Бином Ньютона

Ниже представлены задачи к лекции «Бином Ньютона» к курсу «100 уроков математики» Алексея Владимировича Саватеева. Задачи разделены на 2 вида: типовые (их можно решить прямо используя формулу бинома Ньютона) и нетиповые (решение этих задач потребует большего количества времени и «математической смекалки»).

Типовые задачи

Задача 1. Разложить по формуле бином $(a-\sqrt{2})^6$.

Задача 2. Найти шестой член разложения $(1-2z)^{21}$.

Задача 3. Найдите два средних члена разложения $(a^3+ab)^{21}$.

Задача 4. В биномиальном разложении $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)^{18}$ найти член разложения, не содержащий x.

Нетиповые задачи

Определение 1. Треугольником Паскаля называется треугольная таблица, составленная из чисел по следующему правилу: строка с номером n состоит из n чисел, первое и последнее числа каждой строки равны единице, а каждое из остальных чисел равно сумме двух ближайших к нему чисел предыдущей строки. Число, стоящее на $(k+1)$-м месте $(n+1)$-й строки, обозначается $\dbinom{n}{k}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & \dots & & & \end{array}$$

Задача 1. Выпишите первые 10 строк треугольника Паскаля.

Задача 2. Запишите в виде $\dbinom{a}{b}$ числа предыдущей строки, ближайшие к числу $\dbinom{n}{m}$.

Задача 3. Докажите, что $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.

Задача 4. В каких строках треугольника Паскаля все числа нечётные?

Определение 2. Числом сочетаний из n по m называется количество m-элементных подмножеств множества из n элементов. Обозначение: C_n^m.

Задача 5. Найдите: а) C_{100}^1, б) C_4^2, в) C_5^2, г) C_6^4.

Задача 6. Раскройте скобки в выражениях $(a+b)$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ и выпишите результаты друг под другом. Обратите внимание, что коэффициенты образуют треугольник Паскаля.

Задача 7. Докажите, что: $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$

Задача 8. Правило Паскаля: $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

Задача 9. Биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой: $C_n^m = C_n^{n-1}$. (правило симметрии).

Задача 10. Докажите, что $\binom{n}{m} = C_n^m$.

Задача 11. Сумма биномиальных коэффициентов всех членов разложения равна 2^n.

Задача 12. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах и равна 2^{n-1}.

Задача 13. Любой биномиальный коэффициент, начиная со второго, равен произведению предшествующего биномиального коэффициента и дроби $\frac{n-(m-1)}{m}$, т.е. $C_n^m = C_n^{m-1} \cdot \frac{n-(m-1)}{m}$.

Задача 14. Докажите, что число способов пройти из левого нижнего угла прямоугольника $(m \times n)$ в правый верхний, двигаясь только вверх или вправо по границам клеток, равно $\binom{n+m}{n}$.