Бином Ньютона

Ниже представлены задачи к лекции «Бином Ньютона» к курсу «100 уроков математики» Алексея Владимировича Саватеева.

Задачи разделены на 2 вида: типовые (их можно решить прямо используя формулу бинома Ньютона) и нетиповые (решение этих задач потребует большего количества времени и «математической смекалки»).

Часть 1. Типовые задачи

Задача 1. Разложить по формуле бином $\left(a-\sqrt{2}\right)^6$.

Задача 2. Найти шестой член разложения $(1-2z)^{21}$.

Задача 3. Найдите два средних члена разложения $(a^3+ab)^{21}$.

Задача 4. В биномиальном разложении $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^{18}$ найти член разложения, не содержащий x.

Часть 2. Нетиповые задачи.

Определение 1. Треугольником Паскаля называется треугольная таблица, составленная из чисел по следующему правилу: строка с номером n состоит из n чисел, первое и последнее числа каждой строки равны единице, а каждое из остальных чисел равно сумме двух ближайших к нему чисел предыдущей строки. Число, стоящее на $(k+1)$ −м месте $(n+1)$ −й строки, обозначается $\binom{n}{k}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

……..…………………………………………………………

Задача 1. Выпишите первые 10 строк треугольника Паскаля.

Задача 2. Запишите в виде $\binom{a}{b}$. числа предыдущей строки, ближайшие к числу $\binom{n}{k}$.

Задача 3. Докажите, что $\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}$.

Задача 4. В каких строках треугольника Паскаля все числа нечётные?

Определение 2. Числом сочетаний из n по m называется количество m-элементных подмножеств множества из n элементов. Обозначение: $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}}$.

Задача 5. Найдите: а) C_{100}^{1}, б) C_{4}^{2}, в) C_{5}^{2}, г) C_{6}^{4}.

Задача 6. Раскройте скобки в выражениях $(a + b), (a + b)^2, (a + b)^3, (a + b)^4$ и выпишите результаты друг под другом. Обратите внимание, что коэффициенты образуют треугольник Паскаля.

Задача 7. Докажите, что: $(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$.

Задача 8. Правило Паскаля: $\mathrm{C}_{n}^{m} = \mathrm{C}_{n-1}^{m} + \mathrm{C}_{n-1}^{m-1}$.

Задача 9. Биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой: $\mathrm{C}_{n}^{m} = \mathrm{C}_{n}^{n-1}$. (правило симметрии).

Задача 10. Докажите, что $\binom{n}{k} = \mathrm{C}_{n}^{k}$.`

Задача 11. Сумма биномиальных коэффициентов всех членов разложения равна 2^n.

Задача 12. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах и равна 2^{n-1}.

Задача 13. Любой биномиальный коэффициент, начиная со второго, равен произведению предшествующего биномиального коэффициента и дроби $\frac{n-(m-1)}{m}$, т.е. $\mathrm{C}_{n}^{m} = \mathrm{C}_{n}^{m-1} * \frac{n-(m-1)}{m}$.

Задача 14*. Докажите, что число способов пройти из левого нижнего угла прямоугольника $m \times n$ в правый верхний, двигаясь только вверх или вправо по границам клеток, равно $\binom{n+m}{n}$.