hat keine vollst. Fkt.“  $\stackrel{?}{\Rightarrow} DisjCoNP$ .

Ein Orakel für (ii) wäre insbesondere auch ein Orakel für (iii)–(vi); ein Orakel für (vi) oder (vii) wäre insbesondere auch ein Orakel für (viii).

- Erweitern wir den Blick um Q und verwandte Hypothesen  $Q'$ , „ $NPMV_t \not\subseteq_c TFNP$ “, so entstehen einige neue Paare A, B von Hypothesen, für die unbekannt ist, ob ein Orakel diese trennt, oder ob ein Beweis einer relativierbaren Implikation existiert, z.B.  $TFNP \stackrel{?}{\Rightarrow} \neg Q'$ . Beachte aber, dass für jedes dieser offenen Paare A, B (mit A oder B in  $\{Q, Q', „NPMV_t \not\subseteq_c TFNP“\}$ ) die Konstruktion eines Orakels O mit  $A \wedge \neg B$  höchstwahrscheinlich sehr schwierig ist: für jedes offene Paar A, B lässt sich verifizieren, dass relativ zu einem trennenden Orakel O auch  $Q' \wedge \neg Q$  gilt. Damit trennt O insbesondere Q und  $Q'$  unter relativierenden Beweisen, und würde eine seit 28 Jahren offene Frage von Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003, vgl. auch 1996) beantworten. Das entspricht genau jenen offenen Orakelkonstruktionen, die in Tabelle 1 mit † markiert sind.
- Ergänzen wir weiter mit dem Kollaps „ $UP = P$ “ und der P-Separierbarkeit von DisjNP-Paaren entstehen weiter neue offenen Paare A, B von Hypothesen, unter anderem
  - (ix)  $DisjCoNP \stackrel{?}{\Rightarrow}$  „DisjNP inseparierbar“,
  - (x)  $CON^N \stackrel{?}{\Rightarrow}$  „DisjNP inseparierbar“,
  - (xi)  $UP \neq P \stackrel{?}{\Rightarrow} TAUT$

Dies sind die drei „stärksten“ Implikationen bzw. diejenigen Paare an Hypothesen, deren Orakelkonstruktionen gegen diese Implikationen am „schwierigsten“ ist. Gemeint ist, dass sämtliche anderen offenen Paare A, B von Hypothesen, wobei A oder B in  $\{„UP \neq P“, „DisjNP insep.“\}$ , dann auch durch eines dieser Orakel getrennt wird, die (ix), (x), und (xi) trennen.

- Ergänzen wir nun abschließend mit den hier neu definierten Hypothesen KvL und  $SAT^{eff}$  entstehen wieder neue Paare A, B für die offen ist, ob A die Hypothese B impliziert, oder ob ein Orakel gegen diese Implikation existiert. Das gilt für so gut wie alle möglichen Paare zwischen KvL bzw.  $SAT^{eff}$  und den übrigen betrachteten Hypothesen. Besonders im Hinblick auf den Schwerpunkt dieser Arbeit auf Suchprobleme und auf die Hypothese KvL sind die folgenden Paare interessant:
  - (xii)  $KvL \stackrel{?}{\Rightarrow} SAT^{eff}$ ,
  - (xiii)  $KvL \stackrel{?}{\Rightarrow} SAT$  (oder stärker  $SAT \vee TAUT$ ),
  - (xiv)  $DisjCoNP \stackrel{?}{\Rightarrow} KvL$  (oder schwächer  $\neg Q \stackrel{?}{\Rightarrow} KvL$ ).

Diese Fragen werden im Folgenden nicht weiter untersucht. Stattdessen seien sie hier als zukünftige Forschungsdesiderata formuliert: zeige dass eine der obigen Implikationen gilt, gebe ein Gegenbeispiel an, oder konstruiere ein Orakel relativ zu diesem eine der obigen Implikationen nicht gilt.

- Schließlich gehen wir noch auf die zusammengesetzte Hypothese  $TAUT \vee SAT$  ein. Zur Erinnerung: diese Hypothese besagt (in Verbindung mit Korollar 2.17), dass

eine Menge  $L \in \text{NP} \cup \text{coNP}$  existiert für die kein P-optimales Beweissystem existiert. Trotz der zusammengesetzten Natur dieser Hypothese lässt sich zeigen, dass  $\text{TAUT} \vee \text{SAT}$  äquivalent zu weiteren natürlichen Hypothesen ist. Zum einen zeigt Khaniki (2022, Thm. 3.2) die Äquivalenz zur Hypothese  $\text{RFN}_1$  betreffend der Beweisbarkeit endlicher Widerspruchsfreiheit (Pudlák, 2017, vgl.). Zum anderen geben Egidy, Glaßer und Herold (2023) eine Verbesserung der ersten genannten Charakterisierung an, hierbei bezogen auf die Mengen der Booleschen Hierarchie (BH, vgl. Cai und Hemachandra, 1986; Cai, Gundermann u. a., 1988, 1989). Aufbauend auf Ergebnissen von Köbler, Messner und Torán (2003) ergibt sich, dass  $\text{TAUT} \vee \text{SAT}$  genau dann gilt wenn sogar eine Menge  $L \in \text{BH} \supseteq \text{NP} \cup \text{coNP}$  existiert für die es kein P-optimales Beweissystem gibt.

Auf diese beiden Charakterisierungen soll hier aber nicht weiter eingegangen werden. Trotzdem sei hier noch knapp die Beziehung der Hypothese zu den anderen (unter relativierbaren Beweisen) erläutert. Einerseits existieren Orakel, sodass  $(\text{TAUT} \vee \text{SAT}) \wedge \neg A$  für alle bisher genannten Hypothesen  $A$  (außer  $P \neq \text{NP}$ , was trivialerweise eine notwendige Bedingung ist). Andererseits bleibt für viele Hypothesen noch offen, ob diese hinreichend für  $\text{TAUT} \vee \text{SAT}$  sein könnten. Insbesondere sind folgende Paare noch offen:

- (xv)  $\text{UP} \cap \text{coUP} \neq P \stackrel{?}{\Rightarrow} \text{TAUT} \vee \text{SAT}$ ,
- (xvi)  $\text{KvL} \stackrel{?}{\Rightarrow} \text{TAUT} \vee \text{SAT}$ .

Hiermit wollen wir die Diskussion über die Beziehungen der Hypothesen des erweiterten Pudlák'schen Programms abschließen. Im folgenden Kapitel werden wir nun noch das angekündigte Orakel  $O$  konstruieren.

Antezedens A	Konsequent B	TAUT	CON <sup>N</sup>	DisjNP	UP	SAT	NPMV <sub>t</sub> unvollst.	TFNP	DisjCoNP	NP ∩ coNP	NP ≠ coNP	NP ∩ coNP ≠ P	¬Q	¬Q'	NPMV <sub>t</sub> ⊈ TFNP	UP ≠ P	DisjNP unsep.	KvL	SAT <sup>eff</sup>	TAUT ∨ SAT
TAUT		?	13	4	0	0	0	0	0	0	?	0	0	0	0	4	13	0	0	
CON <sup>N</sup>			13	4	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	4	13	0	0	
DisjNP				4	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	4		0	0	
UP		?	?		0	0	0	0	0	0	?	0	0	0	0			0	0	
SAT		10	10	10	10		12	12	12	3	12	3		†	†	?	?	?	?	
NPMV <sub>t</sub> unvollst.		10	10	10	10			?	?	3		3		†	†	?	?	?	?	
TFNP		10	10	10	10				?	3		3		†	†	?	?	?	?	
DisjCoNP		10	10	10	10					3		3				?	?	?	?	
NP ∩ coNP		6	6	6	4	5	5	5	5							4		?	5	
NP ≠ coNP		6	6	6	4	0	0	0	0	0		0	0	0	0	4	13	0	0	?
NP ∩ coNP ≠ P		6	1	1	4	5	1	1	1	1	1					4		?	5	?
¬Q		6	1	1	4	5	1	1	1	1	1	3		†	†	4	7	?	5	?
¬Q'		6	1	1	4	5	1	1	1	1	1	3				4	7	?	5	?
NPMV <sub>t</sub> ⊈ TFNP		6	1	1	4	5	1	1	1	1	1	3		†		4	7	?	5	?
UP ≠ P		?	1	1	?	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0			0	0	?
DisjNP unsep.		6	1	1	4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4		0	0	?
KvL		?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?		†	†	?	?		?	?
SAT <sup>eff</sup>		?	?	?	?		?	?	?	?	?	?		†	†	?	?			
TAUT ∨ SAT		6	6	6	4	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	4	13	0	0	

**Tabelle 1:** Überblick über Orakel, welche Implikationen  $A \Rightarrow B$  zwischen den betrachteten Hypothesen unter relativierbaren Beweisen trennen, in dem Sinn dass ein Orakel existiert relativ zu diesem  $A \wedge \neg B$  gilt. Jede Zelle entspricht hierbei einer solchen Implikation. Die Hypothese A links ist hierbei der Antezedens, die Hypothese B oben der Konsequent.

Leere Zellen bedeuten, dass kein Orakel mit  $A \wedge \neg B$  existiert, denn es existiert kein relativierender Beweis für  $A \Rightarrow B$ .

Eine Zahl (bzw. 0) in der Zelle bedeutet, dass relativ zu einem Orakel  $A \wedge \neg B$  gilt, also ein Orakel gegen die Implikation  $A \Rightarrow B$ . Die Zahl gibt hierbei an, um welches Orakel es sich aus Abb. 7 handelt, das Label 0, dass es sich um das konstruierte Orakel aus Kapitel 5 handelt. Ist die Zahl (bzw. 0) fett gedruckt, dann entspricht das Orakel genau dem Eingezeichneten, ansonsten folgt die behauptete Eigenschaft aus relativierbaren Implikationen zwischen den Hypothesen.

Ein rotes ? bedeutet, dass unbekannt ist, ob ein solches Orakel existiert.

Ein rotes † bedeutet, dass auch unbekannt ist, ob ein solches Orakel  $D$  existiert. Hierbei ist aber die Konstruktion besonders schwierig: wenn nämlich ein solches Orakel existiert, also  $A \wedge \neg B$  relativ zu  $D$  gilt, dann muss auch  $Q' \wedge \neg Q$  relativ zu  $D$  gelten.



## 5 Orakel mit DisjNP, UP und Q

Ziel dieses Kapitels ist die Konstruktion eines Orakels  $O$ , relativ zu dem einerseits die Hypothesen DisjNP und UP gelten, andererseits auch die Hypothese Q gilt. Damit wird ausgeschlossen, dass  $\neg Q$  nicht mit relativierenden Mitteln bewiesen werden kann, selbst unter Annahme der starken, aber wahrscheinlichen Annahme  $\text{DisjNP} \wedge \text{UP}$ . Dies verbessert auch ein Ergebnis von Dose (2020a, Cor. 3.3), welcher ein ähnliches Orakel konstruiert, relativ zu diesem  $\text{DisjNP} \wedge \text{UP} \wedge \neg \text{SAT}$  gilt. Präzise werden wir folgenden Satz beweisen:

**Satz 5.1.** *Es existiert ein Orakel  $O$  sodass folgende Aussagen gelten:*

- (1) *Für jede totale NPTM  $N$  existiert eine Funktion  $g \in \text{FP}^O$  sodass  $g(x)$  ein akzeptierender Rechenweg von  $N^O(x)$  ist (was äquivalent zu Q relativ zu  $O$  ist).*
- (2) *Es existiert kein  $\leq_m^{\text{pp}, O}$ -hartes Paar in  $\text{DisjNP}^O$  für  $\text{DisjUP}^O$  (was DisjNP relativ zu  $O$  impliziert).*
- (3) *Es existiert keine  $\leq_m^{\text{p}, O}$ -vollständige Menge für  $\text{UP}^O$  (was äquivalent zu UP relativ zu  $O$  ist).*

Die Orakelkonstruktion bedient sich zwei zentralen Ideen. Die erste Idee betrifft vor allem die Konstruktion. Wir wenden hierbei ein Verfahren von Dose und Glaßer (2019) an, welche sich als ein starkes Framework erwiesen hat, schrittweise Orakel zu konstruieren, die simultan mehrere Eigenschaften erfüllen. Dieses Framework baut maßgeblich auf drei Zutaten auf: erstens, partiell definierten Orakeln, zweitens, ein Begriff von Gültigkeit, und drittens, eine stufenweise nicht-konstruktive Definitionsvorschrift des Orakels. Das wird später beim Einsatz in der Konstruktion näher erläutert.

Die zweite Idee besteht intuitiv darin, von einem PSPACE-vollständigem Orakel  $D$  auszugehen und dieses zu modifizieren, um die gewünschten Eigenschaften zu erhalten. Durch geschicktes Rückgreifen auf  $D$  lassen sich dann gewisse nichttriviale Berechnungen effizient umsetzen. Diese Idee geht auf Baker, Gill und Solovay (1975) zurück, die ein Orakel konstruiert haben, relativ zu diesem  $P = NP \cap \text{coNP} \neq NP$ . Hierbei wird das PSPACE-vollständige Orakel  $D$  mit einem zweiten, speziell konstruierten Orakel  $B$  kombiniert; in der Originalfassung zu  $D \cup B$ . Das Orakel  $B$  sorgt für die Trennung zwischen  $P$  und  $NP$ , ist aber gleichzeitig so einfach zu entscheiden, dass ein komplementär akzeptierendes Maschinenpaar einer Sprache  $L \in NP \cap \text{coNP}$  eine relevante Portion von  $B$  entscheiden kann, und dann mittels dem PSPACE-vollständige Orakel  $D$  dann abfragen kann, ob die entsprechende Eingabe akzeptiert wird.

Wir werden im Folgenden etwas Ähnliches mittels *Relativierungen* von Orakelkonstruktionen umsetzen. In der Literatur hat es sich als dienlich gezeigt, anstelle mit einem konkreten PSPACE-vollständigem Orakel zu starten und zu ergänzen, stattdessen mit der Annahme  $P = \text{PSPACE}$  zu starten. (Dieses Vorgehen findet sich zum Beispiel bei Blum und Impagliazzo, 1987; Fortnow und Rogers, 2002; Fenner, Fortnow, Kurtz und Li, 2003.) Wir können dann (mit üblichen Methoden) ein Orakel  $E$  konstruieren, relativ zu diesem die oberen Eigenschaften gelten. Im Verlauf dieses Kapitels zeigen wir die folgende Implikation:

**Satz 5.2.** Angenommen  $P = PSPACE$ . Dann existiert ein Orakel  $E$  sodass folgende Aussagen gelten:

- (1) Für jede totale NPTM  $N$  existiert eine Funktion  $g \in FP^E$  sodass  $g(x)$  ein akzeptierender Rechenweg von  $N^E(x)$  ist (was äquivalent zu  $Q$  relativ zu  $E$  ist).
- (2) Es existiert kein  $\leq_m^{pp,E}$ -hartes Paar in  $DisjNP^E$  für  $DisjUP^E$  (was  $DisjNP$  relativ zu  $E$  impliziert).
- (3) Es existiert keine  $\leq_m^{p,E}$ -vollständige Menge für  $UP^E$  (was äquivalent zu  $UP$  relativ zu  $E$  ist).

Die Konstruktion von  $E$  ist dabei solcherart, dass diese Konstruktion auf ein zweites Orakel relativiert. Intuitiv gemeint ist damit, dass wir der Aussage ein zweites Orakel hinzufügen können, ohne Gültigkeit zu verlieren. Hieraus ergibt sich insbesondere, dass für jedes Orakel  $A$  folgende Implikation gilt:

$$P^X = PSPACE^X \xrightarrow{5.2, \text{rel.}} \text{ex. } E \text{ sodass } E \oplus X \text{ den Eig. von Satz 5.1 genügt.}$$

Mit Wahl von  $X$  als dem  $PSPACE$ -vollständigen  $D$  erreichen wir dann wie gewünscht, dass  $O = E \oplus D$  den Eigenschaften von Satz 5.1 genügt. Diese Relativierungen von Orakelkonstruktionen werden im Verlauf dieses Kapitels noch formal präzise spezifiziert.

Die Hauptarbeit liegt also in der Konstruktion eines Orakels  $E$  aus Satz 5.2. Die zentrale Idee sei hier kurz skizziert: Wir starten mit einem leeren Orakel. Für die Aussage  $UP$  werden wir eine Familie von Zeugensprachen  $C_m \in UP^O$  definieren, welche sensitiv gegenüber dem Inhalt des Orakels  $E$  sind. Damit lassen sich dann Wörter so zu  $E$  hinzufügen, dass für jede  $UP^E$ -Maschine und jeden  $FP^E$ -Transduktor die Reduktion auf eine entsprechende Zeugensprache  $C_m \in UP^E$  ausgeschlossen wird. Das läuft über ein klassisches Diagonalargument, ähnlich wie die  $P \neq NP$ -Konstruktion von Baker, Gill und Solovay (1975), und kann analog für die Aussage  $DisjNP$  umgesetzt werden.

Nun zur Aussage  $Q$ . Unter Annahme von  $P = PSPACE$  gilt trivialerweise  $Q$  relativ zum leeren Orakel. Hätten wir nun die Möglichkeit, effizient  $E$  auszurechnen, hätten wir auch  $Q$  relativ zu  $E$ . Das ist zwar nicht möglich, aber für jede totale NPTM  $N$  ist es zumindest möglich, eine relevante Portion von  $E$  zu berechnen, sodass sich diese Portion in  $N$  hineincodieren lässt. Wir erhalten dann eine äquivalente NPTM  $N'$  welche keine Orakelfragen stellen muss. Unter Annahme  $P = PSPACE$  lässt sich dann ein akzeptierender Rechenweg für  $N'$  (bzw.  $N$ ) finden.

Im folgenden Abschnitt 5.1 erarbeiten wir detailliert die Relativierungen von Orakelkonstruktionen. Anschließend spezifizieren wir in Abschnitt 5.2 noch einige spezielle Notationen, die wir zur Orakelkonstruktion benötigen. Aufbauend auf der obigen Skizze können wir dann in Abschnitt 5.3 die konkrete Konstruktionsvorschrift des Orakels formulieren. In Abschnitt 5.4 wird abschließend nachgewiesen, dass diese Konstruktionsvorschrift zum einen wohldefiniert ist, und zum anderen, dass sich hieraus die gewünschten Eigenschaften wie in Satz 5.1 ergeben.

## 5.1 Relativierende Orakelkonstruktionen

Um den Begriff der relativierenden Orakelkonstruktion zu definieren, generalisieren wir zunächst den Begriff der (1-)Orakel-Turing-Maschine  $M^A$  auf 2-Orakel-Turing-Maschinen  $M^{A,B}$ . Anstelle eines Fragezustands haben 2-Orakel-TM zwei ausgezeichnete Fragezustände  $q_1$  und  $q_2$ . Im Zustand  $q_1$  wird getestet ob der Inhalt  $q$  des Orakelbands in  $A$

liegt (und entsprechend zu  $q_{\text{yes}}$  oder  $q_{\text{no}}$  übergegangen), und analog in Zustand  $q_2$  getestet, ob  $q$  in  $B$  liegt. Damit rechnet  $M$  relativ dem Orakel-Paar  $(A, B)$ . Definitionen und Aussagen können damit nicht nur, wie bisher, auf *ein* Orakel relativiert werden, sondern auch auf zwei Orakel  $(A, B)$  relativiert werden. Zum Beispiel meint  $Q^{A,B}$ , dass zu jedem 2-Orakel-NPTM  $N$ , welcher total relativ zu  $(A, B)$  arbeitet, auch ein 2-Orakel-PTM-Transduktor existiert, der auf Eingabe  $x$  relativ zu  $(A, B)$  einen akzeptierenden Rechenweg der Berechnung  $N^{A,B}(x)$  ausgibt.

Die zentrale Einsicht zu den relativierenden Orakelkonstruktionen ist nun, dass diese genauso wie die üblichen Beweismethoden *relativieren*. Das ist insofern klar, weil in der Konstruktion von Orakeln nicht in die diskutierten TM „hineingeschaut“ wird, sondern diese nur anhand von Akzeptierverhaltens einiger TM definiert werden. Es lässt sich also in solchen relativierenden Orakelkonstruktionen jede 1-Orakel-TM durch eine 2-Orakel-TM austauschen, wobei das hinzugefügte Orakel fest, aber frei wählbar ist. Die Konstruktion selbst ist ja „blind“ gegenüber dem zweiten Orakel. Hätten wir also beispielsweise durch eine relativierende Orakelkonstruktion von  $A$  die Aussage  $\neg Q^A$ , dann gilt auch  $\neg Q^{A,X}$  für jedes Orakel  $X$ .

Eine solches Paar  $(A, B)$  von Orakeln können wir dann wieder zurück in *ein* äquivalentes Orakel  $A \oplus B \subseteq \Sigma^*$  umwandeln. Zur Erinnerung:

$$A \oplus B = \{0a \mid a \in A\} \cup \{1b \mid b \in B\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass sich zu jeder 2-Orakel-(N)PTM  $N$  sich eine 1-Orakel-(N)PTM  $N'$  angeben lassen kann, sodass sich  $N$  relativ zu  $(A, B)$  äquivalent verhält wie  $N'$  zu  $A \oplus B$ , und umgekehrt. In diesem Sinne hätten wie mit obigen Beispiel, dass auch  $\neg Q^{A \oplus X}$  für alle  $X$  gilt.

Vor diesem Hintergrund können wir noch einmal den Plan der nun folgenden Orakelkonstruktion angeben. Wir zeigen erstens die Implikation von Satz 5.2 bzw.

$$P^\emptyset = PSPACE^\emptyset \implies \text{ex. } E \text{ sodass } E \text{ den Eig. von Satz 5.1 genügt.}$$

Diese Konstruktion relativiert insbesondere. Wir können daher auf beliebige Orakel  $X$  relativieren:

$$P^{\emptyset,X} = PSPACE^{\emptyset,X} \implies \text{ex. } E \text{ sodass } (E, X) \text{ den relativierten Eig. von Satz 5.1 genügt.}$$

Wählen wir nun ein PSPACE-vollständiges  $D$  als  $X$ , dann gilt trivialerweise die Voraussetzung  $P^{\emptyset,D} = PSPACE^{\emptyset,D}$ . Dann existiert also auch ein  $E$ , sodass  $(E, D)$  den Eigenschaften von Satz 5.1 genügt, wobei die Eigenschaften auf 2-Orakel-TM relativiert wurden. Wie bereits diskutiert, erfüllt  $E \oplus D$  dann auch diese Eigenschaften, relativiert auf 1-Orakel-TM. Setzen wir also  $O = E \oplus D$  sind wir fertig und haben Satz 5.1 bewiesen.

## 5.2 Notation zur Orakelkonstruktion

Nun definieren wir noch einige Notationen, die wir bei der Orakelkonstruktion, und insbesondere für den Beweis von Satz 5.2 benötigen.

Zunächst seien  $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  sogenannte *Standardaufzählungen* der Orakel-PTMs, Orakel-NPTMs, bzw. Orakel-PTM-Transduktoren, welche folgende Eigenschaften haben

1. Die Mengen  $\{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ,  $\{N_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ,  $\{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  sind in Polynomialzeit

entscheidbar, heißt es ist effizient entscheidbar, ob der gegebene Maschinencode einer TM der Standardaufzählung entspricht.

2. Für jedes Orakel  $D$  terminiert  $M_i^D(x)$  nach höchstens  $p_i(|x|) \stackrel{\text{df}}{=} |x|^i + i$  Schritten; analog für  $N_i$  und  $F_i$ .
3. Für jede Orakel-PTM  $M$  existiert ein  $i$  sodass  $L(M_i^D) = L(M^D)$ , für jede Orakel-NPTM  $N$  existiert ein  $i$  sodass  $L(N_i^D) = L(N^D)$ , und für jeden Orakel-PTM-Transduktor  $T$  existiert ein  $i$  sodass  $T^D(x) = F_i^D(x)$ .  
Insbesondere kann jeder akzeptierender Rechenweg  $\alpha$  der Berechnung  $N_i(x)$  in einen akzeptierenden Rechenweg  $\alpha'$  der Berechnung  $N(x)$  effizient übersetzt werden.

Solche Standardaufzählungen existieren. Eine Möglichkeit, diese zu konstruieren ist beispielsweise, jede nichtdeterministische TM mit einem Timer auszustatten, die nach polynomieller Laufzeit die Berechnung abbricht. Konkret: gegeben  $i$ , sei zunächst  $N$  die nichtdeterministische TM mit Codierung  $i$ . Die TM  $N_i$  führt dann auf Eingabe  $x$  parallel zur Rechnung  $N(x)$  auf jedem Rechenweg einen Timer aus, der nach  $> |x|^i + i$  Schritten den Rechenweg ablehnend abbricht. Damit ist die Laufzeit von  $N_i$  polynomiell beschränkt auf  $p_i$ .

Wie bereits angesprochen, werden wir ein Konstruktionsverfahren von Dose und Glaßer anwenden. Die erste wesentliche Zutat dieses Frameworks ist der Begriff von „partiell definierten“ Orakeln, bei denen also für gewisse  $x$  noch nicht endgültig festgelegt ist, ob  $x \in O$  oder  $x \notin O$  gelten soll. Diese werden mittels finiten Wörtern  $w \in \Sigma^*$  formalisiert: ein finites Wort  $w \in \Sigma^*$  können wir im Folgenden auch als die Menge  $\{i \mid i < |w|, w[i] = 1\}$  verstehen (aber  $|w|$  immer als die Länge von  $w$ ). Die intendierte Interpretation ist, dass gegenüber der Menge  $w$  die Zugehörigkeit aller Zahlen (bzw. äquivalent Wörtern)  $x$  mit  $x < |w|$  final spezifiziert ist, nicht dagegen für  $x \geq |w|$  (und nur ersatzweise  $x \notin w$  gilt).

Diese Interpretation von finiten Wörtern  $w$  als Orakel macht es einfacher, unsere Orakelkonstruktionen präzise und knapp zu beschreiben. Üblicherweise werden wir  $w$  so erweitern, dass die Zugehörigkeit des kleinsten  $x \in \mathbb{N}$  spezifiziert wird, welche noch nicht final spezifiziert ist. Dieses  $x$  ist genau  $|w|$  und wir legen die Zugehörigkeit final fest, indem wir an  $w$  entweder 0 anhängen (und  $x$  ist final nicht im Orakel  $w0$ ) oder 1 anhängen (und  $x$  ist final im Orakel  $w1$ ).

Wir können relativ partiell definierten Orakeln auch rechnen. Für  $w \in \Sigma^*$  definieren wir  $M^w(x)$  entsprechend als  $M^{\{i \mid w(i)=1\}}(x)$  (heißt, Orakel-Anfragen, für die  $w$  nicht definiert ist, werden negativ beantwortet). Dies ermöglicht es uns auch, folgenden Begriff zu definieren: Wir sagen, dass NPTM  $M^w(x)$  *definit* ist, wenn alle Anfragen auf allen Rechenwegen  $< |w|$  sind (oder äquivalent:  $w[q]$  ist für alle Anfragen  $q$  auf allen Rechenwegen definiert); wir sagen, dass  $M^w(x)$  *definitiv akzeptiert* (bzw. *definitiv ablehnt*), wenn  $M^w(x)$  definit ist und akzeptiert (bzw. ablehnt). Intuitiv beschreibt der Begriff „definit“ Berechnungen, die sich nicht ändern, wenn das jeweilige partiell definierte Orakel erweitert wird, weil die Anfragen zu kurz sind.

**Beobachtung 5.3.** (1) Wenn  $M^w(x)$  eine definite Berechnung ist und  $v \sqsupseteq w$  ist, dann ist  $M^v(x)$  definit. Die Berechnung  $M^v(x)$  akzeptiert genau dann, wenn  $M^w(x)$  akzeptiert.

(2) Wenn  $w$  für alle Wörter der Länge  $p_i(|x|) = |x|^i + i$  definiert ist, dann ist  $M_i^w(x)$  definit.

(3) Wenn  $M^w(x)$  auf einem Rechenweg mit der Menge der Orakel-Anfragen  $Q$  akzeptiert, und  $w, v$  auf  $Q$  übereinstimmen, dann akzeptiert  $M^v(x)$  auf dem gleichen Rechenweg und mit der gleichen Menge der Anfragen  $Q$ .

Für ein partielles Orakel  $w$ , einen PTM-Transduktor  $F$  und eine (N)PTM  $M$  schreiben wir manchmal  $M^w(F^w(x))$  als die *eine* Berechnung der (N)PTM  $M \circ F$  auf Eingabe  $x$  relativ zu  $w$ . Entsprechend sagen wir dann auch, dass  $M^w(F^w(x))$  definit ist (bzw. definitiv akzeptiert, oder definitiv ablehnt) wenn  $M \circ F$  definit auf Eingabe  $x$  relativ zu  $w$  ist (bzw. definitiv akzeptiert, definitiv ablehnt). Sollte es aus dem Kontext klar hervorgehen, lassen wir üblicherweise auch den Zusatz „partiell“ weg, wenn wir z.B. von einem (partiellen) Orakel  $w \in \Sigma^*$  sprechen.

Vor der Konstruktion machen wir nun noch folgende bekannte kombinatorische Aussage:

**Lemma 5.4.** *Sei  $G$  ein gerichteter bipartiter Graph mit den Knotenmengen  $A$  und  $B$ . Das heißt, jede Kante in  $G$  führt entweder von einem Knoten in  $A$  zu einem Knoten in  $B$  oder umgekehrt. Sei  $\Delta$  eine obere Schranke für den Ausgangsgrad jedes Knotens in  $G$ .*

*Wenn  $|A|, |B| > 2\Delta$  gilt, dann gibt es ein  $a \in A$  und  $b \in B$ , sodass weder  $(a, b)$  noch  $(b, a)$  eine Kante in  $G$  ist.*

*Beweis.* Sei  $n = \min\{|A|, |B|\} > 2\Delta$ . Entferne Knoten aus  $A$  und  $B$ , bis beide Knotenmengen jeweils genau  $n$  Knoten haben, um einen gerichteten bipartiten Graphen  $G'$  mit den Knotenmengen  $A'$  und  $B'$  zu bilden. Sei  $G''$  der zugrunde liegende ungerichtete Graph von  $G'$ . In  $G'$  gibt es  $\leq |A'| \cdot \Delta + |B'| \cdot \Delta < n^2$  viele ungerichtete Kanten, aber  $n^2$  viele ungerichtete Kanten im vollständigen bipartiten ungerichteten Graphen  $K_{n,n}$ .

Das bedeutet, dass es  $a \in A' \subseteq A$ ,  $b \in B' \subseteq B$  gibt, die in  $G''$  nicht adjazent sind; damit sind sowohl  $(a, b) \notin E(G')$  als auch  $(b, a) \notin E(G')$  im induzierten gerichteten bipartiten Teilgraphen  $G'$ . Also gilt für den ursprünglichen Graphen  $G$  sowohl  $(a, b) \notin E(G)$  als auch  $(b, a) \notin E(G)$ , wie gewünscht.  $\square$

### 5.3 Definition

Nun werden wir den Beweis von Satz 5.2 erarbeiten. Dafür starten wir mit der Annahme  $P = PSPACE$ .

Wie zum Teil anfangs des Kapitels skizziert, möchten wir in unseren Orakelkonstruktion abzählbar unendlich viele Ebenen  $n$ , das heißt, Wörter gleicher Länge  $n$ , für eine abzählbar unendliche Familie von Zeugensprachen mit zunehmend großen Lücken injektiv reservieren und zuordnen. Hierfür sei  $e(0) \stackrel{\text{df}}{=} 2$ ,  $e(i) \stackrel{\text{df}}{=} 2^{e(i-1)}$ . Es gibt eine polynomialzeit-berechenbare, polynomialzeit-invertierbare injektive Funktion  $f$ , die von  $(m, h) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  auf  $\mathbb{N}$  abbildet. Definiere nun  $H_m \stackrel{\text{df}}{=} \{e(f(m, h)) \mid h \in \mathbb{N}\}$  als die Menge der für die Zeugensprache  $m$  reservierten Ebenen. Diese Definition stellt nun Folgendes sicher:

**Beobachtung 5.5.** (1) *Die Menge  $H_m$  ist abzählbar unendlich, eine Teilmenge der geraden Zahlen, und alle  $H_0, H_1, \dots$  sind paarweise disjunkt.*

(2) *Die Folge  $\min H_0, \min H_1, \dots$  ist nach oben unbegrenzt.*

(3) *Wenn  $n \in H_m$ , dann gilt für jedes  $a \in \mathbb{N}$ :  $n < a < 2^n \implies a \notin H_0, H_1, \dots$ .*

(4) *Jede Menge  $H_m \in P$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .*

Wie bereits angesprochen, werden wir in der Konstruktion Wörter der Länge  $n \in H_m$  in das Orakel  $E$  einsetzen, sodass  $E$  die gewünschten Eigenschaften hat. Wörter anderer Länge werden nicht in das Orakel eingesetzt. Wir definieren folgende Zeugensprachen,

welche vom Inhalt der Ebenen abhängig sind. Sei hierfür  $m \in \mathbb{N}$  und  $w \in \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$  beliebig:

$$\begin{aligned} A_m^w &\stackrel{\text{df}}{=} \{0^n \mid n \in H_m, \text{ existiert } x \in \Sigma^n \text{ mit } x \in w \text{ und } x \text{ endet mit } 0\} \\ B_m^w &\stackrel{\text{df}}{=} \{0^n \mid n \in H_m, \text{ existiert } x \in \Sigma^n \text{ mit } x \in w \text{ und } x \text{ endet mit } 1\} \\ C_m^w &\stackrel{\text{df}}{=} \{0^n \mid n \in H_m, \text{ existiert } x \in \Sigma^n \text{ mit } x \in w\} \end{aligned}$$

Sind die Ebenen der Höhe  $H_m$  in  $w$  auf geeignete Weise gefüllt, lässt sich leicht sehen dass diese entsprechenden Zeugsprachen in  $\text{DisjUP}^w$  bzw.  $\text{UP}^w$  fallen:

**Behauptung 5.6.** *Sei  $w \in \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$  ein beliebiges Orakel.*

- (1) *Wenn  $|w \cap \Sigma^n| \leq 1$  für alle  $n \in H_m$ , dann  $(A_m^w, B_m^w) \in \text{DisjUP}^w$ .*
- (2) *Wenn  $|w \cap \Sigma^n| \leq 1$  für alle  $n \in H_m$ , dann  $C_m^w \in \text{UP}^w$ .*

Idee und Vorschau der Konstruktion

Die Konstruktion verläuft im Wesentlichen so, dass simultan und ineinander verflochten die drei Eigenschaften von Satz 5.2 erarbeitet werden:

1. Erarbeitung (1), bzw. Q: Für alle  $j \in \mathbb{N}$  versucht die Konstruktion die Ebenen so einzurichten, dass  $N_j$  nicht total ist. Falls dies nicht möglich ist, dann wird  $N_j$  inhärent total akzeptieren. Diese Eigenschaft können wir dann algorithmisch ausnutzen, um eine relevante Portion von  $E$  zu bestimmen, und, zusammen mit der Voraussetzung  $P = \text{PSPACE}$  so einen akzeptierenden Rechenweg für  $N_j(x)$  bestimmen.
2. Erarbeitung von (2), bzw. DisjNP: Für alle  $a \neq b$  versucht die Konstruktion die Ebenen so einzurichten, dass  $N_a, N_b$  beide eine Eingabe  $x$  akzeptieren, womit  $x \in L(N_a) \cap L(N_b)$  und  $(L(N_a), L(N_b)) \notin \text{DisjNP}$ . Falls dies nicht möglich ist, ist  $(N_a, N_b)$  inhärent ein disjunktes NP-Paar. In diesem Fall fixieren wir ein  $m$ , stellen sicher, dass  $(A_m, B_m)$  ein disjunktes UP-Paar ist, und diagonalisieren gegen jeden PTM-Transduktor  $F_r$ , sodass  $F_r$  die Reduktion  $(A_m, B_m) \leq_m^{\text{pp}} (L(N_a), L(N_b))$  nicht realisiert. Dies wird folgendermaßen erreicht: (i) Für alle  $n \in H_m$  fügen wir höchstens ein Wort der Länge  $n$  in  $E$  ein (und somit  $(A_m, B_m) \in \text{DisjUP}$ ), und (ii) für jedes  $r$  gibt es ein  $n \in H_m$  so, dass  $0^n \in A_m$ , aber  $N_a(F_r(0^n))$  ablehnt (oder analog  $0^n \in B_m$ , aber  $N_b(F_r(0^n))$  ablehnt).
3. Erarbeitung von (3), bzw. UP: Für alle  $a$  versucht die Konstruktion die Ebenen so einzurichten, dass  $N_a$  eine Eingabe  $x$  auf zwei Rechenwegen akzeptieren, womit  $L(N_a) \notin \text{UP}$ . Falls dies nicht möglich ist,  $L(N_a)$  inhärent eine UP-Sprache. In diesem Fall fixieren wir ein  $m$ , stellen sicher, dass  $C_m$  eine Sprache in UP ist, und diagonalisieren gegen jeden PTM-Transduktor  $F_r$ , sodass  $F_r$  die Reduktion  $C_m \leq_m^{\text{pp}} L(N_a)$  nicht realisiert. Dies wird folgendermaßen erreicht: (i) Für alle  $n \in H_m$  fügen wir höchstens ein Wort der Länge  $n$  in  $E$  ein (und somit  $C_m \in \text{DisjUP}$ ), und (ii) für jedes  $r$  gibt es ein  $n \in H_m$  so, dass  $0^n \in C_m$  genau dann wenn  $N_a(F_r(0^n))$  ablehnt.

Wir weisen diesen Arbeitsschritten folgende Symbole zu, welche die einzelnen Tasks repräsentieren sollen:  $\tau_j^1, \tau_{a,b}^2, \tau_{a,b,r}^2, \tau_a^3, \tau_{a,r}^3$ . Symbol  $\tau_j^1$  repräsentiert den (versuchsweisen) Ausschluss der Totalität von  $N_j$ . Symbol  $\tau_{a,b}^2$  repräsentiert analog den Ausschluss der Disjunktheit von  $L(N_a), L(N_b)$ , Symbol  $\tau_{a,b,r}^2$  dann die Diagonalisierung dieses Paares gegen den Transduktor  $F_r$ . Analog für UP und  $\tau_a^3, \tau_{a,r}^3$ .

Intuitiv gesprochen verläuft die Konstruktion nun wie folgt: wir starten mit einem partiell definierten Orakel  $w$ , und wollen dieses nun schrittweise erweitern. In jeder Erweiterung nehmen wir uns einen noch nicht bearbeiteten Task  $\tau$ , und werden die Erweiterung so wählen, dass  $\tau$  relativ zu dieser Erweiterung erfüllt wird. Wir passen dabei auf, dass auch in zukünftigen Erweiterungen  $\tau$  erhalten bleibt. Führen wir das nun unendlich oft durch, enden wir im Limit mit einem  $\omega$ -langen Orakel, welcher alle unsere Tasks  $\tau$  abgearbeitet hat.

Beachte, wie wir in der oberen Vorschau einige Tasks  $\tau$  Voraussetzungen an das finale Orakel stellen. Kann zum Beispiel im Fall von Task  $\tau_a^3$  nicht erwirkt werden, dass die NPTM  $N_a$  auf mehr als einem Rechenweg akzeptiert, so muss in der Konstruktion dafür gesorgt werden, dass auch die Zeugensprache  $C_m$  in UP liegt, indem selbst in den Erweiterungen nach Bearbeiten von Task  $\tau_a^3$  für alle  $n \in H_m$  höchstens ein Wort der Länge  $n$  in  $E$  eingesetzt wird.

Solche „globalen“ Voraussetzungen behandelt das Framework von Dose und Glaßer durch den Begriff der *Gültigkeit* von partiellen Orakeln. Dies ist die zweite wesentliche Zutat. Hierbei werden alle solche Eigenschaften, die im Verlauf der Konstruktion aufrecht erhalten müssen, in einer partiellen Funktion  $t$  zusammengefasst. Wenn ein Orakel  $w \in \Sigma^*$  dieses Bündel  $t$  an Eigenschaften erfüllt, dann nennen wir dies  $t$ -gültig. Gültigkeit ist also eine binäre Relation zwischen den partiellen Orakeln aus  $\Sigma^*$  und partiellen Funktionen.

Für unsere Zwecke definieren wir uns folgende Funktionenklasse  $\mathcal{T}$ . Die Klasse  $\mathcal{T}$  ist eine Teilmenge der partiellen Funktionen, und es gilt  $t \in \mathcal{T}$  genau dann wenn

- der Definitionsbereich nur aus Tasks  $\tau_j^1, \tau_{a,b}^2, \tau_a^3$  besteht,
- die Bildmenge nur aus natürlichen Zahlen besteht, und
- $t$  injektiv auf den positiven Funktionswerten ist, also  $t(\tau) = t(\tau') > 0 \implies \tau = \tau'$ .

Die intendierte Interpretation ist nun wie folgt: wenn  $t$  so gewählt ist dass  $t(\tau_a^3) = m > 0$ , dann soll damit notiert werden dass Task  $\tau_a^3$  die Ebenen der Menge  $H_m$  für die Zeugensprache  $C_m$  reserviert hat, also in jede diese Ebenen der Wortlänge  $n$  nur höchstens ein Wort der Länge  $n$  eingesetzt werden darf. Analog für  $\tau_{a,b}^2$ .

Wir setzen nun folgenden Begriff von Gültigkeit für diese Konstruktion fest. Ein Orakel  $w \in \Sigma^*$  ist  $t$ -gültig wenn  $t \in \mathcal{T}$  und folgendes gilt:

- V1 Wenn  $x < |w|$  und  $|x| \notin \text{img}(e)$ , dann gilt  $x \notin w$ .  
(Bedeutung: Orakel  $w$  enthält keine Wörter der Länge  $\neq e(\cdot)$ .)
- V2 Für alle  $i$  gilt  $|w \cap \Sigma^{e(i)}| \leq 2$ .  
(Bedeutung: Orakel  $w$  ist dünn auf den Ebenen der Länge  $e(\cdot)$ .)
- V3 Wenn  $t(\tau_j^1) = 0$ , dann existiert ein  $z$  sodass  $N_j^w(z)$  definitiv ablehnt.  
( $L(N_j) \neq \Sigma^*$  relativ zum finalen Orakel.)
- V4 Wenn  $t(\tau_{a,b}^2) = 0$ , dann existiert ein  $z$  sodass  $M_a^w(z)$  und  $M_b^w(z)$  definitiv akzeptieren.  
(Bedeutung: wenn  $t(\tau_{a,b}^2) = 0$ , dann  $L(M_a) \cap L(M_b) \neq \emptyset$  relativ zum finalen Orakel.)
- V5 Wenn  $0 < t(\tau_{a,b}^2) = m$ , dann gilt für alle  $n \in H_m$  dass  $|\Sigma^n \cap w| \leq 1$ .  
(Bedeutung: wenn  $0 < t(\tau_{a,b}^2) = m$ , dann  $(A_m, B_m) \in \text{DisjNP}$  relativ zum finalen Orakel.)
- V6 Wenn  $t(\tau_a^3) = 0$ , dann existiert ein  $z$  sodass  $M_a^w(z)$  definitiv auf zwei Rechenwegen

akzeptiert.

(Bedeutung: wenn  $t(\tau_a^3) = 0$ , dann  $L(M_a) \notin \text{UP}$  relativ zum finalen Orakel.)

V7 Wenn  $0 < t(\tau_a^3) = m$ , dann gilt für alle  $n \in H_m$  dass  $|\Sigma^n \cap w| \leq 1$ .

(Bedeutung: wenn  $0 < t(\tau_a^3) = m$ , dann  $C_m \in \text{UP}$  relativ zum finalen Orakel.)

#### Induktive Definition des Orakels

Sei  $T$  eine abzählbare Aufzählung der oben genannten Tasks sodass  $\tau_{a,b,r}^2$  immer nach  $\tau_{a,b}^2$  kommt, sowie  $\tau_{a,r}^3$  immer nach  $\tau_a^3$  kommt. Die Orakelkonstruktion erfolgt nun in abzählbar unendlich vielen *Stufen*. In jeder Stufe bearbeiten wir den kleinsten Task  $\tau$  in der durch  $T$  festgelegten Reihenfolge. Anschließend entfernen wir  $\tau$  aus  $T$ , und entfernen möglicherweise zusätzlich höhere Tasks aus  $T$ . In der nächsten Stufe fahren wir mit dem nächsten Task fort, die noch nicht aus  $T$  entfernt wurde. (In jeder Stufe existiert immer mindestens ein Task, die noch nicht entfernt wurde, da wir in keiner Stufe alle Tasks aus  $T$  entfernen werden.)

Eine Stufe  $s < \omega$  identifizieren wir hierbei mit einem Orakel  $w_s \in \Sigma^*$ , einer Gültigkeits-Funktion  $t_s \in \mathcal{T}$ , und einem Task (bzw. mehreren Tasks) welcher in dieser Stufe bearbeitet wurde. Wir werden die einzelnen  $w_0, w_1, \dots$  und  $t_0, t_1, t_2, \dots$  so definieren, dass

$$w_0 \sqsubsetneq w_1 \sqsubsetneq w_2 \sqsubsetneq \dots,$$

und

$$t_0 \subseteq t_1 \subseteq t_2 \subseteq \dots,$$

heißt insbesondere das  $t_j$  eine Fortsetzung von  $t_i$  ist, wenn immer  $j \geq i$ . Außerdem werden wir sichern, dass jedes  $w_s$  ein  $t_s$ -gültiges Orakel ist. Es ist klar, dass jeder Task  $\tau \in T$  letztlich in irgendeiner Stufe  $s$  bearbeitet wird.

Nun zur Definition von  $w_s, t_s$ : wir werden die einzelnen Stufen induktiv definieren. Als Basisklausel setzen wir  $w_0 = \varepsilon$  und  $t_0 = \emptyset$ . Für unsere induktive Klausel sei  $s > 0$ . Die Definition für  $w_s, t_s$  ergibt sich nun aus der bereits definierten Funktion  $t_{s-1} \in \mathcal{T}$ , und dem bereits definierten  $t_{s-1}$ -gültigen Orakel  $w_{s-1}$ , sowie dem zu bearbeitenden kleinsten verbleibenden Task  $\tau$  in  $T$ . Zur Erinnerung: dieser wird unmittelbar nach der Bearbeitung aus  $T$  entfernt. In der Bearbeitung wird das Orakel strikt verlängert. Es gibt nun fünf Fälle, je nach dem welche Form der bearbeitete Task  $\tau$  hat.

**Task  $\tau_j^1$ :** Setze  $t' \stackrel{\text{df}}{=} t_{s-1} \cup \{\tau_j^1 \mapsto 0\}$ . Existiert ein  $t'$ -gültiges Orakel  $v \supsetneq w_{s-1}$ , dann setze  $t_s \stackrel{\text{df}}{=} t'$  und  $w_s \stackrel{\text{df}}{=} v$ .

Ansonsten setze  $t_s \stackrel{\text{df}}{=} t_{s-1}$  und setze  $w_s \stackrel{\text{df}}{=} w_{s-1}y$  für geeignetes  $y \in \{0, 1\}$  sodass  $w_s$  auch  $t_s$ -gültig ist. Das ist möglich nach Behauptung 5.7.

(Bedeutung: wenn das Orakel  $w_s$  so eingerichtet werden kann, dass  $N_j$  nicht mehr total arbeitet, dann erweitere genau so, vgl. V2.)

**Task  $\tau_{a,b}^2$ :** Setze  $t' \stackrel{\text{df}}{=} t_{s-1} \cup \{\tau_{a,b}^2 \mapsto 0\}$ . Existiert ein  $t'$ -gültiges Orakel  $v \supsetneq w_{s-1}$ , dann setze  $t_s \stackrel{\text{df}}{=} t'$  und  $w_s \stackrel{\text{df}}{=} v$ . Entferne außerdem alle Tasks der Form  $\tau_{a,b,r}^2$  von  $T$ .

Ansonsten wähle ein hinreichend großes  $m \notin \text{img}(t_s)$  sodass  $w_s$  kein Wort der Länge  $\min H_m$  definiert. Setze  $t_s \stackrel{\text{df}}{=} t_{s-1} \cup \{\tau_{a,b}^2 \mapsto m\}$ ; damit ist  $w_{s-1}$  auch  $t_s$ -gültig. Setze  $w_s \stackrel{\text{df}}{=} w_{s-1}y$  für geeignetes  $y \in \{0, 1\}$  sodass  $w_s$  auch  $t_s$ -gültig ist. Das ist möglich nach Behauptung 5.7.



(Bedeutung: wenn das Orakel  $w_s$  so eingerichtet werden kann, dass  $N_a, N_b$  nicht mehr disjunkt akzeptieren, dann erweitere genau so, vgl. V4. Ansonsten, falls das nicht möglich ist, wähle ein geeignetes frisches  $m$  und setze ab dieser Stufe voraus, dass  $(A_m, B_m) \in \text{DisjUP}$ .)

**Task  $\tau_{a,b,r}^2$ :** Wir wissen dass  $t_{s-1}(\tau_{a,b}^2) = m > 0$ . Setze  $t_s = t_{s-1}$  und wähle ein  $t_s$ -gültiges Orakel  $w_s \supseteq w_{s-1}$  sodass bezüglich einem  $n \in \mathbb{N}$  eine der folgenden Aussagen gilt:

- $0^n \in A_m^v$  für alle  $v \supseteq w_s$  und  $M_a(F_r(0^n))$  lehnt relativ zu  $w_s$  definitiv ab.
- $0^n \in B_m^v$  für alle  $v \supseteq w_s$  und  $M_b(F_r(0^n))$  lehnt relativ zu  $w_s$  definitiv ab.

Das ist möglich nach Behauptung 5.8.

(Bedeutung: erweitere zu  $w_s$ , sodass  $F_r$  nicht die Reduktion  $(A_m, B_m) \leq_m^{\text{pp}} (L(N_a), L(N_b))$  realisiert.)

**Task  $\tau_a^3$ :** Setze  $t' \stackrel{\text{df}}{=} t_{s-1} \cup \{\tau_{a,b}^3 \mapsto 0\}$ . Existiert ein  $t'$ -gültiges Orakel  $v \supseteq w_{s-1}$ , dann setze  $t_s \stackrel{\text{df}}{=} t'$  und  $w_s \stackrel{\text{df}}{=} v$ . Entferne außerdem alle Tasks der Form  $\tau_{a,b,r}^3$  von  $T$ .

Ansonsten wähle ein hinreichend großes  $m \notin \text{img}(t_s)$  sodass  $w_s$  kein Wort der Länge  $\min H_m$  definiert. Setze  $t_s \stackrel{\text{df}}{=} t_{s-1} \cup \{\tau_{a,b}^3 \mapsto m\}$ ; damit ist  $w_{s-1}$  auch  $t_s$ -gültig. Setze  $w_s \stackrel{\text{df}}{=} w_{s-1}y$  für geeignetes  $y \in \{0, 1\}$  sodass  $w_s$  auch  $t_s$ -gültig ist. Das ist möglich nach Behauptung 5.7.

(Bedeutung: wenn das Orakel  $w_s$  so eingerichtet werden kann, dass  $N_a$  auf mehr als einem Rechenweg akzeptiert, dann erweitere genau so, vgl. V6. Ansonsten, falls das nicht möglich ist, wähle ein geeignetes frisches  $m$  und setze ab dieser Stufe voraus, dass  $(C_m) \in \text{UP}$ .)

**Task  $\tau_{a,r}^3$ :** Wir wissen dass  $t_{s-1}(\tau_a^3) = m > 0$ . Setze  $t_s \stackrel{\text{df}}{=} t_{s-1}$  und wähle ein  $t_s$ -gültiges Orakel  $w_s \supseteq w_{s-1}$  sodass bezüglich einem  $n \in \mathbb{N}$  eine der folgenden Aussagen gilt:

- $0^n \in C_m^v$  für alle  $v \supseteq w_s$  und  $M_a(F_r(0^n))$  lehnt relativ zu  $w_s$  definitiv ab.
- $0^n \notin C_m^v$  für alle  $v \supseteq w_s$  und  $M_a(F_r(0^n))$  akzeptiert relativ zu  $w_s$  definitiv.

Das ist möglich nach Behauptung 5.11.

(Bedeutung: erweitere zu  $w_s$ , sodass  $F_r$  nicht die Reduktion  $(C_m) \leq_m^{\text{p}} (L(N_a))$  realisiert.)

Beobachte, dass  $t_s$  immer als Element von  $\mathcal{T}$  definiert ist. Beachte auch den „Existenzquantor“ in Task  $\tau_j^1$  (bzw. ähnlich bei  $\tau_{a,b}^2, \tau_a^3$ ), welcher in der Konstruktion „testet“, ob eine gültige Erweiterung des Orakels existiert, welche die Totalität der NPTM  $N_j$  definitiv ausschließt. Hierzu zwei Bemerkungen: Erstens handelt es sich hierbei insbesondere um ein nicht-konstruktives Argument. Falls eine solche Erweiterung existieren sollte, dann können wir diese auch auswählen (z.B. indem die lexikographisch kleinste gewählt wird), ohne dass diese in expliziter Weise angegeben wird. Zweitens, falls eine solche gültige Erweiterung nicht existiert, dann ist die NPTM  $N_j$  sogar „besonders total“, in dem Sinn dass  $N_j$  sogar unter *jeder* gültigen Erweiterung total ist. Diese Konstruktionstaktik ist die dritte Zutat des Verfahrens von Dose und Glaßer.

Mit den oben genannten Tasks ist die Definition der Stufe  $s$  abgeschlossen, und somit die beiden Folgen  $\{w_s\}_{s < \omega}$   $\{t_s\}_{s < \omega}$ . Später werden wir das finale Orakel  $E$  als  $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} w_s = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \{i \mid w_s[i] = 1, i < |w_s|\}$  definieren, heißt die Vereinigung über alle

partiellen Orakel, oder äquivalent, der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \omega} w_s = E \in \Sigma^\omega$  der Folge von finiten Wörtern  $w_0 \subsetneq w_1 \subsetneq \dots$ .

Wir müssen nun zwei Aussagen zeigen: erstens, dass diese Konstruktion tatsächlich möglich ist, indem wir die in der Definition angekündigten Lemmata angeben und beweisen. Zweitens müssen wir zeigen, dass die Konstruktion das leistet was wir uns wünschen, also dass  $E$  die behaupteten Eigenschaften des Satzes 5.1 erfüllen. Beides werden wir nun im folgenden Abschnitt beweisen.

## 5.4 Korrektheit

### Existenz

Wir zeigen im Folgenden zunächst, dass die oben definierte induktive Definition tatsächlich wohldefiniert ist, in dem Sinne dass jeder Task umgesetzt werden kann und die induktive Definition nicht „abbricht“.

Zunächst beweisen wir, dass sich ein  $t$ -gültiges Orakel  $w$  immer um ein Bit verlängern lassen kann, ohne Gültigkeit zu verletzen.

**Lemma 5.7.** *Sei  $t \in \mathcal{T}$  und  $w$  ein  $t$ -gültiges Orakel, und sei  $z = |w|$ . (Denke  $z$  als das kleinste Wort, für welche die Zuordnung zum Orakel noch nicht endgültig feststeht.)*

*Dann ist  $w0$  auch  $t$ -gültig. (Das heißt wir verletzen nicht die Gültigkeit, wenn wir das partielle Orakel so setzen, dass  $z$  nicht enthalten ist.)*

*Beweis.* Sei  $z = |w|$ . Angenommen,  $w0$  ist nicht  $t$ -gültig, dann muss eine der Bedingungen V1–V7 verletzt sein.

Angenommen V3 ist verletzt, weil  $N_j^{w0}(x)$  nicht definit ablehnt und gleichzeitig  $t(\tau_j^1) = 0$ . Da nach Voraussetzung  $w$  aber  $t$ -gültig ist, wird  $N_j^w(x)$  definitiv ablehnen. Nach Beobachtung 5.3(3) wissen wir aber, dass dann auch  $N_j^{w0}(x)$  definitiv ablehnen wird. Widerspruch. Also kann V3 nicht verletzt sein. Mit analoger Argumentation sehen wir auch, dass V4 und V6 nicht verletzt sein können.

Angenommen V1 ist verletzt, weil für  $x < |w0|$ ,  $|x| \notin \text{img}(e)$  die Zugehörigkeit  $x \in w$  gilt. Dann kann  $x$  nicht  $< |w|$  sein, denn V1 gilt hier nach  $t$ -Gültigkeit von  $w$ . Also muss  $x = z$ . Nun gilt aber nach Definition  $z \notin w$ ; Widerspruch zur Wahl von  $x$ . Also kann V1 nicht verletzt sein.

Es kann also nur V2, V5, oder V7 verletzt sein. Angenommen V5 ist verletzt, weil für  $n \in H_m$  gilt  $|w0 \cap \Sigma^n| > 1$ . Nach Definition wissen wir, dass  $w0$  und  $w$  auf allen Wörtern übereinstimmen. Das bedeutet dass auch  $|w \cap \Sigma^n| > 1$ . Das widerspricht der  $t$ -Gültigkeit von  $w$ . Die Bedingung V5 kann also nicht verletzt sein. Auf analoge Weise wie lässt sich auch zeigen, dass V2 und V7 nicht verletzt sein können.

Insgesamt kann also keine Bedingung V1–V7 verletzt sein;  $w0$  ist  $t$ -gültig wie gewünscht.  $\square$

Damit haben wir die ersten beiden Tasks aus der Definition schon gesichert. Nun zeigen wir, dass die Bearbeitung von  $\tau_{a,b,r}^2$  möglich ist.

**Lemma 5.8.** *Die Bearbeitung eines Tasks  $\tau_{a,b,r}^2$  ist möglich: gilt  $t_s = t_{s-1}$ ,  $t_s(\tau_{a,b}^2) = m > 0$ , dann lässt sich  $w_s$  so zu  $t_s$ -gültigem  $w \supseteq w_s$  erweitern, sodass eine der folgenden Aussagen gilt:*

- (1)  $0^n \in A_m^v$  für alle  $v \supseteq w$  und  $M_a(F_r(0^n))$  lehnt relativ zu  $w$  definitiv ab.
- (2)  $0^n \in B_m^v$  für alle  $v \supseteq w$  und  $M_b(F_r(0^n))$  lehnt relativ zu  $w$  definitiv ab.

*Skizze. Widerspruchsbeweis.* Erweitere  $w_{s-1}$  so weit zu  $u$ , dass genau alle Wörter der Länge  $< n = e(i) \in H_m$  definiert sind, wobei das  $i$  hinreichend groß gewählt wird. Sei für jedes  $X \subseteq \Sigma^n$  das Orakel  $u(X) \supseteq w_{s-1}$  jenes Orakel was entsteht, wenn die Ebene  $e(i)$  mit genau den Wörtern aus  $X$  gefüllt wird, heißt  $u(X)$  und  $X$  stimmen auf  $\Sigma^n$  überein. Beob. dass  $u(X), |X| \leq 1$  auch  $t_s$ -gültig ist.

Nach Annahme gilt

- für  $\alpha \in \Sigma^{n-1}0$  gilt  $0^n \in A_m^{u(\{\alpha\})}$  und daher akzeptiert  $M_a(F_r(0^n))$  relativ zu  $u(\{\alpha\})$ .
- für  $\beta \in \Sigma^{n-1}1$  gilt  $0^n \in B_m^{u(\{\alpha\})}$  und daher akzeptiert  $M_b(F_r(0^n))$  relativ zu  $u(\{\beta\})$ .

Kombinatorische Standardmethoden zeigen dann, dass relativ zu  $u(\{\alpha, \beta\})$  mit geeignetem  $\alpha \in \Sigma^{n-1}0, \beta \in \Sigma^{n-1}1$  sowohl  $M_a(F_r(0^n))$  also auch  $M_b(F_r(0^n))$  relativ zu  $u(\{\alpha, \beta\})$  akzeptieren. Damit wäre aber auch  $u(\{\alpha, \beta\})$  ein geeignetes Orakel in der Bearbeitung von Task  $\tau_{a,b}^2$  und wir hätten  $t_s(\tau_{a,b}^2) = 0$ .  $\square$

*Beweis.* Wir fixieren die Werte von  $a, b$  und  $r$  im gesamten Beweis dieses Satzes.

Sei  $\hat{s} < s$  die Stufe, die  $\tau_{a,b}^2$  behandelt hat. Eine solche Stufe existiert, da andernfalls  $t_s(\tau_{a,b}^2)$  undefiniert wäre. Wir haben  $m = t_s(\tau_{a,b}^2) = t_s(\tau_{a,b}^2)$ ; fixiere auch  $m$  für den Rest des Beweises.

Wir nehmen an, dass für alle  $t_s$ -gültigen  $w \supseteq w_{s-1}$  weder (1) noch (2) zutrifft. Daraus werden wir einen Widerspruch ableiten, indem wir ein geeignetes Orakel  $u' \supseteq w_{s-1}$  konstruieren, das bezüglich  $t' \stackrel{\text{def}}{=} t_{\hat{s}-1} \cup \{\tau_{a,b}^2 \mapsto 0\}$  gültig ist. (Gemeint ist: relativ zu  $u'$  wird  $M_a$  und  $M_b$  eine Eingabe definitiv akzeptieren.) Dann folgt nach Definition, dass  $u'$  eine mögliche  $t'$ -gültige Erweiterung von  $w_{s-1}$  in Stufe  $\hat{s}$  ist, daher hätte die Bearbeitung von  $\tau_{a,b}^2$  eben  $t_{\hat{s}} = t'$  gesetzt, damit auch  $t_s(\tau_{a,b}^2) = t'(\tau_{a,b}^2) = 0$ , was der Voraussetzung widerspricht.

Sei

$$\gamma(n) \stackrel{\text{def}}{=} \max(p_a(p_r(n)) + p_r(n), p_b(p_r(n)) + p_r(n))$$

das Polynom, das die Laufzeit von  $M_a \circ F_r, M_b \circ F_r$  bezüglich der Eingabelänge  $n$  relativ zu einem beliebigen Orakel beschränkt. Das bedeutet immer dann, wenn ein partielles Orakel  $u'$  für alle Wörter der Länge  $\leq \gamma(n)$  definiert ist, auch  $M_a^{u'}(F_r^{u'}(x)), M_b^{u'}(F_r^{u'}(x))$  für alle Eingaben  $x \in \Sigma^n$  definit sind. Sei  $n \in \mathbb{N}$  eine geeignete Zahl sodass  $n \in H_m$ , und  $w_{s-1}$  keine Wörter der Länge  $\geq n$  definiert, und

$$2^n > \gamma(n), \quad 2^{n-1} > 2\gamma(n). \quad (5.1)$$

Die erste Ungleichung von (5.1) stellt sicher, dass kein Level  $a, n < a \leq \gamma(n)$  für irgendeine Zeugensprache reserviert ist, das heißt,  $a \notin H_0, H_1, \dots$  (vgl. Beobachtung 5.5(3)). Die zweite Ungleichung stellt sicher, dass es genügend Wörter der Länge  $n$  gibt, damit bestimmte kombinatorische Argumente funktionieren. Die Ungleichung stellt sicher, dass es genügend Wörter der Länge  $n$  gibt, damit bestimmte kombinatorische Argumente funktionieren.

Für den restlichen Beweis fixieren wir zusätzlich  $n$ . Beachte, dass  $\ell(Q) \leq \gamma(n)$  für  $Q$  die Menge der Orakel-Queries ist, die jeweils von der Berechnung  $M_a(F_r(0^n))$  oder der Berechnung  $M_b(F_r(0^n))$  gestellt werden. Wir definieren nun  $u \supseteq w_{s-1}$  als ein  $t_s$ -gültiges partielles Orakel, das genau für alle Wörter bis zur Länge  $< n$  definiert ist. Ein solches Orakel existiert nach Lemma 5.7, indem man  $w_{s-1}$  bitweise erweitert, so dass es  $t_s$ -gültig (bzw. identisch  $t_{s-1}$ -gültig) bleibt.

Für unseren Beweis betrachten wir nicht alle  $t_s$ -gültigen  $w$ , sondern vielmehr eine ausreichende Teilmenge davon. Für  $X \subseteq \Sigma^n, |X| \leq 2$  definieren wir ein partielles Orakel

$u(X) \supseteq u$  als

$$u(X)[x] \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} u[x] & \text{falls } |x| < n \\ 1 & \text{falls } |x| = n, x \in X \\ 0 & \text{falls } |x| = n, x \notin X \\ 0 & \text{falls } n < |x| \leq \gamma(n) \\ \perp & \text{sonst,} \end{cases}$$

das für alle Wörter bis zur Länge  $\leq \gamma(n)$  definiert ist, und so dass  $u(X) \cap \Sigma^n = X$ , das heißt,  $u(X)$  und  $X$  stimmen in  $\Sigma^n$  überein.

Im Wesentlichen entsteht also  $u(X)$  aus  $u$ , indem die Ebene  $n$  mit  $X$  gefüllt wird, und dann die höheren Ebenen leer gelassen werden. Es ist leicht zu sehen, dass für  $|X| \leq 1$  das Orakel  $u(X)$  sogar  $t_s$ -gültig ist, indem iterativ  $u$  erweitert wird.

**Behauptung 5.9.** *Sei  $|X| \leq 1$ . Dann ist  $u(X)$  ein  $t_s$ -gültiges Orakel.*

*Beweis.* Angenommen, es ist kein  $t_s$ -gültiges Orakel. Dann ist eine der Bedingungen V1–V7 verletzt. Wir zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Klar ist, dass V3, V4, V6 nicht verletzt sein können, denn jede definite Berechnung relativ zu  $u$  ist auch eine definite Berechnung relativ zu  $u(X)$  nach Beobachtung 5.3(1).

Angenommen, V1 ist verletzt. Dann muss ein  $x$  mit  $|x| \leq \gamma(n)$ ,  $|x| \neq e(\cdot)$  existieren, sodass  $x \in u(X)$ . Klar ist, dass  $|x| \geq n$  sein muss, da ansonsten schon  $u$  nicht  $t_s$ -gültig wäre; das wäre ein Widerspruch zur Konstruktion von  $u$ . Also  $n < |x| \leq \gamma(n)$ . Dann wissen wir aber nach Definition von  $u(X)$  dass  $x \notin u(X)$ ; Widerspruch zur Wahl von  $x$ .

Angenommen, V5 ist verletzt. Dann existiert ein  $\tau'$  mit  $t_s(\tau') = m' > 0$  und  $n' \in H_{m'}$  und  $|\Sigma^{n'} \cap u(X)| > 1$ . Wieder klar ist, dass  $n \leq n' \leq \gamma(n) < 2^n$  sein muss, ansonsten wäre schon  $u$  nicht mehr  $t_s$ -gültig. Dann aber muss auch  $n = n'$ , denn ansonsten wäre  $n' \notin H_{m'}$ , nach Beobachtung 5.5. Jetzt haben wir aber  $|\Sigma^{n'} \cap u(X)| = |\Sigma^n \cap u(X)| = |X| \leq 1$ ; das ist ein Widerspruch zur Annahme  $|\Sigma^{n'} \cap u(X)| > 1$ . Also kann V5 nicht verletzt sein.

Auf analoge Weise ist ersichtlich, dass auch V2 und V7 nicht verletzt sein können. Damit ist keine Bedingung verletzt,  $u(X)$  muss also  $t_s$ -gültig sein.  $\square$

Wir haben angenommen, dass für  $t_s$ -gültige Orakel nicht (1) oder (2) gilt. Angewendet auf  $u(X)$ ,  $|X| \leq 1$  bedeutet das

- Für  $\alpha \in \Sigma^{n-1}0$  gilt  $0^n \in A_m^{u(\{\alpha\})}$  und daher akzeptiert  $M_a(F_r(0^n))$  definitiv relativ zu  $u(\{\alpha\})$  auf einem Rechenweg mit Menge  $Q_\alpha$  an Orakelfragen.
- Für  $\beta \in \Sigma^{n-1}1$  gilt  $0^n \in B_m^{u(\{\alpha\})}$  und daher akzeptiert  $M_b(F_r(0^n))$  definitiv relativ zu  $u(\{\beta\})$  auf einem Rechenweg mit Menge  $Q_\beta$  an Orakelfragen.

Wir wollen nun ein Orakel  $u'$  konstruieren, sodass sowohl  $M_a$  als auch  $M_b$  akzeptieren. Hierfür wollen wir die beiden jeweiligen akzeptierenden Rechenwege fixieren. Wir stellen das sicher, indem wir  $u'$  so wählen, dass  $u'$  mit  $u(\{\alpha\})$  auf  $Q_\alpha$  übereinstimmt, dann wird auch  $M_a(F_r(0^n))$  relativ zu  $u'$  akzeptieren. Symmetrisch stellen wir das auch für  $M_b$  bzw.  $\beta$  sicher, sodass auch  $M_b(F_r(0^n))$  relativ zu  $u'$  akzeptieren wird.

Hierzu müssen wir  $\alpha \in \Sigma^{n-1}0$  und  $\beta \in \Sigma^{n-1}1$  finden, die sich nicht gegenseitig „stören“. Ein Wort  $\alpha \in \Sigma^{n-1}0$  stört  $\beta \in \Sigma^{n-1}1$  falls  $\alpha \in Q_\beta$ , symmetrisch stört ein Wort  $\beta \in \Sigma^{n-1}1$  ein Wort  $\alpha \in \Sigma^{n-1}0$  falls  $\beta \in Q_\alpha$ .

Es existieren  $\alpha \in \Sigma^{n-1}0$  und  $\beta \in \Sigma^{n-1}1$  die sich nicht gegenseitig stören. Wir zeigen

das über einen bipartiten „Störgraph“  $G$ . Setze

$$A = \Sigma^{n-1}0, B = \Sigma^{n-1}1$$

als die zwei Knotenmengen von  $G$ . Setze nun

$$E = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in \Sigma^{n-1}0, \beta \in \Sigma^{n-1}1, \alpha \in Q_\beta\} \cup \{(\beta, \alpha) \mid \alpha \in \Sigma^{n-1}0, \beta \in \Sigma^{n-1}1, \beta \in Q_\alpha\}$$

als Kantenmenge. Beachte, dass der Ausgangsgrad  $\Delta$  von  $G$  höchstens  $\gamma(n)$  sein kann, denn ein Rechenweg auf  $M_a(F_r(0^n))$  (bzw.  $M_b(\dots)$ ) ist auf  $\leq \gamma(n)$  viele Schritte beschränkt.

Nach (5.1) wissen wir nun, dass  $|A|, |B| > 2\Delta$ . Mittels Lemma 5.4 existieren also  $\alpha \in A = \Sigma^{n-1}0, \beta \in B = \Sigma^{n-1}1$  sodass weder  $(a, b) \in E$  noch  $(b, a) \in E$ . In anderen Worten, es gilt  $\alpha \notin Q_\beta$  und  $\beta \notin Q_\alpha$ .

Betrachte nun  $u' \stackrel{\text{df}}{=} u(\{\alpha, \beta\})$ . Wir zeigen nun zwei Dinge: erstens, dass  $M_a(F_r(0^n))$  und  $M_b(F_r(0^n))$  definitiv relativ zu  $u(\{\alpha, \beta\})$  akzeptieren. Zweitens anschließend, dass  $u(\{\alpha, \beta\})$  auch  $t'$ -gültig ist.

Für die erste Aussage beobachten wir, dass  $u(\{\alpha\})$  und  $u(\{\alpha, \beta\})$  auf  $Q_\alpha$  übereinstimmen. Angenommen sie stimmen nicht überein, dann müssen sie nach Konstruktion auf  $\beta$  nicht übereinstimmen. Dann wäre aber  $\beta \in Q_\alpha$ , was ein Widerspruch zur Wahl von  $\beta$  ist. Symmetrisch sehen wir, dass  $u(\{\beta\})$  und  $u(\{\alpha, \beta\})$  auf  $Q_\beta$  ist. Also akzeptieren  $M_a(F_r(0^n))$  und  $M_b(F_r(0^n))$  definitiv relativ zu  $u(\{\alpha, \beta\})$ .

Nun zur zweiten Aussage. Zunächst zeigen wir  $t_{\hat{s}-1}$ -Gültigkeit.

**Behauptung 5.10.** Das Orakel  $u' = u(\{\alpha, \beta\})$  ist  $t_{\hat{s}-1}$ -gültig.

*Beweis.* Angenommen, es ist kein  $t_{\hat{s}-1}$ -gültiges Orakel. Dann ist eine der Bedingungen V1–V7 verletzt. Wir zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Wieder klar ist, dass V3, V4, V6 nicht verletzt sein können, denn jede definite Berechnung relativ zu  $t_{\hat{s}-1}$ -gültigem  $u$  ist auch eine definite Berechnung relativ zu  $u'$  nach Beobachtung 5.3(1). Auch V1 kann nicht verletzt sein; das folgt aus dem gleichen Argument wie im Beweis von Behauptung 5.9.

Angenommen, V5 ist verletzt. Dann existiert ein  $\tau'$  mit  $t_{\hat{s}-1}(\tau') = m' > 0$  und  $n' \in H_{m'}$  und  $|\Sigma^{n'} \cap u(X)| > 1$ . Wieder folgt  $n = n'$ . Insbesondere folgt daraus auch  $m = m'$ , denn  $n$  ist nur in  $H_m$  enthalten. Gleichzeitig haben wir  $\tau' \neq \tau_{a,b}^2$ , da  $\tau_{a,b}^2 \notin \text{dom}(t_{\hat{s}-1})$ . Damit gilt aber  $t_s(\tau') = t_{\hat{s}-1}(\tau') = m' = m = t_s(\tau_{a,b}^2)$ ; Widerspruch zur Injektivität von  $t_s \in \mathcal{T}$  auf dem Support. Also kann V5 nicht verletzt sein. Auf analoge Weise ist ersichtlich, dass auch V7 nicht verletzt sein kann.

Angenommen, V2 ist verletzt. Dann existiert ein  $i$  mit  $|u' \cap \Sigma^{n'}| > 2$  für  $n' = e(i)$ . Wieder folgt  $n = n'$ . Jetzt haben wir aber  $|\Sigma^{n'} \cap u'| = |\Sigma^n \cap u(\{\alpha, \beta\})| = |\{\alpha, \beta\}| = 2$ ; das ist ein Widerspruch zur Annahme  $|\Sigma^{n'} \cap u'| > 2$ . Also kann V2 nicht verletzt sein.

Damit ist keine Bedingung verletzt,  $u'$  muss also  $t_{\hat{s}-1}$ -gültig sein.  $\square$

Wir erinnern uns daran dass  $t' = t_{\hat{s}-1} \cup \{\tau_{a,b}^2 \mapsto 0\}$ . Nun ist es leicht zu sehen, dass  $u' \stackrel{\text{df}}{=} u(\{\alpha, \beta\})$  auch  $t'$ -gültig ist. Das Orakel  $u'$  ist nach voriger Behauptung  $t_{\hat{s}-1}$ -gültig, und bei der Erweiterung von  $t_{\hat{s}-1}$  zu  $t'$  kommt nur  $\tau_{a,b}^2 \mapsto 0$  hinzu. Das bedeutet, dass wir nur noch die Bedingung V4 bezüglich  $a, b$  verifizieren müssen. Sei nun  $y = F_r(0^n)$  relativ zu  $u'$ . Nach voriger Aussage oben wissen wir aber, dass  $M_a(y)$  und  $M_b(y)$  relativ zu  $u'$  beide definitiv akzeptieren, wie von V4 verlangt.

Da nun also  $u' \supsetneq u \supsetneq w_{\hat{s}-1}$  auch  $t'$ -gültig ist, sind wir fertig und erreichen einen Widerspruch, wie anfangs argumentiert: während der Bearbeitung von Task  $\tau_{a,b}^2$  in Stufe

$\hat{s}$  war das Orakel  $u'$  eine mögliche  $t'$ -gültig Erweiterung von  $w_{\hat{s}-1}$ , denn es ist  $t'$ -gültig und  $u' \supseteq w_{\hat{s}-1}$ . Also wäre nach Definition des Tasks  $\tau_{a,b}^2$  dann  $t_{\hat{s}} = t'$  gesetzt worden. Damit wäre dann auch  $t_s(\tau_{a,b}^2) = t'(\tau_{a,b}^2) = 0$ , was der Voraussetzung dieses Lemma 5.8 widerspricht.  $\square$

Ohne größeren Veränderungen lässt sich auf fast gleiche Weise auch zeigen, dass die Tasks  $\tau_{a,r}^3$  bearbeitet werden können.

**Lemma 5.11.** *Die Bearbeitung eines Tasks  $\tau_{a,r}^3$  ist möglich: gilt  $t_s = t_{s-1}$ ,  $t_s(\tau_a^3) = m > 0$ , dann lässt sich  $w_s$  so zu  $t_s$ -gültigem  $w \supseteq w_{s-1}$  erweitern, dass eine der folgenden Fälle eintritt:*

- $0^n \in C_m^v$  für alle  $v \supseteq w$  und  $M_a(F_r(0^n))$  lehnt relativ zu  $w$  definitiv ab.
- $0^n \notin C_m^v$  für alle  $v \supseteq w$  und  $M_a(F_r(0^n))$  akzeptiert relativ zu  $w$  definitiv.

*Beweis.* Wir verfahren wie im Beweis von Lemma 5.8. Um wieder einen Widerspruch abzuleiten, nehmen wir an, dass für alle  $t_s$ -gültigen  $w \supseteq w_{s-1}$  weder (1) noch (2) zutrifft. Definiere wieder identisch  $u$  und  $u(X)$ . Wieder gilt nach Behauptung 5.9 dass  $u(X)$  immer  $t_s$ -gültig ist wenn  $|X| \leq 1$ . Wir haben also:

- Die Berechnung  $M_a(F_r(0^n))$  lehnt relativ zu  $u(\emptyset)$  definitiv ab.
- Für  $\xi \in \Sigma^n$  gilt  $0^n \in C_m^{u(\{\xi\})}$  und daher akzeptiert  $M_a(F_r(0^n))$  definitiv relativ zu  $u(\{\xi\})$  auf einem Rechenweg mit Menge  $Q_\xi$  an Orakelfragen.

Beachte, dass  $\xi \in Q_\xi$  ist, andernfalls stimmen  $u(\emptyset)$  und  $u(\{\xi\})$  auf  $Q_\xi$  überein, damit folgt mit Beobachtung 5.3(3), dass  $M_a(F_r(0^n))$  relativ zu  $u(\emptyset)$  akzeptiert, was der Annahme widerspricht.

Wir fahren nun fort wie in Lemma 5.8. Seien  $\alpha \in \Sigma^n$ ,  $\beta \in \Sigma^n$  zwei unterschiedliche Wörter, die sich nicht gegenseitig stören. Das heißt,  $\alpha \notin Q_\beta$ ,  $\beta \notin Q_\alpha$ . Diese zwei Wörter existieren nach dem gleichen kombinatorischen Argument wie bei Lemma 5.8.

Setze nun  $u(\{\alpha, \beta\})$ . Wir zeigen nun, dass  $M_a(F_r(0^n))$  auf zwei unterschiedlichen Rechenwegen akzeptieren. Wieder haben wir, dass  $u(\{\alpha\})$  und  $u(\{\alpha, \beta\})$  auf  $Q_\alpha$  übereinstimmen, und symmetrisch  $u(\{\beta\})$  und  $u(\{\alpha, \beta\})$  auf  $Q_\beta$  übereinstimmen. Mittels Beobachtung 5.3(3) sehen wir also, dass es zwei Rechenwege von  $M_a(F_r(0^n))$  relativ zu  $u(\{\alpha, \beta\})$  gibt, welche definitiv akzeptieren: einer mit Orakelfragen  $Q_\alpha$ , und einer mit  $Q_\beta$ . Diese zwei Rechenwege sind tatsächlich unterschiedlich: einerseits gilt aus obiger Feststellung dass  $\alpha \in Q_\alpha$ , aber nach Wahl von  $\beta$  ist  $\alpha \notin Q_\beta$ . Auf einem Rechenweg wird also  $\alpha$  erfragt, auf dem anderen nicht; also sind die zwei Rechenwege unterschiedlich.

Wie im Beweis von Lemma 5.8 können wir jetzt  $t' \stackrel{\text{df}}{=} t_{\hat{s}-1} \cup \{\tau_a^3 \mapsto 0\}$  setzen. Wieder gilt nach Behauptung 5.10 dass  $u' \stackrel{\text{df}}{=} u(\{\alpha, \beta\})$  auch  $t_{\hat{s}-1}$ -gültig ist. Dann lässt sich auch leicht sehen, dass  $u'$  auch  $t'$ -gültig ist. Es kommt V6 bezüglich  $a$  hinzu, aber wir haben ja eben gesehen, dass  $M_a$  auf zwei unterschiedlichen Rechenwegen definitiv akzeptiert.

Da nun also  $u' \supseteq u \supseteq w_{\hat{s}-1}$  auch  $t'$ -gültig ist, sind wir fertig und erreichen einen Widerspruch: während der Bearbeitung von Task  $\tau_{a,b}^2$  in Stufe  $\hat{s}$  war das Orakel  $u'$  eine mögliche  $t'$ -gültige Erweiterung von  $w_{\hat{s}-1}$ . Also wäre nach Definition des Tasks  $\tau_{a,b}^2$  dann  $t_{\hat{s}} = t'$  gesetzt worden. Damit wäre dann auch  $t_s(\tau_{a,b}^2) = t'(\tau_{a,b}^2) = 0$ , was der Voraussetzung dieses Lemma 5.11 widerspricht.  $\square$

Damit ist die Konstruktion möglich. Sei  $E \stackrel{\text{df}}{=} \bigcup_{s \in \mathbb{N}} w_s$ . Beachte dass  $w_s \subsetneq E$  für alle  $w_s$ .

Sei außerdem  $t_\omega \stackrel{\text{df}}{=} \bigcup_{s \in \mathbb{N}} t_s$ . Beachte, dass nach Definition von  $t_0, t_1, \dots$  auch  $t_\omega$  eine (totale) Funktion ist. Beachte außerdem, dass  $|w_0| < |w_1| < |w_2| < \dots$  eine nach oben unbeschränkte Folge ist.

## Eigenschaften des konstruierten Orakels

Nun müssen wir noch verifizieren, dass  $E$  tatsächlich alle gewünschten Eigenschaften erfüllt, die in Satz 5.2 behauptet wurden. Wir starten mit einer Beobachtung über den groben Aufbau von  $E$ , der sich sofort aus der Ebenen-Konstruktion und unserem Gültigkeitsbegriff ergibt.

**Behauptung 5.12.** (1)  $E$  enthält keine Wörter der Länge  $\neq e(\cdot)$ .

(2) Es gilt  $|E \cup \Sigma^{e(i)}| \leq 2$  für alle  $i$ .

(3) Wenn  $t_\omega(\tau_j^1) = 0$ , dann gilt  $L(N_j^E) \neq \Sigma^*$ .

(4) Wenn  $t_\omega(\tau_{a,b}^2) = m > 0$ , dann gilt  $|E \cap \Sigma^n| \leq 1$  für alle  $n \in H_m$ . Insbesondere gilt damit  $(A_m^E, B_m^E) \in \text{DisjUP}^E$ .

(5) Wenn  $t_\omega(\tau_a^3) = m > 0$ , dann gilt  $|E \cap \Sigma^n| \leq 1$  für alle  $n \in H_m$ . Insbesondere gilt damit  $(C_m^E) \in \text{UP}^E$ .

*Beweis.* Zu (1): Sei  $x$  ein Wort mit  $|x| \neq e(\cdot)$ . Wir zeigen dass  $x \notin E$ . Wähle ein  $s$  sodass  $x < |w_s|$ , heißt  $w_s$  wird von  $x$  definiert. Nun ist  $w_s$  auch  $t_s$ -gültig, und mit V1 gilt insbesondere  $x \notin w_s C$ . Da nun  $w_s \sqsubset E$ , gilt auch  $x \notin E$  und wir sind fertig.

Zu (2): Beweis läuft analog wie bei (1), unter Berufung auf V2.

Zu (3): Nach Voraussetzung muss es ein  $s$  geben, für das  $t_s(\tau_j^1) = 0$ . Insbesondere ist  $w_s$  auch  $t_s$ -gültig, und mit V3 existiert ein  $z$  sodass  $N_j^{w_s}(z)$  definitiv ablehnt. Da  $w_s \sqsubset E$ , folgt mit Beobachtung 5.3(1), dass  $N_j^E(z)$  auch definitiv ablehnen wird.

Zu (4): Angenommen, es existiert ein  $n \in H_m$  für das  $|E \cap \Sigma^n| > 1$ . Wähle ein  $s$  sodass  $w_s$  alle Wörter der Länge  $\leq n$  definiert. Dieses  $w_s$  ist insbesondere  $t_s$ -gültig.

Nun gilt  $t_s(\tau_{a,b}^2) = t_\omega(\tau_{a,b}^2) = m > 0$ , und mit V5 gilt insbesondere  $|w_s \cap \Sigma^n| \leq 1$ . Da nun  $w_s$  und  $E$  auf  $\Sigma^n$  übereinstimmen, haben wir auch  $|E \cap \Sigma^n| \leq 1$ . Das widerspricht der Annahme.

Also gilt  $|E \cap \Sigma^n| \leq 1$  für alle  $n \in H_m$ . Dann folgt aus Beobachtung 5.6(1) auch schon sofort, dass  $(A_m^E, B_m^E) \in \text{DisjUP}$ .

Zu (5): Beweis läuft analog wie bei (4). □

Über die Definition von Task  $\tau_{a,b}^2$  bzw.  $\tau_{a,r}^3$  ist nun in Verbindung mit der vorigen Beobachtung auch ersichtlich, dass für DisjNP bzw. UP keine vollständigen Elemente existieren können.

**Behauptung 5.13.** (1) Kein Paar aus DisjNP<sup>E</sup> ist  $\leq_m^{\text{pp}}$ -hart für DisjUP<sup>E</sup>.

(2) Keine Menge aus UP<sup>E</sup> ist  $\leq_m^{\text{p}}$ -vollständig für UP<sup>E</sup>.

*Beweis.* Wir zeigen hier nur (1), der Beweis für Aussage (2) folgt analog.

Angenommen es existiert ein solches  $\leq_m^{\text{pp}}$ -hartes Paar  $(U_1, U_2) \in \text{DisjNP}^E$ . Dann existieren über die Wahl der Standardenumeration auch zwei NPTM sodass  $L(M_a^E) = U_1$ ,  $L(M_b^E) = U_2$ . Betrachte den Task  $\tau_{a,b}^2$ ; dieser wurde in der Konstruktion von  $E$  in Stufe  $\hat{s}$  bearbeitet. Wir erinnern uns, dass  $w_{\hat{s}} \sqsubset E$  ein  $t_{\hat{s}}$ -gültiges Orakel ist.

Wenn  $t_{\hat{s}}(\tau_{a,b}^2) = 0$  ist, dann besagt V4, dass eine Eingabe  $x \in \Sigma^*$  existiert für die sowohl  $M_a(x)$  als auch  $M_b(x)$  definitiv relativ zu  $w_{\hat{s}}$  akzeptieren. Da  $w_{\hat{s}} \sqsubset E$  ist, akzeptieren  $M_a(x)$  und  $M_b(x)$  relativ zu  $E$ , nach Beobachtung 5.3(1). Das bedeutet aber  $x \in U \cap U'$ ; Widerspruch zur Wahl von  $U, U'$  als disjunkt.

Daher können wir annehmen, dass  $m \stackrel{\text{df}}{=} t_s(\tau_{a,b}^2) > 0$  ist. Insbesondere ist daher  $t_\omega(\tau_{a,b}^2) > 0$  und nach voriger Behauptung 5.12(4) gilt dann auch  $(A_m^E, B_m^E) \in \text{DisjUP}^E$ . Also gilt nach Annahme auch  $(A_m^E, B_m^E) \leq_m^{\text{pp}} (U_1, U_2)$  relativ zu  $E$ .

Sei nun  $r$  so gewählt, dass diese Reduktion von  $F_r^E$  realisiert wird, und betrachte Task  $\tau_{i,j,r}^2$ , welcher in einem bestimmten Schritt  $s$  behandelt wird. Nach Definition dieses Task existiert ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein  $n \in \mathbb{N}$  sodass  $0^n \in A_m^E$ , und  $M_a(F_r(0^n))$  definitiv relativ zu  $w_s$  ablehnt. (Der andere Fall in dem  $M_b$  ablehnt läuft symmetrisch.)

Mit Beobachtung 5.3(1) erhalten wir dann, dass  $M_a(F_r(0^n))$  relativ zu  $E$  ablehnt. Also auch  $F_r^E(0^n) \notin U_1$ . Dies widerspricht der Annahme, dass  $F_r^E$  die Reduktion realisiert, denn wir haben ja  $0^n \in A_m^E$ .  $\square$

Damit erfüllt  $E$  schon die Aussagen (1) und (2) von Satz 5.1. Die letzte Aussage (3) ist aufwändiger zu beweisen. Folgende Behauptung sagt aus, dass totale NPTM  $N_j$  relativ zu  $E$  „besonders total“ sind. Nimmt man (ab hinreichender Länge) Wörter der Länge  $= e(\cdot)$  aus  $E$  weg, und erhält  $T \subseteq E$ , bleibt die NPTM relativ zu  $T$  immer noch total. Das ergibt auch Sinn, denn in der Bearbeitung von Task  $\tau_j^1$  wurden sämtlichen geeigneten Erweiterungen ausprobiert, welche die Totalität von  $N_j$  zerstören würden. Da keine solche Erweiterung existiert, wird auch  $T$  nicht die Totalität von  $N_j$  zerstören können.

**Behauptung 5.14.** *Sei  $N_j$  eine totale NPTM, d.h.  $L(N_j^E) = \Sigma^*$ . Es existiert eine Länge  $n$  mit folgender Eigenschaft: falls  $T \subseteq E$  mit  $E$  auf Wörtern der Länge  $\leq n$  übereinstimmt, dann  $L(N_j^T) = \Sigma^*$ .*

*Beweis.* Sei  $s$  die Stufe bei der  $\tau_j^1$  bearbeitet wurde, und setze  $n = |w_s|$ . Wir zeigen nun, dass dieses  $n$  die behauptete Eigenschaft erfüllt. Angenommen, dies gilt nicht, dann existiert ein  $T \subseteq E$  dass mit  $E$  auf Wörtern der Länge  $\leq n$  übereinstimmt, aber für ein Wort  $z$  lehnt  $N_j^T(z)$  ab.

Sei  $m \in \mathbb{N}$  so gewählt dass  $m > n, p_j(|x|)$ , und definiere das folgende partielle Orakel  $v$ , das genau für alle Wörter der Länge  $\leq m$  definiert ist:

$$v[x] \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} T[x] & \text{falls } |x| \leq m \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass  $N_j^v(z)$  definitiv ablehnt, stimmen  $v$  und  $T$  ja auf allen Wörtern der Länge  $\leq p_j(|x|)$  überein. Außerdem ist klar, dass  $v \sqsupseteq w_s \sqsupseteq w_{s-1}$ .

Sei  $t' = t_{s-1} \cup \{\tau_j^1 \mapsto 0\}$ . Wir zeigen unten, dass  $v$  auch  $t_{s-1}$ -gültig ist. Damit ist dann klar, dass  $v$  auch  $t'$ -gültig ist: es kommt nur V3 bezüglich  $N_j$  hinzu, aber wir haben ja bereits gesehen dass  $N_j^v(z)$  definitiv ablehnt.

Insbesondere ist dann während der Bearbeitung von Task  $\tau_j^1$  in Stufe  $s$  das Orakel  $v$  eine mögliche  $t'$ -gültige Erweiterung von  $w_{s-1}$ , denn es ist  $t'$ -gültig und  $v \sqsupseteq w_{s-1}$ . Also wäre nach Definition des Tasks  $\tau_j^1$  dann  $t_s = t'$  gesetzt worden, und wir hätten  $t_s(\tau_j^1) = 0$ . Dann wäre aber auch  $t_\omega(\tau_j^1) = 0$ , und nach voriger Behauptung 5.12(3) damit  $L(N_j^E) \neq \Sigma^*$ . Widerspruch zur Wahl von  $N_j$ .

Es bleibt zu zeigen dass  $v$  auch  $t_{s-1}$ -gültig ist. Angenommen,  $v$  ist nicht  $t_{s-1}$ -gültig, dann muss eine Bedingung V1–V7 verletzt sein. Zur Erinnerung:  $v \sqsupseteq w_{s-1}$  und  $w_{s-1}$  ist  $t_{s-1}$ -gültig. Wieder klar ist, dass V3, V4, V6 nicht verletzt sein können, denn jede definite Berechnung relativ zu  $w_{s-1}$  ist auch eine definite Berechnung relativ zu  $v$  nach Beobachtung 5.3(1).



Angenommen V1 ist verletzt. Dann existiert ein  $x < |v|$  und  $|x| \neq e(\cdot)$  und  $x \in v$ . Nun stimmt  $v$  und  $T$  aber insbesondere auf  $x$  überein, heißt wir haben

$$x \in v \iff x \in T \implies x \in E,$$

das widerspricht aber der Beobachtung 5.12(1) dass  $x \notin E$ . Widerspruch zur Annahme; V1 kann nicht verletzt sein.

Angenommen, V5 ist verletzt. Dann existiert ein  $\tau'$  mit  $t_{s-1}(\tau') = m' > 0$  und  $n' \in H_{m'}$  und  $|\Sigma^{n'} \cap v| > 1$ . Insbesondere gilt  $t_\omega(\tau') = m' > 0$ . Außerdem muss  $n' \leq m$  sein, da ansonsten  $\Sigma^{n'}$  nicht durch  $v$  definiert ist (und damit  $v \cap \Sigma^{n'} = \emptyset$ ). Insbesondere stimmen damit  $v$  und  $T$  auf  $\Sigma^{n'}$  überein. Damit gilt

$$|\Sigma^{n'} \cap v| = |\Sigma^{n'} \cap T| \leq |\Sigma^{n'} \cap E| \leq 1,$$

wobei die erste Ungleichung aus  $T \subseteq E$  folgt, und die zweite Ungleichung aus voriger Behauptung 5.12(4) bzw. (5) folgt. Das widerspricht der Annahme  $|\Sigma^{n'} \cap v| > 1$ , also kann V5 nicht verletzt sein. Auf analoge Weise lässt sich zeigen, dass V2 und V7 nicht verletzt sein können.

Damit ist keine Bedingung verletzt,  $v$  muss also  $t_{s-1}$ -gültig sein.  $\square$

Nun können wir für die Hypothese Q argumentieren. Hierfür müssen wir, gegeben eine totale NPTM  $N_j$ , effizient einen akzeptierenden Rechenweg von  $N_j^E(x)$  bestimmen. Zur Erinnerung: wir haben in der Konstruktion angenommen, dass  $P = PSPACE$ . Das Ausrechnen eines akzeptierenden Rechenwegs ist daher offensichtlich zumindest relativ zu  $\emptyset$  (anstelle  $E$ ) möglich, da unter unserer Annahme insbesondere  $P = NP$  gilt.

Hätten wir nun die Möglichkeit, effizient  $E$  entscheiden zu können, dann wäre auch  $P^E = NP^E$  und wir könnten einen akzeptierenden Rechenweg von  $N_j^E(x)$  einfach ausrechnen. Nun können wir zwar  $E$  nicht effizient entscheiden, aber wir können mittels  $N_j$  und Behauptung 5.14 zumindest iterativ eine relevante finite Approximation  $E' \subseteq E$  von  $E$  bestimmen. Das soll kurz skizziert werden: Gegeben unsere finite Approximation  $T \subseteq E$ , können wir relativ zu  $T$  einen akzeptierenden Rechenweg  $\alpha$  von  $N_j(x)$  ausrechnen. Dieser existiert insbesondere nach Behauptung 5.14. Nun können wir die Orakelfragen auf  $\alpha$  mit dem „echten“ Orakel  $E$  abgleichen, und so überprüfen wo unsere Approximation fehlerhaft ist, und ggf. unsere Approximation aktualisieren. Nachdem  $E$  dünn ist, enden wir spätestens nach polynomiell vielen Iterationen bei einer Approximation  $T$ , die auf allen relevanten Wörtern mit  $E$  übereinstimmt.

**Behauptung 5.15.** Sei  $N_j$  eine totale NPTM, d.h.  $L(N_j^E) = \Sigma^*$ . Dann existiert eine Funktion  $g \in FP^E$  sodass  $g(x)$  einen akzeptierenden Rechenweg von  $M_j^E(x)$  ausgibt. Damit gilt nach Definition die Hypothese Q relativ zu  $E$ .

*Beweis.* Sei  $n$  hinreichend groß, sodass diese vorige Behauptung 5.14 erfüllt ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} T \subseteq E, T \text{ stimmt mit Wörtern der Länge } \leq n \text{ mit } E \text{ überein} \\ \implies L(N_j^T) = \Sigma^*. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Wir betrachten nun folgenden formalen Algorithmus relativ zu  $E$  auf Eingabe  $x$ :

```

1  $T \leftarrow \{w \mid w \in E, |w| \leq n, \exists i. |w| = e(i)\}$  (Konstante, muss nicht berechnet werden)
2 wiederhole (Invariante:  $T \subseteq E$ )
3   Sei  $\alpha$  ein akzeptierender Rechenweg auf  $N_j^T(x)$  und  $Q$  die Menge an
   Orakelfragen
4   wenn existiert eine Frage  $q \in Q$  für die  $q \in E$  aber  $q \notin T$  dann
5      $T \leftarrow E \cup \{q\}$ 
6   sonst (für alle  $q \in Q$  gilt:  $q \notin E \vee q \in T$ )
7     Gebe  $\alpha$  aus

```

Korrektheit: Beobachte zunächst die Invariante dass  $T \subseteq E$ . Damit gilt nach (5.2) auch  $L(N_j^T) = \Sigma^*$  und insbesondere existiert dann auch ein akzeptierender Rechenweg auf  $N_j^T(x)$ . Damit ist Z. 3 wohldefiniert. Terminiert nun der Algorithmus mit einem Rechenweg  $\alpha$  in Z. 7, dann stimmt aber  $T$  mit  $E$  auf  $Q$  überein: Falls  $q \in T$ , dann auch  $q \in E$  (nach Invariante). Falls  $q \notin T$ , dann  $q \in E$  (nach Negation der If-Bedingung). Also wird auch  $N_j^E(x)$  mit Rechenweg  $\alpha$  akzeptieren, nach Beobachtung 5.3(3).

Laufzeit: Wir zeigen dass der Algorithmus in polynomiell beschränkter deterministischer Zeit (abhängig von  $|x|$ ) relativ zu  $E$  arbeitet. Wir wissen, dass für jede Orakelfrage  $q \in Q$  gilt, dass  $|q| \leq p_j(|x|)$ . Zusammen mit oben genannten Invariante gilt  $T \subseteq E \cap \{w \mid \exists i. |w| = e(i) \leq p_j(|x|)\}$ . Nun ist aber  $E$  dünn. Im Speziellen gilt mit Behauptung 5.12(2) dass

$$\ell(T) \leq \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ e(i) \leq p_j(|x|)}} \ell(E \cap \Sigma^{e(i)}) = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ e(i) \leq p_j(|x|)}} e(i) \cdot |E \cap \Sigma^{e(i)}| \leq \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ e(i) \leq p_j(|x|)}} 2e(i) \leq 2p_j(|x|)^2.$$

Das heißt, dass nach polynomiell vielen Iterationen wird kein weiteres Wort zu  $T$  hinzugefügt und der Algorithmus terminiert.

Wir zeigen nun abschließend, dass Zeile 3 in polynomiell beschränkter deterministischer Zeit berechnet werden kann. Hierfür werden wir das finite  $T$  in  $N_j$  „hineincodieren“. Gemeint ist,  $T$  in das „Programm“  $N_j$  hineincodieren, sodass für Queries  $q, |q| = e(\cdot)$  nur getestet wird ob  $q \in T$  anstelle einer echten Orakelfrage. Es existiert also eine Orakel-NPTM  $N'_j$ , sodass  $N'_j(x)$  (ohne Orakel) äquivalent zu  $N_j^T(x)$  arbeitet. Und da  $P = PSPACE$ , können wir in  $FP$  auch einen akzeptierenden Rechenweg  $\beta'$  von  $N'_j(x)$  effizient bestimmen. Das geht dann auch in  $FP^E \supseteq FP$ . Also können wir auch einen akzeptierenden Rechenweg von  $N_j^E(x)$  in  $FP^E$  berechnen. Beachte insbesondere, dass das Hineincodieren in Polynomialzeit möglich ist, ist ja  $\ell(E)$  polynomiell in Abhängigkeit von  $|x|$  beschränkt.  $\square$

Damit ist der Beweis von Satz 5.2 abgeschlossen: unter Annahme von  $P = PSPACE$  erfüllt das Orakel  $E$  alle Eigenschaften. Relativ zu  $E$  existiert nach Behauptung 5.13 (1) kein  $\leq_m^{PP}$ -hartes Paar in DisjNP für DisjUP, und (2) kein  $\leq_m^P$ -vollständige Menge für UP. Nach Behauptung 5.15 kann für jede totale NPTM  $N_j$  eine Funktion  $g \in FP$  angegeben werden, für die  $g(x)$  ein akzeptierender Rechenweg für  $N_j(x)$  ist. Mit den Eigenschaften der Standardenumeration ist klar, dass auch für *alle* totalen NPTM  $N$  gilt. (Übersetze  $N$  in äquivalente Standard-NPTM  $N_j$ , übersetze dann den akzeptierenden Rechenweg  $g(x) = \alpha$  von  $N_j(x)$  in einen akzeptierenden Rechenweg  $\alpha'$  von  $N(x)$  zurück.) Damit gilt relativ zu  $E$  also auch die Hypothese Q (3).

Es lässt sich einfach überprüfen, dass die vorhergegangene Konstruktion relativiert.

Sei nun  $D$  ein PSPACE-vollständiges Orakel. Wie anfangs dieses Kapitels argumentiert, gilt nun mit  $O \stackrel{\text{df}}{=} E \oplus D$  auch Satz 5.1 ohne die Annahme  $P = \text{PSPACE}$ .

Wir schließen dieses Kapitel mit einer Zusammenfassung weiterer Eigenschaften von  $O$ , die sich unmittelbar aus relativierenden Implikationen ergeben. Sei hierfür  $\text{NPbV}$  diejenige Teilmenge der Multifunktionen  $f \in \text{NPMV}$  für die  $\text{set-}f(x) \subseteq \{0, 1\}$  für alle  $x$  gilt, und sei  $\text{NPkV}$  diejenige Teilmenge der Multifunktionen  $f \in \text{NPMV}$  für die  $|\text{set-}f(x)| \leq k$  für alle  $x$  gilt.

**Korollar 5.16.** *Folgende Aussagen gelten relativ zum Orakel  $O$ :*

- (1)  $P = \text{UP} \cap \text{coUP} = \text{NP} \cap \text{coNP} \subsetneq \text{UP} \subsetneq \text{NP}$ .
- (2)  $\text{NP}$ ,  $\text{UP}$ ,  $\text{NE}$ ,  $\text{NEE}$  sind nicht abgeschlossen unter Komplement.
- (3)  $P$ ,  $E$ ,  $EE$  sind nicht abgeschlossen unter Nichtdeterminismus.
- (4)  $\text{UP} \not\subseteq \text{coNP}$ .
- (5)  $\text{NPSV}_t \subseteq \text{FP}$ .
- (6)  $\text{NPbV}_t \subseteq_c \text{FP}$ .
- (7)  $\text{NPkV}_t \subseteq_c \text{FP}$  für alle  $k \geq 1$ .
- (8)  $\text{NPMV}_t \subseteq_c \text{FP}$ .
- (9)  $\text{NPMV}_t \subseteq_c \text{NPSV}_t$ .
- (10)  $\text{NPMV}_t \subseteq_c \text{TFNP}$ .
- (11)  $\text{NPMV} \not\subseteq_c \text{NPSV}$ .
- (12)  $\text{NPMV}_t \not\subseteq_c \text{TFNP}$ .
- (13)  $\text{TFNP} \subseteq_c \text{FP}$ .
- (14) Hypothese  $\neg Q$ .
- (15) Hypothese  $\neg Q'$ .
- (16) Es existiert eine NP-Relation  $R$  mit  $\leq_m^P$ -vollständigem  $\text{Proj}(R) \in \text{NP}$  und  $R$  ist nicht  $\leq_L^P$ -vollständig für FNP.
- (17)  $\text{NP} \cap \text{coNP}$  hat keine  $\leq_m^P$ -vollständige Menge.
- (18)  $\text{UP}$  hat keine  $\leq_m^P$ -vollständige Menge.
- (19)  $\text{DisjNP}$  hat kein  $\leq_m^{\text{PP}}$ -vollständiges Paar.
- (20)  $\text{NPSV}$  hat keine  $\leq_m^P$ -vollständige Multifunktion.
- (21)  $\text{NPMV}_t$  hat eine  $\leq_m^P$ -vollständige Multifunktion.
- (22)  $\text{TFNP}$  hat eine  $\leq_m^P$ -vollständige Multifunktion.
- (23)  $\text{DisjCoNP}$  hat ein  $\leq_m^{\text{PP}}$ -vollständiges Paar.
- (24) Für keine  $\leq_m^P$ -vollständige Menge  $A \in \text{NP}$  existiert ein P-optimales Beweissystem.
- (25) Für alle Mengen  $A \in \text{coNP}$  existiert ein P-optimales Beweissystem.
- (26) Es existiert ein P-inseparables  $\text{DisjNP}$ -Paar.
- (27) Jedes  $\text{DisjCoNP}$ -Paar ist P-separierbar.
- (28) Weder  $\text{NP}$  noch  $\text{coNP}$  haben die shrinking property (Glaßer, Reitwießner und Selivanov, 2011).
- (29)  $\text{NP}$  hat die separation property (Glaßer, Reitwießner und Selivanov, 2011).
- (30)  $\text{coNP}$  hat nicht die separation property.

**Beweis.** Es ist klar, dass sich aus Satz 5.1 unmittelbar (13), (16) und (17) ergeben. Die meisten der anderen Aussagen erschließen sich sofort mit Zuhilfenahme der in Abbildung 6 eingezeichneten Äquivalenzen und Implikationen, zusammen mit Satz 4.25.

Folgende Aussagen bleiben noch offen:

Zu (1):  $P = \text{UP} \cap \text{coUP} = \text{NP} \cap \text{coNP} \subsetneq \text{UP}$  klar aus der Abbildung, die Echtheit der

Inklusion  $UP \subsetneq NP$  folgt daraus, dass NP eine vollständige Menge hat, UP aber nicht, nach (16).

Zu (2): Angenommen  $UP = coUP$  dann auch  $UP = UP \cap coUP = P$ , was ein Widerspruch zu (1) ist. Restliche Klassen sind ersichtlich über die Abbildung.

Zu (4): Angenommen  $UP \subseteq coNP$ , dann wäre  $UP \subseteq UP \cap coNP = P$ , was ein Widerspruch zu (1) ist.

Zu (6): Ist nach Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003, Thm. 4) äquivalent zu (15).

Zu (7): Ist nach Fenner, Fortnow, Naik und Rogers (2003, Thm. 14) äquivalent zu (6).

Zu (9)–(10): Aus (8) folgt insbesondere  $NPMV_t \subseteq_c FP_t$  und  $FP_t \subseteq NPSV_t, TFNP$ .

Zu (11): Es ist leicht zu sehen, dass (relativ zu jedem Orakel) eine kanonische  $\leq_m^p$ -vollständige Multifunktion  $f$  für NPMV existiert. Angenommen  $NPMV \subseteq_c NPSV$ , dann wäre auch  $f \in_c NPSV$  und die Verfeinerung insbesondere auch  $\leq_m^p$ -vollständig für NPSV. Das widerspricht (20).

Zu (12): Angenommen  $NPMV_t \subseteq TFNP$ , dann gilt mit Beobachtung 3.4 auch  $P = NP$ ; das widerspricht (1).

Zu (28): Folgt aus (2) und (19) durch Ergebnisse von Glaßer, Reitwießner und Selivanov (2011). Wenn es kein  $\leq_m^{pp}$ -vollständiges Paar für DisjNP gibt, dann hat NP nicht die *shrinking property*. Außerdem hat coNP die *shrinking property* genau dann wenn  $NP = coNP$ .

Zu (29): Ist nach Glaßer, Reitwießner und Selivanov (2011) äquivalent zu (6).

Zu (30): Folgt nach Glaßer, Reitwießner und Selivanov (2011) aus (4).  $\square$

## 6 Fazit

Zum Abschluss werden hier noch einmal die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst, sowie noch einmal offene Fragen gesammelt, welche sich im Verlauf der Arbeit ergeben haben. Bezüglich der Ergebnisse können wir uns an den vier Forschungsdesiderata orientieren, die in der Einleitung genannt wurden.

### Suchprobleme vs. Entscheidungsprobleme

Erstens, wurde in Kapitel 3 die Beziehung zwischen NP-Suchproblemen und den entsprechenden NP-Entscheidungsproblemen erarbeitet. Hierfür orientierte sich die Arbeit an vorhandenen Definitionen von Suchproblemen, die intuitiv neben dem Berechnungsproblem „Gilt  $x \in L$ ?“ auch nach einem „Beweis“ oder „Zertifikat“ für  $x \in L$  fragen. Auf dieser Basis wurde gezeigt, dass die übliche Argumentation, das Suchproblem auf das Entscheidungsproblem reduzieren zu können (*search reduces to decision*) im Allgemeinen nicht immer zutrifft. Ergebnisse aus der Literatur zeigen, dass dies unter geeigneten Bedingungen nicht für die NP-Intermediates (also jene Probleme, die nicht NP-vollständig sind, aber auch nicht in P liegen) zutrifft. Im Kontext der *Selbstreduzierbarkeit*, also der Lösung des Suchproblems gegeben einem Orakel für „kleinere“ Instanzen, liegen dagegen nur wenige Ergebnisse vor. In der Arbeit wurde insbesondere auf Ergebnisse von Harsha, Mitropolsky und Rosen (2023) hingewiesen, welche Anzeichen geben, dass das Suchproblem der Faktorisierung nicht selbstreduzierbar ist.

Wie die Suchprobleme lassen sich auch die Entscheidungsprobleme mittels Reduktionen untereinander nach ihrer Schwierigkeit vergleichen. In dieser Arbeit wurde insbesondere die Levin-Reduktion als Reduktion auf den NP-Suchproblemen produktiv gemacht. Dieser Reduktionsbegriff kann als natürliche Generalisierung der Many-one- bzw. Karp-Reduktion auf den Entscheidungsproblemen verstanden werden. Hieran anschließend wurde auf die Beziehung zwischen Levin-Vollständigkeit der Suchprobleme und der Karp-Vollständigkeit der entsprechenden Entscheidungsprobleme hingewiesen. Erstens verstärkt die Levin-Vollständigkeit die Karp-Vollständigkeit. Zweitens sehen wir, empirisch gesprochen, dass für alle *natürlichen* Probleme diese beiden Vollständigkeitsbegriffe zusammenfallen. Dennoch bleibt Folgendes unklar: *Gegeben ein beliebiges NP-Suchproblem  $R$ , für welches das entsprechende Entscheidungsproblem  $\text{Proj}(R)$  Karp-vollständig ist, ist dann auch  $R$  Levin-vollständig?*

Die Formulierung dieser Frage ist der zentrale Beitrag dieser Arbeit. Sie stellt zwei umfassende „Aufgabentypen“ (Suchen vs. Entscheiden) und Reduktionsbegriffe der Komplexitätstheorie gegenüber, und trotz der einfachen Formulierung beschäftigt sich nur wenig Forschung mit dieser Frage. Es gibt keine Hinweise, welche auf eine positive oder negative Beantwortung dieser Frage hinweisen; im Kontext dieser Arbeit wurde die negative Beantwortung als Hypothese KvL formuliert.

### NP-Suchprobleme im Pudlák'schen Programm

Zweitens, wurde die Hypothese  $Q$  (erstmal formuliert von Fenner, Fortnow, Naik und Rogers, 1996) in den Blick genommen, welche als Aussage „alle totalen NP-Suchprobleme sind effizient lösbar“ unmittelbar in direkter Beziehung zu den NP-Suchproblemen steht. Die vorliegende Arbeit zeigt nun insbesondere auch folgende Charakterisierungen von  $Q$ :

- Es gilt  $Q$  genau dann wenn jede Karp-Reduktion zwischen Entscheidungsvarianten von zwei NP-Suchproblemen zu einer Levin-Reduktion zwischen eben jenen Suchproblemen verstärkt werden kann. Damit ist  $\neg Q$  auch eine notwendige Bedingung für  $KvL$ .
- Es gilt  $Q$  genau dann wenn das Standardbeweissystem eines beliebigen Levin-vollständigen NP-Suchproblems  $P$ -optimal ist. Das generalisiert damit ein Argument von Messner (2000), welcher so die Äquivalenz zwischen  $Q$  und der  $P$ -Optimalität des Standardbeweissystems  $sat$  gezeigt hat. Über diese Charakterisierung wird auch deutlich, dass  $\neg Q$  auch eine notwendige Bedingung für die Pudlák'sche Hypothese  $SAT$  ist.

Im Kontext des dritten Forschungsdesiderat wurde das Pudlák'sche Programm um weitere Hypothesen verfeinert. Insbesondere über die zweite Charakterisierung von  $Q$  lässt sich die Hypothese  $\neg Q$  in das Pudlák'sche Programm einordnen. Für die Hypothese  $KvL$  war dagegen eine Einordnung schwieriger, und es konnte nur gezeigt werden, dass  $SAT^{eff}$ , eine Verstärkung von  $SAT$ , hinreichend für  $KvL$  ist.

Viertens, wurde abschließend ein Orakel konstruiert, relativ zu diesem die relativierten Hypothesen  $DisjNP$ ,  $UP$  und  $Q$  gelten. Damit wurde insbesondere  $Q$  und  $KvL$  von einigen der Pudlák'schen Hypothesen getrennt. Insbesondere erhalten wir damit das Resultat, dass selbst unter Annahme von  $DisjNP \wedge UP$  es nicht mit relativierenden Beweisen möglich ist, auf  $Q$  (und auch nicht auf  $KvL$ ) zu schließen. Für die Hypothese  $Q$  ergibt sich ferner unter relativierbaren Beweisen eine paarweise Unabhängigkeit zu den originalen Pudlák'schen Hypothesen, außer für jene Fälle, bei der eine relativierende Implikation bekannt ist:

**Korollar 6.1.** *Sei  $A \in \{DisjNP, UP, CON^N, TAUT, DisjCoNP, TFNP, SAT\}$ . Für jede Wahl von  $A$  existiert je ein Orakel, relativ zu diesem  $A \wedge Q$ ,  $A \wedge \neg Q$ ,  $\neg A \wedge Q$ , bzw.  $\neg A \wedge \neg Q$  gilt, außer für die Fälle  $DisjCoNP \wedge Q$ ,  $TFNP \wedge Q$ ,  $SAT \wedge Q$ .*

### Offene Fragen

Zum Schluss sind hier noch die offenen Fragen aufgelistet, welche sich im Verlauf dieser Arbeit ergeben haben, und welche den Startpunkt für zukünftige Forschung bilden könnten:

1. Die zentrale offene Frage dieser Arbeit ist jene zwischen Karp- und Levin-Vollständigkeit, bzw. der Hypothese  $KvL$  (vgl. Frage 3.21). Um mehr Evidenz für die Gültigkeit von  $KvL$  zu sammeln, wären weitere hinreichende natürliche Annahmen, z.B. kryptographischer Art, wünschenswert. Das betrifft u.a. auch die Hypothese  $Q$ . Lässt sich die Äquivalenz  $KvL \Leftrightarrow \neg Q$  zeigen, wie in Abschnitt 4.1 vermutet? Allgemein gesprochen wäre hierzu auch ein besseres Verständnis der Zusammenhänge und Beziehungen zwischen den Hypothesen  $KvL$ ,  $Q$ ,  $SAT$  und  $SAT^{eff}$  erstrebenswert,

sowie angrenzend nähere Untersuchungen zum Begriff der effektiven P-Simulation; die vorliegende Arbeit hat hierzu nur den ersten Anfang gemacht.

2. Konkret auch auf das Pudlák'sche Programm bezogen, wären weitere Orakelkonstruktionen dienlich, die KVL von den anderen Hypothesen trennen, um so KVL besser situieren zu können. Folgende Trennungen wurden in Abschnitt 4.3 als besonders interessant erachtet: konstruiere je ein Orakel, sodass relativ zu diesem  $KVL \wedge \neg SAT^{eff}$ ,  $KVL \wedge \neg SAT$  bzw.  $\neg Q \wedge \neg KVL$  gilt.
3. Konkret in Bezug auf die Hypothese Q könnte der Begriff der Levin-Paddability intensiver betrachtet werden, wie er z.B. in der Charakterisierung der Hypothese Q eingesetzt wird (Definition 4.16). Besonders interessant wäre, ob sich diese zusätzliche Bedingung in der Charakterisierung durch Satz 4.22(9) streichen lässt. In anderen Worten: gilt Q genau dann wenn für eine  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relation R das Standardbeweissystem  $std_R$  für jede N mit  $L(N) = Proj(R)$  das Beweissystem  $std_N$  P-simulieren kann? Zeige hierfür beispielsweise, dass (nicht) jede  $\leq_L^P$ -vollständige NP-Relation auch Levin-paddable ist (vgl. Frage 4.21).
4. Angrenzend an die Karp-vs-Levin-Frage bzw. Suche-vs-Entscheiden-Frage wäre ein besseres Verständnis zur Selbstreduzierbarkeit unter den Suchproblemen erstrebenswert. Wie schon in Abschnitt 3.2 beschrieben, ist die Forschungslage hierzu noch sehr dünn, insbesondere auf den nicht-totalen NP-Suchproblemen. Lassen sich die Erkenntnisse der Selbstreduzierbarkeit von *Entscheidungsproblemen* hierzu produktiv machen? Hierzu auch angrenzend wäre die Betrachtung schwächerer Reduzierbarkeitsbegriffe auf NP-Relationen (z.B. ähnlich zu Turing- oder Truth-Table-Reduktionen), und damit verbunden eine Abschwächung der Hypothese KVL, vielversprechend.





## Literatur

- Adleman, Leonard und Kenneth Manders (1977). „Reducibility, Randomness, and Intrac-  
tibility (Abstract)“. In: *Proceedings of the Ninth Annual ACM Symposium on Theory of Com-  
puting* (Boulder, Colorado, USA, 4. Mai 1977). New York, USA: Association for Compu-  
ting Machinery, S. 151–163. DOI: 10.1145/800105.803405.
- Agrawal, Manindra und Somenath Biswas (1992a). *Universal relations*. Techn. Ber. Kanpur,  
Indien: Department of Computer Science und Engineering, Indian Institute of Tech-  
nology Kanpur, 1992. URL: <http://repository.ias.ac.in/92033/>. Eine überarbeitete  
Fassung der Proceedings-Version (1992b).
- Agrawal, Manindra und Somenath Biswas (1992b). „Universal relations“. In: *Proceedings  
of the Seventh Annual Structure in Complexity Theory Conference* (Boston, Massachusetts,  
USA, 22. Juni 1992). Juni 1992, S. 207–220. DOI: 10.1109/SCT.1992.215395.
- Agrawal, Manindra, Neeraj Kayal und Nitin Saxena (2004). „PRIMES Is in P“. In: *Annals of  
Mathematics* 160.2, S. 781–793. DOI: 10.4007/annals.2004.160.781.
- Arora, Sanjeev und Boaz Barak (2009). *Computational Complexity: a modern approach*. Cam-  
bridge, Massachusetts, USA: Cambridge University Press. ISBN: 978-0-521-42426-4.
- Baker, Theodore, John Gill und Robert Solovay (1975). „Relativizations of the  $P=?NP$  Ques-  
tion“. In: *SIAM Journal on Computing* 4.4 (Dez. 1975), S. 431–442. DOI: 10.1137/0204037.
- Balcázar, José L. (1989). „Self-reducibility structures and solutions of NP problems.“ In:  
*Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid* 2.2-3, S. 175–184. URL: <http://www.mat.ucm.es/serv/revista/vol2-23/vol2-23b.pdf>.
- Bellare, Mihir und Shafi Goldwasser (1994). „The Complexity of Decision Versus Search“. In:  
*SIAM Journal on Computing* 23.1 (Feb. 1994), S. 97–119. DOI: 10.1137/S009753979222  
8289.
- Berman, Leonard und Juris Hartmanis (1977). „On Isomorphisms and Density of NP and  
Other Complete Sets“. In: *SIAM Journal on Computing* 6.2 (Juni 1977), S. 305–322. DOI:  
10.1137/0206023.
- Beyersdorff, Olaf, Johannes Köbler und Jochen Messner (2009). „Nondeterministic func-  
tions and the existence of optimal proof systems“. In: *Theoretical Computer Science*  
410.38 (6. Sep. 2009), S. 3839–3855. DOI: 10.1016/j.tcs.2009.05.021.
- Beyersdorff, Olaf und Zenon Sadowski (2011). „Do there exist complete sets for promi-  
se classes?: Do there exist complete sets for promise classes?“ In: *Mathematical Logic  
Quarterly* 57.6 (Dez. 2011), S. 535–550. DOI: 10.1002/malq.201010021.
- Blum, Manuel und Russell Impagliazzo (1987). „Generic oracles and oracle classes“. In:  
*28th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (Los Angeles, California, USA,  
12. Okt. 1987). Washington, District of Columbia, USA: IEEE Computer Society Press,  
Okt. 1987, S. 118–126. DOI: 10.1109/SFCS.1987.30.

- Borodin, Allan B. und Alan J. Demers (1976). *Some Comments on Functional Self-Reducibility and the NP Hierarchy*. Techn. Ber. 76-284. Ithaca, New York, USA: Department of Computer Science, Cornell University. URL: <https://hdl.handle.net/1813/6540>.
- Buhrman, Harry, James Kadin und Thomas Thierauf (1998). „Functions Computable with Nonadaptive Queries to NP“. In: *Theory of Computing Systems* 31.1 (1. Feb. 1998), S. 77–92. DOI: 10.1007/s002240000079.
- Buss, Samuel R. (1996). *Lectures on Proof Theory*. Techn. Ber. Montreal, Kanada: School of Computer Science, McGill University. URL: <https://mathweb.ucsd.edu/~sbuss/ResearchWeb/Barbados95Notes/reporte.pdf>. Protokoll einer Reihe von Vorlesungen gehalten am Bellairs Research Institute, Holetown, Barbados im März 1995.
- Cai, Jin-Yi und Artem Govorov (2021). „The Complexity of Counting Edge Colorings for Simple Graphs“. In: *Theoretical Computer Science* 889 (8. Okt. 2021), S. 24–24.
- Cai, Jin-Yi, Thomas Gundermann, Juris Hartmanis, Lane A. Hemachandra, Vivian Sewelson, Klaus Wagner und Gerd Wechsung (1988). „The Boolean Hierarchy I: Structural Properties“. In: *SIAM Journal on Computing* 17.6 (Dez. 1988), S. 1232–1252. DOI: 10.1137/0217078.
- Cai, Jin-Yi, Thomas Gundermann, Juris Hartmanis, Lane A. Hemachandra, Vivian Sewelson, Klaus Wagner und Gerd Wechsung (1989). „The Boolean Hierarchy II: Applications“. In: *SIAM Journal on Computing* 18.1 (Feb. 1989), S. 95–111. DOI: 10.1137/0218007.
- Cai, Jin-Yi und Lane Hemachandra (1986). „The boolean hierarchy: Hardware over NP“. In: *Structure in Complexity Theory* (Berkeley, California, USA, 2. Juni 1986). Hrsg. von Alan L. Selman. Bd. 223. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 105–124. DOI: 10.1007/3-540-16486-3\_93.
- Cook, Stephen A. (1971). „The Complexity of Theorem-Proving Procedures“. In: *Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (Shaker Heights, Ohio, USA, 3. Mai 1971). New York, USA: Association for Computing Machinery, S. 151–158. DOI: 10.1145/800157.805047.
- Cook, Stephen A. und Robert A. Reckhow (1979). „The relative efficiency of propositional proof systems“. In: *The Journal of Symbolic Logic* 44.1 (März 1979), S. 36–50. DOI: 10.2307/2273702.
- Dingel, David (2022). „Separation der relativierten Vermutungen SAT und TFNP“. Bachelorarbeit. Universität Würzburg, 22. Okt. 2022.
- Dose, Titus (2020a). „An oracle separating conjectures about incompleteness in the finite domain“. In: *Theoretical Computer Science* 809 (24. Feb. 2020), S. 466–481. DOI: 10.1016/j.tcs.2020.01.003.
- Dose, Titus (2020b). „Balance Problems for Integer Circuits and Separations of Relativized Conjectures on Incompleteness in Promise Classes“. Diss. 23. Juli 2020.
- Dose, Titus (2020c). „Further oracles separating conjectures about incompleteness in the finite domain“. In: *Theoretical Computer Science* 847 (22. Dez. 2020), S. 76–94. DOI: 10.1016/j.tcs.2020.09.040.
- Dose, Titus und Christian Glaßer (2019). *NP-Completeness, Proof Systems, and Disjoint NP-Pairs*. Techn. Ber. TR19-050. Electronic Colloquium on Computational Complexity. URL: <https://eccc.weizmann.ac.il/report/2019/050/>.

- Egidy, Fabian, Christian Glaßer und Martin Herold (2023). „Upward Translation of Optimal and P-Optimal Proof Systems in the Boolean Hierarchy over NP“. In: *48th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science* (Bordeaux, Frankreich, 28. Aug. 2023). Hrsg. von Jérôme Leroux, Sylvain Lombardy und David Peleg. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl: Leibniz-Zentrum für Informatik, Aug. 2023, 44:1–44:15. DOI: 10.4230/LIPIcs.MFCS.2023.44.
- Ehrmanntraut, Anton, Fabian Egidy und Christian Glaßer (2022). „Oracle with  $P = NP \cap \text{coNP}$ , but No Many-One Completeness in UP, DisjNP, and DisjCoNP“. In: *47th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science* (Wien, 22. Aug. 2022). Hrsg. von Stefan Szeider, Robert Ganian und Alexandra Silva. Bd. 241. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl: Leibniz-Zentrum für Informatik, Aug. 2022, 45:1–45:15. DOI: 10.4230/LIPIcs.MFCS.2022.45.
- Fenner, Stephen A., Lance Fortnow, Stuart A. Kurtz und Lide Li (2003). „An oracle builder’s toolkit“. In: *Information and Computation* 182.2 (1. Mai 2003), S. 95–136. DOI: 10.1016/S0890-5401(03)00018-X.
- Fenner, Stephen A., Lance Fortnow, Ashish V. Naik und John D. Rogers (1996). „Inverting onto functions“. In: *Proceedings of the Eleventh Annual IEEE Conference on Computational Complexity* (Philadelphia, Pennsylvania, 24. Mai 1996). Washington, District of Columbia, USA: IEEE Computer Society Press, Mai 1996, S. 213–222. DOI: 10.1109/CCC.1996.507683.
- Fenner, Stephen A., Lance Fortnow, Ashish V. Naik und John D. Rogers (2003). „Inverting onto functions“. In: *Information and Computation* 186.1 (Okt. 2003), S. 90–103. DOI: 10.1016/S0890-5401(03)00119-6.
- Fischer, Sophie, Lane A. Hemaspaandra und Leen Torenvliet (1995). „Witness-isomorphic reductions and the local search problem“. In: *Mathematical Foundations of Computer Science 1995* (Prag, Tschechische Republik, Aug. 1995). Hrsg. von Jiří Wiedermann und Petr Hájek. Bd. 969. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 277–287. DOI: 10.1007/3-540-60246-1\_134.
- Fortnow, Lance und John D. Rogers (1993). *Separability and one-way functions*. Techn. Ber. 93-14. Chicago, Illinois, USA: Department of Computer Science, University of Chicago, 30. Aug. 1993. URL: <https://newtraell.cs.uchicago.edu/research/publications/techreports/TR-93-14>.
- Fortnow, Lance und John D. Rogers (2002). „Separability and one-way functions“. In: *Computational Complexity* 11.3 (1. Juni 2002), S. 137–157. DOI: 10.1007/s00037-002-0173-4.
- Glaßer, Christian, Christian Reitwießner und Victor Selivanov (2011). „The shrinking property for NP and coNP“. In: *Theoretical Computer Science* 412.8 (4. März 2011), S. 853–864. DOI: 10.1016/j.tcs.2010.11.035.
- Glaßer, Christian, Alan L. Selman und Samik Sengupta (2005). „Reductions between disjoint NP-Pairs“. In: *Information and Computation* 200.2 (1. Aug. 2005), S. 247–267. DOI: 10.1016/j.ic.2005.03.003.
- Glaßer, Christian, Alan L. Selman, Samik Sengupta und Liyu Zhang (2004). „Disjoint NP-Pairs“. In: *SIAM Journal on Computing* 33.6 (Jan. 2004), S. 1369–1416. DOI: 10.1137/S0097539703425848.

- Goldberg, Paul W. und Christos H. Papadimitriou (2018). „Towards a unified complexity theory of total functions“. In: *Journal of Computer and System Sciences* 94 (1. Juni 2018), S. 167–192. DOI: 10.1016/j.jcss.2017.12.003.
- Goldreich, Oded (2008). *Computational Complexity: a Conceptual Perspective*. Cambridge, Massachusetts, USA: Cambridge University Press. ISBN: 978-0-521-88473-0.
- Grollmann, Joachim und Alan L. Selman (1988). „Complexity Measures for Public-Key Cryptosystems“. In: *SIAM Journal on Computing* 17.2 (Apr. 1988), S. 309–335. DOI: 10.1137/0217018.
- Harsha, Prahladh, Daniel Mitropolsky und Alon Rosen (2023). „Downward Self-Reducibility in TFNP“. In: *14th Innovations in Theoretical Computer Science Conference* (Cambridge, Massachusetts, USA, 10. Jan. 2023). Hrsg. von Yael Tauman Kalai. Bd. 251. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl: Leibniz-Zentrum für Informatik, 67:1–67:17. DOI: 10.4230/LIPIcs.ITCS.2023.67.
- Hemaspaandra, Lane A. (1998). „Complexity Theory Column 20: Take-home complexity“. In: *ACM SIGACT News* 29.2 (Juni 1998), S. 9–13. DOI: 10.1145/288079.288080.
- Homan, Christopher M. und Mayur Thakur (2003). „One-way permutations and self-witnessing languages“. In: *Journal of Computer and System Sciences* 67.3 (1. Nov. 2003), S. 608–622. DOI: 10.1016/S0022-0000(03)00068-0.
- Impagliazzo, Russell und Mahdu Sudan (1991). Private Kommunikation. Nicht Publiziert. Berichtet von Bellare und Goldwasser, 1994, S. 102. Mai 1991.
- Johnson, David S., Christos H. Papadimitriou und Mihalis Yannakakis (1988). „How easy is local search?“ In: *Journal of Computer and System Sciences* 37.1 (1. Aug. 1988), S. 79–100. DOI: 10.1016/0022-0000(88)90046-3.
- Karp, Richard M. (1972). „Reducibility among Combinatorial Problems“. In: *Complexity of Computer Computations* (Yorktown Heights, New York, USA, 20. März 1972). Hrsg. von Raymond E. Miller, James W. Thatcher und Jean D. Bohlinger. Boston, MA: Springer, S. 85–103. DOI: 10.1007/978-1-4684-2001-2\_9.
- Khaniki, Erfan (2022). „New Relations and Separations of Conjectures about Incompleteness in the Finite Domain“. In: *The Journal of Symbolic Logic* 87.3 (Sep. 2022), S. 912–937. DOI: 10.1017/jsl.2021.99.
- Köbler, Johannes und Jochen Messner (2000). „Is the Standard Proof System for SAT P-Optimal?“ In: *FST TCS 2000: Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science* (New Delhi, Indien, 13. Dez. 2000). Hrsg. von Sanjiv Kapoor und Sanjiva Prasad. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 361–372. DOI: 10.1007/3-540-44450-5\_29.
- Köbler, Johannes, Jochen Messner und Jacobo Torán (2003). „Optimal proof systems imply complete sets for promise classes“. In: *Information and Computation* 184.1 (10. Juli 2003), S. 71–92. DOI: 10.1016/S0890-5401(03)00058-0.
- Koucký, Michal (2023). „Automata and Formal Languages: Shall we let them go?“ In: *Bulletin of EATCS* 140.2 (25. Mai 2023). URL: <http://bulletin.eatcs.org/index.php/beatcs/article/view/759>.
- Kozen, Dexter (1997). *Automata and Computability*. New York, USA: Springer. ISBN: 978-0-387-94907-9.

- Krajíček, Jan und Pavel Pudlák (1989). „Propositional proof systems, the consistency of first order theories and the complexity of computations“. In: *Journal of Symbolic Logic* 54.3 (Sep. 1989), S. 1063–1079. DOI: 10.2307/2274765.
- Leven, Daniel und Zvi Galil (1983). „NP completeness of finding the chromatic index of regular graphs“. In: *Journal of Algorithms* 4.1 (1. März 1983), S. 35–44. DOI: 10.1016/0196-6774(83)90032-9.
- Levin, Leonid A. (1973). „Универсальные задачи перебора [Universelle Suchprobleme]“. In: *Проблемы Передачи Информации [„Problemy Peredachi Informatsii“]* 9.3, S. 115–116. URL: <https://www.mathnet.ru/ppi914>. Eine Übersetzung erscheint bei Trakhtenbrot (1984, S. 399–400).
- Mahaney, Stephen R. (1982). „Sparse complete sets for NP: Solution of a conjecture of Berman and Hartmanis“. In: *Journal of Computer and System Sciences* 25.2 (1. Okt. 1982), S. 130–143. DOI: 10.1016/0022-0000(82)90002-2.
- Megiddo, Nimrod und Christos H. Papadimitriou (1991). „On total functions, existence theorems and computational complexity“. In: *Theoretical Computer Science* 81.2 (30. Apr. 1991), S. 317–324. DOI: 10.1016/0304-3975(91)90200-L.
- Messner, Jochen (2000). „On the simulation order of proof systems“. Diss. Universität Ulm. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/pdf/bec3958d845653cfa73493258d3b550a17e8defd>. Archivierte Fassung des Originals.
- Meyer, Albert R. und Michael S. Paterson (1979). *Whith what frequency are apparently intractable problems difficult?* Techn. Ber. 126. Cambridge, Massachusetts, USA: Laboratory for Computer Science, MIT. URL: <https://hdl.handle.net/1721.1/148954>.
- Papadimitriou, Christos H. (1994). *Computational Complexity*. Reading, Massachusetts, USA: Addison-Wesley. ISBN: 978-0-201-53082-7.
- Post, Emil L. (1944). „Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems“. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 50.5, S. 284–316. DOI: 10.1090/S0002-9904-1944-08111-1.
- Pudlák, Pavel (2013). *Logical Foundations of Mathematics and Computational Complexity*. Heidelberg: Springer International Publishing. ISBN: 978-3-319-00118-0.
- Pudlák, Pavel (2017). „Incompleteness in the finite domain“. In: *The Bulletin of Symbolic Logic* 23.4, S. 405–441. DOI: 10.1017/bsl.2017.32.
- Rackoff, Charles (1982). „Relativized Questions Involving Probabilistic Algorithms“. In: *Journal of the ACM* 29.1 (Jan. 1982), S. 261–268. DOI: 10.1145/322290.322306.
- Razborov, Alexander A. (1994). „On provably disjoint NP-pairs“. In: *BRICS Report Series* 1.36 (30. Nov. 1994). DOI: 10.7146/brics.v1i36.21607.
- Selman, Alan L. (1988). „Natural Self-Reducible Sets“. In: *SIAM Journal on Computing* 17.5 (Okt. 1988), S. 989–996. DOI: 10.1137/0217062.
- Selman, Alan L. (1994). „A taxonomy of complexity classes of functions“. In: *Journal of Computer and System Sciences* 48.2 (Apr. 1994), S. 357–381. DOI: 10.1016/S0022-0000(05)80009-1.
- Simon, Janos (1975). *On Some Central Problems in Computational Complexity*. Techn. Ber. 75-224. Ithaca, New York, USA: Department of Computer Science, Cornell University. URL: <https://hdl.handle.net/1813/6975>.

- Thomason, Andrew G. (1978). „Hamiltonian Cycles and Uniquely Edge Colourable Graphs“. In: *Advances in Graph Theory*. Hrsg. von Béla Bollobás. Bd. 3. Annals of Discrete Mathematics. Amsterdam: Elsevier, 1. Jan. 1978, S. 259–268. DOI: 10.1016/S0167-5060(08)70511-9.
- Trakhtenbrot, Boris A. (1984). „A Survey of Russian Approaches to Perebor (Brute-Force Searches) Algorithms“. In: *Annals of the History of Computing* 6.4 (Okt. 1984), S. 384–400. DOI: 10.1109/MAHC.1984.10036.
- Valiant, Leslie G. (1979). „The complexity of computing the permanent“. In: *Theoretical Computer Science* 8.2, S. 189–201. DOI: 10.1016/0304-3975(79)90044-6.
- Wechsung, Gerd (2000). *Vorlesungen zur Komplexitätstheorie*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag. DOI: 10.1007/978-3-322-80024-4.
- Welsh, Dominic (1993). *Complexity: Knots, Colourings and Countings*. Cambridge, Massachusetts, USA: Cambridge University Press. ISBN: 978-0-521-45740-8.







## Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Abschlussarbeit selbstständig verfasst zu haben, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben und die Arbeit bisher oder gleichzeitig keiner anderen Prüfungsbehörde unter Erlangung eines akademischen Grades vorgelegt zu haben.

Würzburg, 6. Februar 2024

.....  
Anton Ehrmanntraut