Часть 1. Типовые задачи

Решите в целых числах уравнения 1-3:

1) $6x-5y=0$;

2) $6x-6y=2$;

3) $6x-5y=3$.

4) Вычислите при помощи алгоритма Евклида:
   а) НОД(91, 147);
   б) НОД(−144, −233).

5) Покажите, как при помощи алгоритма Евклида можно по произвольным a и b найти такие k и l, что $ak+bl=$НОД(a, b).

6) Решите уравнения:
   а) $121x+91y=1$;
   б) $-343x+119y==42$;
   в) $111x-740y=11$.

7)Разложить в цепную дробь числа
   а)15/4;
   б)42/31;
   в)13/9;
   г)6/5.

8)Используя разложение в цепную дробь решить уравнение в целых числах
   а)$57x-89y=16$;
   б)$13x-10y=27$.

Часть 2. Нетиповые задачи

1) Докажите, что уравнение $ax+by=d$ имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда $d \vdots$ НОД(a, b). В частности, НОД(a, b) — это наименьшее натуральное число, представимое в виде $ax+by$.

2) Кузнечик может прыгать на расстояние 15 и 7. Изначально он находится в точке 0. Найдите, как следует прыгать кузнечику, чтобы оказаться в точке 3. *Найдите, за какое наименьшее число прыжков он может попасть в точку 6;

3) Докажите, что если p — простое, то либо a делится на p, либо найдутся такие x и y, что $ax+py=1$

4) Пусть $(x0, y0)$ — решение уравнения $ax+by=d$. Пусть a0 и b0 — такие числа, что НОД(a, b)a0 = a, НОД(a, b)b0 = b. Покажите, что каждое решение уравнения $ax+by=d$ имеет вид $x=x0+b0\,t$, $y=y0-a0\,t$, где t - целое число.

5) Известно, что пары чисел (x1,y1) и (x2,y2) являются решением уравнения $ax+by+c=0$, где a,b,c - некоторые неизвестные целые коэффициенты. Найдите, выразив через (x1,y1) и (x2,y2), чему равно a/b.