

В. В. МАЗАЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ПРИЛОЖЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание третье, стереотипное



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР •
2017

ББК 22.18я73

М 13

Мазалов В. В.

М 13 Математическая теория игр и приложения: Учебное пособие. — 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2017. — 448 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1025-5

Книга представляет собой учебное пособие по теории игр. Кроме традиционных разделов теории игр, таких как: конечные и бесконечные антагонистические игры, бескоалиционные и кооперативные игры, многошаговые игры, здесь представлены новые направления, еще не освещавшиеся в отечественной учебной литературе, такие как: модели переговоров, потенциальные игры, салонные игры, игры наилучшего выбора и сетевые игры. От читателя требуется знание основ математического анализа, алгебры и теории вероятностей. В конце каждой главы приведены упражнения, которые могут быть использованы для усвоения материала.

Книга предназначена для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика». Кроме того, она представляет интерес для математиков, работающих в области теории игр, а также специалистов в области экономики, управления и исследования операций.

ББК 22.18я73

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

*Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2017
© В. В. Мазалов, 2017
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой материалы лекций по теории игр, которые автор в течение ряда лет читал в российских и зарубежных университетах.

Кроме классических разделов теории игр, здесь представлены новые направления, еще не освещавшиеся в учебной литературе, такие как модели переговоров, потенциальные игры, салонные игры, игры наилучшего выбора и сетевые игры. От читателя требуется знание основ математического анализа, алгебры и теории вероятностей.

Книга может быть использована как учебное пособие для чтения лекций по теории игр для студентов специальностей «Прикладная математика и информатика» и «Экономическая кибернетика». Кроме того, она представляет интерес для математиков, работающих в области теории игр, а также специалистов в области экономики, управления и исследования операций.

В конце каждой главы приведены упражнения, которые могут быть использованы для усвоения материала. Некоторые из задач представляют собой нерешенные проблемы, которые могут быть использованы для начала самостоятельных исследований в данной области. Собственно говоря, это основная задача данной книги — подвести читателя к проведению самостоятельных исследований. В конце книги приведен библиографический обзор, который поможет читателю ориентироваться в дальнейших исследованиях по интересующему направлению.

В течение ряда лет автор имел возможность обсуждать полученные результаты в данной области со своими российскими коллегами Л. А. Петросяном, В. В. Захаровым, Н. В. Зенкевичем, А. Ю. Гарнаевым, В. В. Корниковым, И. А. Серегиным (Санкт-Петербургский гос. университет), А. А. Васьным (Московский гос. университет), А. Б. Кряжским, А. Б. Жиженко (Математический институт РАН) и иностранными коллегами М. Сакагучи (Университет Осаки), М. Тамаки (Университет Айчи), К. Шаевским (Технический университет Вроцлава), Б. Монином (Университет Падерборна), Н. Перрином (Университет Лозанны), Д. Янгом (Университет Гонконга), за что я им очень признателен. Кроме того, благодарен за помощь при подготовке рукописи в печать своим молодым коллегам из Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН А. Н. Реттевой, А. В. Бородиной, Ю. В. Чуйко, А. А. Фалько и Ю. С. Токаревой.

ВВЕДЕНИЕ

Равновесие рождается из справедливости,
а справедливость рождается из смысла Вселенной.

Герман Гессе. Игра в бисер

Теория игр представляет собой раздел математики, в котором исследуются модели принятия оптимальных решений в условиях конфликта. Теория игр является частью исследования операций, науки, которая была создана для планирования и проведения военных операций. Однако спектр ее приложения значительно шире. В теории игр всегда рассматриваются модели, в которых участвуют несколько лиц. В этом принципиальное отличие данной теории от теории оптимизации. Само понятие «оптимального решения» здесь является принципиальным. Существует много определений понятия решения в игре. Как правило, решение в игре называется равновесием, но есть различные равновесия: равновесие по Нэшу, равновесие по Штакельбергу, равновесие по Вардропу и др. Ряд выдающихся ученых в области теории игр были отмечены нобелевскими премиями последних лет. Это Дж. Нэш, Д. Харсани и Р. Зельтен (1994) за вклад в анализ равновесия в теории некоалиционных игр, Ф. Кидланд и Э. Прескотт (2004) за изучение влияния фактора времени на конкурентную политику и исследование бизнес-циклов, Р. Ауман и Т. Шеллинг (2005) за углубление нашего понимания сути конфликта и сотрудничества путем анализа методами теории игр, Л. Гурвиц, Э. Маскин и Р. Майерсон (2007) за создание основ теории аукционов и организации стратегических взаимодействий. В книге мы часто будем цитировать эти имена и задачи.

Игры в зависимости от числа игроков делятся на игры с нулевой суммой (антагонистические) и игры с ненулевой суммой. Множество стратегий может быть конечным и бесконечным, в зависимости от этого различаются матричные игры и игры на компакте. Игроки могут играть каждый за себя либо объединяться в коалиции, соответствующие игры представляют собой бескоалиционные и кооперативные игры. В зависимости от поступающей информации игры могут быть с полной или с частичной информацией.

Теория игр имеет многочисленные приложения. Трудно назвать область наук о жизни и обществе, где бы не было примеров применения теоретико-игровых методов. Это в первую очередь экономические модели, модели рынка и конкуренции, модели ценообразования, отношения продавец–покупатель, переговоры, стабильные соглашения и др. Одна из первых математических монографий основателей теории игр Дж. фон Нейманна и О. Моргенштерна так и называлась «Теория игр и экономическое поведение». Поведение субъектов рынка, моделирование их психологических особенностей является предметом новой науки — экспериментальной экономики.

С помощью теоретико-игровых методов были получены фундаментальные результаты в эволюционной биологии. Введенное английским биологом Мейнардом Смитом понятие эволюционно-стабильных стратегий позволило объяснить эволюцию ряда поведенческих особенностей животных, таких как агрессивность, миграция, борьба за выживание. Теоретико-игровые методы чрезвычайно популярны в задачах рационального природопользования. Например, распределение квот на вылов рыбы в океане, распределение участков для добычи древесины несколькими участниками, определение цен на сельскохозяйственную продукцию — все это задачи теории игр. В настоящее время невозможно представить реализацию межправительственных соглашений в области использования природных ресурсов и уменьшения загрязняющих выбросов, таких как Киотский протокол и другие, без теоретико-игрового анализа. В политических науках теория игр используется в моделях голосования в парламентах государств, для оценки влияния тех или иных политических структур, моделях распределения оборонных ресурсов для достижения устойчивого мира. В юриспруденции теория игр применяется в арбитражной практике, оценке влияния поведения участвующих в конфликте сторон на судебные решения.

В последнее время сделан значительный прорыв в исследовании виртуального информационного мира. Все участники глобальной сети Интернет и мобильных телефонных сетей являются в терминах теории игр игроками, которые общаются между собой, получают и передают информацию, пользуясь информационными каналами. Каждый имеет собственные интересы, одни — получить информацию, другие — затруднить ее получение. Игроки заинтересованы иметь каналы с хорошей пропускной способностью, но поскольку игроков много, возникает проблема распределения каналов между пользователями, которую можно разрешить только методами теории игр. Здесь возникает проблема влияния централизации обслуживания пользователей на эффективность системы. Оценка влияния централизации в системе, где

каждый действует, руководствуясь своими личными интересами — максимальной скоростью канала, минимальной задержкой, максимальным объемом полученной информации и т. д., называется ценой анархии. При этом она зависит от топологии информационной сети и мощности каналов. Все это нетривиальные задачи, приводящие к парадоксам. Мы описываем эти эффекты в данной книге. Скорее, труднее назвать области, где не используются методы теории игр. Мы бы отметили среди таких медицину и финансы, хотя в последнее время появились приложения теоретико-игровых методов и в этих областях знаний.

Изложение материала в данной книге отличается от общепринятого. Мы специально не останавливаемся подробно на матричных играх, потому что им посвящена многочисленная учебная литература. Мы начинаем с исследования игр с ненулевой суммой, доказываем основную теорему о существовании равновесия для выпуклых игр и затем распространяем ее на случай игр с нулевой суммой. Здесь представлено много классических моделей, используемых в экономике, таких как модели рыночной конкуренции Курно, Бертрана, Хотеллинга, Штакельберга и аукционы. От игр в нормальной форме мы переходим к играм в развернутой форме. Затем анализируем салонные игры. В первых главах игры рассматриваются для двух лиц, затем мы переходим к анализу игр n лиц, вначале в бескоалиционной форме, а затем в кооперативной форме.

После этого мы приводим фундаментальные результаты в новых направлениях теории игр, задачах наилучшего выбора, сетевых и динамических играх. В книге представлены новые схемы моделей переговоров, много внимания уделено арбитражным процедурам. Часть результатов принадлежит автору и его коллегам. От читателя требуется знание основ математического анализа, алгебры и теории вероятностей.

Из других современных курсов по теории игр рекомендуем читателю учебные пособия: Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. «Теория игр», 1998, и Васин А. А., Морозов В. В. «Теория игр и модели математической экономики», 2005. На протяжении более чем десяти лет автор совместно с проф. Л. А. Петросяном участвует в издании ежегодника по теории игр *Game Theory and Applications* (New York: Nova Science Publishers). В четырнадцати томах книги были представлены фундаментальные результаты ведущих российских и иностранных специалистов в области теории игр. Часть из этих результатов содержится в данной книге. Рекомендуем также это издание читателю как руководство для самостоятельных исследований.

ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ В СТРАТЕГИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Начнем исследование игровых задач со случая игр двух лиц в стратегической или, как еще говорят, в нормальной форме. Основные понятия в теории игр — это **игроки, стратегии и выигрыши**. Игроков будем обозначать I и II. Игра в нормальной форме протекает следующим образом. Игрок I выбирает некоторую стратегию x из множества X , а игрок II одновременно с ним выбирает стратегию y из множества Y . X и Y могут быть множествами произвольной природы, это может быть конечный набор значений, множество из \mathbb{R}^n , множество измеримых функций и т. д. В результате этого игрок I получает выигрыш $H_1(x, y)$, а игрок II — выигрыш $H_2(x, y)$.

Определение 1.1. *Игрой в нормальной форме будем называть объект*

$$\Gamma = \langle I, II, X, Y, H_1, H_2 \rangle,$$

где X, Y — множества стратегий игроков I и II, а H_1, H_2 соответственно их функции выигрыша, $H_i : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Каждый из игроков выбирает свою стратегию независимо от выбора его соперника и при этом заинтересован максимизировать свой выигрыш. Однако выигрыш игрока зависит не только от выбора им своей стратегии, но также и от поведения второго игрока. В этом и есть специфика теории игр.

Что понимать под решением игры? Существует ряд подходов к построению решения в теории игр. Ниже мы разберем некоторые из них. Начнем мы с понятия равновесия по Нэшу, которое является центральным в теории игр.

Определение 1.2. *Равновесием по Нэшу в игре Γ называется набор стратегий (x^*, y^*) , для которого выполняются условия*

$$H_1(x, y^*) \leq H_1(x^*, y^*),$$

$$H_2(x^*, y) \leq H_2(x^*, y^*) \quad (1.1)$$

для произвольных стратегий игроков x, y .

Неравенства (1.1) означают, что при отклонении игроков от равновесия их выигрыш уменьшается. Следовательно, никому из игроков отклоняться от равновесия невыгодно. Заметим, что равновесие по Нэшу существует не всегда, поэтому один из основных вопросов при исследовании игровых задач, существует ли равновесие в игре. Если равновесие по Нэшу существует, то значения выигрышей H_1^* , H_2^* будем называть оптимальными. Набор стратегий (x, y) часто называют **ситуацией**.

§ 1.1. ДУОПОЛИЯ КУРНО

Одной из первых игровых моделей, которая стала очень популярной в экономических исследованиях, была дуополия Курно (1838). Дуополия означает, что рассматривается игра двух лиц.

Итак, представим, что на рынке есть две фирмы I и II, которые производят определенное количество товара, соответственно q_1 и q_2 . В данном случае это стратегии игроков. Цена на товар на рынке складывается из начальной цены p минус количество произведенной продукции $Q = q_1 + q_2$. Таким образом, цена на единицу товара равна $p - Q$. Себестоимость единицы товара обозначим c . Предположим, что $c < p$. Теперь можно выписать выигрыши игроков:

$$H_1(q_1, q_2) = (p - q_1 - q_2)q_1 - cq_1, \quad H_2(q_1, q_2) = (p - q_1 - q_2)q_2 - cq_2. \quad (1.2)$$

В наших обозначениях игра имеет вид $\Gamma = \langle I, II, Q_1 = [0, \infty), Q_2 = [0, \infty), H_1, H_2 \rangle$.

Чтобы найти равновесие по Нэшу (1.1), достаточно решить две задачи $\max_{q_1} H_1(q_1, q_2^*)$ и $\max_{q_2} H_2(q_1^*, q_2)$ и показать, что максимумы достигаются для $q_1 = q_1^*$, $q_2 = q_2^*$. Максимумы квадратических функций $H_1(q_1, q_2^*)$ и $H_2(q_1^*, q_2)$ достигаются при

$$q_1 = \frac{1}{2}(p - c - q_2^*),$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(p - c - q_1^*).$$

Важно, чтобы эти значения были неотрицательными, для этого необходимо, чтобы

$$q_i^* \leq p - c, \quad i = 1, 2. \quad (1.3)$$

Решая систему уравнений для q_1^*, q_2^* , находим

$$q_1^* = q_2^* = \frac{p-c}{3},$$

которые удовлетворяют условиям (1.3). При этом оптимальные выигрыши равны

$$H_1^* = H_2^* = \frac{(p-c)^2}{9}.$$

§ 1.2. ПРОЦЕДУРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ УЛУЧШЕНИЙ

Представим, что игроку I стала известна стратегия q_2 игрока II. Тогда его **наилучшим ответом** будет стратегия q_1 , которая даст максимальный выигрыш $H_1(q_1, q_2)$. Поскольку $H_1(q_1, q_2)$ вогнутая парабола, ее вершина находится в точке

$$q_1 = \frac{1}{2}(p-c-q_2). \quad (2.1)$$

Обозначим функцию наилучших ответов как $q_1 = R(q_2) = \frac{1}{2}(p-c-q_2)$. Аналогично, если стратегия q_1 игрока I становится известна игроку II, его наилучшим ответом будет стратегия q_2 , которая даст максимальный выигрыш $H_2(q_1, q_2)$, т. е.

$$q_2 = R(q_1) = \frac{1}{2}(p-c-q_1). \quad (2.2)$$

Изобразим линии наилучших ответов (2.1)–(2.2) на плоскости (q_1, q_2) (см. рис. 1.1). Для любой начальной стратегии $q_2^{(0)}$ построим последовательность наилучших ответов

$$\begin{aligned} q_2^{(0)} \rightarrow q_1^{(1)} = R(q_2^{(0)}) \rightarrow q_2^{(1)} = R(q_1^{(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow q_1^{(n)} = \\ = R(q_2^{(n-1)}) \rightarrow q_2^{(n)} = R(q_1^{(n)}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Последовательность $(q_1^{(n)}, q_2^{(n)})$ будем называть последовательностью наилучших ответов. Такая итеративная процедура соответствует поведению продавцов на рынке, когда каждый из них меняет свою стратегию во времени в зависимости от поведения конкурентов. Из рис. 1.1 видно, что последовательность наилучших ответов игроков сходится к точке равновесия для любой начальной стратегии $q_2^{(0)}$. Заметим, что последовательность наилучших ответов не всегда приводит к равновесию по Нэшу.

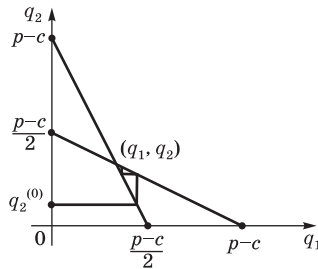


Рис. 1.1
Дуополия Курно

§ 1.3. ДУОПОЛИЯ БЕРТРАНА

Следующей игрой двух лиц, которая моделирует образование цен на рынке, является дуополия Бертрана (1883).

Представим, что на рынке есть две фирмы I и II, которые производят определенный товар A и B , соответственно. Стратегии игроков здесь — цены на товар. Предположим, что фирма I объявляет цену за единицу своего товара c_1 , а фирма II — цену c_2 .

После объявления цен на рынке складывается спрос на каждый товар $Q_1(c_1, c_2) = q - c_1 + kc_2$, $Q_2(c_1, c_2) = q - c_2 + kc_1$, где q — начальный спрос, а коэффициент k отражает взаимозаменяемость товаров A и B .

Как и в модели Курно, себестоимость единицы товара обозначим c . Тогда выигрыши игроков:

$$H_1(c_1, c_2) = (q - c_1 + kc_2)(c_1 - c),$$

$$H_2(c_1, c_2) = (q - c_2 + kc_1)(c_2 - c).$$

Итак, игра полностью определена $\Gamma = \langle I, II, Q_1 = [0, \infty), Q_2 = [0, \infty), H_1, H_2 \rangle$.

Зафиксируем стратегию c_1 первого игрока. Тогда наилучший ответ игрока II — это стратегия c_2 , которая дает максимальный выигрыш $\max_{c_2} H_2(c_1, c_2)$. Поскольку $H_2(c_1, c_2)$ вогнутая парабола, ее вершина находится в точке

$$c_2 = \frac{1}{2}(q + kc_1 + c). \quad (3.1)$$

Аналогично, если стратегия c_2 второго игрока зафиксирована, то наилучший ответ игрока I — это стратегия c_1 , которая дает максимальный

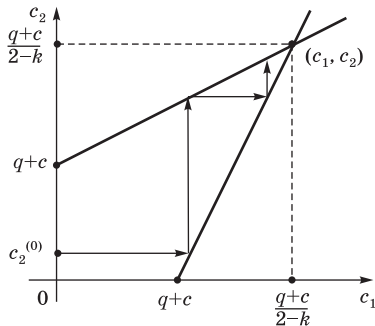


Рис. 1.2
Дуополия Бертрана

выигрыш $\max_{c_1} H_1(c_1, c_2)$. Находим

$$c_1 = \frac{1}{2}(q + kc_2 + c). \quad (3.2)$$

Существует только одно решение системы уравнений (3.1)–(3.2)

$$c_1^* = c_2^* = \frac{q + c}{2 - k}.$$

При этом нас интересует положительное решение, для этого необходимо, чтобы $k < 2$.

Полученное решение является равновесием по Нэшу, поскольку на стратегию c_1^* наилучший ответ игрока II — это стратегия c_1^* и, наоборот, на стратегию c_2^* наилучший ответ игрока I — это стратегия c_1^* .

Оптимальные выигрыши игроков в равновесии равны

$$H_1^* = H_2^* = \left[\frac{q - c(1 - k)}{2 - k} \right]^2.$$

Изобразим линии наилучших ответов (3.1)–(3.2) на плоскости (c_1, c_2) (см. рис. 1.2). Правые части (3.1) и (3.2) обозначим $R(c_1), R(c_2)$. Тогда для любой начальной стратегии $c_2^{(0)}$ построим последовательность наилучших ответов

$$\begin{aligned} c_2^{(0)} \rightarrow c_1^{(1)} = R(c_2^{(0)}) \rightarrow c_2^{(1)} = R(c_1^{(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow c_1^{(n)} = \\ = R(c_2^{(n-1)}) \rightarrow c_2^{(n)} = R(c_1^{(n)}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Из рис. 2.2 видно, что последовательность наилучших ответов игроков сходится к точке равновесия (c_1^*, c_2^*) для любой начальной стратегии $c_2^{(0)}$.

§ 1.4. ДУОПОЛИЯ ХОТЕЛЛИНГА

Данная игра двух лиц Хотеллинга (1929) относится к задаче ценообразования, но учитывает также и местоположение фирм на рынке. Предположим, что на линейном рынке (см. рис. 1.3), который представляет собой единичный отрезок $[0, 1]$, есть две фирмы I и II в двух точках a и b . Каждая фирма объявляет свою цену на один и тот же товар, c_1 и c_2 соответственно. После этого каждый из покупателей, находящийся в точке x , сравнивает свои затраты на посещение каждой из фирм $L_i(x) = c_i + |x - x_i|$, $i = 1, 2$ и выбирает ту из них, где затраты меньше. Под затратами $L_i(x)$ можно понимать цену на товар плюс затраты на дорогу. В этом случае все покупатели разобьются на два множества $[0, x)$ и $(x, 1]$ тех, кто предпочитает фирму I и II, соответственно. Граница x , разделяющая эти множества, определяется из равенства затрат $L_1(x) = L_2(x)$, или в нашем случае

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2}.$$

Под выигрышами игроков будем понимать их доходы, т. е.

$$H_1(c_1, c_2) = c_1 x = c_1 \left[\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2} \right], \quad (4.1)$$

$$H_2(c_1, c_2) = c_2(1 - x) = c_2 \left[1 - \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{c_2 - c_1}{2} \right]. \quad (4.2)$$

Равновесие по Нэшу (c_1^*, c_2^*) можно найти из уравнений $\frac{\partial H_1(c_1, c_2^*)}{\partial c_1} = 0$, $\frac{\partial H_2(c_1^*, c_2)}{\partial c_2} = 0$.

Находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1(c_1, c_2)}{\partial c_1} &= \frac{c_2 - c_1}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{c_1}{2} = 0, \\ \frac{\partial H_2(c_1, c_2)}{\partial c_2} &= 1 - \frac{c_2 - c_1}{2} - \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{c_2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$c_1^* + c_2^* = 2,$$

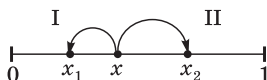


Рис. 1.3
Дуополия на отрезке

и, наконец, равновесные цены:

$$c_1^* = \frac{2 + x_1 + x_2}{3}, \quad c_2^* = \frac{4 - x_1 - x_2}{3}.$$

Подставив равновесные цены в (4.1)–(4.2), находим выигрыши в равновесии

$$H_1(c_1^*, c_2^*) = \frac{[2 + x_1 + x_2]^2}{18}, \quad H_2(c_1^*, c_2^*) = \frac{[4 - x_1 - x_2]^2}{18}.$$

Заметим, что функции выигрыша (4.1)–(4.2) в этой игре, так же как и в предыдущем случае, являются вогнутыми параболами, и, следовательно, процедура улучшения стратегий сходится к равновесию.

§ 1.5. ДУОПОЛИЯ ХОТЕЛЛИНГА НА ПЛОСКОСТИ

В предыдущем параграфе рынок был представлен линейным отрезком, однако в реальной ситуации, это множество на плоскости. Представим город в виде единичного круга S и равномерным распределением покупателей (см. рис. 1.4). Для простоты предположим, что две фирмы I и II находятся в диаметрально противоположных точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Каждая из них объявляет цену на свой товар c_i , $i = 1, 2$. Без ограничения общности будем считать, что $c_1 < c_2$.

Покупатель из точки $(x, y) \in S$ сравнивает затраты от посещения каждой из фирм. Расстояние до каждой из фирм обозначим $\rho_1(x, y) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ и $\rho_2(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Затраты, как и раньше, складываются из цены на товар плюс транспортные расходы, т. е. $L_i(x, y) = c_i + \rho_i(x, y)$, $i = 1, 2$. Тогда множество всех покупателей разобьется на два подмножества S_1 и S_2 с границей, определяемой уравнением

$$c_1 + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = c_2 + \sqrt{(x-1)^2 + y^2},$$

или после упрощений

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

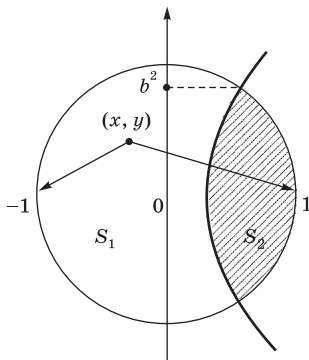


Рис. 1.4
Дуополия на плоскости

где

$$a = (c_2 - c_1)/2, \quad b = \sqrt{1 - a^2}. \quad (5.1)$$

Таким образом, граница между областями S_1 и S_2 является гиперболой. Выигрыши игроков имеют вид

$$H_1(c_1, c_2) = c_1 s_1, \quad H_2(c_1, c_2) = c_2 s_2,$$

где $s_i, i = 1, 2$ площади соответствующих областей.

Поскольку $s_1 + s_2 = \pi$, достаточно найти s_2 . Из рис. 1.4 находим

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{\pi}{2} - 2 \left[a \int_0^{b^2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} dy + \int_{b^2}^1 \sqrt{1 - y^2} dy \right] = \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \left[ab \int_0^b \sqrt{1 + y^2} dy + \int_{b^2}^1 \sqrt{1 - y^2} dy \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Равновесие по Нэшу (c_1^*, c_2^*) в этой игре найдем из условий

$$\frac{\partial H_1(c_1, c_2)}{\partial c_1} = \pi - s_2 - c_1 \frac{\partial s_2}{\partial c_1} = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial H_2(c_1, c_2)}{\partial c_2} = s_2 + c_2 \frac{\partial s_2}{\partial c_2} = 0. \quad (5.4)$$

Из представления (5.2) для s_2 находим

$$\frac{\partial s_2}{\partial c_1} = \frac{b^2 - a^2}{b} \int_0^b \sqrt{1 + y^2} dy + a^2 \sqrt{1 + b^2}, \quad (5.5)$$

и, так как $\frac{\partial a}{\partial c_1} = -\frac{\partial a}{\partial c_2}$, получаем

$$\frac{\partial s_2}{\partial c_2} = -\frac{\partial s_2}{\partial c_1}. \quad (5.6)$$

Функция $s_2(c_1, c_2)$ монотонно возрастает по c_1 . Это следует из того, что если первый игрок увеличивает цену на товар, то покупателю из S_2 , для которого затраты на посещение фирмы I были больше, чем фирмы II, будет по-прежнему выгоднее посещение фирмы II.

Теперь перейдем к нахождению равновесия в этой игре. С учетом (5.6) из (5.3)–(5.4) вытекает соотношение

$$s_2 \left(1 + \frac{c_1}{c_2}\right) = \pi.$$

Откуда следует, что если $c_1 < c_2$, то s_2 должно быть больше $\pi/2$, но это противоречит тому факту, что если цена, объявленная фирмой I, меньше, чем у соперника, то множество покупателей, которые предпочтут эту фирму S_1 , будет больше, чем S_2 , т.е. $s_2 < \pi/2$. Отсюда вытекает, что если решение системы (5.3)–(5.4) существует, то это может быть лишь при $c_1 = c_2$. Это, собственно говоря, следует и из симметрии задачи.

Итак, будем искать решение среди равных цен, т.е. $c_1 = c_2$. Тогда $s_1 = s_2 = \pi/2$ и согласно обозначениям $a = 0$, $b = 1$ из (5.5) находим

$$\frac{\partial s_2}{\partial c_1} = \int_0^1 \sqrt{1 + y^2} dy = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right].$$

Следовательно, из (5.3)–(5.4) следует, что равновесные цены имеют вид

$$c_1^* = c_2^* = \frac{\pi}{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})} \approx 1.3685.$$

§ 1.6. ДУОПОЛИЯ ШТАКЕЛЬБЕРГА

В предыдущих играх двух лиц оба участника были равноправными, они предлагали свои решения одновременно. В дуополии Штакельберга (1934) существует иерархия игроков. Первым свое решение объявляет игрок I, и только затем игрок II. Игрок I называется **лидером**, а игрок II — **ведомым**.

Определение 1.3. *Равновесием по Штакельбергу в игре Γ называется набор стратегий (x^*, y^*) , где $y^* = R(x^*)$ наилучший ответ игрока II на стратегию x^* , которую, в свою очередь, находят из решения задачи*

$$H_1(x^*, y^*) = \max_x H_1(x, R(x)).$$

Таким образом, в равновесии по Штакельбергу лидер, зная, что на любую его стратегию ведомый будет отвечать наилучшим образом, находит стратегию x^* , которая максимизирует его выигрыш.

Рассмотрим схему Штакельберга в условиях дуополии Курно. Итак, есть две фирмы I и II, которые производят один и тот же товар. Фирма I на первом шаге объявляет, что будет производить количество q_1 товара. После этого фирма II объявляет свою стратегию q_2 .

Мы уже знаем из параграфа 1.1, что наилучшим ответом игрока II на стратегию q_1 является стратегия $q_2 = R(q_1) = (p - c - q_1)/2$. Зная это, игрок I максимизирует свой выигрыш

$$H_1(q_1, R(q_1)) = q_1(p - c - q_1 - R(q_1)) = q_1(p - c - q_1)/2.$$

Нетрудно видеть, что его оптимальной стратегией является

$$q_1^* = \frac{p - c}{2}.$$

Соответственно оптимальная стратегия игрока II — это стратегия

$$q_2^* = \frac{p - c}{4}.$$

При этом выигрыши игроков в равновесии равны

$$H_1^* = \frac{(p - c)^2}{8},$$

$$H_2^* = \frac{(p - c)^2}{16}.$$

Мы видим, что выигрыш лидера в два раза выше, чем у ведомого.

§ 1.7. ВЫПУКЛЫЕ ИГРЫ

Мы видели, что во всех играх, которые мы рассмотрели выше, существовало равновесие по Нэшу. Вообще говоря, класс игр, где такого равновесия не существует, гораздо шире. Ниже мы остановимся на этом вопросе. Сейчас же заметим, что существование равновесия в рассмотренных дуополиях было связано с видом функций выигрыша. Во всех этих экономических примерах функции выигрыша были непрерывные и вогнутые.

Определение 1.4. Функция $H(x)$ называется *вогнутой (выпуклой)* на множестве $X \subseteq R^n$, если для любых $x, y \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется $H(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq (\leq) \alpha H(x) + (1 - \alpha)H(y)$.

Заметим, что из определения сразу же вытекает, что для вогнутых функций выполняется также неравенство

$$H\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^p \alpha_i H(x_i)$$

для любой выпуклой комбинации точек $x_i \in X$, $i = 1, \dots, p$, где $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$ и $\sum \alpha_i = 1$.

Центральным результатом существования равновесия в таких играх является теорема Нэша (1951). Прежде чем перейти к доказательству теоремы Нэша, докажем утверждение, которое может служить альтернативным определением равновесия по Нэшу.

Лемма 1.1. Для того чтобы существовало равновесие по Нэшу в игре $\Gamma = \langle I, II, X, Y, H_1, H_2 \rangle$, необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой набор стратегий (x^*, y^*) , для которого выполнялось

$$\max_{x, y} \left\{ H_1(x, y^*) + H_2(x^*, y) \right\} = H_1(x^*, y^*) + H_2(x^*, y^*). \quad (7.1)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть равновесие по Нэшу (x^*, y^*) существует. Тогда по определению 1.2 для произвольных (x, y) выполняется

$$H_1(x, y^*) \leq H_1(x^*, y^*), \quad H_2(x^*, y) \leq H_2(x^*, y^*).$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$H_1(x, y^*) + H_2(x^*, y) \leq H_1(x^*, y^*) + H_2(x^*, y^*) \quad (7.2)$$

для произвольных стратегий игроков x, y . Отсюда следует (7.1).

Достаточность. Предположим, что существует пара (x^*, y^*) , для которой выполняется (7.1) и, следовательно, (7.2). Полагая в (7.2) $x = x^*$ и затем $y = y^*$, получим условия (1.1), определяющие равновесие по Нэшу.

Согласно лемме вместо проверки условий (1.1) на равновесие можно использовать условия (7.1) или (7.2).

Теорема 1.1. *Предположим, что в игре двух лиц $\Gamma = \langle I, II, X, Y, H_1, H_2 \rangle$ множества стратегий X, Y являются компактными выпуклыми множествами в пространстве R^n , а выигрыши $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$ — непрерывные и вогнутые соответственно по x и y функции. Тогда в такой игре всегда существует равновесие по Нэшу.*

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что равновесия по Нэшу не существует. Тогда согласно лемме для любой пары стратегий (x, y) всегда найдется (x', y') , для которого условие (7.2) не выполняется, т. е.

$$H_1(x', y) + H_2(x, y') > H_1(x, y) + H_2(x, y).$$

Введем в рассмотрение множества

$$S_{(x', y')} = \left\{ (x, y) : H_1(x', y) + H_2(x, y') > H_1(x, y) + H_2(x, y) \right\},$$

которые являются открытыми множествами в силу непрерывности функций $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$. Тогда все пространство стратегий $X \times Y$ будет покрыто множествами $S_{(x', y')}$, т. е. $\bigcup_{(x', y') \in X \times Y} S_{(x', y')} = X \times Y$.

В силу компактности $X \times Y$ можно выделить конечное подпокрытие

$$\bigcup_{i=1, \dots, p} S_{(x_i, y_i)} = X \times Y.$$

Для каждого $i = 1, \dots, p$ обозначим

$$\varphi_i(x, y) = \left[H_1(x_i, y) + H_2(x, y_i) - (H_1(x, y) + H_2(x, y)) \right]^+, \quad (7.3)$$

где $a^+ = \max\{a, 0\}$. Заметим, что все $\varphi_i(x, y)$ неотрицательны, и в соответствии с определением $S_{(x_i, y_i)}$ хотя бы для одного $i = 1, \dots, p$ будет положительным, отсюда $\sum_{i=1}^p \varphi_i(x, y) > 0, \forall (x, y)$.

Теперь мы определим отображение $\varphi(x, y) : X \times Y \rightarrow X \times Y$ в виде

$$\varphi(x, y) = \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i(x, y) x_i, \sum_{i=1}^p \alpha_i(x, y) y_i \right),$$

где

$$\alpha_i(x, y) = \frac{\varphi_i(x, y)}{\sum_{i=1}^p \varphi_i(x, y)}, \quad i = 1, \dots, p, \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i(x, y) = 1.$$

Функции $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$ непрерывны, поэтому отображение $\varphi(x, y)$ также непрерывно. Кроме того, по условию X, Y выпуклые множества и, следовательно, выпуклые комбинации $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \in X$, $\sum_{i=1}^p \alpha_i y_i \in Y$. Таким образом, $\varphi(x, y)$ — это отображение выпуклого компактного множества $X \times Y$ в себя. По теореме Брауэра у такого отображения существует неподвижная точка (\bar{x}, \bar{y}) , для которой $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$ или

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^p \alpha_i(\bar{x}, \bar{y}) x_i, \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^p \alpha_i(\bar{x}, \bar{y}) y_i.$$

Отсюда и из вогнутости функции $H_1(x, y)$ по x и функции $H_2(x, y)$ по y следует

$$\begin{aligned} H_1(\bar{x}, \bar{y}) + H_2(\bar{x}, \bar{y}) &= H_1\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i, \bar{y}\right) + H_2\left(\bar{x}, \sum_{i=1}^p \alpha_i y_i\right) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^p \alpha_i H_1(x_i, \bar{y}) + \sum_{i=1}^p \alpha_i H_2(\bar{x}, y_i). \end{aligned} \quad (7.4)$$

С другой стороны, согласно определению $\alpha_i(x, y)$ положительно тогда же, когда и $\varphi_i(x, y)$. Для положительных $\varphi_i(\bar{x}, \bar{y})$, а такое хотя бы для одного i существует, выполняется (см. (7.3))

$$H_1(x_i, \bar{y}) + H_2(\bar{x}, y_i) > H_1(\bar{x}, \bar{y}) + H_2(\bar{x}, \bar{y}), \quad (7.5)$$

а для тех j , для которых $\alpha_j(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \alpha_j(\bar{x}, \bar{y}) \left(H_1(x_j, \bar{y}) + H_2(\bar{x}, y_j) \right) &= \\ = \alpha_j(\bar{x}, \bar{y}) \left(H_1(\bar{x}, \bar{y}) + H_2(\bar{x}, \bar{y}) \right). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Умножая (7.5) на $\alpha_i(\bar{x}, \bar{y})$ и складывая с (7.6) по всем $i, j = 1, \dots, p$, приходим к неравенству

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i H_1(x_i, \bar{y}) + \sum_{i=1}^p \alpha_i H_2(\bar{x}, y_i) > H_1(\bar{x}, \bar{y}) + H_2(\bar{x}, \bar{y}),$$

которое противоречит полученному ранее (7.4). Полученное противоречие доказывает существование равновесия по Нэшу в выпуклых играх.

§ 1.8. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим игру двух лиц $\Gamma = \langle I, II, M, N, A, B \rangle$, где игроки имеют конечный набор стратегий, соответственно $M = \{1, 2, \dots, m\}$ и $N = \{1, 2, \dots, n\}$, а выигрыши представлены матрицами A и B . Таким образом, в этой игре игрок I выбирает строчку i , а игрок II — столбец j , и после этого игрок I получает выигрыш $a(i, j)$, а игрок II — выигрыш $b(i, j)$. Такие игры мы будем называть **биматричными**. Следующие примеры показывают, что равновесие по Нэшу в таких играх может существовать, а может и нет.

Дилемма заключенного. Представьте двух лиц, арестованных по подозрению в совершении преступления. Каждый из них может либо сознаться в данном преступлении (стратегия — Да) или хранить молчание (стратегия — Нет). Матрицы выигрышей имеют вид

$$A = \begin{array}{c|cc} & \text{Да} & \text{Нет} \\ \hline \text{Да} & -6 & 0 \\ \text{Нет} & -10 & -1 \end{array}, \quad B = \begin{array}{c|cc} & \text{Да} & \text{Нет} \\ \hline \text{Да} & -6 & -10 \\ \text{Нет} & 0 & -1 \end{array}.$$

Таким образом, если оба заключенных сознаются в совершении преступления, они получают срок заключения 6 лет. Если же оба будут хранить молчание, то они получают срок заключения один год. Однако в данной ситуации очень выгодно сознаться и быть отпущенным, в то время как второй заключенный получит максимальный срок (10 лет).

Нетрудно видеть, что равновесием по Нэшу в данной игре является ситуация (Да, Да), где выигрыши игроков равны $(-6, -6)$, поскольку, отклонившись от данной стратегии, игрок получит -10 . Этот пример стал популярным в литературе по теории игр, поскольку он моделирует равновесие, которое приводит к гарантированным выигрышам, которые, однако, значительно хуже, чем выигрыши, которые игроки могли бы получить при согласованных действиях.

Семейный спор. В этой игре есть два игрока, назовем их «муж» и «жена», решающих, как провести выходной день. У них есть две

стратегии — «бокс» и «театр». В зависимости от выбора их выигрыши представлены матрицами

$$A = \begin{array}{c} \text{Бокс} \\ \text{Театр} \end{array} \begin{array}{cc} \text{Бокс} & \text{Театр} \\ \left(\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), & B = \begin{array}{c} \text{Бокс} \\ \text{Театр} \end{array} \begin{array}{cc} \text{Бокс} & \text{Театр} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{array} \right).$$

Если в прошлой игре равновесие по Нэшу было одно, то здесь мы видим два равновесия (на самом деле их три, мы покажем это ниже). Равновесием по Нэшу в данной игре является ситуация (Бокс, Бокс) и (Театр, Театр), но выигрыши в этих равновесиях для игроков разные. Один получает 1, в то время как другой 4.

Ястреб–голубь. Эта игра часто рассматривается при моделировании поведения животных. Предполагается, что при освоении некоего ресурса V (например, территории) каждый индивидуум может использовать одну из двух стратегий — агрессивную (ястреб) или пассивную (голубь). Тогда при встрече двух из них в борьбе за ресурс ястреб всегда захватывает у голубя весь ресурс, если встречаются два голубя, они делят ресурс пополам. И наконец, если оба индивидуума используют стратегию ястреба, идет борьба за ресурс. Он достается одному из них с одинаковой вероятностью $1/2$, но при этом оба индивидуума несут потери c . Теперь мы можем представить матрицы выигрышей

$$A = \begin{array}{c} \text{Ястреб} \\ \text{Голубь} \end{array} \begin{array}{cc} \text{Ястреб} & \text{Голубь} \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2}V - c & V \\ 0 & V/2 \end{array} \right), & B = \begin{array}{c} \text{Ястреб} \\ \text{Голубь} \end{array} \begin{array}{cc} \text{Ястреб} & \text{Голубь} \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2}V - c & 0 \\ V & V/2 \end{array} \right).$$

Здесь в зависимости от соотношения величины ресурса и потерь получается игра рассмотренных выше двух типов. Если потери c меньше, чем $V/2$, возникает игра типа «дилемма заключенного» с одним равновесием, в которой оптимальной стратегией является стратегия ястреб для обоих игроков. Если же $c \geq V/2$, то это игра типа «семейный спор» с равновесиями вида (Ястреб, Голубь) и (Голубь, Ястреб).

Камень–ножницы–бумага. В этой игре два игрока разыгрывают один рубль и называют одновременно одно из слов «камень–ножницы–бумага». Выигрыш определяется в соответствии с правилом: камень разбивает ножницы, ножницы режут бумагу, бумага накрывает камень. Таким образом, в зависимости от ситуации выигрыши игроков

представлены матрицами

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{К} & \text{Н} & \text{Б} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{К} \\ \text{Н} \\ \text{Б} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{К} & \text{Н} & \text{Б} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{К} \\ \text{Н} \\ \text{Б} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

В этой игре среди рассматриваемых стратегий вообще нет равновесия по Нэшу. Здесь нет такой ситуации, в которой игроку было бы невыгодно отклоняться от своей стратегии.

§ 1.9. РАНДОМИЗАЦИЯ

В приведенных выше примерах мы видели, что равновесие в конечных играх может отсутствовать. Выход из положения дает рандомизация. Например, в последней игре «камень–ножницы–бумага» понятно, что следует называть одну из стратегий случайным образом. Тогда противнику будет невозможно ее угадать. Давайте расширим класс стратегий и будем искать равновесие среди вероятностных распределений, заданных на множествах $M = \{1, 2, \dots, m\}$ и $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

Определение 1.5. *Смешанной стратегией игрока I будем называть вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, где $x_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ и $\sum_{i=1}^m x_i = 1$. Аналогично определим смешанную стратегию игрока II как $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, где $y_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ и $\sum_{j=1}^n y_j = 1$.*

Таким образом, здесь x_i (y_j) представляет собой вероятность, с которой игрок I (II) выбирает стратегию i (j). В отличие от новых стратегий, стратегии $i \in M, j \in N$ будем называть чистыми стратегиями. Заметим, что чистой стратегии i соответствует смешанная стратегия $x = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на i -м месте, для краткости ниже будем писать просто $x = i$. Множество смешанных стратегий игрока I (II) обозначим X (Y). Те чистые стратегии, которые используются с положительной вероятностью в смешанной стратегии, образуют **носитель** или, как еще говорят, **спектр** смешанной стратегии.

Поскольку теперь любая ситуация (i, j) реализуется с вероятностью $x_i y_j$, то математическое ожидание выигрышей игроков имеет вид

$$H_1(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a(i, j) x_i y_j, \quad H_2(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b(i, j) x_i y_j. \quad (9.1)$$

Таким образом, расширение первоначальной дискретной игры имеет вид $\Gamma = \langle I, II, X, Y, H_1, H_2 \rangle$, где стратегиями игроков являются вероятностные распределения x и y , а функции выигрыша имеют билинейный вид (9.1). Заметим, что стратегии x и y образуют симплексы $X = \{x : \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$ и $Y = \{y : \sum_{j=1}^n y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$ в пространствах R^m и R^n , соответственно.

Поскольку X и Y образуют выпуклые многогранники в R^m и R^n , и функции выигрыша $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$ являются линейными по каждой из переменных, то получившаяся игра $\Gamma = \langle I, II, X, Y, H_1, H_2 \rangle$ относится к классу выпуклых игр, и мы можем воспользоваться теоремой 1.1.

Теорема 1.2. *В биматричных играх существует равновесие по Нэшу в классе смешанных стратегий.*

Заметим, что теорема Нэша доказывает существование равновесия по Нэшу, однако не дает алгоритма, как его находить. В ряде случаев может помочь следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Для того чтобы ситуация (x^*, y^*) была равновесием по Нэшу, необходимо и достаточно, чтобы для любых чистых стратегий $i \in M$ и $j \in N$, выполнялись условия*

$$H_1(i, y^*) \leq H_1(x^*, y^*), \quad H_2(x^*, j) \leq H_2(x^*, y^*). \quad (9.2)$$

Доказательство. Необходимость следует из определения равновесия по Нэшу, поскольку условия (1.1) выполняются для произвольных стратегий x и y , в том числе и для чистых стратегий.

Достаточность условий (9.2) следует из того, что если первое неравенство $H_1(i, y^*) \leq H_1(x^*, y^*)$ умножить на x_i и просуммировать по $i = 1, \dots, m$, то получим условие $H_1(x, y^*) \leq H_1(x^*, y^*)$ для произвольной стратегии x . Аналогичные рассуждения верны и для второго неравенства в (9.2).

Теорема 1.4 (о дополняющей нежесткости). *Пусть (x^*, y^*) ситуация равновесия по Нэшу в биматричной игре. Тогда если для некоторого i $x_i^* > 0$, то выполняется $H_1(i, y^*) = H_1(x^*, y^*)$. Аналогично, если для некоторого j $y_j^* > 0$, то выполняется $H_2(x^*, j) = H_2(x^*, y^*)$.*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что для некоторого i' имеет место $x_{i'}^* > 0$ и $H_1(i', y^*) < H_1(x^*, y^*)$. Из

теоремы 1.3 следует, что для всех остальных $i \neq i'$ выполняется $H_1(i, y^*) \leq H_1(x^*, y^*)$. Таким образом, справедлива система неравенств

$$H_1(i, y^*) \leq H_1(x^*, y^*), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.2')$$

где i' -е неравенство строгое. Умножая (9.2') на x_i^* и складывая, приходим к противоречию $H(x^*, y^*) < H(x^*, y^*)$. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Теорема 1.4 утверждает, что в равновесии используются только те чистые стратегии, при которых выигрыш игрока достигает оптимального значения. Такие стратегии называются **уравнивающими**.

Теорема 1.5. Для того, чтобы (x^*, y^*) была ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие подмножества чистых стратегий $M_0 \subseteq M$ и $N_0 \subseteq N$ и такие значения H_1 и H_2 , для которых выполняются условия

$$\sum_{j \in N_0} H_1(i, j) y_j^* \begin{cases} \equiv \\ \leq \end{cases} H_1, \quad \text{для } \begin{cases} i \in M_0 \\ j \notin M_0 \end{cases} \quad (9.3)$$

$$\sum_{i \in M_0} H_2(i, j) x_i^* \begin{cases} \equiv \\ \leq \end{cases} H_2, \quad \text{для } \begin{cases} j \in N_0 \\ i \notin N_0 \end{cases} \quad (9.4)$$

и

$$\sum_{i \in M_0} x_i^* = 1, \quad \sum_{j \in N_0} y_j^* = 1. \quad (9.5)$$

Доказательство необходимости. Пусть (x^*, y^*) равновесие в биматричной игре. Обозначим $H_1 = H_1(x^*, y^*)$ и $H_2 = H_2(x^*, y^*)$, $M_0 = \{i \in M : x_i^* > 0\}$, $N_0 = \{j \in N : y_j^* > 0\}$. Тогда условия (9.3)–(9.5) немедленно следуют из теорем 1.3 и 1.4.

Достаточность. Пусть для некоторой ситуации (x^*, y^*) выполняются условия (9.3)–(9.5). Из (9.5) следует, что $x_i^* = 0$ для $i \notin M_0$ и $y_j^* = 0$ для $j \notin N_0$. Тогда, умножая (9.3) на x_i^* и (9.4) на y_j^* и складывая по всем $i \in M$ и $j \in N$, мы приходим к равенствам

$$H_1(x^*, y^*) = H_1, \quad H_2(x^*, y^*) = H_2,$$

что вместе с теоремой 1.3 доказывает, что (x^*, y^*) является равновесием.

Теорема 1.5 может быть использована для нахождения равновесия в биматричных играх. Считая, что спектры оптимальных стратегий M_0, N_0 известны, можно воспользоваться равенствами в условиях

(9.3)–(9.5) и найти оптимальные смешанные стратегии x^*, y^* и оптимальные выигрыши H_1^*, H_2^* из системы линейных уравнений. Однако данная система уравнений может привести к решениям с отрицательными значениями, что не может быть смешанной стратегией. Тогда нужно изменить спектры и перебирать их до тех пор, пока не придем к равновесию. Особенно эффективна теорема 1.5, если в равновесии все $x_i, i \in M$ и $y_j, j \in N$ положительны.

Определение 1.6. Ситуация равновесия (x^*, y^*) называется вполне смешанной, если $x_i > 0, i \in M$ и $y_j > 0, j \in N$.

Если в биматричной игре существует вполне смешанная ситуация равновесия (x, y) , то согласно теореме 1.5 она удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} H_1(i, j) y_j^* &= H_1, i \in M, \\ \sum_{i \in M} H_2(i, j) x_i^* &= H_2, j \in N, \\ \sum_{i \in M} x_i^* &= 1, \quad \sum_{j \in N} y_j^* = 1. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Система (9.6) — это система $n + m + 2$ уравнений с $n + m + 2$ неизвестными. Ее решение даст равновесие по Нэшу в биматричной игре и значения оптимальных выигрышей.

§ 1.10. ИГРЫ 2×2

Ряд биматричных игр можно решить, используя геометрические соображения. Самый простой случай, это когда игроки выбирают из двух стратегий. Тогда смешанная стратегия игрока I имеет вид $(x, 1 - x)$, а второго игрока — $(y, 1 - y)$. Тогда их выигрыши определяются матрицами

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} y & 1-y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ 1-x \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} y & 1-y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ 1-x \end{matrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Соответственно в смешанных стратегиях выигрыши игроков имеют вид

$$\begin{aligned} H_1(x, y) &= a_{11}xy + a_{12}x(1-y) + a_{21}(1-x)y + a_{22}(1-x)(1-y) = \\ &= Axy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2(x, y) &= b_{11}xy + b_{12}x(1-y) + b_{21}(1-x)y + b_{22}(1-x)(1-y) = \\ &= Bxy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}, \end{aligned}$$

где $A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $B = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$.

Согласно теореме 1.3 равновесие (x, y) определяется неравенствами (9.2) или для данного случая

$$H_1(0, y) \leq H_1(x, y), \quad H_1(1, y) \leq H_1(x, y), \quad (10.1)$$

$$H_2(x, 0) \leq H_2(x, y), \quad H_2(x, 1) \leq H_2(x, y). \quad (10.2)$$

Неравенства (10.1) представим в виде

$$(a_{21} - a_{22})y + a_{22} \leq Axy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22},$$

$$Ay + (a_{21} - a_{22})y + a_{12} \leq Axy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$$

и затем перепишем в виде

$$(a_{22} - a_{12})x \leq Axy, \quad (10.3)$$

$$Ay(1-x) \leq (a_{22} - a_{12})(1-x). \quad (10.4)$$

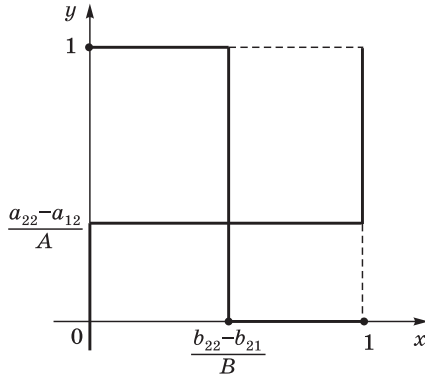


Рис. 1.5

Зигзаг в биматричной игре

Изобразим теперь на единичном квадрате $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (см. рис. 1.5) множество точек (x, y) , удовлетворяющих условиям (10.3)–(10.4).

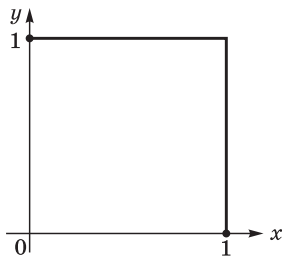


Рис. 1.6

Одно равновесие в игре
«дилемма заключенного»

Если $x = 0$, то (10.3) выполняется автоматически, а из (10.4) следует неравенство $Ay \leq a_{22} - a_{12}$. Если $x = 1$, то (10.4) верно, а из (10.3) вытекает $Ay \geq a_{22} - a_{12}$. Если же $0 \leq x \leq 1$, то из (10.3)–(10.4) следует $Ay = a_{22} - a_{12}$.

Аналогичный анализ неравенств (10.2) приводит к следующим условиям. Если $y = 0$, то $Bx \leq b_{22} - b_{21}$. Если $y = 1$, то $Bx \geq b_{22} - b_{21}$. Если же $0 \leq y \leq 1$, то $Bx = b_{22} - b_{21}$.

В зависимости от знаков A и B эти условия приводят к различным множествам допустимых равновесий в игре, которые имеют вид зигзагов на единичном квадрате.

Дилемма заключенного. Для примера, рассмотренного выше, $A = B = -6 + 10 + 0 - 1 = 3$, $a_{22} - a_{12} = b_{22} - b_{21} = -1$, следовательно, равновесие получается как пересечение двух линий $x = 1$ и $y = 1$ (см. рис. 1.6). Таким образом, равновесие здесь одно и имеет вид $x = 1$, $y = 1$.

Семейный спор. В этом примере $A = B = 4 - 0 - 0 + 1 = 5$, $a_{22} - a_{12} = 1$, $b_{22} - b_{21} = 4$. Следовательно, зигзаг, определяющий все ситуации равновесия, имеет вид, изображенный на рис. 1.7. Из рисунка находим, что в этой игре три равновесия. Два из них в чистых стратегиях ($x = 0, y = 1$), ($x = 1, y = 0$) и одно в смешанных стратегиях ($x = 4/5, y = 1/5$). При этом выигрыши в равновесиях соответственно равны $(H_1^* = 4, H_2^* = 1)$, $(H_1^* = 1, H_2^* = 4)$ и $(H_1^* = 4/5, H_2^* = 4/5)$.

Мы видим из этих примеров, что в биматричных играх в зависимости от вида зигзагов может быть одно, два или три равновесия, даже может быть континуум равновесий.

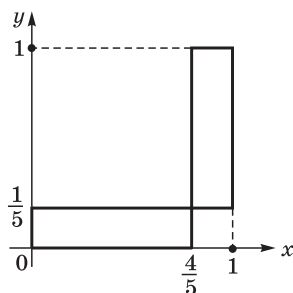


Рис. 1.7

Три равновесия в игре
«семейный спор»

§ 1.11. ИГРЫ $2 \times n$ И $m \times 2$

Предположим, что у первого игрока две стратегии, а у второго n стратегий. Тогда выигрыши определяются с помощью матриц

$$A = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \begin{matrix} x \\ 1-x \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \begin{matrix} x \\ 1-x \end{matrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Предположим, игрок I использует смешанную стратегию $(x, 1-x)$. Если игрок II использует стратегию j , то его выигрыш равен $H_2(x, j) = b_{1j}x + b_{2j}(1-x)$, $j = 1, \dots, n$.

Изобразим все эти выигрыши, а это линейные функции, на рис. 1.8. Согласно теореме 1.3 в равновесии (x, y) достигается максимум $\max_j H_2(x, j) = H_2(x, y)$. Построим для любого x максимальную огибающую $l(x) = \max_j H_2(x, j)$. $l(x)$ представляет собой ломаную линию, состоящую не более чем из $n+1$ отрезка. Обозначим точки изломов ломаной через $x_0 = 0, x_1, \dots, x_k = 1$, $k \leq n+1$. Поскольку $H_1(x, y)$ линейная функция по x , то ее максимум при фиксированной стратегии второго игрока достигается в точках x_i , $i = 0, \dots, k$. Следовательно, равновесия могут быть сосредоточены только в этих точках. Если точка x_i образована при пересечении прямых линий $H_2(x, j_1)$ и $H_2(x, j_2)$, то это значит, что против стратегии x первого игрока второму игроку оптимально играть смесь своих стратегий j_1 и j_2 . Таким образом, мы

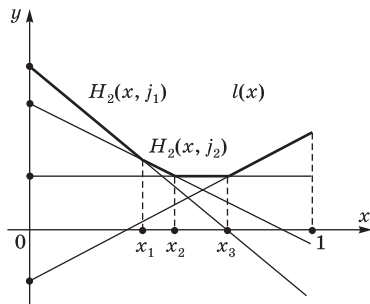


Рис. 1.8
Максимальная огибающая $l(x)$

получили игру вида 2×2 с матрицами выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1j_1} & b_{1j_2} \\ b_{2j_1} & b_{2j_2} \end{pmatrix},$$

решение которой мы получили в предыдущем разделе. Чтобы проверить действительно ли x_i является оптимальной стратегией, можно использовать также следующие соображения. Стратегии x_i и смесь $(y, 1 - y)$ стратегий j_1 и j_2 будут образовывать равновесие, если найдется такое $y : 0 \leq y \leq 1$, что будет выполняться условие $H_1(1, y) = H_1(2, y)$. Действительно, в этом случае выигрыш первого игрока вообще не зависит от x , а наилучшим ответом второго игрока на стратегию x_i будет смесь стратегий j_1 и j_2 . Последнее условие представим в виде

$$a_{1j_1}y + a_{1j_2}(1 - y) = a_{2j_1}y + a_{2j_2}(1 - y). \quad (11.1)$$

Рассмотрим подробнее эту процедуру на следующем примере.

Выбор дороги. Пункты A и B соединены тремя дорогами, и одна из них дорога с односторонним движением справа налево (см. рис. 1.9).

Из A выезжает один автомобиль (первый игрок), и из пункта B другой (второй игрок). При этом время в пути для автомобиля по этим дорогам различно и равно соответственно четырем, пяти и шести часам, если автомобиль на этой дороге один. Если данную дорогу выбрали оба игрока, время в пути удваивается. Каждый из игроков должен решить, по какой дороге ехать.

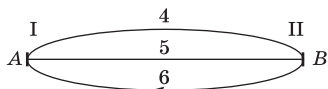


Рис. 1.9

Игра «выбор дороги»

В силу данных условий у первого игрока две стратегии, а у второго — три стратегии. Матрицы выигрышей имеют вид

$$A = \begin{matrix} x & \begin{pmatrix} -8 & -4 & -4 \\ -5 & -10 & -5 \end{pmatrix} \\ 1-x \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} x & \begin{pmatrix} -8 & -5 & -6 \\ -4 & -10 & -6 \end{pmatrix} \\ 1-x \end{matrix}.$$

Находим выигрыши игрока II $H_2(x, 1) = -4x - 5$, $H_2(x, 2) = 5x - 10$, $H_2(x, 3) = -6$. Изобразим эти функции на рис. 1.10 и найдем максимальную огибающую $l(x)$, она изображена на рисунке жирной линией.

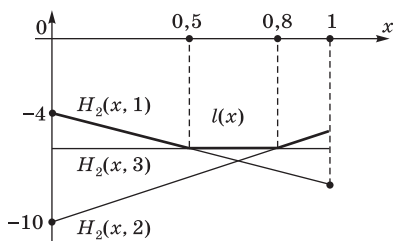


Рис. 1.10

Максимальная огибающая в игре
«выбор дороги»

Точки излома $l(x)$ в точках $x = 0$, $x = 0.5$, $x = 0.8$ и $x = 1$. Находим, что равновесиями здесь являются $(x = 0, y = (1, 0, 0))$, $(x = 1, y = (0, 1, 0))$. В точке $x = 1/2$ пересекаются функции $H_2(x, 1)$ и $H_2(x, 3)$. Из условия (11.1) находим $y = (1/4, 0, 3/4)$. В точке же $x = 0.8$ условия (11.1) не выполняются. Итак, в данной игре есть три равновесных решения:

- 1) первый автомобиль едет по первой дороге, а второй автомобиль по второй;
- 2) первый автомобиль едет по второй дороге, а второй автомобиль по первой;

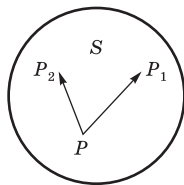


Рис. 1.11
Дуополия Хотеллинга

3) первый автомобиль с одинаковой вероятностью едет по первой или второй дороге, а второй автомобиль с вероятностью $1/4$ едет по первой дороге и с вероятностью $3/4$ по третьей дороге.

Интересно, что в третьем равновесии первый игрок потратит на дорогу в среднем 5 часов, а второй игрок 6 часов. Но ведь второй игрок, казалось бы, находится в выигрышном положении, у него есть дополнительная возможность поехать по третьей дороге. Например, если запретить проезд по третьей дороге, то в самом плохом случае второй игрок потратит на дорогу только 5 часов. Этот парадоксальный результат называется **парадоксом Браесса**, мы вернемся к нему в следующих разделах. Фактически, если первый игрок объявляет второму игроку, что он будет решать, по какой из дорог ему ехать с помощью монеты, то второму игроку ничего не остается делать, как использовать свою стратегию, описанную выше в п. 3.

§ 1.12. ЗАДАЧА О РАЗМЕЩЕНИИ

Вернемся к задаче, рассмотренной в параграфе 1.5, и рассмотрим дуополию Хотеллинга на плоскости, когда покупатели распределены в городе (не обязательно равномерно) с некоторой плотностью $f(x, y)$. Так же как и ранее, предполагаем, что город имеет форму круга S радиусом 1 (см. рис. 1.11), в котором находятся две фирмы (игроки I и II) в различных точках P_1 и P_2 внутри круга. Цель игроков — определить оптимальные цены на свой товар в зависимости от местоположения в городе.

Как и ранее, игроки I и II объявляют цены на свой товар c_1 и c_2 . Покупатель, находящийся в точке $P \in S$, сравнивает свои затраты, которые мы здесь для простоты выкладок возьмем в виде $F(c_i, \rho(P, P_i)) = c_i + \rho^2(P, P_i)$, $i = 1, 2$, и выбирает фирму с минимальным значением.

Тогда все покупатели в S разобьются на два множества S_1 и S_2 в соответствии с их приоритетами фирм I и II. Тогда выигрыши игроков

I и II имеют вид

$$H_1(c_1, c_2) = c_1 \mu(S_1), \quad H_2(c_1, c_2) = c_2 \mu(S_2), \quad (12.1)$$

где $\mu(S) = \int_S f(x, y) dx dy$ есть вероятностная мера множества S .

Теперь можем найти цены, дающие равновесие в игре с такими выигрышами. Они будут зависеть от положения фирм на плоскости P_1 и P_2 . Теперь естественно возникает вопрос, существуют ли равновесные точки для расположения этих фирм. Это и есть задача о размещении. Такая проблема часто возникает когда планируется инфраструктура для социально-экономических региональных систем.

1.12.1. Дуополия Хотеллинга на плоскости с неравномерным распределением покупателей

Вначале давайте найдем равновесные цены в задаче с равномерным распределением покупателей. Повернем круг S таким образом, чтобы точки P_1 и P_2 имели одну и ту же ординату y (см. рис. 1.12). Обозначим абсциссы P_1 и P_2 как x_1 и x_2 соответственно. Без ограничения общности будем считать $x_1 \geq x_2$.

В соответствии со схемой Хотеллинга множества S_1 и S_2 являются секторами круга, разделяемыми прямой линией

$$c_1 + (x - x_1)^2 = c_2 + (x - x_2)^2,$$

которая параллельна оси O_y с координатой

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{c_1 - c_2}{2(x_1 - x_2)}. \quad (12.2)$$

Согласно (12.1) выигрыши игроков в этой игре равны

$$H_1(c_1, c_2) = c_1 \left(\arccos x - x \sqrt{1 - x^2} \right) / \pi, \quad (12.3)$$

$$H_2(c_1, c_2) = c_2 \left(\pi - \arccos x + x \sqrt{1 - x^2} \right) / \pi, \quad (12.4)$$

с x , удовлетворяющим (12.2). Найдем равновесные цены из уравнения $\frac{\partial H_1}{\partial c_1} = \frac{\partial H_2}{\partial c_2} = 0$.

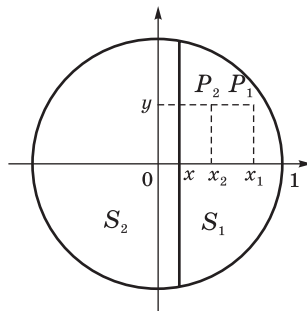


Рис. 1.12

Вычислим производную (12.3) по c_1 .

$$\pi \frac{\partial H_1}{\partial c_1} = \arccos x - x\sqrt{1-x^2} + c_1 \left[-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2(x_1-x_2)} - \right. \\ \left. - \sqrt{1-x^2} \frac{1}{2(x_1-x_2)} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2(x_1-x_2)} \right].$$

Приравнявая нулю, получим

$$c_1 = (x_1 - x_2) \left[\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - x \right]. \quad (12.5)$$

Аналогично из $\frac{\partial H_2}{\partial c_2} = 0$ следует, что

$$c_2 = (x_1 - x_2) \left[x + \frac{\pi - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \right]. \quad (12.6)$$

Наконец, из (12.2), (12.5), (12.6) находим, что равновесные цены можно представить в виде

$$c_1 = \frac{x_1 - x_2}{2} \left[\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} - 2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x \right) \right], \quad (12.7)$$

$$c_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} \left[\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x \right) \right], \quad (12.8)$$

где

$$x = \frac{x_1 + x_2}{4} - \frac{\pi/2 - \arccos x}{2\sqrt{1-x^2}}. \quad (12.9)$$

Замечание 1.1. Если $x_1 + x_2 = 0$, то согласно (12.2) $x = 0$, следовательно, $c_1 = c_2 = \pi x_1$ согласно (12.5)–(12.6) и $H_1 = H_2 = \pi x_1/2$ согласно (12.3)–(12.4). Отсюда максимальные равновесные цены достигаются при $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ и равны $c_1 = c_2 = \pi$. Оптимальные выигрыши равны $H_1 = H_2 = \pi/2 \approx 1.570$. Таким образом, если покупатели расположены равномерно в круге, то фирмам оптимально располагаться подальше друг от друга.

Теперь предположим, что покупатели распределены неравномерно в круге. Рассмотрим случай, когда плотность в полярных координатах имеет вид

$$f(r, \theta) = 3(1-r)/\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (12.10)$$

Это соответствует случаю, когда покупатели сосредоточены ближе к центру города.

Заметим, что достаточно рассмотреть только случай $x_1 + x_2 \geq 0$, в противном случае поменяем знаки x_1, x_2 . Ожидаемые доходы игроков (12.1) будут

$$H_1(c_1, c_2) = \frac{6}{\pi} c_1 A(x), \quad H_2(c_1, c_2) = c_2 \left(1 - \frac{6}{\pi} A(x)\right), \quad (12.11)$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_x^1 r(1-r) \arccos\left(\frac{x}{r}\right) dr = \\ &= \frac{1}{6} \left[\arccos x - x\sqrt{1-x^2} - 2x \int_x^1 \sqrt{r^2-x^2} dr \right] = \\ &= \frac{1}{6} \left[\arccos x - 2x\sqrt{1-x^2} - x^3 \log x + x^3 \log(1+\sqrt{1-x^2}) \right], \end{aligned}$$

так что

$$\frac{\pi}{6} \frac{\partial H_1}{\partial c_1} = A(x) + c_1 A'(x) \frac{\partial x}{\partial c_1} = A(x) - \frac{c_1}{2(x_1 - x_2)} \int_x^1 \sqrt{r^2 - x^2} dr,$$

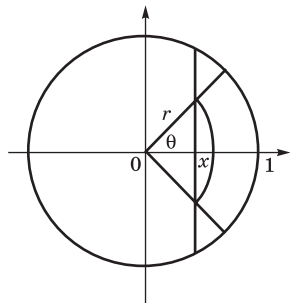


Рис. 1.13

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_2}{\partial c_2} &= 1 - \frac{6}{\pi} A(x) - c_2 \frac{6}{\pi} A'(x) \frac{\partial x}{\partial c_2} = \\ &= 1 - \frac{6}{\pi} A(x) - \frac{6}{\pi} \frac{c_2}{2(x_1 - x_2)} \int_x^1 \sqrt{r^2 - x^2} dr,\end{aligned}$$

так как

$$A'(x) = - \int_x^1 \frac{r(1-r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr = - \int_x^1 \sqrt{r^2 - x^2} dr. \quad (12.12)$$

Из условий $\frac{\partial H_1}{\partial c_1} = \frac{\partial H_2}{\partial c_2} = 0$ находим

$$c_1 = 2(x_1 - x_2) A(x) / \int_x^1 \sqrt{r^2 - x^2} dr, \quad (12.13)$$

$$c_2 = 2(x_1 - x_2) \left(\frac{\pi}{6} - A(x) \right) / \int_x^1 \sqrt{r^2 - x^2} dr. \quad (12.14)$$

Подставляя c_1 и c_2 в

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{c_1 - c_2}{2(x_1 - x_2)}$$

(см. (12.2)), получим

$$x - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = (2A(x) - \pi/6) / \int_x^1 \sqrt{r^2 - x^2} dr. \quad (12.15)$$

Замечание 1.2. Из (12.12) следует, что $A(x)$ выпуклая и убывающая функция, $A(0) = \pi/12$ и $A(1) = 0$. Правая часть (12.15) отрицательна, отсюда

$$x \leq (x_1 + x_2)/2.$$

Покажем, что уравнение (12.15) имеет единственное решение. Перепишем его в виде

$$B(x) = -[x - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)]A'(x) - (2A(x) - \pi/6) = 0. \quad (12.16)$$

Производная функции $B(x)$

$$\begin{aligned} B'(x) &= -3A'(x) - A''(x)(x - \frac{x_1 + x_2}{2}) = \\ &= \int_x^1 \left[3\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x \right) \right] dr \end{aligned}$$

положительна, следовательно $B(x)$ возрастает в интервале $[0, \frac{x_1 + x_2}{2}]$, и $B(0) = -\frac{x_1 + x_2}{4} < 0$ и $B(\frac{x_1 + x_2}{2}) = \pi/6 - 2A(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geq 0$.

Если $x_1 + x_2 = 0$, то $x = 0$ удовлетворяет уравнению (12.15), из (12.13)–(12.14) вытекает $c_1 = c_2 = \frac{2}{3}\pi x_1$ и из (12.11) $H_1 = H_2 = \frac{1}{3}\pi x_1$. Для $x_1 = 1, x_2 = -1$ имеет место $c_1 = c_2 = \frac{2}{3}\pi \approx 2.094$ и $H_1 = H_2 = \frac{1}{3}\pi \approx 1.047$.

1.12.2. Задача о равновесном расположении фирм на плоскости

В предыдущем разделе мы видели, что если точки расположения фирм P_1 и P_2 фиксированы, то существуют равновесные цены c_1 и c_2 . Таким образом, c_1, c_2 — это функции x_1, x_2 . Теперь возникает вопрос, существуют ли равновесные точки x_1^*, x_2^* для расположения этих фирм. Рассмотрим эту задачу для неравномерного случая, исследованного ранее.

Допустим, что игрок II выбрал точку $x_2 < 0$. Цель игрока I — найти точку x_1 , которая максимизирует его доход $H_1(c_1, c_2)$. Найдем решение уравнения $\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = 0$. Из (12.11)

$$\frac{\pi}{6} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} = \frac{\partial c_1}{\partial x_1} A(x) + c_1 A'(x) \frac{\partial x}{\partial x_1} = 0. \quad (12.17)$$

Дифференцируя (12.13) и (12.16) по x_1 , приходим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial c_1}{\partial x_1} = -\frac{A(x)}{A'(x)} - (x_1 - x_2) \left[1 - \frac{A'(x)A''(x)}{[A'(x)]^2} \right] \frac{\partial x}{\partial x_1} \quad (12.18)$$

и

$$-\left(\frac{\partial x}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\right)A'(x) - \left[x - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right]A''(x)\frac{\partial x}{\partial x_1} - 2A'(x)\frac{\partial x}{\partial x_1} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = A'(x) \left[6A'(x) + 2\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)A''(x) \right]^{-1}. \quad (12.19)$$

Уравнениями (12.17)–(12.19) можно воспользоваться, чтобы найти оптимальный ответ x_1 игрока I.

Из симметрии задачи следует, что если равновесие существует, оно имеет вид $(x_1, x_2 = -x_1)$. В этом случае $x = 0$, $A(0) = \pi/12$, $A'(0) = -1/2$, $A''(0) = 0$. Из (12.19) вытекает

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = (-1/2)/(-3 + 0) = 1/6$$

и из (12.18)

$$\frac{\partial c_1}{\partial x_1} = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x_1.$$

Подставив в (12.17), находим

$$\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x_1\right)\frac{\pi}{12} + \left(\frac{2}{3}\pi x_1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{6} = 0$$

и наконец,

$$x_1^* = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, оптимальные точки расположения фирм $x_1^* = \pi/4$, $x_2^* = -\pi/4$, при этом равновесные цены равны $c_1 = c_2 = \pi^2/6$ и доходы $H_1 = H_2 = \pi^2/12$.

Замечание 1.3. В случае равномерного распределения покупателей, рассмотренном ранее, аналогичные рассуждения приводят к следующим результатам.

Из (12.3), (12.7) и (12.9) следует

$$\pi \frac{\partial H_1}{\partial x_1} = \frac{\partial c_1}{\partial x_1} \left(\arccos x - x\sqrt{1-x^2} \right) - 2c_1 \sqrt{1-x^2} \frac{\partial x}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial x_1} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}} + x - x_1 + \frac{x_1 - x_2}{2} \left(2 + \pi x(1-x^2)^{-3/2} \right) \frac{\partial x}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{2(1-x^2)} + \frac{x}{2(1-x^2)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x \right) \right]^{-1},$$

отсюда

$$\begin{aligned} \pi \left[\frac{\partial H_1}{\partial x_1} \right]_{x=0} &= \left[\frac{\partial c_1}{\partial x_1} \right]_{x=0} \frac{\pi}{2} - 2[c_1]_{x=0} \left[\frac{\partial x}{\partial x_1} \right]_{x=0} = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2x_1}{3} \right) \frac{\pi}{2} - 2\pi x_1 \frac{1}{6} = \frac{\pi}{4} \left(\pi - \frac{8}{3} x_1 \right) > 0, \quad \forall x_1 \in (0, 1). \end{aligned}$$

Теперь можно заключить, что максимальные доходы достигаются в точках $x_1^* = -x_2^* = 1$. И в этих точках из (12.3) и (12.7) следует

$$c_i^* = \pi \approx 3.1415 \text{ и } H_i^* = \pi/2 \approx 1.5708, \quad i = 1, 2. \quad (12.20)$$

1.12.3. Еще одна задача о расположении фирм

Предположим теперь, что распределение покупателей имеет плотность

$$f(r, \theta) = a + \frac{3}{2} \left(\pi^{-1} - a \right) r, \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad (12.21)$$

где $a > 0$ выбирается таким образом, чтобы $f(r, \theta) \geq 0, \forall r$ и θ . Точный выбор a будет сделан позже. Уравнение (12.21) соответствует равномерному распределению, если $a = \pi^{-1}$.

Ожидаемые доходы игроков для выбранных цен (c_1, c_2) будут

$$H_1(c_1, c_2) = c_1 J(x), \quad (12.22)$$

$$H_2(c_1, c_2) = c_2(1 - J(x)), \quad (12.23)$$

где x удовлетворяет (12.2) и

$$J(x) \equiv a(\arccos x - x\sqrt{1-x^2}) + \frac{3}{\pi}(1-\pi a) \int_x^1 r^2 \arccos \frac{x}{r} dr.$$

Заметим, что

$$J'(x) = 3(\pi^{-1} - a) \int_x^1 \sqrt{r^2 - x^2} dr - (3\pi^{-1} - a) \sqrt{1-x^2},$$

$$J''(x) = x \left[(3\pi^{-1} - a)(1-x^2)^{-1/2} - 3(\pi^{-1} - a) \int_x^1 \frac{dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right],$$

отсюда

	$J(x)$	$J'(x)$	$J''(x)$
$x = 0$	$1/2$	$-\frac{1}{2}(3\pi^{-1} + a)$	0
$x = 1$	0	0	$+\infty$

Это будет использовано позже.

Условие $\frac{\partial H_1}{\partial c_1} = \frac{\partial H_2}{\partial c_2} = 0$ дает

$$c_1 = 2(x_1 - x_2)J(x)/(-J'(x)), \quad (12.24)$$

$$c_2 = 2(x_1 - x_2)(1 - J(x))/(-J'(x)). \quad (12.25)$$

Подставляя эти цены в (12.2), получаем

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - x = \frac{2J(x) - 1}{J'(x)}. \quad (12.26)$$

Правая сторона (12.26) для $x \geq 0$ есть возрастающая и неотрицательная функция с $\frac{2J(0)-1}{J'(0)} = 0$ и $\frac{2J(1)-1}{J'(1)} = \infty$. Следовательно, решение уравнения (12.26) существует и единственно и удовлетворяет $x \leq \frac{x_1+x_2}{2}$.

Если $x_1 + x_2 = 0$, то $x = 0$ удовлетворяет (12.26), и из (12.24)–(12.25) следует

$$c_1 = c_2 = 4x_1/(3\pi^{-1} + a),$$

$$H_1 = H_2 = 2x_1/(3\pi^{-1} + a).$$

Теперь мы повторяем рассуждения, проделанные ранее для другого распределения покупателей. Из (12.22), (12.24) и (12.26) получаем

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = \frac{\partial c_1}{\partial x_1}J(x) + c_1J'(x)\frac{\partial x}{\partial x_1},$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial c_1}{\partial x_1} = \frac{J(x)}{J'(x)} + (x_1 - x_2)\left\{1 - J(x)J''(x)(J'(x))^{-2}\right\}\frac{\partial x}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{1/2}{3 + (1 - 2J(x))J''(x)(J'(x))^{-2}},$$

и отсюда, используя значения $J(0)$, $J'(0)$ и $J''(0)$,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial H_1}{\partial x_1} \right]_{x=0} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial c_1}{\partial x_1} \right]_{x=0} - \frac{1}{2} (3\pi^{-1} + a) [c_1]_{x=0} \cdot \left[\frac{\partial x}{\partial x_1} \right]_{x=0} = \\ &= (3\pi^{-1} + a)^{-1} - \frac{2}{3} x_1, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial x}{\partial x_1} \right]_{x=0} &= \frac{1}{6}, \\ \left[\frac{\partial c_1}{\partial x_1} \right]_{x=0} &= 2(3\pi^{-1} + a)^{-1} - \frac{2}{3} x_1, \\ \left[c_1 \right]_{x=0} &= 4(3\pi^{-1} + a)^{-1} x_1. \end{aligned}$$

Следовательно, условие $\left[\frac{\partial H_1}{\partial x_1} \right]_{x=0} = 0$ дает

$$x_1^* = \frac{3\pi}{2(3 + \pi a)}.$$

Если мы выберем $a > \frac{3}{2}(1 - 2\pi^{-1}) \approx 0.5451$, то $x_1^* \in (0, 1)$. Значит, если a выбрано так, что

$$\frac{3}{2}(1 - 2\pi^{-1}) \approx 0.5451 < a < 3\pi^{-1} \approx 0.9549,$$

то $x_1^* = \frac{3\pi}{2(3 + \pi a)} \in (0, 1)$, и $f(r, \theta) = a + \frac{3}{2}(\pi^{-1} - a)r > 0, \forall r : 0 \leq r \leq 1$.

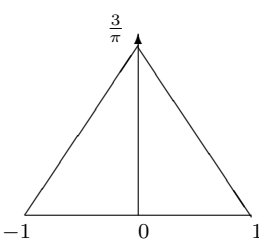
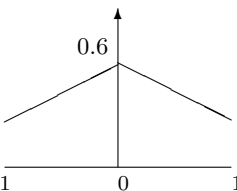
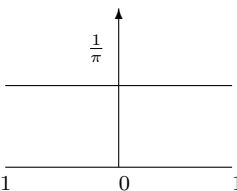
Например, для $a = 0.6$

$$x_1^* = 0.9647, \quad \text{и} \quad f(r, \theta) = 0.6 - 0.4225r. \quad (12.27)$$

Замечание 1.4. Сравнивая эти три типа распределения покупателей, получаем таблицу, где решение задачи о размещении для распределения типа «центр» найдено в разделе 1.12.1, для распределения «центр и окраина» дается в уравнении (12.27) и для равномерного распределения — в уравнении (12.20).

Решения, представленные в таблице, соответствуют нашей интуиции. Мы видим, что оптимальное расположение фирм становится ближе к центру круга, когда покупатели распределены ближе к центру. При этом равновесные цены становятся меньше. Выполняется правило «маленькие цены — быстрый оборот» даже в конкурентной среде.

Таблица 1.1
Равновесие для трех типов распределений покупателей

	«Центр»	«Центр и окраина»	«Равномерное»
			
x_1^*	$\pi/4 \approx 0.7854$	0.9647	1
c_1^*	$\pi^2/6 \approx 1.6450$	2.4815	$\pi \approx 3.1415$
H_1^*	$\pi^2/12 \approx 0.8225$	1.2408	$\pi/2 \approx 1.5708$

Задачи и упражнения

1. Задача «Перекресток». Два автомобилиста двигаются по двум взаимно перпендикулярным дорогам и одновременно встречаются на перекрестке. Каждый из них может остановиться (стратегия I) или ехать (стратегия II).

Предполагается, что каждый из игроков предпочитает остановиться, чем пострадать в аварии, или проехать, если другой сделал остановку. Этот конфликт может быть представлен биматричной игрой с матрицей

$$\begin{pmatrix} (1, 1) & (1 - \varepsilon, 2) \\ (2, 1 - \varepsilon) & (0, 0) \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon \geq 0$ — число, выражающее неудовольствие от того, что игрок остановился и пропустил другого автомобилиста.

В данной задаче найти равновесие по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях.

2. Игры 2×2 . В следующих биматричных играх найти равновесие по Нэшу:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти равновесие по Нэшу в следующей биматричной игре:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Найти равновесие по Штакельбергу в игре двух лиц со следующими функциями выигрыша:

$$H_1(x_1, x_2) = bx_1(c - x_1 - x_2) - d,$$

$$H_2(x_1, x_2) = bx_2(c - x_1 - x_2) - d.$$

5. Для биматричной игры в общем виде доказать, что (x, y) является ситуацией равновесия в смешанных стратегиях тогда и только тогда, когда выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} (x-1)(ay - \alpha) &\geq 0, & x(ay - \alpha) &\geq 0, \\ (y-1)(bx - \beta) &\geq 0, & y(bx - \beta) &\geq 0, \end{aligned}$$

где

$$a = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \quad \alpha = a_{22} - a_{12},$$

$$b = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}, \quad \beta = a_{22} - a_{21}.$$

6. Доказать, что если в биматричной игре существует вполне смешанная ситуация равновесия по Нэшу, то $n = m$.

7. Найти равновесие в игре $2 \times n$ с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

8. Найти равновесие в игре $m \times 2$ с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 7 \\ 3 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 4 \\ 7 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

9. Найти равновесные цены (p_1, p_2) в задаче о расположении фирм на плоскости с функцией затрат вида $F_2 = p^2 + \rho^2$.

10. Найти оптимальное размещение фирм (x_1, x_2) в задаче о расположении фирм на плоскости с функцией затрат вида $F_2 = p^2 + \rho^2$.

ИГРЫ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

В предыдущей главе мы рассмотрели игры вида $\Gamma = \langle I, II, X, Y, H_1, H_2 \rangle$, где выигрыши игроков $H_1(x, y)$ и $H_2(x, y)$ были произвольными функциями, определенными на произведении $X \times Y$. Однако есть специальный случай игр в нормальной форме, когда $H_1(x, y) + H_2(x, y) = 0$ для всех (x, y) . Такие игры называются **играми с нулевой суммой**, или **антагонистическими играми**. В таких играх цели игроков прямо противоположны, и выигрыш одного из них является проигрышем другого. В этом случае для определения игры достаточно задать только функцию выигрыша первого игрока.

Определение 2.1. *Игрой с нулевой суммой будем называть игру в нормальной форме $\Gamma = \langle I, II, X, Y, H \rangle$, где X, Y — множества стратегий игроков I и II , а $H(x, y)$ функция выигрыша игрока I , $H : X \times Y \rightarrow R$.*

Каждый из игроков выбирает свою стратегию независимо от выбора его соперника. При этом игрок I заинтересован максимизировать выигрыш $H(x, y)$, а игрок II минимизировать его. Для игр с нулевой суммой справедливы все утверждения, полученные для игр в нормальной форме, однако существует ряд особенностей, характерных только для этого класса игр. Вначале переформулируем понятие равновесия по Нэшу в этом классе игр.

Определение 2.2. *Равновесием по Нэшу в игре Γ называется набор стратегий (x^*, y^*) , для которого выполняются следующие условия:*

$$H(x, y^*) \leq H(x^*, y^*) \leq H(x^*, y) \quad (1.1)$$

для произвольных стратегий игроков x, y .

Неравенства (1.1) означают, что при отклонении игрока I от равновесия его выигрыш уменьшается, а если отклоняется от равновесия

игрок II выигрыш его противника (и соответственно его проигрыш) увеличивается. Следовательно, никому из игроков отклоняться от равновесия невыгодно.

Замечание 2.1. Игры с постоянной суммой (когда $H_1(x, y) + H_2(x, y) = c = \text{const}$ для произвольных x, y) сводятся к играм с нулевой суммой. Для этого достаточно найти решение в игре с нулевой суммой с функцией выигрыша $H_1(x, y)$. Тогда любое равновесие по Нэшу (x^*, y^*) в этой игре будет также равновесием в игре с постоянной суммой. Действительно, по определению (2.1) для любых x, y

$$H_1(x, y^*) \leq H_1(x^*, y^*) \leq H_1(x^*, y),$$

но $H_1(x, y) = c - H_2(x, y)$, и второе неравенство можно переписать в виде

$$c - H_2(x^*, y^*) \leq c - H_2(x^*, y)$$

или

$$H_2(x^*, y) \leq H_2(x^*, y^*), \forall y.$$

Таким образом, (x^*, y^*) также является равновесием по Нэшу в игре с постоянной суммой.

Так же как и в общем случае игр в нормальной форме, равновесие по Нэшу существует не всегда. Ключевую роль при исследовании игр с нулевой суммой играет понятие минимакса и максимина.

§ 2.1. МИНИМАКС И МАКСИМИН

Предположим, что игрок I использует стратегию x . В самом плохом случае он получит выигрыш $\inf_y H(x, y)$. Естественно, он будет пытаться максимизировать эту величину. В самом плохом для него варианте гарантированный выигрыш первого игрока — это величина $\sup_x \inf_y H(x, y)$. Аналогично игрок II может гарантировать себе проиграть не более $\inf_y \sup_x H(x, y)$.

Определение 2.3. Минимакс $\bar{v} = \inf_y \sup_x H(x, y)$ называется верхним значением игры Γ , а максимин $\underline{v} = \sup_x \inf_y H(x, y)$ — нижним значением игры.

Нижнее значение игры не превосходит верхнего значения.

Лемма 2.1. $\underline{v} \leq \bar{v}$.

Доказательство. Для любых (x, y) справедливо $H(x, y) \leq \sup_x H(x, y)$. Взяв \inf_y от обеих частей, получаем $\inf_y H(x, y) \leq \inf_y \sup_x H(x, y)$. Слева в неравенстве стоит функция от x , которая ограничена сверху числом $\inf_y \sup_x H(x, y)$. Следовательно,

$$\sup_x \inf_y H(x, y) \leq \inf_y \sup_x H(x, y).$$

Ниже приводится очень простой критерий, по которому можно определить, существует ли равновесие по Нэшу в данной игре.

Теорема 2.1. *Равновесие по Нэшу (x^*, y^*) в игре с нулевой суммой существует тогда и только тогда, когда $\inf_y \sup_x H(x, y) = \min_y \sup_x H(x, y)$, и $\sup_x \inf_y H(x, y) = \max_x \inf_y H(x, y)$, и*

$$\underline{v} = \bar{v}. \quad (1.2)$$

Доказательство. Пусть (x^*, y^*) равновесие по Нэшу. Согласно определению (1.1) $H(x, y^*) \leq H(x^*, y^*), \forall x$. Отсюда $\sup_x H(x, y^*) \leq H(x^*, y^*)$, следовательно,

$$\bar{v} = \inf_y \sup_x H(x, y) \leq \sup_x H(x, y^*) \leq H(x^*, y^*). \quad (1.3)$$

Аналогично

$$H(x^*, y^*) \leq \inf_y H(x^*, y) \leq \sup_x \inf_y H(x, y) = \underline{v}. \quad (1.4)$$

Но из леммы 2.1 $\underline{v} \leq \bar{v}$. Следовательно, во всех неравенствах (1.3)–(1.4) имеет место равенство, т.е. внешние \sup и \inf достигаются, и $\underline{v} = \bar{v}$. Необходимость условий доказана.

Докажем достаточность. Обозначим через x^* точку, в которой достигается максимум $\max_x \inf_y H(x, y) = \inf_x H(x^*, y)$. Аналогично точка y^* , где достигается минимум $\min_y \sup_x H(x, y) = \sup_x H(x, y^*)$.

Тогда

$$H(x^*, y^*) \geq \inf_y H(x^*, y) = \underline{v}.$$

С другой стороны,

$$H(x^*, y^*) \leq \sup_x H(x, y^*) = \bar{v}.$$

Отсюда и из условия (1.2) $\underline{v} = \bar{v}$ следует

$$H(x^*, y^*) = \inf_y H(x^*, y) = \sup_x H(x, y^*).$$

Отсюда немедленно вытекает, что для всех (x, y)

$$H(x, y^*) \leq \sup_x H(x, y^*) = H(x^*, y^*) = \inf_y H(x^*, y) \leq H(x^*, y),$$

т. е. (x^*, y^*) равновесие.

Из теоремы 2.1 следует, что если равновесий несколько, то значения оптимальных выигрышей совпадают. Это значение $v = H(x^*, y^*)$, одинаковое для всех равновесий, называется **значением игры**.

Кроме того, несложно показать, что любая комбинация оптимальных стратегий также образует равновесие по Нэшу.

Теорема 2.2. Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) равновесия по Нэшу в игре с нулевой суммой. Тогда (x_1, y_2) и (x_2, y_1) также образуют равновесие.

Доказательство. По определению равновесия для любых (x, y)

$$H(x, y_1) \leq H(x_1, y_1) \leq H(x_1, y) \quad (1.5)$$

и

$$H(x, y_2) \leq H(x_2, y_2) \leq H(x_2, y). \quad (1.6)$$

Полагая в неравенстве (1.5) $x = x_1, y = y_2$, а в неравенстве (1.6) $x = x_2, y = y_1$, получим цепочку неравенств, где слева и справа стоит одно и то же число $H(x_2, y_1)$. Значит, все неравенства в (1.5)–(1.6) есть равенства. И тогда (x_1, y_2) является равновесием, поскольку для любых (x, y)

$$H(x, y_2) \leq H(x_2, y_2) = H(x_1, y_2) = H(x_1, y_1) \leq H(x_1, y).$$

Аналогичное утверждение справедливо и для (x_2, y_1) .

Эти свойства являются характерными отличиями данных игр от игр с ненулевой суммой. В играх с ненулевой суммой мы видели, что комбинации оптимальных стратегий могли не образовывать равновесия, и выигрыши игроков в равновесиях могли существенно отличаться друг от друга. Кроме того, в антагонистических играх большую роль играют значения минимаксов и максимины. В играх с ненулевой суммой также могут быть вычислены максимины для каждого игрока, которые дадут гарантированное значение выигрыша, если соперник будет играть против него, не думая о своем выигрыше. Этот подход будет использован далее при исследовании задач переговоров.

§ 2.2. РАНДОМИЗАЦИЯ

В случае, когда не существует равновесия по Нэшу, может помочь рандомизация, т. е. расширение пространства стратегий с использованием смешанных стратегий.

Определение 2.4. *Смешанными стратегиями игроков I и II будем называть вероятностные меры μ и ν , определенные на множествах X и Y .*

При рандомизации мы приходим к новой игре, где стратегии игроков представляют собой функции распределения, а функция выигрыша представляет собой математическое ожидание выигрыша вида

$$H(\mu, \nu) = \int_X \int_Y H(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$

Под интегралом здесь понимается интеграл Лебега–Стилтьеса. Будем также писать

$$H(\mu, y) = \int_X H(x, y) d\mu(x), \quad H(x, \nu) = \int_Y H(x, y) d\nu(y).$$

Нас будет интересовать равновесие по Нэшу в этом расширении игры.

Определение 2.5. *Равновесием по Нэшу в смешанных стратегиях в игре Γ называются такие (μ^*, ν^*) , для которых выполняются следующие неравенства:*

$$H(\mu, \nu^*) \leq H(\mu^*, \nu^*) \leq H(\mu^*, \nu)$$

для произвольных стратегий μ, ν .

Рассмотрим вначале наиболее простой случай, когда у каждого из игроков есть конечный набор стратегий $X = \{1, \dots, m\}$ и $Y = \{1, \dots, n\}$. Тогда выигрыш первого игрока можно определить с помощью некоторой матрицы $A = [a(i, j)], i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Такие игры называются **матричными играми**. Смешанные стратегии представляют собой векторы $x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$ и $y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$. Выигрыш в новых стратегиях имеет вид $H(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a(i, j) x_i y_j$. Заметим, что матричные игры являются частным случаем биматричных игр, рассмотренных в предыдущей главе. Поэтому для них справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3. В матричных играх всегда существует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях, т.е. такая ситуация (x^*, y^*) , в которой выполняются условия

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a(i, j) x_i y_j^* \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a(i, j) x_i^* y_j^* \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a(i, j) x_i^* y_j \quad \forall x, y.$$

Оказывается, в играх с непрерывной функцией выигрыша равновесие по Нэшу также всегда существует. Прежде чем перейти к доказательству этого утверждения, докажем лемму.

Лемма 2.2. Если функция $H(x, y)$ непрерывна на компактном множестве $X \times Y$, то $H(\mu, y) = \int_X H(x, y) d\mu(x)$ также непрерывна по y .

Доказательство. $H(x, y)$ – непрерывна на компакте $X \times Y$ и, следовательно, равномерно непрерывна. Это значит, что для $\forall \epsilon > 0 \exists \delta$ такое, что если $\rho(y_1, y_2) < \delta$, то $|H(x, y_1) - H(x, y_2)| < \epsilon$ для всех $x \in X$. Отсюда

$$\begin{aligned} |H(\mu, y_1) - H(\mu, y_2)| &\leq \left| \int_X [H(x, y_1) - H(x, y_2)] d\mu(x) \right| \leq \\ &\leq \int_X |H(x, y_1) - H(x, y_2)| d\mu(x) \leq \epsilon \int_X d\mu(x) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Теорема 2.4. Предположим, что в игре с нулевой суммой $\Gamma = \langle I, II, X, Y, H \rangle$ множества стратегий X, Y являются компактными множествами в пространстве $R^m \times R^n$, а функция $H(x, y)$ непрерывная. Тогда в такой игре всегда существует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

Доказательство. Согласно теореме 2.1 достаточно показать, что минимакс и максимин достигаются и они равны. Покажем вначале, что

$$\underline{v} = \sup_{\mu} \inf_{\nu} H(\mu, \nu) = \max_{\mu} \min_{\nu} H(\mu, \nu).$$

Из леммы 2.2 следует, что для произвольной стратегии μ функция $H(\mu, y) = \int_X H(x, y) d\mu(x)$ непрерывна по y . По предположению Y компактное множество, следовательно, функция $H(\mu, y)$ достигает минимума. Отсюда $\sup_{\mu} \inf_{\nu} = \sup_{\mu} \min_{\nu}$. Из определения \sup для любого n найдется такая мера μ_n , что

$$\min_y H(\mu_n, y) > \underline{v} - \frac{1}{n}. \quad (2.1)$$

Так как X — компактное множество, по теореме Хелли (см. [15]) из последовательности $\{\mu_n, n = 1, 2, \dots\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\mu_{n_k}, k = 1, 2, \dots$ к вероятностной мере μ^* , причем для произвольной непрерывной функции $f(x)$ последовательность интегралов $\int_X f(x) d\mu_{n_k}(x)$ также сходится к интегралу $\int_X f(x) d\mu^*(x)$.

Тогда для любого y

$$\int_X H(x, y) d\mu_{n_k}(x) \rightarrow \int_X H(x, y) d\mu^*(x) = H(\mu^*, y).$$

Из неравенства $\underline{v} \leq \min_y H(\mu^*, y)$ и (2.1) получаем

$$\underline{v} = \min_y H(\mu^*, y) = \max_{\mu} \min_y H(\mu^*, y).$$

Аналогично доказывается, что достигается минимакс.

Теперь покажем, что $\underline{v} = \bar{v}$. Так как X и Y компактные множества, для любого n существует конечная $1/n$ -сеть, т. е. конечные множества точек $X_n = \{x_1, \dots, x_k\} \in X$ и $Y_n = \{y_1, \dots, y_m\} \in Y$ такие, что для любых $x \in X, y \in Y$ найдутся точки $x_i \in X_n$ и $y_j \in Y_n$, что $\rho(x, x_i) < 1/n$ и $\rho(y, y_j) < 1/n$.

Зафиксируем некоторое положительное число ϵ . Выберем n настолько малым, что если для произвольных $(x, y), (y, y')$ $\rho(x, x') < 1/n$ и $\rho(y, y') < 1/n$, то $|H(x, y) - H(x', y')| < \epsilon$. Это всегда можно сделать в силу непрерывности на компакте и, следовательно, равномерной непрерывности функции $H(x, y)$.

Сформируем теперь в узлах $1/n$ -сети матрицу выигрышей $[H(x_i, y_j)], i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m$ и решим данную матричную игру. Обозначим оптимальные в этой игре смешанные стратегии через $p(n) = (p_1(n), \dots, p_k(n))$ и $q(n) = (q_1(n), \dots, q_m(n))$, а значение игры v_n .

Смешанной стратегии $p(n)$ соответствует вероятностная мера μ_n , где для $A \subset X$

$$\mu_n(A) = \sum_{i: x_i \in A} p_i(n).$$

Тогда для любого $y_j \in Y_n$

$$H(\mu_n, y_j) = \sum_{i=1}^k H(x_i, y_j) p_i(n) \geq v_n. \quad (2.2)$$

Согласно лемме 2.2 для любого $y \in Y \exists y_j \in Y_n$ такое, что $\rho(y, y_j) < 1/n$ и тогда $|H(x, y) - H(x, y_j)| < \epsilon$. Отсюда

$$|H(\mu_n, y) - H(\mu_n, y_j)| \leq \epsilon.$$

Вместе с (2.2) это приводит к неравенству

$$H(\mu_n, y) > v_n - \epsilon,$$

для любого $y \in Y$. Отсюда

$$\underline{v} = \max_{\mu} \min_y H(\mu_n, y) \geq \min_y H(\mu_n, y) > v_n - \epsilon. \quad (2.3)$$

Аналогичные рассуждения дают

$$\bar{v} < v_n + \epsilon. \quad (2.4)$$

Из (2.3)–(2.4) следует

$$\bar{v} < \underline{v} + 2\epsilon.$$

Поскольку ϵ произвольно, то

$$\bar{v} \leq \underline{v},$$

и это вместе с леммой 2.1 приводит к равенству $\bar{v} = \underline{v}$. Теорема доказана.

§ 2.3. ИГРЫ С РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЫИГРЫША

В предыдущем параграфе было показано, что в играх с непрерывной функцией выигрыша и компактными множествами стратегий равновесие существует среди смешанных стратегий. Здесь мы покажем, что если функция выигрыша имеет разрывы, то равновесия среди смешанных стратегий может не быть.

Игра полковника Блотто. Представим себе полковника Блотто, который должен захватить два горных перевала (рис. 2.1).

Его силы представляют собой некоторый единичный ресурс, который он должен распределить между двумя перевалами. Его противник делает то же самое. Если силы одного из игроков превосходят силы противника на данном перевале, то его выигрыш на этом участке равен единице. Если силы равны, то выигрыш равен нулю. При этом на одном из перевалов противник полковника Блотто уже сосредоточил дополнительные силы размером $1/2$.

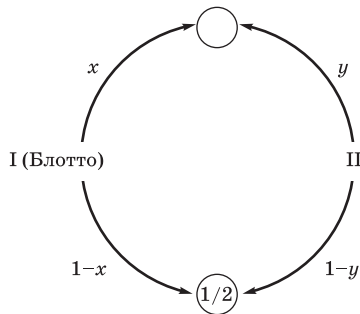


Рис. 2.1
Игра полковника Блотто

Итак, мы имеем игру с постоянной суммой $\Gamma = \langle I, II, X, Y, H \rangle$, где $X = [0, 1]$, $Y = [0, 1]$ — множества стратегий игроков I и II. После того как полковник Блотто сосредоточил свои силы $(x, 1 - x)$ на переломах, а его противник соответственно $(y, 1 - y)$, то функция выигрыша игрока I принимает вид

$$H(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y) + \operatorname{sgn}\left(1 - x - \left(\frac{1}{2} + 1 - y\right)\right).$$

Ее вид представлен на рис. 2.2. Функция $H(x, y)$ имеет разрывы при $x = y$ и $y = x + 1/2$.

Вычислим максимум и минимум в этой игре. Пусть мера μ сосредоточена в точках $x = \{0, 1/2, 1\}$ и имеет одинаковые веса $1/3$. Тогда для любого $y \in [0, 1]$ справедливо

$$H(\mu, y) = \frac{1}{3}H(0, y) + \frac{1}{3}H(1/2, y) + \frac{1}{3}H(1, y) \geq -\frac{2}{3}.$$

Отсюда $\underline{v} = \sup_{\mu} \inf_{\nu} H(\mu, \nu) \geq -2/3$.

С другой стороны, будем выбирать стратегию y в соответствии со следующим правилом: если $\mu[1/2, 1] \geq 2/3$, то положим $y = 1$, и тогда $H(\mu, 1) \leq -2/3$; если же $\mu[1/2, 1] < 2/3$, то $\mu[0, 1/2] > 1/3$, и тогда существует δ такое, что $\mu[0, 1/2 - \delta] \geq 1/3$, положим $y = 1/2 - \delta$. Нетрудно видеть, что и в этом случае $H(\mu, 1) \leq -2/3$. Следовательно, для любого μ $\inf_y H(\mu, y) \leq -2/3$, значит, $\sup_{\mu} \inf_{\nu} H(\mu, \nu) \leq -2/3$. Мы вычислили нижнее значение игры:

$$\underline{v} = \sup_{\mu} \inf_{\nu} H(\mu, \nu) = -2/3. \quad (3.1)$$

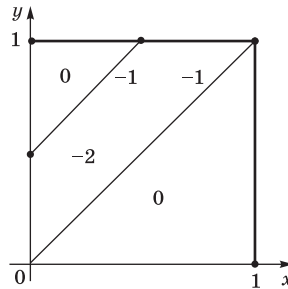


Рис. 2.2
Функция выигрыша

Теперь давайте вычислим верхнее значение игры \bar{v} . Пусть мера ν сосредоточена в точках $y = \{1/4, 1/2, 1\}$ и имеет веса $\nu(1/4) = 1/7$, $\nu(1/2) = 2/7$, $\nu(1) = 4/7$. Из рис. 2.2 находим $H(0, \nu) = H(1, \nu) = -4/7$, $H(1/4, \nu) = -5/7$, $H(1/2, \nu) = -6/7$, и $H(x, \nu) = -6/7$ для $x \in (0, 1/4)$, $H(x, \nu) = -4/7$ для $x \in (1/4, 1/2)$ и $H(x, \nu) = -8/7$ для $x \in (1/2, 1)$. Таким образом, для данной стратегии второго игрока при всех x $H(x, \nu) \leq -4/7$. Отсюда $\bar{v} = \inf_{\nu} \sup_{\mu} H(\mu, \nu) \leq -4/7$.

Чтобы доказать обратное неравенство, будем выбирать стратегию первого игрока x в соответствии с следующим правилом. Если $\nu(1) \leq 4/7$, то положим $x = 1$; тогда первый игрок гарантирует себе выигрыш $H(1, \nu) \geq -4/7$. Предположим теперь, что $\nu(1) > 4/7$, т.е. $\nu[0, 1) < 3/7$. Здесь возможны два случая: либо $\nu[0, 1/2) \leq 2/7$, либо $\nu[0, 1/2) > 2/7$. В первом случае положим $x = 0$, тогда первый игрок гарантирует себе $H(0, \nu) \geq -4/7$. Во втором случае существует $\delta > 0$ такое, что $\nu[0, 1/2 - \delta) \geq 2/7$. Вместе с условием $\nu[0, 1) < 3/7$ это дает $\nu[1/2 - \delta, 1) < 1/7$. Полагая стратегию $x = 1/2 - \delta$, получим $H(1/2 - \delta, \nu) > -2/7 > -4/7$.

Мы видим, что для произвольной смешанной стратегии ν первый игрок гарантирует себе выигрыш $\sup_x H(x, \nu) \geq -4/7$. Отсюда $\bar{v} = \inf_{\nu} \sup_{\mu} H(\mu, \nu) \geq -4/7$.

Итак, мы нашли точно верхнее значение игры:

$$\bar{v} = \inf_{\nu} \sup_{\mu} H(\mu, \nu) = -4/7. \quad (3.2)$$

Сравнивая (3.1) и (3.2), мы видим, что в игре полковника Блотто нижнее и верхнее значения игры не совпадают, следовательно, эта игра не имеет равновесия.

Однако в ряде случаев равновесие существует и для разрывных функций выигрыша. Общая схема нахождения равновесия в таких играх может быть описана следующим образом.

Теорема 2.5. Пусть в бесконечной игре $\Gamma = \langle I, II, X, Y, H \rangle$ существует равновесие по Нэшу (μ^*, ν^*) и функции выигрыша $H(\mu^*, y)$ и $H(x, \nu^*)$ непрерывны по y и x . Тогда выполняется

$$H(\mu^*, y) = v, \quad \forall y \text{ на носителе меры } \nu^*, \quad (3.3)$$

$$H(x, \nu^*) = v, \quad \forall x \text{ на носителе меры } \mu^*, \quad (3.4)$$

где v значение игры Γ .

Доказательство. Пусть μ^* оптимальная смешанная стратегия игрока I, тогда $H(\mu^*, y) \geq v$ для всех $y \in Y$. Предположим, что (3.3) не верно, т.е. $H(\mu^*, y') > v$ в некоторой точке y' . В силу непрерывности функции $H(\mu^*, y)$ это неравенство будет выполняться и в некоторой окрестности $U_{y'}$ точки y' . y' принадлежит носителю меры ν^* , отсюда $\nu^*(U_{y'}) > 0$. Но тогда приходим к противоречию

$$\begin{aligned} H(\mu^*, \nu^*) &= \int_Y H(\mu^*, y) d\nu^*(y) = \int_{U_{y'}} H(\mu^*, y) d\nu^*(y) + \\ &+ \int_{Y \setminus U_{y'}} H(\mu^*, y) d\nu^*(y) > v. \end{aligned}$$

Это доказывает (3.3). Аналогично доказывается (3.4).

Дифференцируя уравнения (3.3)–(3.4) приходим к дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial H(\mu^*, y)}{\partial y} = 0, \quad \forall y \text{ на носителе меры } \nu^*,$$

и

$$\frac{\partial H(x, \nu^*)}{\partial x} = 0, \quad \forall x \text{ на носителе меры } \mu^*,$$

из которых можно найти оптимальные стратегии. Ниже мы продемонстрируем это на дискретных арбитражных процедурах.

Заметим, что теорема 2.5 дает необходимые условия для нахождения равновесия в смешанных стратегиях в играх с разрывной функцией выигрыша $H(x, y)$. Более того, оптимальные стратегии можно найти, даже если функции $H(\mu^*, y)$ и $H(x, \nu^*)$ являются разрывными. Главное, чтобы выполнялись соотношения (3.3)–(3.4) на носителях распределений, а для остальных x и y выполнялось $H(x, \nu^*) \leq v \leq H(\mu^*, y)$.

§ 2.4. ВЫПУКЛО-ВОГНУТЫЕ И ЛИНЕЙНО-ВЫПУКЛЫЕ ИГРЫ

Игры, в которых множества стратегий $X \subset R^m, Y \subset R^n$ являются компактными выпуклыми множествами, а функция выигрыша $H(x, y)$ непрерывна, вогнута по x и выпукла по y , называются **вогнуто-выпуклыми играми**. Согласно теореме 1.1 предыдущей главы справедливо утверждение.

Теорема 2.6. *В вогнуто-выпуклых играх всегда существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.*

Частным случаем вогнуто-выпуклых игр являются **линейно-выпуклые игры** $\Gamma = \langle X, Y, H(x, y) \rangle$, в которых стратегии — это точки из симплексов $X = \{(x_1, \dots, x_m): x_i \geq 0, i = 1, \dots, m; \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$, и $Y = \{(y_1, \dots, y_n): y_j \geq 0, j = 1, \dots, n; \sum_{j=1}^n y_j = 1\}$, а функция выигрыша определяется с помощью матрицы $A = [a(i, j)]$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i f\left(\sum_{j=1}^n a(i, j) y_j\right). \quad (4.1)$$

В (4.1) предполагается, что f неубывающая выпуклая функция. Оказывается, что существует связь равновесий в такой игре с равновесиями в матричной игре с матрицей A .

Теорема 2.7. *Любое равновесие по Нэшу в матричной игре с матрицей A является равновесием в линейно-выпуклой игре.*

Доказательство. Пусть (x^*, y^*) равновесие по Нэшу в матричной игре. Тогда по определению

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a(i, j) x_i y_j^* \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a(i, j) x_i^* y_j^* \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a(i, j) x_i^* y_j \quad \forall x, y. \quad (4.2)$$

Из выпуклости функции f следует

$$H(x^*, y) = \sum_{i=1}^m x_i^* f\left(\sum_{j=1}^n a(i, j) y_j\right) \geq f\left(\sum_{i=1}^m x_i^* \sum_{j=1}^n a(i, j) y_j\right),$$

что вместе с монотонностью f и (4.2) приводит к неравенству

$$f\left(\sum_{i=1}^m x_i^* \sum_{j=1}^n a(i, j) y_j\right) \geq f\left(\sum_{i=1}^m x_i^* \sum_{j=1}^n a(i, j) y_j^*\right). \quad (4.3)$$

Теперь заметим, что левая часть неравенства (4.2) выполняется для произвольных x , в частности и для всех чистых стратегий первого игрока, т. е.

$$\sum_{j=1}^n a(i, j) y_j^* \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a(i, j) x_i^* y_j^*, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда из монотонности функции f следует

$$f\left(\sum_{j=1}^n a(i, j) y_j^*\right) \leq f\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a(i, j) x_i^* y_j^*\right), \quad i = 1, \dots, m.$$

Умножая эти неравенства на x_i и складывая, приходим к неравенству

$$\sum_{i=1}^m x_i f\left(\sum_{j=1}^n a(i, j) y_j^*\right) \leq f\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a(i, j) x_i^* y_j^*\right). \quad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) вытекает, что для произвольных x, y имеет место неравенство

$$H(x^*, y) \geq H(x, y^*),$$

а отсюда немедленно следует, что (x^*, y^*) равновесие в данной игре.

Заметим, что обратное утверждение неверно. Например, если функция f постоянна, то любая ситуация (x, y) будет образовывать равновесие в этой игре, в то время как в матричной игре может быть какой-то определенный набор равновесий. Линейно-выпуклые игры возникают в задачах распределения ресурсов. В качестве примера рассмотрим задачу обороны города.

Оборона города. Представим ситуацию, где один игрок (полковник Блотто) ведет нападение на город танковыми частями, а второй защищает его артиллерийскими соединениями. Рассмотрим игру, в которой игрок I должен распределить свои ресурсы среди легких и тяжелых танков, а игрок II распределяет свои ресурсы между легкой и тяжелой артиллерией. Для простоты положим ресурсы игроков равными единице.

Определим характеристики эффективности вооружений. Пусть скорострельность тяжелой артиллерии в три раза ниже, чем у легкой артиллерии, и легкая артиллерия в пять раз чаще должна вести огонь по тяжелым танкам. Кроме того, предположим, что заданы вероятности выживания танков в соответствии с таблицей.

	Легкая артиллерия	Тяжелая артиллерия
Легкие танки	$1/2$	$1/4$
Тяжелые танки	$3/4$	$1/2$

Тогда если игрок I имеет соотношение x легких и $1 - x$ тяжелых танков, а игрок II использует для обороны соответственно y и $1 - y$ легкой и тяжелой артиллерии, то после боя у полковника Блотто останется в среднем следующее количество танков:

$$H(x, y) = x \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha y} \left(\frac{1}{4}\right)^{\beta(1-y)} + (1-x) \left(\frac{3}{4}\right)^{5\alpha y} \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta(1-y)/3},$$

где α и β есть некоторые параметры задачи. Перепишав функцию $H(x, y)$ в виде

$$H(x, y) = x \exp \left[-\ln 2(\alpha y + 2/3\beta(1-y)) \right] + \\ + (1-x) \exp \left[-5\alpha y \ln 4/3 - 1/3\beta(1-y) \ln 2 \right],$$

мы видим, что данная игра является линейно-выпуклой с функцией $f(x) = \exp[x]$, и поэтому равновесие можно найти, решив матричную игру с матрицей

$$-\ln 2 \begin{pmatrix} \alpha & 2/3\beta \\ 5\alpha(2 - \ln 2/\ln 3) & 1/3\beta \end{pmatrix}.$$

Например, если $\alpha = 1$, $\beta = 2$, мы получаем, что оптимальная стратегия игрока I $x^* \approx 0.809$, а игрока II $y^* \approx 0.383$. При этом значение игры равно $v \approx 0.433$. Таким образом, при оптимальном поведении у полковника Блотто останется в конце операции меньше половины ресурсов.

§ 2.5. ВЫПУКЛЫЕ ИГРЫ

Если функция выигрыша непрерывна и вогнута по x или выпукла по y , то ситуация равновесия в соответствии с теорией непрерывных игр, вообще говоря, достигается в смешанных стратегиях, однако в выпуклом случае можно определить структуру оптимальных смешанных стратегий. Для этого нам понадобится теорема Хелли из выпуклого анализа.

Теорема 2.8. Пусть S — семейство компактных выпуклых множеств в R^m , число которых не менее чем $m + 1$, и при этом пересечение любых $m + 1$ множеств из этого семейства не пусто. Тогда существует точка, принадлежащая всем множествам.

Доказательство. Вначале предположим, что S состоит из конечного числа множеств. Доказательство проведем по индукции. Если S состоит из $m + 1$ множества, утверждение очевидно. Пусть теперь оно верно для любого семейства, состоящего из $k \geq m + 1$ множеств, и докажем его для S , в котором $k + 1$ множество. Пусть $S = \{X_1, \dots, X_{k+1}\}$. Рассмотрим новые $k + 1$ семейства вида $S \setminus X_i$, $i = 1, \dots, k + 1$. Каждое семейство $S \setminus X_i$ состоит из k множеств, поэтому в силу индукционного предположения существует точка x_i , принадлежащая всем множествам из семейства S , кроме X_i , $i = 1, \dots, k + 1$. Число таких точек — $k + 1 \geq m + 2$.

Рассмотрим теперь систему из $m + 1$ линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 0. \quad (5.1)$$

Так как число неизвестных λ_i , $i = 1, \dots, k + 1$ больше числа уравнений, эта система имеет ненулевое решение. Разобьем их на две группы, где они имеют разные знаки. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, l$ и $\lambda_i \leq 0$, $i = l + 1, \dots, k + 1$. Тогда из (5.1) следует

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i = - \sum_{i=l+1}^{k+1} \lambda_i = \lambda > 0,$$

и

$$x = \sum_{i=1}^l \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = \sum_{i=l+1}^{k+1} \frac{-\lambda_i}{\lambda} x_i. \quad (5.2)$$

Из построения для $i = 1, \dots, l$ все $x_i \in X_{l+1}, \dots, X_{k+1}$, следовательно, из выпуклости этих множеств выпуклая комбинация $x = \sum_{i=1}^l \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$ принадлежит пересечению этих множеств. Аналогично для всех $i = l + 1, \dots, k + 1$ $x_i \in X_1, \dots, X_l$, следовательно, $x \in \bigcap_{i=1}^l X_i$. Таким образом, существует точка x , принадлежащая всем множествам X_i , $i = 1, \dots, k + 1$.

Итак, если S конечное семейство, теорема доказана.

Покажем, что утверждение остается верным для произвольного семейства. Итак, пусть семейство $S = S_\alpha$ такое, что любая конечная его подсистема имеет непустое пересечение. Выберем какое-то множество X из этого семейства и рассмотрим новое семейство $S_\alpha^x = S_\alpha \cap X$. Оно также состоит из компактных выпуклых множеств.

Предположим, что $\bigcap_\alpha S_\alpha^x = \emptyset$. Тогда дополнение $\overline{\bigcap_\alpha S_\alpha^x} = \bigcup_\alpha \overline{S_\alpha^x} = R^m$. В силу компактности X из бесконечного покрытия $\{\overline{S_\alpha^x}\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{\overline{S_{\alpha_i}^x}, i = 1, \dots, r\}$ множества X . Но тогда конечное семейство $\{S_{\alpha_i}^x, i = 1, \dots, r\}$ имеет пустое пересечение, что противоречит условию. Значит, $\bigcap_\alpha S_\alpha^x = \bigcap_\alpha S_\alpha$ не пусто.

Теорема 2.9. Пусть $X \subset R^m$ и $Y \subset R^n$ компактные множества, Y выпукло и функция $H(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов и выпукла по y . Тогда игрок II имеет оптимальную чистую стратегию, а оптимальная стратегия игрока I является смешанной, сосредоточенной не более, чем в $(m + 1)$ точке множества X . При этом, значение игры равно

$$v = \max_{x_1, \dots, x_{m+1}} \min_y \max\{H(x_1, y), \dots, H(x_{m+1}, y)\} = \min_y \max_x H(x, y).$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$h(x_1, \dots, x_{m+1}, y) = \max\{H(x_1, y), \dots, H(x_{m+1}, y)\}, \\ x_i \in R^m, \quad i = 1, \dots, m + 1, \quad y \in R^n.$$

Она непрерывна по совокупности аргументов. Действительно,

$$|h(x'_1, \dots, x'_{m+1}, y') - h(x''_1, \dots, x''_{m+1}, y'')| = |H(x'_{i_1}, y') - H(x''_{i_2}, y'')|, \quad (5.3)$$

где

$$H(x'_{i_1}, y') = \max\{H(x'_1, y'), \dots, H(x'_{m+1}, y')\}, \\ H(x''_{i_2}, y'') = \max\{H(x''_1, y''), \dots, H(x''_{m+1}, y'')\}.$$

В (5.3) возможно либо

$$H(x'_{i_1}, y') \geq H(x''_{i_2}, y''), \quad (5.4)$$

либо обратное неравенство. Предположим (5.4), в другом случае рассуждения аналогичные.

Функция $H(x, y)$ непрерывна на компактном множестве $X^{m+1} \times Y$ и, следовательно, равномерно непрерывна. Тогда для любого $\epsilon > 0$

найдется $\delta > 0$, что если $\|x'_i - x''_i\| < \delta$, $i = 1, \dots, n+1$ и $\|y' - y''\| < \delta$, то

$$0 \geq H(x'_{i_1}, y') - H(x''_{i_2}, y'') \leq H(x'_{i_1}, y') - H(x''_{i_1}, y'') < \epsilon.$$

Это доказывает непрерывность функции h .

Отсюда сразу вытекает существование

$$\begin{aligned} w &= \max_{x_1, \dots, x_{m+1}} \min_y h(x_1, \dots, x_{m+1}, y) = \\ &= \max_{x_1, \dots, x_{m+1}} \min_y \max\{H(x_1, y), \dots, H(x_{m+1}, y)\}. \end{aligned}$$

Поскольку $\min_y H(x, y) \leq \max_{\mu} \min_y H(\mu, y)$ для любого x , то

$$w \leq v.$$

Для того чтобы доказать обратное неравенство, рассмотрим бесконечное семейство множеств $S_x = \{y : H(x, y) \leq w\}$. Так как $H(x, y)$ выпукла по y и непрерывна, то все множества из этого семейства выпуклы и компактны. Заметим, что любая конечная подсистема этого семейства, состоящая из $m+1$ множества $S_{x_i} = \{y : H(x_i, y) \leq w\}$, $i = 1, \dots, m+1$, имеет общую точку.

Действительно, если x_1, \dots, x_{m+1} зафиксированы, то в силу непрерывности h и компактности Y в некоторой точке \bar{y} достигается минимум функции $h(x_1, \dots, x_{m+1}, y)$. Тогда

$$\begin{aligned} w &= \max_{x_1, \dots, x_{m+1}} \min_y h(x_1, \dots, x_{m+1}, y) \geq \\ &\geq \max\{H(x_1, \bar{y}), \dots, H(x_{m+1}, \bar{y})\} \geq H(x_i, \bar{y}), \quad i = 1, \dots, m+1, \end{aligned}$$

т. е. \bar{y} принадлежит всем S_{x_i} , $i = 1, \dots, m+1$.

Из теоремы Хелли вытекает, что существует такая точка y^* , для которой будет выполняться

$$H(x, y^*) \leq w, \quad \forall x \in X.$$

Отсюда $\max H(x, y^*) \leq w$ и, значит, $v \leq w$. Таким образом, мы доказали, что $v \stackrel{x}{=} w$ или

$$v = \max_{x_1, \dots, x_{m+1}} \min_y \max\{H(x_1, y), \dots, H(x_{m+1}, y)\}.$$

Пусть внешний максимум достигается в точках $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m+1}$. Тогда

$$v = \min_y \max\{H(\bar{x}_1, y), \dots, H(\bar{x}_{m+1}, y)\} = \min_y \max_{\mu_0} \sum_{i=1}^{m+1} H(\bar{x}_i, y) \mu_i,$$

где $\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{m+1})$ — дискретное распределение, сосредоточенное в точках $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m+1}$.

В вогнуто-выпуклой игре на компакте с функцией выигрыша

$$H(\bar{\mu}, y) = \sum_{i=1}^{m+1} H(\bar{x}_i, y) \mu_i$$

существует равновесие по Нэшу $(\bar{\mu}^*, y^*)$, такое что

$$\max_{\bar{\mu}} \min_y H(\bar{\mu}, y) = \min_y \max_{\bar{\mu}} H(\bar{\mu}, y) = v.$$

Отсюда следует оптимальность чистой стратегии y^* и смешанной стратегии $\bar{\mu}$, сосредоточенной в $m + 1$ точке, поскольку

$$H(\bar{\mu}^*, y^*) = \min_y H(\bar{\mu}^*, y) \leq H(\bar{\mu}^*, y), \forall y,$$

$$H(\bar{\mu}^*, y^*) = \max_{\bar{\mu}} H(\bar{\mu}, y^*) = \max_{\mu} H(\mu, y^*) \geq H(x, y), \forall x.$$

Теорема доказана.

Следствие. В выпуклой игре, где множества стратегий игроков представляют собой линейные отрезки, игрок II имеет чистую оптимальную стратегию, а оптимальная стратегия игрока I либо является чистой, либо представляет собой вероятностную смесь двух чистых стратегий.

Аналогичное утверждение выполняется для вогнутой игры.

Теорема 2.10. Пусть $X \subset R^m$ и $Y \subset R^n$ компактные множества, X выпукло и функция $H(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов и вогнута по x . Тогда игрок I имеет оптимальную чистую стратегию, а оптимальная стратегия игрока II является смешанной, сосредоточенной не более чем в $(n + 1)$ точке множества Y . При этом значение игры равно

$$v = \min_{y_1, \dots, y_{n+1}} \max_x \max\{H(x, y_1), \dots, H(x, y_{n+1})\} = \max_x \min_y H(x, y).$$

§ 2.6. АРБИТРАЖНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ

Рассмотрим игру двух лиц, в которой участвуют игрок I (профсоюз работников компании) и игрок II (менеджер компании). Участники должны договориться о величине прибавления заработной платы. Каждый из игроков вносит некое предложение (соответственно x и y), и

если происходит конфликт (т. е. если $x > y$), то стороны обращаются в арбитражный суд, который должен поддержать какую-то сторону. Существуют различного вида арбитражные процедуры — арбитраж по последнему предложению, согласительный арбитраж, арбитраж с поощрением или наказанием, различные комбинации этих процедур.

Начнем их рассмотрение с **арбитража по последнему предложению**. В этой процедуре, если конфликта нет, т. е. если $x \leq y$, то стороны договариваются о величине прибавки в размере между x и y . Для определенности давайте считать ее равной $(x + y)/2$. Если же $x < y$, стороны обращаются к третьей стороне (назовем ее арбитром). Арбитр имеет некое мнение α , и тогда он принимает ту сторону, чье предложение ближе к данному значению α .

Таким образом, мы имеем дело с игрой вида $\Gamma = \langle I, II, R^1, R^1, H_\alpha \rangle$, где функция выигрыша имеет вид

$$H_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, & \text{если } x \leq y, \\ x, & \text{если } x > y, |x - \alpha| < |y - \alpha|, \\ y, & \text{если } x > y, |x - \alpha| > |y - \alpha|, \\ \alpha, & \text{если } x > y, |x - \alpha| = |y - \alpha|. \end{cases} \quad (6.1)$$

Если α фиксировано, то очевидно, что равновесием является пара стратегий (α, α) . Однако в случае когда мнение арбитра может меняться, задача становится нетривиальной.

Рассмотрим случай, когда мнение арбитра является случайным, т. е. α является случайной величиной с некоторым непрерывным распределением $F(a)$, $a \in R^1$. Предположим, что игрокам известен вид $F(a)$ и существует плотность $f(a)$.

Тогда если $y < x$, то в соответствии с видом функции выигрыша арбитр принимает предложение y , если $\alpha < (x + y)/2$ (см. рис. 2.3), в противном случае — предложение x . Выигрыш игрока I является случайным с математическим ожиданием $H(x, y) = EH_\alpha(x, y)$:

$$H(x, y) = F\left(\frac{x+y}{2}\right)y + \left(1 - F\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)x. \quad (6.2)$$

Чтобы найти минимаксные стратегии, продифференцируем (6.2)

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 1 - F\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{y-x}{2}f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = F\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{y-x}{2}f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0.$$

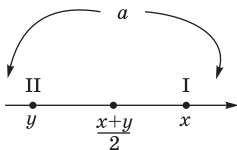


Рис. 2.3
Арбитражная игра

Разность этих уравнений дает

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

т. е. точка $(x+y)/2$ совпадает с медианой распределения F , откуда $(x+y)/2 = m_F$. С другой стороны, складывая эти уравнения, получим

$$(y-x)f(m_F) = 1.$$

Следовательно, если равновесие в чистых стратегиях существует, то оно имеет вид

$$x = m_F + \frac{1}{2f(m_F)}, \quad y = m_F - \frac{1}{2f(m_F)}, \quad (6.3)$$

и значение игры равно m_F .

Достаточным условием для того, чтобы (6.3) было равновесием в игре, является

$$H\left(x, m_F - \frac{1}{2f(m_F)}\right) \leq m_F, \quad \forall x \geq m_F, \quad (6.4)$$

$$H\left(m_F + \frac{1}{2f(m_F)}, y\right) \geq m_F, \quad \forall y \leq m_F. \quad (6.5)$$

Пользуясь тем, что m_F медиана распределения F , условие (6.4) можно представить в виде

$$\left(\frac{1}{2} + \int_{m_F}^{U(x)} f(a) da\right) \left(x - m + \frac{1}{2f(m_F)}\right) \geq x - m_F,$$

где $U(x) = \left(x + m_F - \frac{1}{2f(m_F)}\right) / 2$, или

$$\int_{m_F}^{U(x)} f(a) da \geq \frac{x - m_F - 1/(2f(m_F))}{2(x - m_F + 1/(2f(m_F)))}, \quad \forall x > m_F. \quad (6.6)$$

Аналогично условие (6.5) можно представить в виде

$$\int_{V(y)}^{m_F} f(a) da \geq \frac{y - m_F + 1/(2f(m_F))}{2(y - m_F - 1/(2f(m_F)))}, \quad \forall y < m_F. \quad (6.7)$$

Здесь $V(y) = \left(y + m_F + \frac{1}{2f(m_F)}\right) / 2$.

Теорема 2.11. *Если в арбитражной процедуре по последнему предложению распределение $F(a)$ удовлетворяет условиям (6.6)–(6.7), то равновесие по Нэшу достигается в чистых стратегиях и имеет вид $x = m_F + \frac{1}{2f(m_F)}$, $y = m_F - \frac{1}{2f(m_F)}$.*

Например, если распределение $F(a)$ является **нормальным** с параметрами \bar{a} и σ , медианой является \bar{a} , и согласно (6.3) оптимальные предложения игроков должны быть

$$x = \bar{a} + \sqrt{\pi/2}, \quad y = \bar{a} - \sqrt{\pi/2}.$$

Для **равномерного** распределения $F(a)$ на интервале $[c, d]$ медианой является $(c + d)/2$ и оптимальные предложения игроков должны быть концы интервала

$$x = \frac{c + d}{2} + \frac{d - c}{2} = d, \quad y = \frac{c + d}{2} - \frac{d - c}{2} = c.$$

Заметим, что игры с функцией выигрыша (6.2) в ряде случаев являются вогнуто-выпуклыми, хотя и не всегда. Более того, если распределение F разрывно, то и функция выигрыша (6.2) становится разрывной. Поэтому равновесие в данной игре не всегда достигается в чистых стратегиях, для этого после нахождения стратегий вида (6.3) нужно проверить выполнение условий на равновесие. Ниже мы покажем, что даже для простых распределений равновесие в арбитраже по последнему предложению достигается в смешанных стратегиях.

Согласительный арбитраж. Если в арбитражной процедуре по последнему предложению арбитр выбирает одно из двух предложений, то

в согласительном арбитраже результатом спора является именно решение арбитра. Это решение, конечно, зависит от предложений участников. Мы рассмотрим здесь комбинированную арбитражную процедуру, предложенную Брамсом и Мериллом.

В этой процедуре мнение арбитра α , как и выше, есть случайная величина с известной функцией распределения $F(a)$ и плотностью распределения $f(a)$. Игроки соответственно профсоюз (игрок I) и менеджер (игрок II) вносят свои предложения x и y . Если α принадлежит интервалу предложений, то осуществляется арбитраж по последнему предложению, если же нет, то проходит решение арбитра.

Таким образом, мы имеем дело с игрой вида $\Gamma = \langle I, II, R^1, R^1, H \rangle$ с функцией выигрыша $H(x, y) = EH_\alpha(x, y)$, где

$$H_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, & \text{если } x \leq y, \\ x, & \text{если } x > \alpha > y, x - \alpha < \alpha - y, \\ y, & \text{если } x > \alpha > y, x - \alpha > \alpha - y, \\ \alpha, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6.8)$$

Предположим, что плотность распределения $f(a)$ является симметричной унимодальной функцией (т. е. имеющей один максимум). Покажем, что в этом случае равновесие достигается в чистых стратегиях и оптимальной стратегией для обоих игроков является значение m_F — медиана распределения $F(a)$.

Пусть игрок II использует стратегию $y = m_F$. Тогда выигрыш $H(x, m_F)$ первого игрока в соответствии с правилами арбитража равен $(x + m_F)/2$, если $x < m_F$, что меньше, чем если бы он использовал стратегию $x = m_F$. Если же $x \geq m_F$, то согласно (6.8) выигрыш имеет вид

$$\begin{aligned} H(x, m_F) &= \int_{-\infty}^{m_F} a dF(a) + \int_x^{\infty} a dF(a) + \int_{m_F}^{\frac{x+m_F}{2}} m_F dF(a) + \int_{\frac{x+m_F}{2}} x dF(a) = \\ &= m_F - \int_{m_F}^{\frac{x+m_F}{2}} (a - m_F) dF(a) + \int_{\frac{x+m_F}{2}} (x - a) dF(a). \end{aligned}$$

Последнее выражение не больше, чем m_F . Это следует из того, что функция

$$g(x) = - \int_{m_F}^{\frac{x+m_F}{2}} (a - m_F) dF(a) + \int_{\frac{x+m_F}{2}} (x - a) dF(a)$$

является невозрастающей. Действительно, ее производная

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{x - m_F}{2} f\left(\frac{x + m_F}{2}\right) + \int_{\frac{x+m_F}{2}} f(a) da \leq \\ &\leq 0 - \int_{m_F}^{\frac{x+m_F}{2}} (a - m_F) dF(a) + \int_{\frac{x+m_F}{2}} (x - a) dF(a), \end{aligned}$$

поскольку значение функции $f(a)$ в точке $(x + m_F)/2$ не меньше по условию значений в точках $a \in [(x + m_F)/2, x]$.

Отсюда $H(x, m_F) \leq m_F$ для всех $x \in R^1$. Это означает, что наилучший ответ первого игрока есть также m_F . Аналогичные рассуждения справедливы для поведения второго игрока. Таким образом, равновесие в данной арбитражной процедуре также достигается в чистых стратегиях и совпадает с медианой распределения $F(a)$.

Теорема 2.12. *Если в согласительной арбитражной процедуре плотность распределения $f(a)$ является симметричной и унимодальной, то равновесие по Нэшу в игре состоит из одинаковых чистых стратегий m_F .*

Арбитраж с наказанием. В рассмотренных арбитражных процедурах каждый из игроков может внести какие угодно предложения, в том числе и сильно дискриминирующие противника. Чтобы такого не происходило, арбитр может использовать арбитражную процедуру с наказанием. Рассмотрим одну из таких схем, предложенных Зенгом.

В этой процедуре мнение арбитра α , как и выше, есть случайная величина с известной функцией распределения $F(a)$ и плотностью распределения $f(a)$. Обозначим математическое ожидание $E\alpha = \int_{R^1} a dF(a)$

через E . Игроки соответственно профсоюз (игрок I) и менеджер (игрок II) вносят свои предложения x и y . Арбитр использует согласительный арбитраж, но добавляет к своему решению некую величину, которая зависит от предложений сторон. Ее можно трактовать как некоторое наказание игрока. Пусть решение арбитра a . Тогда если $|x - a| < |y - a|$, то арбитр принимает сторону первого игрока и «наказывает» второго

игрока на величину $a - y$, т. е. решением является $a + (a - y) = 2a - y$. Здесь наказание тем больше, чем больше разница между мнением арбитра и предложением второго игрока. Если же $|x - a| > |y - a|$, то арбитр «наказывает» первого игрока, и решением становится $a - (x - a) = 2a - x$.

Следовательно, в данной арбитражной игре функция выигрыша имеет вид $H(x, y) = EH_\alpha(x, y)$, где

$$H_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, & \text{если } x \leq y, \\ 2\alpha - y, & \text{если } x > y, |x - \alpha| < |\alpha - y|, \\ 2\alpha - x, & \text{если } x > y, |x - \alpha| > |\alpha - y|, \\ \alpha, & \text{если } x > y, |x - \alpha| = |\alpha - y|. \end{cases} \quad (6.9)$$

Теорема 2.13. В арбитражной процедуре с наказанием с функцией выигрыша (6.9) существует и единственно равновесие по Нэшу в чистых стратегиях, которое состоит из одинаковых чистых стратегий E .

Доказательство. Докажем вначале, что ситуация (E, E) образует равновесие в игре. Пусть игроки используют чистые стратегии x и y и $x > y$. Тогда выигрыш в данной игре равен

$$H(x, y) = \int_{-\infty}^{\frac{x+y}{2}-0} (2a - x) dF(a) + \int_{\frac{x+y}{2}+0}^{\infty} (2a - y) dF(a) + \frac{x+y}{2} \left[F\left(\frac{x+y}{2}\right) - F\left(\frac{x+y}{2}-0\right) \right]. \quad (6.10)$$

Здесь мы учитываем, что функция распределения непрерывна справа и в точке $(x+y)/2$ возможен разрыв функции $F(a)$. Представим (6.10) в виде

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2a dF(a) - 2\frac{x+y}{2} \left(F\left(\frac{x+y}{2}\right) - F\left(\frac{x+y}{2}-0\right) \right) - \\ &- xF\left(\frac{x+y}{2}-0\right) - y\left(1 - F\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) + \\ &+ \frac{x+y}{2} \left[F\left(\frac{x+y}{2}\right) - F\left(\frac{x+y}{2}-0\right) \right] = \\ &= 2E - y - \frac{x-y}{2} \left[F\left(\frac{x+y}{2}\right) + F\left(\frac{x+y}{2}-0\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Предположим, что второй игрок использует чистую стратегию $y = E$. Тогда из (6.11) следует, что для $x \geq E$ выигрыш первого игрока

$$H(x, E) = E - \frac{x - E}{2} \left[F\left(\frac{x + E}{2}\right) + F\left(\frac{x + E}{2} - 0\right) \right] \leq E.$$

Если же $x < E$, то

$$H(x, E) = \frac{x + E}{2} < E.$$

Аналогично проверяется, что $H(E, y) \geq E$ для всех $y \in R^1$.

Докажем теперь единственность равновесия (E, E) . Пусть существует другое равновесие в чистых стратегиях (x, y) . В равновесии не может быть $x < y$, иначе первый игрок мог бы увеличить свой выигрыш, увеличивая свое предложение в интервале $[x, y]$.

Предположим $x > y$. Обозначим середину интервала $[y, x]$ через z . Если $F(z) = 0$, то согласно (6.11)

$$\begin{aligned} H(x, y) - H(x, z) &= (z - y) + \frac{x - z}{2} \left[F\left(\frac{x + z}{2}\right) + F\left(\frac{x + z}{2} - 0\right) \right] - \\ &\quad - \frac{x - y}{2} [F(z) + F(z - 0)]. \end{aligned}$$

Но $F(z) = 0$ и отсюда $F(z - 0) = 0$, следовательно,

$$H(x, y) - H(x, z) = (z - y) + \frac{x - z}{2} \left[F\left(\frac{x + z}{2}\right) + F\left(\frac{x + z}{2} - 0\right) \right] > 0.$$

Отсюда стратегия z доминирует y , и y не является оптимальной стратегией второго игрока.

Если же $F(z) > 0$, то рассмотрим разность

$$\begin{aligned} H(z, y) - H(x, y) &= \frac{x - y}{2} [F(z) + F(z - 0)] - \\ &\quad - \frac{z - y}{2} \left[F\left(\frac{z + y}{2}\right) + F\left(\frac{z + y}{2} - 0\right) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $x - y = 2(z - y)$, то

$$\begin{aligned} H(z, y) - H(x, y) &= (z - y) [F(z) + F(z - 0)] - \\ &\quad - \frac{z - y}{2} \left[F\left(\frac{z + y}{2}\right) + F\left(\frac{z + y}{2} - 0\right) \right] = \\ &= \frac{z - y}{2} \left[2F(z) - F\left(\frac{z + y}{2}\right) + 2F(z - 0) - F\left(\frac{z + y}{2} - 0\right) \right] > 0, \end{aligned}$$

так как $F(z) > 0$ и $F(z) \geq F(\frac{z+y}{2})$, $F(z-0) \geq F(\frac{z+y}{2}-0)$. Следовательно, в этом случае стратегия первого игрока z доминирует x , и (x, y) не может быть равновесием. Единственность равновесия (E, E) доказана.

В рассмотренных выше схемах арбитража равновесие достигалось в чистых стратегиях. Это происходило в силу ряда предположений относительно вида распределения $F(a)$ арбитра. Ниже мы увидим, что в широком классе распределений равновесия в чистых стратегиях не существует. Мы будем искать равновесие среди смешанных стратегий. Однако это приводит нас к новым интересным приложениям арбитражных процедур, поскольку теперь предложения сторон должны иметь случайный характер и это имеет ряд преимуществ при использовании их на практике.

§ 2.7. ДИСКРЕТНЫЕ АРБИТРАЖНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ В ДВУХ ТОЧКАХ

Для упрощения выражений предположим, что α случайная величина, принимающая значения -1 и 1 с одинаковыми вероятностями $p = 1/2$. Стратегиями игроков I и II также являются произвольные числа $x, y \in R^1$. Функция выигрыша в данной игре имеет вид (6.1). Покажем, что равновесие в данной игре лежит в классе смешанных стратегий. Смешанные стратегии мы будем определять здесь либо через функции распределения, либо через их плотности.

Отметим сразу, что в силу симметрии задачи значение данной игры равно нулю, и оптимальные стратегии должны быть симметричными относительно начала координат. Поэтому достаточно построить оптимальную стратегию одного из игроков, например I. Обозначим через $F(y)$ смешанную стратегию игрока II. Предположим, что носитель распределения F лежит на отрицательной полуоси. Тогда из условий игры следует, что для всех $x < 0$ выигрыш игрока I $H(x, F) \leq 0$, а для $x \geq 0$ его выигрыш имеет вид

$$\begin{aligned} H(x, F) = & \frac{1}{2} [F(-2-x)x + \int_{-2-x}^{\infty} y dF(y)] + \\ & + \frac{1}{2} [F(2-x)x + \int_{2-x}^{\infty} y dF(y)]. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Будем искать функцию распределения $F(y)$ в таком виде, чтобы ее носитель был сосредоточен на интервале $[-c-4, -c]$, где $0 < c < 1$, и чтобы функция выигрыша $H(x, F)$ на интервале $[c, c+4]$ была

постоянна и равна нулю, а для остальных x была отрицательна (см. рис. 2.4).

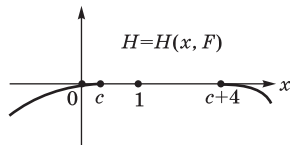


Рис. 2.4

Из (7.1) находим, что на интервале $[c, c+2]$

$$H(x, F) = \frac{1}{2} \left[F(-2-x)x + \int_{-2-x}^{-c} y dF(y) \right] + \frac{1}{2}x, x \in [c, c+2]. \quad (7.2)$$

Из предположения, что $H(x, F)$ постоянна на интервале $[c, c+2]$, однозначно определяется функция распределения $F(y)$. Действительно, продифференцируем (7.2) и приравняем нулю

$$\frac{dH}{dx} = \frac{1}{2} \left[-F'(-2-x)x + F(-2-x) + (-2-x)F'(-2-x) \right] + \frac{1}{2} = 0. \quad (7.3)$$

Сделав замену $-2-x = y$ в (7.3), получим дифференциальное уравнение

$$2F'(y)(y+1) = -[F(y)+1], y \in [-c-4, -c-2],$$

решение которого дает выражение для функции распределения $F(y)$ на интервале $[-c-4, -c-2]$

$$F(y) = -1 + \frac{\text{const}}{\sqrt{-y-1}}, y \in [-c-4, -c-2].$$

Из условия $F(-c-4) = 0$, окончательно получаем

$$F(y) = -1 + \frac{\sqrt{3+c}}{\sqrt{-y-1}}, y \in [-c-4, -c-2]. \quad (7.4)$$

Требую постоянства функции $H(x, F)$ на интервале $[c + 2, c + 4]$, которая в данном случае имеет вид

$$H(x, F) = \frac{1}{2} \int_{-c-4}^{-c} y dF(y) + \frac{1}{2} [F(2-x)x + \int_{2-x}^{-c} y dF(y)], x \in [c+2, c+4], \quad (7.5)$$

находим

$$\frac{dH}{dx} = \frac{1}{2} \left[-F'(2-x)x + F(2-x) + (2-x)F'(2-x) \right] = 0.$$

Деля замену $2-x=y$, получим дифференциальное уравнение

$$2F'(y)(y-1) = -F(y), y \in [-c-2, -c],$$

Откуда с учетом условия $F(-c) = 1$ находим

$$F(y) = \frac{\sqrt{1+c}}{\sqrt{1-y}}, y \in [-c-2, -c]. \quad (7.6)$$

Потребуем, чтобы функция $F(y)$ была непрерывной, для этого склеим функции (7.4) и (7.6) в точке $y = -c-2$. Из полученного условия

$$\frac{\sqrt{1+c}}{\sqrt{3+c}} = -1 + \frac{\sqrt{3+c}}{\sqrt{1+c}}$$

получаем квадратное уравнение

$$(1+c)(3+c) = 4, \quad (7.7)$$

решение которого можно представить в виде

$$c = 2z - 1 \approx 0.236,$$

где z — «золотое сечение» интервала $[0, 1]$ (решение квадратного уравнения $z^2 + z - 1 = 0$).

Таким образом, мы построили такую непрерывную функцию распределения $F(y), y \in [-c-4, -c]$, что значение функции выигрыша $H(x, F)$ игрока I на интервале $[c, c+4]$ будет постоянно. Чтобы она была оптимальной стратегией игрока II, остается доказать, что функция $H(x, F)$ будет иметь вид, представленный на рис. 2.4, т.е. ее график будет лежать под осью абсцисс.

Решение данной игровой задачи содержится в следующей теореме.

Теорема 2.14. *Оптимальные стратегии в дискретной арбитражной игре имеют вид*

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, c], \\ 1 - \frac{\sqrt{1+c}}{\sqrt{x+1}}, & x \in (c, c+2], \\ 2 - \frac{\sqrt{3+c}}{\sqrt{x-1}}, & x \in (c+2, c+4], \\ 1, & x \in (c+4, \infty), \end{cases} \quad (7.8)$$

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, -c-4], \\ -1 + \frac{\sqrt{3+c}}{\sqrt{-y-1}}, & y \in (-c-4, -c-2], \\ \frac{\sqrt{1+c}}{\sqrt{1-y}}, & y \in (-c-2, -c], \\ 1, & y \in (-c, \infty), \end{cases} \quad (7.9)$$

где $c = \sqrt{5} - 2$.

Доказательство. Достаточно показать, что $H(x, F) \leq 0$ для всех $x \in R^1$. Для $x \leq 0$ это неравенство очевидно в силу того, что $y < 0$ почти наверное и, следовательно, в силу определения (6.3) $H(x, F)$ отрицательно.

На интервале $[c, c+4]$, как отмечалось выше, функция $H(x, F)$ постоянна. Найдем это значение. Из (7.2) находим

$$\begin{aligned} H(x, F) = H(c+2) &= \frac{1}{2} \left[F(-c-4)(c+2) + \int_{-c-4}^{-c} y dF(y) \right] + \\ &+ \frac{1}{2}(c+2) = \frac{1}{2}(\bar{y} + c + 2), \quad x \in [c, c+2], \end{aligned} \quad (7.10)$$

где \bar{y} — среднее значение случайной величины y , имеющей распределение (7.4), (7.6).

После несложных вычислений находим

$$\bar{y} = \int_{-c-4}^{-c-2} y d \frac{\sqrt{3+c}}{\sqrt{-y-1}} + \int_{-c-2}^{-c} y d \frac{\sqrt{1+c}}{\sqrt{1-y}} = -c-2.$$

Тогда из (6.3) вытекает

$$H(x, F) = 0, \quad x \in [c, c+2].$$

Аналогично на интервале $[c+2, c+4]$ функция $H(x, F) = 0$.

Если $x \geq c + 4$, функция $H(x, F)$ имеет вид (7.5), ее производная после замены $2 - x = y$ имеет вид

$$\frac{dH}{dx} = \frac{1}{2}[F'(2-x)(2-2x) + F(2-x)] = \frac{1}{2}[F'(y)(2y-2) + F(y)].$$

Подставляя сюда выражение для F из (7.4), получим

$$\frac{dH}{dx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{3+c}}{\sqrt{-y-1}} \frac{2y}{y+1} - 1 \right], \quad y \leq -c-2. \quad (7.11)$$

Функция (7.11) монотонно возрастает по y на интервале $[-c-4, -c-2]$ и достигает максимума в точке $y = c-2$. Максимальное значение в силу (7.7)

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{3+c}}{\sqrt{1+c}} \frac{2(-c-2)}{-c-1} - 1 \right] = -\frac{1}{2} \frac{(c+3)^2}{(1+c)^2} < 0.$$

Отсюда следует, что функция $H(x, F)$ убывает на множестве $x \geq c+4$ и ее значение в точке $x = c+4$ равно нулю. Следовательно,

$$H(x, F) \leq 0, x \geq c+4.$$

Если же $x \in [0, c]$, то $H(x, F)$ имеет вид (7.2) и ее производная (7.3) после замены $-2-x = y$ принимает вид

$$\frac{dH}{dx} = \frac{1}{2} \left[F'(y)(2y+2) + F(y) + 1 \right], \quad y \geq -c-2. \quad (7.12)$$

Подставляя в (7.12) выражение для F , получаем

$$\frac{dH}{dx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1+c}}{\sqrt{(1-y)^3}} (2y+2) + \frac{\sqrt{1+c}}{\sqrt{1-y}} + 1 \right].$$

Эта функция монотонно возрастает по y на интервале $[-c-2, -2]$, и ее минимум достигается в точке $y = -c-2$, причем его значение

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1+c}}{\sqrt{(3+c)^3}} (-2c-2) + \frac{\sqrt{1+c}}{\sqrt{3+c}} + 1 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2(1-c)}{(3+c)^2} + 1 \right]$$

положительно. Следовательно, функция $H(x, F)$ возрастает на интервале $x \in [0, c]$, причем ее значение в точке $x = c$ равно нулю. Отсюда вытекает, что функция $H(x, F) < 0, x \leq c$. Таким образом, мы показали

$$H(x, F) \leq 0, x \in R.$$

Следовательно, для любой смешанной стратегии G игрока I

$$H(G, F) \leq 0.$$

Отсюда немедленно вытекает, что F вида (7.9) есть оптимальная стратегия игрока II. Из симметрии задачи вытекает, что симметричная относительно начала координат стратегия G вида (7.8) является оптимальной стратегией игрока I. Теорема доказана.

Замечание 2.2. Интересно отметить, что оптимальное правило в данной арбитражной игре определяется с помощью золотого сечения. Само оптимальное правило предписывает игроку II сосредоточивать свои предложения на интервале $[-3 + 2z, 1 - 2z] \approx [-4.236, -0.236]$ на отрицательной полуоси, а игрок I должен делать предложения в интервале $[2z - 1, 3 - 2z] \approx [0.236, 4.236]$. Тем самым, не допускается ситуаций, когда предложения игрока II превышают предложения I. Заметим также, что среднее значение распределений F и G совпадает с серединой интервала носителя распределения.

§ 2.8. ДИСКРЕТНЫЕ АРБИТРАЖНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ В ТРЕХ ТОЧКАХ С ИНТЕРВАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

Давайте предположим, что распределение случайной величины α сосредоточено в точках $a_1 = -1, a_2 = 0$ и $a_3 = 1$ с равными вероятностями $p = 1/3$. В отличие от модели, рассмотренной в предыдущей секции, будем считать, что предложения игроков могут быть сделаны в интервале $x, y \in [-a, a]$.

Будем искать равновесие среди смешанных стратегий. Обозначим $f(x)$ и $g(y)$ стратегии игроков I и II соответственно. Предположим, что носитель распределения $g(y)f(x)$ лежит на отрицательной (положительной) полуоси. То есть

$$f(x) \geq 0, \quad x \in [0, a], \quad \int_0^a f(x) dx = 1, \quad g(y) \geq 0,$$

$$y \in [-a, 0], \quad \int_{-a}^0 g(y) dy = 1.$$

Из симметрии следует, что значение игры равно нулю, а оптимальные стратегии должны быть симметричными относительно оси ординат, т. е. $g(y) = f(-y)$. Отсюда достаточно построить оптимальную стратегию для одного из игроков, например I.

Теорема 2.15. Для $a \in (0, 8/3]$ оптимальная стратегия имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{a}{4}, \\ \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x^3}}, & \frac{a}{4} \leq x \leq a, \end{cases} \quad (8.1)$$

и для $a \in (8/3, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{2}{3}, \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{x^3}}, & \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}, \\ 0, & \frac{8}{3} < x \leq a. \end{cases} \quad (8.2)$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $a \in (0, 2]$. Согласно правилам игры выигрыш Π для $y \in [-a, 0]$ равен

$$H(f, y) = \frac{1}{3} \int_0^a y f(x) dx + \frac{1}{3} \left(\int_0^{-y} x f(x) dx + \int_{-y}^a y f(x) dx \right) + \frac{1}{3} \int_0^a x f(x) dx.$$

Будем искать стратегию f в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \alpha, \\ \varphi(x), & \alpha \leq x \leq \beta, \\ 0, & \beta < x \leq a, \end{cases} \quad (8.3)$$

где $\varphi(x) > 0$, $x \in [\alpha, \beta]$ и φ имеет непрерывную производную по (α, β) .

Стратегия (8.3) будет оптимальна, если $H(f, y) = 0$ для $y \in [-\beta, -\alpha]$ и $H(f, y) \geq 0$ для $y \in [-a, -\beta) \cup (-\alpha, 0]$. Заметим, что $H(f, 0) = \frac{1}{3} \int_0^a x f(x) dx > 0$.

Из $H(f, -\alpha) = H(f, -\beta) = 0$ следует, что $\beta = 4\alpha$ и $\int_{\alpha}^{\beta} x \varphi(x) dx = 2\alpha$. Очевидно, $0 < \alpha \leq \frac{a}{4}$. Но $H(f, -a) = \frac{1}{3}[-a + 4\alpha]$. Следовательно, $H(f, a) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $a \leq 4\alpha$. Отсюда $\alpha = \frac{a}{4}$ и $\beta = a$.

Давайте найдем функцию $\varphi(x)$. Условие $H(f, y) = 0$, $y \in [\beta, -\alpha]$ дает $H'(f, y) = H''(f, y) = 0$. Таким образом,

$$H'(f, y) = 1 + 2y f(-y) + \int_{-y}^2 f(x) dx = 0, \quad H''(y) = 3f(-y) - 2y f'(-y) = 0.$$

Полагая $y = -x$, приходим к дифференциальному уравнению

$$3f(x) + 2xf'(x) = 0. \quad (8.4)$$

Его решение

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{x^3}}. \quad (8.5)$$

Поскольку,

$$1 = \int_0^a f(x)dx = \int_{a/4}^a \frac{c}{\sqrt{x^3}} = \frac{2c}{\sqrt{a}},$$

находим c

$$c = \frac{\sqrt{a}}{2}.$$

Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a/4, \\ \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x^3}}, & a/4 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Проверим условия на оптимальность. Для $y \in [-a, -a/4]$ имеем

$$\begin{aligned} 3H(f, y) &= y + \int_{a/4}^{-y} \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} dx + y \int_{-y}^a \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x^3}} dx + \int_{a/4}^a \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} dx = \\ &= y + \sqrt{a}\sqrt{-y} - \frac{a}{2} - y - \sqrt{a}\sqrt{-y} + \frac{a}{2} = 0. \end{aligned}$$

Для $y \in (-a/4, 0]$

$$H(f, y) = y + y \int_{a/4}^a \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x^3}} dx + \frac{a}{2} = 2(y + \frac{a}{4}) > 0.$$

Это доказывает оптимальность (8.1).

Пусть теперь $a \in (2, \frac{8}{3}]$. Рассмотрим $H(f, y)$ для $y \in [-a, -a/4]$ где f удовлетворяет (2). Поскольку носитель распределения f есть $[a/4, a]$ и $a \leq \frac{8}{3}$ то $-1 + (-1 - y) \leq a/4$ и $-y \geq a/4$ для всех $y \in [-a, -a/4]$.

Отсюда для $y \in [-a, -a/4]$

$$3H(f, y) = \int_{\frac{a}{4}}^a yf(x)dx + \left(\int_{\frac{a}{4}}^{-y} xf(x)dx + \int_{-y}^a yf(x)dx \right) + \int_{\frac{a}{4}}^a xf(x)dx.$$

Дифференцирование снова приводит к дифференциальному уравнению (8.4). Его решение $f(x)$ имеет вид (8.1). Теперь, рассуждая так же, как и выше, находим $H(f, y) > 0$ для $y \in (-a/4, 0]$. Итак, (8.1) оптимально также для $a \in (2, \frac{8}{3}]$.

Предположим наконец, что $a \in (\frac{8}{3}, \infty)$. В этом случае вид $H(f, y)$ более сложный. В качестве примера рассмотрим случай $a = 4$. Для $y \in [-4, -2]$

$$\begin{aligned} 3H(f, y) = & \left[\int_0^{-2-y} xf(x)dx + \int_{-2-y}^4 yf(x)dx \right] + \\ & + \left[\int_0^{-y} xf(x)dx + \int_{-y}^4 yf(x)dx \right] + \int_0^4 xf(x)dx, \end{aligned} \quad (8.6)$$

для $y \in [-2, 0]$

$$\begin{aligned} 3H(f, y) = & \int_0^4 yf(x)dx + \left[\int_0^{-y} xf(x)dx + \int_{-y}^4 yf(x)dx \right] + \\ & + \left[\int_0^{2-y} xf(x)dx + \int_{2-y}^4 yf(x)dx \right]. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Находим f в виде (8.3) с $\beta = \alpha + 2$. Условия $H(f, \beta) = H(f, \alpha) = 0$ дают нам

$$\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = 2\alpha = \frac{\beta}{2}.$$

Следовательно, $\beta = 4\alpha$ и вместе с $\beta = \alpha + 2$ это дает $\alpha = 2/3$, $\beta = 8/3$.

Согласно (8.6) условие $H''(f, y) = 0$ на интервале $[-\beta, -2]$ эквивалентно

$$[3f(-y) - 2yf'(-y)] + [3f(-2-y) - (2+2y)f'(-2-y)] = 0. \quad (8.8)$$

Если $y \in [-\beta, -2]$, то $x = -y \in [2, \beta]$ и $-2-y \in [0, \beta-2]$ или $-2-y \in [0, \alpha]$. Но для $x \in [0, \alpha]$ $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$. Отсюда второе выражение в квадратных скобках в (8.8) равно нулю, и мы получаем уравнение

$$[3f(-y) - 2yf'(-y)] = 0$$

для определения $f(-y)$. Оно совпадает с (8.4) при $x = -y$.

Аналогично мы можем переписать $H''(f, y)$ для $y \in [-2, -\alpha]$ как

$$[3f(-y) - 2yf'(-y)] + [3f(2-y) + (2-2y)f'(2-y)] = 0.$$

Здесь $-y \in [\alpha, 2]$ и $2-y \in [\alpha+2, 4]$. Таким образом, $f(2-y) = f'(2-y) = 0$, и мы приходим к тому же уравнению (8.4) для $f(x)$.

Решение (8.4) на интервале $(2/3, 8/3)$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2/3, \\ \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1\sqrt{x^3}}, & 2/3 \leq x \leq 8/3, \\ 0, & 8/3 < x \leq 4. \end{cases} \quad (8.9)$$

Оптимальность (8.9) можно проверить аналогично случаю $a \in (0, \frac{8}{3})$.

Полное доказательство теоремы для $a \in (\frac{8}{3}, \infty)$ достигается анализом интервалов $a \in (8/3, 4]$, $a \in [4, 14/3]$ и $a \in (14/3, \infty)$. При этом функция $H(f, y)$ имеет тот же вид, что (8.6) и (8.7).

§ 2.9. ДИСКРЕТНЫЕ АРБИТРАЖНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда предложения арбитра есть случайная величина α , которая принимает значения $\{-n, -(n-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n\}$ с одинаковыми вероятностями $p = 1/(2n+1)$. Предложения игроков должны лежать в интервале $x, y \in [-a, a]$ (см. рис. 2.5).

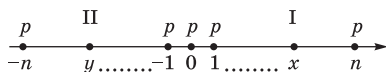


Рис. 2.5

Дискретное распределение
предложений арбитра, $p = \frac{1}{2n+1}$

Как и ранее, будем искать равновесие среди смешанных стратегий. Обозначим $f(x)$ и $g(y)$ смешанные стратегии игроков I и II и предположим, что носители распределений $g(y)(f(x))$ лежат в отрицательной

(положительной) области, т. е.

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0, x \in [0, a], \int_0^a f(x) dx = 1, \\ g(y) &\geq 0, y \in [-a, 0], \int_{-a}^0 g(y) dy = 1. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Будем искать стратегию одного из игроков, скажем I.

Теорема 2.16. Для $a \in \left(0, \frac{2(n+1)^2}{2n+1}\right]$ оптимальная стратегия игрока I имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a, \\ \frac{n\sqrt{a}}{2\sqrt{x^3}}, & \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a \leq x \leq a \end{cases} \quad (9.2)$$

и для $a \in \left(\frac{2(n+1)^2}{2n+1}, +\infty\right)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{2n^2}{2n+1}, \\ \frac{n(n+1)}{\sqrt{2(2n+1)}} \frac{1}{\sqrt{x^3}}, & \frac{2n^2}{2n+1} \leq x \leq \frac{2(n+1)^2}{2n+1}, \\ 0, & \frac{2(n+1)^2}{2n+1} < x \leq a. \end{cases} \quad (9.3)$$

Доказательство. Вначале рассмотрим случай $a \in (0, 2]$. Выигрыш игрока I для $y \in [-a, 0]$ равен

$$\begin{aligned} H(f, y) = \frac{1}{2n+1} &\left[n \int_0^a y f(x) dx + \left(\int_0^{-y} x f(x) dx + \int_{-y}^a y f(x) dx \right) + \right. \\ &\left. + n \int_0^a x f(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Будем искать стратегию f в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \alpha, \\ \varphi(x), & \alpha \leq x \leq \beta, \\ 0, & \beta < x \leq a, \end{cases} \quad (9.4)$$

где $\varphi(x) > 0$, $x \in [\alpha, \beta]$ и φ имеет непрерывную производную в интервале (α, β) .

Стратегия (9.4) будет оптимальной, если $H(f, y) = 0$ для $y \in [-\beta, -\alpha]$ и $H(f, y) \geq 0$ для $y \in [-a, -\beta) \cup (-\alpha, 0]$. Заметим, что $H(f, 0) = \frac{n}{2n+1} \int_0^a x f(x) dx > 0$.

Из $H(f, -\alpha) = H(f, -\beta) = 0$ следует

$$H(f, -\alpha) = \frac{1}{2n+1} \left[-(n+1)\alpha + n \int_{\alpha}^{\beta} x \varphi(x) dx \right] = 0,$$

$$H(f, -\beta) = \frac{1}{2n+1} \left[-n\beta + (n+1) \int_{\alpha}^{\beta} x \varphi(x) dx \right] = 0.$$

Из этой системы получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} x \varphi(x) dx = \frac{n+1}{n} \alpha = \frac{n}{n+1} \beta$$

и $\beta = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \alpha$ или $\alpha = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \beta$.

Для $y = -a$, $H(f, -a) = \frac{1}{2n+1} [-na + n\beta] = \frac{n}{2n+1} (\beta - a)$. Следовательно, если $\beta < a$, то $H(f, -a) < 0$. Отсюда $\beta = a$, и $\alpha = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a$, и

$$\int_0^a x f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x \varphi(x) dx = \frac{n}{n+1} a. \quad (9.5)$$

Теперь найдем функцию $\varphi(x)$. Условие $H(f, y) = 0$, $y \in [\beta, -\alpha]$ приводит к $H'(f, y) = H''(f, y) = 0$. Отсюда

$$H'(f, y) = 1 + 2yf(-y) + \int_{-y}^a f(x) dx = 0,$$

$$H''(y) = 3f(-y) - 2yf'(-y) = 0.$$

Полагая $y = -x$, получим дифференциальное уравнение

$$3f(x) + 2xf'(x) = 0, \quad (9.6)$$

решение которого

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{x^3}}. \quad (9.7)$$

Поскольку

$$1 = \int_0^a f(x) dx = \int_{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a}^a \frac{c}{\sqrt{x^3}} = \frac{2c}{n\sqrt{a}},$$

находим c

$$c = \frac{n\sqrt{a}}{2}.$$

Наконец,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a, \\ n \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x^3}}, & \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a \leq x \leq a. \end{cases}$$

Проверим выполнение условий оптимальности. Для $y \in [-a, -\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a]$ имеет место

$$\begin{aligned} (2n+1)H(f, y) &= ny + \int_{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a}^{-y} n \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} dx + y \int_{-y}^a n \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x^3}} dx + \frac{n^2}{n+1} a = \\ &= ny + n\sqrt{a} \left(\sqrt{-y} - \frac{n}{n+1} \sqrt{a} \right) - n\sqrt{ay} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{-y}} \right) + \frac{n^2}{n+1} a = 0. \end{aligned}$$

Для $y \in \left(-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a, 0\right]$:

$$(2n+1)H(f, y) = ny + y + \frac{n^2}{n+1} a = (n+1) \left[y + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a \right] > 0.$$

Из этих условий следует оптимальность (9.2).

Перейдем к анализу случая $2 < a \leq \frac{2(n+1)^2}{2n+1}$.

Рассмотрим $H(f, y)$ для $y \in \left[-a, -\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a\right]$, где f имеет вид (9.2). Поскольку носитель распределения f есть $\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a, a\right]$ и $a \leq \frac{2(n+1)^2}{2n+1}$, откуда вытекает $a - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a \leq 2$.

Отсюда для $y \in [-a, -\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a]$

$$(2n+1)H(f, y) = n \int_{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a}^a y f(x) dx + \\ + \left(\int_{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a}^{-y} x f(x) dx + \int_{-y}^a y f(x) dx \right) + n \int_{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a}^a x f(x) dx.$$

Дифференцируя, мы опять приходим к дифференциальному уравнению (9.5). Его решение $f(x)$ имеет вид (9.2). Это влечет $H(f, y) \equiv 0$ для $y \in \left[-a, -\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a\right]$.

Докажем теперь, что $H(f, y) > 0$ для $y \in \left(-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a, 0\right]$. Вначале определим знак $H(f, y)$ на интервале $\left[-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a, -\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a + 2\right]$.

Если $y \in \left[-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a, -a + 2\right]$, то

$$H(f, y) = \frac{n+1}{2n+1} y + \frac{n}{2n+1} \int_{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a}^a x f(x) dx = \\ = \frac{n+1}{2n+1} \left[y + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a \right] > 0.$$

А для $y \in \left[-a + 2, -\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a + 2\right]$

$$H(f, y) = \frac{n+1}{2n+1} y + \frac{1}{2n+1} \left(\int_{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a}^{2-y} x f(x) dx + \right. \\ \left. + \int_{2-y}^a y f(x) dx \right) + \frac{n-1}{2n+1} \int_{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a}^a x f(x) dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} H'(f, y) &= \frac{1}{2n+1} \left[n+1 + (2y-2)f(2-y) + \int_{2-y}^a f(x) dx \right] = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left[n+1 + \frac{(y-1)n\sqrt{a}}{\sqrt{(2-y)^3}} - n + \frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{2-y}} \right] = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(1 + \frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{(2-y)^3}} \right) > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $H(f, y) > 0$ для $y \in \left(-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a, -\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a + 2 \right]$.

Если $-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a + 2 \geq 0$, то доказательство закончено. В противном случае сдвинем интервал вправо и покажем, что $H(f, y) > 0$ для $y \in \left(-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a + 2, -\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a + 4 \right]$, и т. д. Итак, мы доказали, что стратегия (9.2) оптимальна также для $a \in (2, \frac{2(n+1)^2}{2n+1}]$.

Остается рассмотреть случай $\frac{2(n+1)^2}{2n+1} < a \leq \infty$. В этом случае вид функции $H(f, y)$ более сложный. Проведем анализ только случая с бесконечным горизонтом $a = \infty$.

Предположим, что игрок I использует стратегию (9.3) и найдем функцию выигрыша $H(f, y)$. Для простоты обозначим $\alpha = \frac{2n^2}{2n+1}$ и $\beta = \alpha + 2 = \frac{2(n+1)^2}{2n+1}$. Тогда для $y \in (-\infty, -2n - \beta]$:

$$H(f, y) = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx = \frac{2n(n+1)}{2n+1} > 0.$$

Пусть $k = 3\left[\frac{n}{2}\right] + 2$, если n нечетно, и $k = 3\frac{n}{2}$, если n четно. Для $y \in [-2n + 2r - \beta, -2n + 2r - \alpha]$, где $r = 0, 1, \dots, n, \dots, k-1$, и для $y \in [-2n + 2r - \beta, 0]$, где $r = k$, находим

$$\begin{aligned} H(f, y) &= \frac{r}{2n+1} y + \frac{1}{2n+1} \left[\int_{\alpha}^{-2n+2r-y} x f(x) dx + \int_{-2n+2r-y}^{\beta} y f(x) dx \right] + \\ &+ \frac{2n-r}{2n+1} \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx - \frac{r}{2n+1} \int_{\alpha}^{\beta} (x-y) f(x) dx - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2n+1} \int_{-2n+2r-y}^{\beta} (x-y)f(x)dx. \quad (9.8)$$

Дифференцируя (9.8), где f имеет вид (9.2), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} H'(f, y) &= \frac{r}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_{-2n+2r-y}^{\beta} f(x)dx + \\ &+ \frac{1}{2n+1} (2y+2n-2r)f(-2n+2r-y) = \\ &= \frac{r-n}{2n+1} \left(1 + \frac{2n(n+1)}{\sqrt{2(2n+1)(-2n+2r-y)^3}} \right). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Из (9.9) вытекает, что на интервале $y \in [-\beta, -\alpha]$, где $r = n$, ожидаемый выигрыш $H(f, y)$ является постоянной величиной. Кроме того, поскольку

$$\begin{aligned} H(f, \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx - \frac{n}{2n+1} \int_{\alpha}^{\beta} (x+\beta)f(x)dx = \\ &= \frac{n+1}{2n+1} \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx - \frac{n}{2n+1} \beta = \\ &= \frac{n+1}{2n+1} \frac{2n(n+1)}{2n+1} - \frac{n}{2n+1} \frac{2(n+1)^2}{2n+1} = 0, \end{aligned}$$

отсюда следует $H(f, y) \equiv 0$ для $y \in [-\beta, -\alpha]$.

Для $r < n$ (9.9) приводит к $H'(f, y) < 0$ и для $r > n$ $H'(f, y) > 0$ на интервале $y \in [-2n+2r-\beta, -2n+2r-\alpha]$.

Следовательно, $H(f, y) \geq 0$ для всех y . Это доказывает оптимальность стратегии (9.3).

Полное доказательство теоремы для случая $a \in (\frac{2(n+1)^2}{2n+1}, \infty)$ проводится аналогичными рассуждениями, как и для $a = \infty$.

Мы видим, что оптимальные стратегии в дискретной арбитражной схеме с равномерным распределением являются рандомизированными. Это отличается от решения непрерывной версии, рассмотренной в параграфе 2.6, где оптимальные стратегии игроков достигались среди чистых стратегий. Так, в равномерном случае, оптимальные стратегии игроков были сконцентрированы в крайних точках интервала $[-a, a]$.

Заметим, что в дискретной схеме для $a = n$ из теоремы 2.14 следует, что оптимальная стратегия (9.2) имеет ненулевую меру только на интервале $\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a, a\right]$, размер которого стремится к нулю для больших n . Таким образом, для больших n решения дискретной и непрерывной версии арбитражной игры совпадают.

Задачи и упражнения

1. Найти решение в чистых стратегиях выпукло-вогнутой игры с функцией выигрыша

$$H(x, y) = -5x^2 + 2y^2 + xy - 3x - y$$

и решение в смешанных стратегиях выпуклой игры с функцией выигрыша

$$H(x, y) = y^3 - 4xy + x^3.$$

2. Найти решение в смешанных стратегиях дуэли с функцией выигрыша

$$H(x, y) = \begin{cases} 2x - y + xy, & x < y, \\ 0, & x = y, \\ x - 2y - xy, & x > y. \end{cases}$$

3. Найти решение дуэли, в которой участвуют два игрока: у одного из них есть две пули, а другого — только одна.
4. Игра «день рождения». Петр идет с работы и внезапно вспоминает, что у Кати сегодня день рождения. А может быть и нет? Стратегиями Петра являются: прийти с подарком и без. Если сегодня не день рождения, то: если он приходит с подарком, то выигрыш равен 1, а если без, то 0. Если сегодня день рождения Кати, то: если он приходит с подарком, то выигрыш равен 1.5, а если без, то -10 . Составить матрицу выигрышей и найти равновесие.
5. Игра «высококачественный проигрыватель».

Фирма производит усилители, работа которых напрямую зависит от параметров небольшого дефицитного конденсатора. Фирме этот конденсатор обходится в 100 рублей, но она затрачивает 1000 рублей при замене неисправного конденсатора у потребителя. У фирмы есть следующие возможности: 1) применить метод

проверки конденсаторов, стоящий 100 рублей и гарантирующий выявление неисправности в трех случаях из четырех; 2) применить надежный и дешевый способ проверки, но в девяти случаях из десяти он приводит к пробую исправного конденсатора; 3) покупать конденсаторы по 400 рублей с полной гарантией. Составить матрицу выигрышей игры, в которой участвует природа (исправность или неисправность конденсатора) и фирма, и найти равновесие.

6. Найти решение игры 3×3 с матрицей выигрыша

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Игра «слова».

Два игрока называют одну из возможных букв: игрок I может назвать букву «а» или «о», а игрок II — букву «с», «н» или «р». Если обе буквы образуют какое-нибудь слово, то выигрыш первого игрока составляет 1, и, кроме того, дополнительное вознаграждение в 3 ед., если это слово — одушевленное существительное или местоимение. В тех случаях, когда буквы не образуют слова, игрок II выигрывает 2 ед. Таким образом, матрица игры имеет вид

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{с} & \text{н} & \text{р} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{о} \\ \text{а} \end{array} & \boxed{\begin{array}{ccc} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{array}} \end{array}.$$

8. Доказать, что игра с функцией выигрыша

$$H(x, y) = \begin{cases} -1, & x = 1, y < 1 \text{ и } x < y < 1, \\ 0, & x = y, \\ 1, & y = 1, x < 1 \text{ и } y < x < 1 \end{cases}$$

не имеет решения.

9. Привести полное доказательство теоремы 2.15 при $a \in (\frac{8}{3}, \infty)$.

10. Найти равновесие в арбитражной процедуре, когда предложения арбитра сосредоточены в точках $-n, -n-1, \dots, -1, 1, \dots, n$.

БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ n ЛИЦ В СТРАТЕГИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

В первой главе мы рассмотрели игры с ненулевой суммой для двух игроков. Введенные определения стратегий, ситуаций, выигрышей и принципа оптимальности естественным образом переносятся на случай n игроков. Дадим основные определения для игр n лиц.

Определение 3.1. *Игрой n лиц в нормальной форме будем называть объект*

$$\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} \rangle,$$

где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков, X_i — множество стратегий i -го игрока и $H_i : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow R$ — функция выигрыша i -го игрока, $i = 1, \dots, n$.

Здесь, как и раньше, i -й игрок выбирает стратегию $x_i \in X_i$, не зная выбора его соперников, и заинтересован максимизировать свой выигрыш $H_i(x_1, \dots, x_n)$, который зависит от стратегий всех игроков. Набор стратегий всех игроков называется **ситуацией**, или **профилем**, в игре.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ некоторая игровая ситуация. Для данной ситуации будем использовать обозначение

$$(x_{-i}, x'_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

которое означает, что игрок i изменил свою стратегию с x_i на x'_i , а все остальные игроки оставили стратегии неизменными. Основным критерием решения в играх n лиц остается понятие равновесия по Нэшу.

Определение 3.2. *Равновесием по Нэшу в игре Γ называется ситуация $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, в которой для любого игрока $i \in N$ выполняются следующие условия:*

$$H_i(x_{-i}^*, x_i) \leq H_i(x^*), \forall x_i,$$

а стратегии, входящие в равновесие, будем называть оптимальными.

Определение 3.2 означает, что при отклонении любого игрока от равновесия его выигрыш уменьшается. Таким образом, никому из игроков невыгодно отклоняться от равновесия самостоятельно. Конечно, это может быть не так, если два или более игроков решат отклониться от равновесия. Позже мы рассмотрим такие игры.

§ 3.1. ВЫПУКЛЫЕ ИГРЫ. ОЛИГОПОЛИЯ КУРНО

Начнем рассмотрение игр n лиц со случая, когда функции выигрыша являются вогнутыми, а множества стратегий представляют собой выпуклые множества. Нетрудно перенести доказательство теоремы о существовании равновесия в выпуклой игре двух лиц на общий случай.

Теорема 3.1. *Предположим, что в игре n лиц $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} \rangle$ множества стратегий X_i являются компактными выпуклыми множествами в пространстве R^n , а выигрыши $H_i(x_1, \dots, x_n)$ — непрерывные и вогнутые по x_i функции. Тогда в такой игре всегда существует равновесие по Нэшу.*

К выпуклым играм относятся модели олигополий, в которых на рынке присутствуют n фирм. Так же, как и в случае дуополий, различаются модели олигополий по Курно и Бертрону. Ограничимся рассмотрением олигополии Курно. Итак, представим, что на рынке есть n фирм $1, 2, \dots, n$, которые производят определенное количество товара, соответственно x_1, x_2, \dots, x_n . Это стратегии игроков. Обозначим данный профиль стратегий x . Предположим, что цена на товар на рынке является линейной функцией, равной начальной цене p минус количество произведенной продукции $Q = \sum_{i=1}^n x_i$, умноженное на некоторый коэффициент b . Таким образом, цена на единицу товара равна $p - bQ$. Себестоимость единицы товара обозначим $c_i, i = 1, \dots, n$. Теперь можно выписать выигрыши игроков:

$$H_i(x) = (p - b \sum_{j=1}^n x_j) x_i - c_i x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поскольку функции выигрыша $H_i(x)$ являются вогнутыми по x_i , а множество стратегий игрока i выпукло, олигополии представляют

пример выпуклых игр, где равновесие достигается в чистых стратегиях. Равновесие по Нэшу можно найти из системы уравнений

$$\frac{\partial H_i(x_i^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Уравнения (1.1) приводят к соотношениям

$$p - c_i - b \sum_{j=1}^n x_j - bx_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Складывая эти соотношения, приходим к равенству

$$np - \sum_{j=1}^n c_j - b(n+1) \sum_{j=1}^n x_j = 0,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^n x_j = \frac{np - \sum_{j=1}^n c_j}{b(n+1)}.$$

Таким образом, равновесие в модели олигополии имеет вид

$$x_i^* = \frac{1}{b} \left(\frac{p}{n+1} - \left(c_i - \frac{\sum_{j=1}^n c_j}{n+1} \right) \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

При этом оптимальные выигрыши равны

$$H_i^* = bx_i^{*2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

§ 3.2. ПОЛИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Рассмотрим игры n лиц $\Gamma = \langle N, \{X_i = \{1, 2, \dots, m_i\}\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} \rangle$, где стратегии игроков образуют конечные множества, а выигрыши определяются набором многомерных матриц $H_i = H_i(j_1, \dots, j_n), i \in N$. Такие игры будем называть полиматричными. Для них равновесия по Нэшу в чистых стратегиях может и не существовать.

Так же, как и раньше, проведем рандомизацию и введем в рассмотрение класс смешанных стратегий $\bar{X}_i = \{x^{(i)} = (x_1^i, \dots, x_{m_i}^{(i)})\}$, где $x_j^{(i)}$

есть вероятность того, что i -й игрок выберет стратегию $j \in \{1, \dots, m_i\}$. Тогда средний выигрыш (математическое ожидание) игрока i для данного профиля стратегий $x = (x^{(1)}, \dots, x_n^{(n)})$ будет равен

$$H_i(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} H_i(j_1, \dots, j_n) x_{j_1}^{(1)} \dots x_{j_n}^{(n)} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Функции выигрыша (2.1) являются вогнутыми, множество стратегий игроков компактно и выпукло, поэтому по теореме 3.1 в такой игре всегда существует равновесие по Нэшу.

Теорема 3.2. *В полиматричной игре n лиц $\Gamma = \langle N, \{X_i = \{1, 2, \dots, m_i\}\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} \rangle$ всегда существует равновесие по Нэшу среди смешанных стратегий.*

В ряде случаев можно найти решение полиматричных игр аналитическими методами. Мы остановимся здесь на случае, когда множество стратегий у каждого из игроков состоит из двух стратегий. В этом случае для нахождения равновесия можно воспользоваться геометрическими соображениями. Для простоты выкладки ограничимся рассмотрением игры трех лиц. Итак, рассматривается игра трех лиц $\Gamma = \langle N = \{I, II, III\}, \{X_i = \{1, 2\}\}_{i=1,2,3}, \{H_i\}_{i=1,2,3} \rangle$ с матрицами выигрышей $H_1 = \{a_{ijk}\}_{i,j,k=1}^2$, $H_2 = \{b_{ijk}\}_{i,j,k=1}^2$, $H_3 = \{c_{ijk}\}_{i,j,k=1}^2$. Поскольку у каждого из игроков только две стратегии, под смешанной стратегией будем понимать соответственно x_1, x_2, x_3 — вероятности выбора первой стратегии игроками I, II и III. Обозначим вероятность обратного события как $\bar{x} = 1 - x$.

Ситуация (x_1^*, x_2^*, x_3^*) является ситуацией равновесия, если для любых стратегий x_1, x_2, x_3 выполняются условия

$$H_1(x_1, x_2^*, x_3^*) \leq H_1(x^*),$$

$$H_2(x_1^*, x_2, x_3^*) \leq H_2(x^*),$$

$$H_3(x_1^*, x_2^*, x_3) \leq H_3(x^*).$$

В частности, условия равновесия должны выполняться для $x_i = 0$ и $x_i = 1$, $i = 1, 2, 3$. Рассмотрим, например, неравенства для третьего игрока

$$H_3(x_1^*, x_2^*, 0) \leq H_3(x^*), \quad H_3(x_1^*, x_2^*, 1) \leq H_3(x^*).$$

Согласно (2.1) первое неравенство принимает вид

$$\begin{aligned}
& c_{112}x_1x_2 + c_{122}x_1\bar{x}_2 + c_{212}\bar{x}_1x_2 + c_{222}\bar{x}_1\bar{x}_2 \leq c_{112}x_1x_2\bar{x}_3 + \\
& + c_{122}x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + c_{212}\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + c_{222}\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + c_{111}x_1x_2x_3 + \\
& + c_{211}\bar{x}_1x_2x_3 + c_{121}x_1\bar{x}_2x_3 + c_{221}\bar{x}_1\bar{x}_2x_3.
\end{aligned}$$

Перепишем его в виде

$$\begin{aligned}
& x_3(c_{111}x_1x_2 + c_{211}\bar{x}_1x_2 + c_{121}x_1\bar{x}_2 + c_{221}\bar{x}_1\bar{x}_2 - \\
& - c_{112}x_1x_2 - c_{122}x_1\bar{x}_2 - c_{212}\bar{x}_1x_2 - c_{222}\bar{x}_1\bar{x}_2) \geq 0.
\end{aligned} \quad (2.2)$$

Аналогично второе неравенство принимает вид

$$\begin{aligned}
& (1 - x_3)(c_{111}x_1x_2 + c_{211}\bar{x}_1x_2 + c_{121}x_1\bar{x}_2 + c_{221}\bar{x}_1\bar{x}_2 - \\
& - c_{112}x_1x_2 - c_{122}x_1\bar{x}_2 - c_{212}\bar{x}_1x_2 - c_{222}\bar{x}_1\bar{x}_2) \leq 0.
\end{aligned} \quad (2.3)$$

Обозначим выражение в скобках в (2.2) и (2.3) как $C(x_1, x_2)$. Для $x_3 = 0$ неравенство (2.2) выполняется автоматически, а (2.3) приводит к неравенству

$$C(x_1, x_2) \leq 0. \quad (2.4)$$

Для $x_3 = 1$ неравенство (2.3) выполняется, а (2.2) дает

$$C(x_1, x_2) \geq 0. \quad (2.5)$$

Для $0 < x_3 < 1$ неравенства (2.2)–(2.3) дают равенство

$$C(x_1, x_2) = 0. \quad (2.6)$$

Условия (2.4)–(2.6) определяют множество ситуаций, приемлемых для игрока III. Аналогичные условия и множество приемлемых ситуаций можно выписать и для игроков I и II. Затем все ситуации равновесия можно найти как пересечение соответствующих множеств приемлемых ситуаций. Покажем это на примере.

Борьба за рынки. Представим, что три фирмы I, II и III, производящие некий товар, могут реализовать его на одном из двух рынков A и B . На рынке A цены в два раза выше, чем на рынке B , однако выигрыш на каждом из рынков обратно пропорционален числу фирм, выбравших этот рынок. Например, можно считать выигрыши фирмы на рынке A равными 6, 4, 2 соответственно, если на рынке представлены одна, две или три фирмы. Выигрыши на рынке B положим равными соответственно 3, 2, 1.

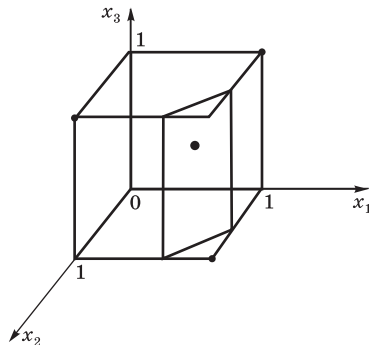


Рис. 3.1

Множество приемлемых ситуаций
равновесия для игрока III

Построим множество ситуаций, приемлемых для третьего игрока. В данном случае $C(x_1, x_2)$ равно

$$\begin{aligned} 2x_1x_2 + 4\bar{x}_1x_2 + 4x_1\bar{x}_2 + 6\bar{x}_1\bar{x}_2 - 3x_1x_2 - 2x_1\bar{x}_2 - 2\bar{x}_1x_2 - \bar{x}_1\bar{x}_2 = \\ = -3x_1 - 3x_2 + 5. \end{aligned}$$

Условия (2.4)–(2.6) принимают вид

$$x_3 = 0, x_1 + x_2 \geq \frac{5}{3},$$

$$x_3 = 1, x_1 + x_2 \leq \frac{5}{3},$$

$$0 < x_3 < 1, x_1 + x_2 = \frac{5}{3}.$$

На рис. 3.1 изображено множество ситуаций, приемлемых для игрока III. Аналогичные условия и множество приемлемых ситуаций справедливы и для игроков I и II в силу симметрии. Пересечение этих множеств образует четыре ситуации равновесия. Три из них — равновесие в чистых стратегиях (A, A, B) , (A, B, A) , (B, A, A) . И есть одно равновесие в смешанных стратегиях — это ситуация $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{5}{6}$. При этом, в первых трех равновесиях два игрока получают выигрыш равный 4, а третий игрок — 3. В четвертом равновесии все игроки получают одинаковый выигрыш

$$H^* = 2(5/6)^3 + 4(1/6)(5/6)^2 + 4(1/6)(5/6)^2 + 6(1/6)^2(5/6) +$$

$$+ 3(5/6)^2(1/6) + 2(1/6)(5/6)^2 + 2(1/6)(5/6)^2 + (1/6)^3 = 8/3.$$

В равновесии из чистых стратегий один из игроков находится в худшем положении, его выигрыш меньше, чем у других. В четвертом равновесии мы видим, что все игроки равноправны, однако выигрыш, который они получают, меньше, чем даже минимальный выигрыш игроков в равновесии из чистых стратегий.

§ 3.3. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Игры, допускающие потенциал, были исследованы Шепли и Мондерером (1996). Рассмотрим игру n лиц в нормальной форме $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} \rangle$. Предположим, что существует такая функция $P : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow R$, что для любого $i \in N$ выполняется

$$H_i(x_{-i}, x'_i) - H_i(x_{-i}, x_i) = P(x_{-i}, x'_i) - P(x_{-i}, x_i), \quad (3.1)$$

для произвольных $x_{-i} \in \prod_{j \neq i} X_j$ и любых стратегий $x_i, x'_i \in X_i$. Если такая функция существует, будем называть ее **потенциалом** в игре Γ , а саму игру — **потенциальной**.

Заторы на дорогах. Представим, что две фирмы I и II, каждая из которых имеет два автомобиля, должны перевезти некий груз из пункта A в пункт B . Эти города связаны двумя дорогами (см. рис. 3.2), по одной из которых можно двигаться со скоростью в два раза выше, чем по другой. При этом, предположим, что время в пути по каждой из дорог пропорционально числу автомобилей,двигающихся по этой дороге. На рисунке обозначены время в пути по каждой из дорог в зависимости от числадвигающихся автомобилей.

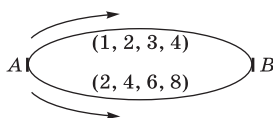


Рис. 3.2
Заторы на дорогах

Таким образом, стратегиями игроков является распределение автомобилей по дорогам, т.е. комбинации $(2, 0), (1, 1), (0, 2)$. Затраты игрока выражаются как сумма двух величин, представляющих время

движения обоих автомобилей. Тогда матрица выигрышей примет вид

$$\begin{array}{c} (2, 0) \quad (1, 1) \quad (0, 2) \\ \begin{array}{c} (2, 0) \\ (1, 1) \\ (0, 2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc} (-8, -8) & (-6, -5) & (-4, -8) \\ (-5, -6) & (-6, -6) & (-7, -12) \\ (-8, -4) & (-12, -7) & (-16, -16) \end{array} \right).$$

Видно, что в данной игре существует три равновесия в чистых стратегиях, это ситуации, когда автомобили одного из игроков движутся по первой дороге, а у другого автомобили движутся по разным дорогам, а также когда оба игрока направляют автомобили по разным дорогам.

Данная игра допускает потенциал вида

$$P = \begin{array}{c} (2, 0) \quad (1, 1) \quad (0, 2) \\ \begin{array}{c} (2, 0) \\ (1, 1) \\ (0, 2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc} 13 & 16 & 13 \\ 16 & 16 & 10 \\ 13 & 10 & 0 \end{array} \right).$$

Фуражирование животных. Предположим, что два животных могут выбрать для питания один или два участка из трех. Количество пищи на них соответственно равно 2, 4 и 6 единицам. Если один участок посетят два индивидуума, каждому достанется половина ресурса. Выигрыш каждого участника представляет сумму полученных ресурсов на каждом участке минус затраты на посещение участка, которые примем равными 1.

Таким образом, стратегиями игроков является выбор участков для питания, соответственно (1), (2), (3), (1, 2), (1, 3), (2, 3). Тогда матрица выигрышей примет вид

$$\begin{array}{c} (1) \quad (2) \quad (3) \quad (1, 2) \quad (1, 3) \quad (2, 3) \\ \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (1, 2) \\ (1, 3) \\ (2, 3) \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} (0, 0) & (1, 3) & (1, 5) & (0, 3) & (0, 5) & (1, 8) \\ (3, 1) & (1, 1) & (3, 5) & (1, 2) & (3, 6) & (1, 6) \\ (5, 1) & (5, 3) & (2, 2) & (5, 4) & (2, 3) & (2, 5) \\ (3, 0) & (2, 1) & (4, 5) & (1, 1) & (3, 5) & (2, 6) \\ (5, 0) & (6, 3) & (3, 2) & (5, 3) & (2, 2) & (3, 5) \\ (8, 1) & (6, 1) & (5, 2) & (6, 2) & (5, 3) & (3, 3) \end{array} \right).$$

Здесь существуют три равновесия в чистых стратегиях. В одном из них оба индивидуума выбирают участки 2 и 3, в двух других один из индивидуумов выбирает участки 1 и 3, а другой — участки 2 и 3.

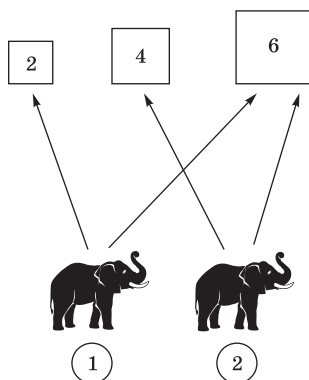


Рис. 3.3

Фуражирование животных

Данная игра также допускает потенциал вида

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (1, 2) & (1, 3) & (2, 3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (1, 2) \\ (1, 3) \\ (2, 3) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 4 & 8 & 5 & 9 & 9 \\ 6 & 8 & 7 & 9 & 8 & 10 \\ 4 & 5 & 9 & 5 & 9 & 10 \\ 6 & 9 & 8 & 9 & 8 & 11 \\ 9 & 9 & 10 & 10 & 11 & 11 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Теорема 3.3. Пусть игра n лиц $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} \rangle$ допускает потенциал P . Тогда равновесие по Нэшу в игре Γ является равновесием по Нэшу в игре $\Gamma' = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, P \rangle$ и наоборот. Кроме того, в игре Γ всегда существует по крайней мере одно равновесие в чистых стратегиях.

Доказательство. Первое утверждение следует из определения потенциала. Действительно, в силу (3.1) условия

$$H_i(x_{-i}^*, x_i) \leq H_i(x^*), \forall x_i,$$

и

$$P(x_{-i}^*, x_i) \leq P(x^*), \forall x_i$$

совпадают, и, следовательно, если x^* есть равновесие по Нэшу в игре Γ , то оно является равновесием и в игре Γ' и наоборот.

Докажем теперь, что в игре Γ' всегда существует равновесие в чистых стратегиях. Выберем в качестве x^* ситуацию в чистых стратегиях, которая доставляет максимум потенциалу $P(x)$ на множестве $\prod_{i=1}^n X_i$. Тогда в этой точке для любого $x \in \prod_{i=1}^n X_i$ выполняется неравенство $P(x) \leq P(x^*)$, в частности, и по каждому аргументу, т. е.

$$P(x_{-i}^*, x_i) \leq P(x^*), \forall x_i.$$

Отсюда вытекает, что x^* равновесие по Нэшу в игре Γ' и, следовательно, в игре Γ .

Таким образом, если игра допускает потенциал, то в ней всегда существует равновесие в чистых стратегиях. Мы видели это в примерах «Заторы на дорогах» и «Фуражирование животных».

Олигополия Курно. В предыдущем разделе была рассмотрена олигополия Курно, где функции выигрыша игроков имеют вид

$$H_i(x) = (p - b \sum_{j=1}^n x_j) x_i - c_i x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Эта игра также является потенциальной. Потенциалом является функция

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n (p - c_j) x_j - b \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right). \quad (3.2)$$

Действительно, функции $H_i(x)$ и $P(x)$ являются квадратичными по переменной q_i , причем их производные совпадают,

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i} = p - c_i - 2bx_i - b \sum_{j \neq i} x_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Следовательно, функции $H_i(x)$ и $P(x)$ по каждой из переменных x_i равны с точностью до постоянной, т. е.

$$H_i(x_{-i}, x_i) - H_i(x_{-i}, x'_i) = P(x_{-i}, x_i) - P(x_{-i}, x'_i), \forall x_i.$$

Таким образом, функция (3.2) является потенциалом в модели олигополии. Согласно теореме 3 равновесие можно найти как максимум функции (3.2). Из условий на экстремум

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = p - c_i - 2bx_i - b \sum_{j \neq i} x_j = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

приходим к соотношениям (1.2), которые в предыдущем разделе привели к равновесию в модели олигополии (1.3).

Пример игры, где нет потенциала. Заметим, что потенциал в игре не обязательно существует, хотя равновесие может достигаться в чистых стратегиях. Вернемся к примеру «затор на дорогах» (см. рис. 3.2). Предположим, что в тех же условиях затраты игроков вычисляются как максимум из двух величин, представляющих время движения их автомобилей по обоим дорогам, тогда матрица выигрышей примет вид

$$\begin{matrix} & (2, 0) & (1, 1) & (0, 2) \\ \begin{matrix} (2, 0) \\ (1, 1) \\ (0, 2) \end{matrix} & \begin{pmatrix} (-4, -4) & (-3, -3) & (-2, -4) \\ (-3, -3) & (-4, -4) & (-6, -6) \\ (-4, -2) & (-6, -6) & (-8, -8) \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

В данной игре существуют два равновесия в чистых стратегиях. Это ситуации, когда автомобили одного из игроков движутся по первой дороге, а у другого — автомобили движутся по разным дорогам. Тем не менее потенциал в данной игре не существует. Покажем это. Если бы потенциал P существовал, то согласно определению (3.1) выполнялись бы соотношения

$$P(1, 1) - P(3, 1) = H_1(1, 1) - H_1(3, 1) = -4 - (-4) = 0,$$

$$P(1, 1) - P(1, 2) = H_2(1, 1) - H_2(1, 2) = -4 - (-3) = -1.$$

Отсюда

$$P(3, 1) - P(1, 2) = -1. \quad (3.4)$$

С другой стороны,

$$P(1, 2) - P(3, 2) = H_1(1, 2) - H_1(3, 2) = -3 - (-6) = 3,$$

и

$$P(3, 1) - P(3, 2) = H_2(3, 1) - H_2(3, 2) = -2 - (-6) = 4,$$

откуда

$$P(3, 1) - P(1, 2) = 1.$$

Это противоречит соотношению (3.4). Значит, потенциал в данной игре не существует. Заметим, что отличие данного примера от предыдущего в том, что затраты не выражаются здесь в аддитивной форме.

§ 3.4. ИГРЫ ЗАПОЛНЕНИЯ

Игры заполнения (congestion games) впервые были рассмотрены Розенталем (1973). Свое название они получили из-за того, что функция выигрыша в них зависит лишь от числа игроков, выбравших одинаковые стратегии. К таким играм относятся игры выбора маршрута при передвижении из одного пункта в другой, где время в пути зависит от числа автомобилей на данном участке пути. Игра фуражирования также относится к играм заполнения, поскольку количество ресурса, которое может получить животное на данном участке, зависит от числа других животных, находящихся на этом участке.

Определение 3.3. *Симметричной игрой заполнения будем называть игру n лиц $\Gamma = \langle N, M, \{S_i\}_{i \in N}, \{c_i\}_{i \in N} \rangle$, где $N = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков, $M = \{1, \dots, m\}$ — конечное множество неких объектов, из которых формируются стратегии. Стратегией игрока i является выбор некоторого подмножества из M . Множество всех возможных стратегий формирует множество стратегий игрока i , которое обозначается как S_i , $i = 1, \dots, n$. С каждым объектом $j \in M$ связана функция $c_j(k)$, $1 \leq k \leq n$, которая представляет собой выигрыш (или затраты) каждого из k игроков, выбравших стратегии, куда входит j , и которая зависит только от общего числа этих игроков k .*

Итак, предположим, игроки выбрали стратегии $s = (s_1, \dots, s_n)$. Каждое s_i представляет собой набор объектов из M . Тогда функция выигрыша игрока i определяется как суммарный выигрыш на каждом из объектов, т. е.

$$H_i(s_1, \dots, s_n) = \sum_{j \in s_i} c_j(k_j(s_1, \dots, s_n)),$$

где $k_j(s_1, \dots, s_n)$ равно числу игроков, в стратегии которых входит объект j , $i = 1, \dots, n$.

Теорема 3.4. *Симметричная игра заполнения является потенциальной, и значит, в ней всегда существует равновесие в чистых стратегиях.*

Доказательство. Рассмотрим функцию вида

$$P(s_1, \dots, s_n) = \sum_{j \in \bigcup_{i \in N} s_i} \left(\sum_{k=1}^{k_j(s_1, \dots, s_n)} c_j(k) \right)$$

и докажем, что это потенциал для данной игры заполнения. Проверим выполнение условий (2.1). С одной стороны,

$$H_i(s_{-i}, s'_i) - H_i(s_{-i}, s_i) = \sum_{j \in s'_i} c_j(k_j(s_{-i}, s'_i)) - \sum_{j \in s_i} c_j(k_j(s_{-i}, s_i)).$$

Для всех $j \in s_i \cap s'_i$ выигрыши c_j в первой и второй суммах одинаковы, поэтому

$$H_i(s_{-i}, s'_i) - H_i(s_{-i}, s_i) = \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} c_j(k_j(s) + 1) - \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} c_j(k_j(s)).$$

Теперь находим

$$P(s_{-1}, s'_i) - P(s_{-1}, s_i) = \sum_{j \in \cup_{l \neq i} s_l \cup s'_i} \left(\sum_{k=1}^{k_j(s_{-i}, s'_i)} c_j(k) \right) - \sum_{j \in \cup_{l \in N} s_l} \left(\sum_{k=1}^{k_j(s_{-i}, s_i)} c_j(k) \right).$$

Для $j \notin s_i \cup s'_i$ соответствующие слагаемые в этих суммах равны, отсюда

$$\begin{aligned} P(s_{-1}, s'_i) - P(s_{-1}, s_i) &= \sum_{j \in s_i \cup s'_i} \left(\sum_{k=1}^{k_j(s_{-i}, s'_i)} c_j(k) - \sum_{k=1}^{k_j(s_{-i}, s_i)} c_j(k) \right) = \\ &= \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} \left(\sum_{k=1}^{k_j(s_{-i}, s'_i)} c_j(k) - \sum_{k=1}^{k_j(s_{-i}, s_i)} c_j(k) \right) + \\ &\quad + \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} \left(\sum_{k=1}^{k_j(s_{-i}, s'_i)} c_j(k) - \sum_{k=1}^{k_j(s_{-i}, s_i)} c_j(k) \right). \end{aligned}$$

Для $j \in s'_i \setminus s_i$ справедливо $k_j(s_{-i}, s'_i) = k_j(s) + 1$, а для $j \in s_i \setminus s'_i$ имеет место $k_j(s_{-i}, s'_i) = k_j(s) - 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} P(s_{-1}, s'_i) - P(s_{-1}, s_i) &= \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} \left(\sum_{k=1}^{k_j(s)+1} c_j(k) - \sum_{k=1}^{k_j(s)} c_j(k) \right) + \\ &\quad + \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} \left(\sum_{k=1}^{k_j(s)-1} c_j(k) - \sum_{k=1}^{k_j(s)} c_j(k) \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} c_j(k_j(s) + 1) - \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} c_j(k_j(s),$$

что совпадает с выражением для $H_i(s_{-i}, s'_i) - H_i(s_{-i}, s_i)$. Теорема доказана.

Таким образом, в симметричных играх заполнения всегда существует хотя бы одно равновесие в чистых стратегиях. Хотя, конечно, может существовать равновесие и в смешанных стратегиях. Однако в практических приложениях важно существование равновесия именно среди чистых стратегий. Заметим также, что существование такого равновесия связано именно с аддитивной формой функции выигрыша и тем, что выигрыши игроков в симметричных играх имеют однородную форму. Далее мы рассмотрим случай персонафицированных игр заполнения, в которых выигрыши у разных игроков могут иметь разный вид. При этом ограничимся рассмотрением простых стратегий, когда каждый из игроков может выбрать лишь один объект из множества $M = \{1, \dots, m\}$.

§ 3.5. ПЕРСОНАФИЦИРОВАННЫЕ ИГРЫ ЗАПОЛНЕНИЯ

Определение 3.4. Персонафицированной игрой заполнения будем называть игру n лиц $\Gamma = \langle N, M, \{c_{ij}\}_{i \in N, j \in M} \rangle$, где $N = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков, $M = \{1, \dots, m\}$ — конечное множество объектов. Стратегией игрока i является выбор некоторого объекта из M . Таким образом, M здесь можно рассматривать как множество стратегий игроков. Выигрыш игрока i , выбравшего стратегию j , определяется с помощью функции $c_{ij} = c_{ij}(k_j)$, где k_j — число игроков, использующих стратегию j , $0 \leq k_j \leq n$. Предположим здесь, что c_{ij} невозрастающие функции, т. е. чем больше игроков выбрали данную стратегию, тем меньше выигрыш.

Обозначим профиль выбранных игроками стратегий как $s = (s_1, \dots, s_n)$. Каждой ситуации s соответствует **вектор заполнения** $k = (k_1, \dots, k_m)$, где k_j есть число игроков, выбравших стратегию j . Тогда функция выигрыша игрока i определяется следующим образом:

$$H_i(s_1, \dots, s_n) = c_{is_i}(k_{s_i}) \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь нас будут интересовать только ситуации равновесия в чистых стратегиях. Определение равновесия по Нэшу в классе чистых стратегий в данной игре можно переформулировать следующим образом. В равновесии s^* любому игроку i невыгодно отклоняться от оптимальной стратегии s_i^* . Это значит, что выигрыш при использовании

оптимальной стратегии $c_{is_i^*}(k_{s_i^*})$ не меньше, чем выигрыш, который он может получить, присоединившись к игрокам, использующим любую другую стратегию j , т. е. $c_{ij}(k_j + 1)$.

Определение 3.5. *Равновесием по Нэшу в игре $\Gamma = \langle N, M, \{c_{ij}\}_{i \in N, j \in M} \rangle$ называется ситуация $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$, в которой для любого игрока $i \in N$ выполняются следующие условия:*

$$c_{is_i^*}(k_{s_i^*}) \geq c_{ij}(k_j + 1), \forall j \in M. \quad (5.1)$$

Дадим еще одно важное конструктивное понятие, введенное Мондерером и Шепли, которое будет использоваться при доказательстве существования равновесия в играх заполнения.

Определение 3.6. *Если в игре $\Gamma = \langle N, M, \{c_{ij}\}_{i \in N, j \in M} \rangle$ существует такая последовательность профилей стратегий $s(t), t = 0, 1, \dots$, в которой каждый профиль отличается от предыдущего только одной компонентой, и при этом выигрыш игрока, который изменил свою стратегию, стал строго больше, такую последовательность будем называть последовательностью улучшений. Если любая последовательность улучшений в игре Γ является конечной, будем говорить, что в данной игре выполняется свойство конечности улучшений (свойство FIP (Final Improvement Property)).*

Очевидно, что если последовательность улучшений конечна, то терминальный профиль является равновесием по Нэшу, поскольку для него выполняются условия (4.1). Однако существуют игры, в которых равновесие по Нэшу существует, а свойство FIP для них не выполняется. Последовательности улучшений в таких играх могут быть бесконечными, циклически повторяясь. Последнее следует из конечности набора стратегий.

Тем не менее игра Γ в случае, когда множество стратегий M состоит из двух стратегий, всегда обладает свойством FIP.

Теорема 3.5. *В персонифицированной игре заполнения $\Gamma = \langle N, M, \{c_{ij}\}_{i \in N, j \in M} \rangle$, где множество $M = \{1, 2\}$ состоит из двух стратегий, всегда существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.*

Доказательство. Докажем, что игра заполнения с двумя стратегиями обладает свойством FIP. Предположим противное, т. е. существует бесконечная последовательность улучшений $s(0), s(1), \dots$. Выделим в ней циклическую часть $s(0), \dots, s(T)$, т. е. $s(0) = s(T)$ и $T > 1$. Каждому профилю $s(t), t = 1, \dots, T$ в этой цепочке соответствует вектор

заполнения $k(t) = (k_1(t), k_2(t))$, $t = 0, \dots, T$. Понятно, что $k_2 = n - k_1$. Найдем в этой цепочке элемент с максимальным значением $k_2(t)$. Без ограничения общности можно считать, что это $k_2(1)$. Иначе, пользуясь цикличностью, просто перенумеруем последовательность. Тогда $k_1(1) = n - k_2(1)$ будет минимальным элементом в цепочке. Это значит, что в начальный момент некий игрок i переключился со стратегии 1 на 2, т. е.

$$c_{i2}(k_2(1)) > c_{i1}(k_1(1) + 1). \quad (5.2)$$

Поскольку $s(t)$, $t = 0, \dots, T$ есть последовательность улучшений, то из монотонности функции выигрыша следует

$$c_{i2}(k_2(1)) \leq c_{i2}(k_2(t)), \quad t = 0, \dots, T.$$

С другой стороны,

$$c_{i1}(k_1(1) + 1) \geq c_{i1}(k_1(t) + 1), \quad t = 0, \dots, T.$$

Вместе с (5.2) это приводит к неравенству $c_{i2}(k_2(t)) > c_{i1}(k_1(t) + 1)$, $t = 0, \dots, T$, т. е. игрок i нигде не отклоняется от стратегии 2, что противоречит факту, что в начальный момент $t = 0$, а значит, и в момент $t = T$, он использовал стратегию 1.

Полученное противоречие доказывает, что игра заполнения с двумя стратегиями всегда обладает свойством FIP, и значит, имеет ситуацию равновесия среди чистых стратегий.

Заметим, что при доказательстве теоремы мы воспользовались тем фактом, что максимальное заполнение первой стратегии соответствовало минимальному заполнению второй стратегии. Это не так даже в игре с тремя стратегиями. Поэтому игры заполнения с тремя и более стратегиями могут условию FIP не удовлетворять.

Пример игры заполнения, где не выполняется свойство FIP.

Рассмотрим игру заполнения для двух лиц и трех стратегий с матрицей выигрышей вида

$$\begin{pmatrix} (0, 4) & (5, 6) & (5, 3) \\ (4, 5) & (3, 1) & (4, 3) \\ (2, 5) & (2, 6) & (1, 2) \end{pmatrix}.$$

Здесь существует бесконечная циклическая последовательность улучшений

$$(1, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (1, 1).$$

Таким образом, данная игра не обладает свойством FIP. Тем не менее здесь существуют даже две ситуации равновесия в чистых стратегиях, это ситуации $(1, 2)$ и $(2, 1)$.

Чтобы доказать существование равновесия в чистых стратегиях в общем случае, введем более сильное условие улучшения решений в последовательности улучшений. Будем считать, что в последовательности улучшений каждый из игроков выбирает наилучший для себя ответ в данной ситуации, который приносит ему максимальный выигрыш. Если таких решений несколько, он выбирает одно из них. Такую последовательность улучшений будем называть последовательностью наилучших ответов.

Определение 3.7. Если в игре $\Gamma = \langle N, M, \{c_{ij}\}_{i \in N, j \in M} \rangle$ существует такая последовательность профилей стратегий $s(t), t = 0, 1, \dots$, в которой каждый профиль отличается от предыдущего только одной компонентой, и при этом выигрыш игрока, который изменил свою стратегию, стал строго больше и принес ему максимальный в данной ситуации выигрыш, такую последовательность будем называть последовательностью наилучших ответов. Если любая последовательность улучшений в игре Γ является конечной, будем говорить, что в данной игре выполняется свойство конечности последовательности наилучших ответов (свойство FBRP (Final Best-Reply Property)).

Очевидно, что любая последовательность наилучших ответов является последовательностью улучшений, но обратное неверно. Теперь мы можем доказать основную теорему.

Теорема 3.6. В персонифицированной игре заполнения $\Gamma = \langle N, M, \{c_{ij}\}_{i \in N, j \in M} \rangle$ всегда существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции по числу игроков. Для $n = 1$ утверждение очевидно, игрок выберет наилучшую стратегию из M . Предположим, что утверждение справедливо для $n - 1$ игрока и докажем его для n .

Рассмотрим игру n лиц $\Gamma = \langle N, M, \{c_{ij}\}_{i \in N, j \in M} \rangle$. Исключим вначале из рассмотрения n -го игрока. В редуцированной игре Γ' с $n - 1$ игроками и m стратегиями по индукционному предположению существует равновесие $s' = (s_1(0), \dots, s_{n-1}(0))$. Соответствующий вектор заполнения обозначим $k'(0) = (k'_1(0), \dots, k'_m(0))$. Тогда $c_{i s_i(0)}(k'_{s_i(0)} + 1) \geq c_{ij}(k'_j + 1), \forall j \in M, i = 1, \dots, n - 1$. Вернемся теперь

к игре Γ и пусть n -й игрок выбирает наилучший ответ (пусть это стратегия $j(0) = s_n(0)$). В векторе заполнения $k' = (k'_1, \dots, k'_m)$ изменится только одна компонента. Компонента с номером $j(0)$ увеличится на единицу.

Теперь формируем последовательность наилучших ответов. Начальный член последовательности $s(0) = (s_1(0), \dots, s_{n-1}(0), s_n(0))$. Соответствующий вектор заполнения обозначим $k(0) = (k_1(0), \dots, k_m(0))$. В ситуации $s(0)$ только у игроков, использующих стратегию $j(0)$, выигрыш мог уменьшиться. У остальных он не изменился и им невыгодно менять свою стратегию. Пусть у какого-то игрока i_1 , использующего стратегию $j(0)$, выигрыш может возрасти при выборе другой стратегии. Если такого игрока не существует, равновесие в игре Γ достигнуто. Выберем его наилучший ответ $j(1)$. Новый профиль обозначим $s(1)$. В соответствующем ему векторе заполнения $k(1)$ компонента $j(0)$ уменьшилась на единицу, а компонента $j(1)$ увеличилась на единицу. В новой ситуации $s(1)$ выигрыши могут увеличить только игроки, использующие стратегию $j(1)$. Для остальных игроков выигрыши не изменились по сравнению с начальной ситуацией. Пусть игрок i_2 может увеличить свой выигрыш. Выбираем его наилучший ответ $j(2)$ и т. д.

Мы получили последовательность наилучших ответов $s(t)$. Ей соответствует последовательность векторов заполнения $k(t)$, в которой любая компонента $k_j(t)$ принимает значение либо как в начальный момент $k'_j(0)$, либо на единицу больше. Последнее происходит, если в момент $t - 1$ игрок i_t переключается на стратегию $j(t)$. В остальных случаях, число игроков, использующих стратегию $j \neq j(t)$, равно $k'_j(0)$. Заметим, что каждый из игроков может переключиться на другую стратегию не более одного раза. Действительно, если на шаге $t - 1$ игрок i_t переключается на стратегию j , то в момент t данную стратегию использует максимальное количество игроков. Следовательно, на последующих шагах число игроков, использующих данную стратегию, будет такое же или меньше, а число игроков, которые используют другие стратегии, будет такое, как в данный момент, либо больше. В силу монотонности функции выигрыша игрок i_t не сможет больше увеличить свой выигрыш. Поскольку число игроков конечно, то и построенная последовательность наилучших ответов будет конечной, т. е. $s(t), t = 1, 2, \dots, T$, где $T \leq n$.

Таких последовательностей наилучших ответов может быть несколько. Выберем из них последовательность $s(t), t = 1, \dots, T$ с максимальным T . Докажем, что последний профиль $s(T) = (s_1(T), \dots, s_n(T))$ является равновесием по Нэшу.

Выше мы уже отметили, что те игроки, которые отклонялись от своих начальных стратегий, в ситуации $s(T)$ не могут увеличить свой выигрыш. Рассмотрим игроков, которые не отклонились от своих стратегий за время T . Если это игрок, который относится к группе игроков, использующих стратегию $j(T)$, то если бы он смог увеличить свой выигрыш, мы могли бы продолжить далее последовательность наилучших ответов на шаг $T+1$, что противоречило бы факту, что T максимально. Пусть теперь это игрок, который относится к группе игроков, играющих стратегию $j \neq j(T)$. Число игроков в этой группе, как мы отметили выше, точно такое же, как в начальный момент. Поэтому для этого игрока также нельзя увеличить выигрыш.

Итак, мы показали, что в ситуации $s(T) = (s_1(T), \dots, s_n(T))$ для любого игрока $i = 1, \dots, n$ выполняются условия

$$c_{is_i(T)}(k_{s_i(T)}(T)) \geq c_{ij}(k_j(T) + 1), \forall j \in M.$$

А это означает, что $s(T)$ равновесие по Нэшу для n игроков. Теорема доказана.

§ 3.6. АУКЦИОНЫ

Теперь мы перейдем к исследованию бескоалиционных игр n лиц в классе смешанных стратегий. Задача, которую мы рассмотрим в этом параграфе, относится к моделям аукционов.

Для простоты мы рассмотрим только симметричный случай, когда все n игроков находятся в одинаковых условиях. Итак, на аукционе выставлен некоторый предмет с одинаковой ценностью V для всех игроков и игроки одновременно объявляют цену за него, соответственно (x_1, \dots, x_n) . Тот из игроков, который объявил наивысшую цену, получает этот предмет. Существуют различные схемы аукционов. Мы рассмотрим только две схемы аукционов: по первому и второму предложениям.

Аукцион по первому предложению. Предположим, что правила аукциона таковы, что победитель, т.е. игрок, назвавший максимальную цену, получает данный предмет и ничего не платит. Остальные игроки должны заплатить за участие в аукционе ту цену, которую они заявили. Если же несколько игроков заявили максимальную цену, они делят выигрыш поровну. Согласно данным правилам функция

выигрыша в данной игре имеет вид

$$H_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} -x_i, & \text{если } x_i < y_{-i}, \\ \frac{V}{m_i(x)} - x_i, & \text{если } x_i = y_{-i}, \\ V, & \text{если } x_i > y_{-i}, \end{cases} \quad (6.1)$$

где $y_{-i} = \max_{j \neq i} \{x_j\}$ и $m_i(x)$ — число игроков, чьи предложения совпали с x_i , $i = 1, \dots, n$. Нетрудно понять, что здесь нет равновесия в чистых стратегиях, будем искать его среди смешанных стратегий. Пользуясь симметрией, можно проводить рассуждения только для первого игрока.

Предположим, что игроки $\{2, \dots, n\}$ используют одну и ту же смешанную стратегию с функцией распределения $F(x)$, $x \in [0, \infty)$. Выигрыш первого игрока зависит от распределения величины $y_{-1} = \max\{x_2, \dots, x_n\}$. Легко понять, что распределение этого максимума есть просто $(n-1)$ -я степень распределения $F(x)$, а именно $F_{n-1}(x) = F^{n-1}(x)$. Тогда с вероятностью $[F(x)]^{n-1}$ предложение первого игрока будет максимальным, и он получит выигрыш V , и с вероятностью $1 - [F(x)]^{n-1}$ кто-то назовет бóльшую цену, и ему придется заплатить x . Теперь мы можем выписать выигрыш первого игрока, использующего чистую стратегию x ,

$$\begin{aligned} H_1(x, \overbrace{F, \dots, F}^{n-1}) &= V[F(x)]^{n-1} - x(1 - [F(x)]^{n-1}) = \\ &= (V + x)[F(x)]^{n-1} - x. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Достаточным условием того, что профиль $(F(x), \dots, F(x))$ будет об-разовывать равновесие, является условие

$$H_1(x, \overbrace{F, \dots, F}^{n-1}) = \text{const} \text{ или } \partial H_1(x, \overbrace{F, \dots, F}^{n-1}) / \partial x = 0.$$

Последнее условие приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dF_{n-1}(x)}{dx} = \frac{1 - F_{n-1}(x)}{V + x}, \quad 0 \leq x < \infty$$

с граничным условием $F_{n-1}(0) = 0$. Интегрирование дает

$$F_{n-1}(x) = \frac{x}{V + x}.$$

Следовательно, оптимальная смешанная стратегия определяется следующим образом:

$$F^*(x) = \left(\frac{x}{V + x} \right)^{1/(n-1)},$$

а плотность данного распределения имеет вид

$$f^*(x) = \frac{1}{n-1} \left(\frac{x}{V+x} \right)^{-\frac{n-2}{n-1}}.$$

Подставляя найденное распределение в (6.2), находим $H_1(x, \overbrace{F^*, \dots, F^*}^{n-1}) = 0$ для любого $x \geq 0$. Таким образом, какую бы смешанную стратегию не использовал первый игрок, его выигрыш будет равен нулю. А это означает, что значение игры равно нулю.

Теорема 3.7. В аукционе с функцией выигрыша (6.1) равновесие образуют смешанные стратегии вида

$$F^*(x) = \left(\frac{x}{V+x} \right)^{1/(n-1)},$$

а значение игры равно нулю.

Аукцион по второму предложению. Правила данного аукциона таковы, что все игроки должны заплатить за участие в аукционе названную цену, а выигравший игрок платит лишь цену второго по величине игрока. Аукционы, в которых победитель платит цену второго по величине предложения, называются аукционами Викри. Если несколько игроков сделали максимальное предложение, V распределяется на всех поровну.

Таким образом, функция выигрыша в данной игре имеет вид

$$H_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} -x_i, & \text{если } x_i < y_{-i}, \\ \frac{V}{m_i} - x_i, & \text{если } x_i = y_{-i}, \\ V - y_{-i}, & \text{если } x_i > y_{-i}, \end{cases} \quad (6.3)$$

где $y_{-i} = \max_{j \neq i} \{x_j\}$ и m_i имеют то же значение, что и в первой модели.

Здесь нет равновесия в чистых стратегиях. Если все предложения не превосходят V , следует попытаться максимально увеличить предложение, однако если хотя бы одно предложение станет больше V , следует объявлять нулевую цену. Найдем равновесие в смешанных стратегиях, причем в силу симметрии проведем рассуждения только для первого игрока.

Предположим, что игроки $\{2, \dots, n\}$ используют одну и ту же смешанную стратегию с функцией распределения $F(x), x \in [0, \infty)$. Выигрыш первого игрока зависит от распределения величины $y_{-1} = \max\{x_2, \dots, x_n\}$. Мы отмечали выше, что распределение этого максимума есть просто $(n-1)$ -я степень распределения $F(x)$, а именно

$F_{n-1}(x) = F^{n-1}(x)$. Теперь мы можем выписать выигрыш первого игрока, использующего чистую стратегию x ,

$$H_1(x, \overbrace{F, \dots, F}^{n-1}) = \int_0^x (V - t) dF_{n-1}(t) - \int_x^\infty x dF_{n-1}(t).$$

Поскольку носитель распределения $F(x)$ есть $[0, \infty)$, то достаточное условие существования равновесия $H_1(x, \overbrace{F, \dots, F}^{n-1}) = \text{const}$ или $\partial H_1(x, \overbrace{F, \dots, F}^{n-1}) / \partial x = 0$ приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dF_{n-1}(x)}{dx} = \frac{1 - F_{n-1}(x)}{V},$$

общее решение которого имеет вид

$$F_{n-1}(x) = 1 - c \exp\left(-\frac{x}{V}\right).$$

Поскольку $F(0) = 0$ находим $F_{n-1}(x) = 1 - \exp(-\frac{x}{V})$. Теперь мы можем найти $F(x)$

$$F(x) = \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{V}\right)\right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (6.4)$$

Итак, если игроки $\{2, \dots, n\}$ используют смешанную стратегию $F(x)$, то выигрыш первого игрока имеет постоянное значение

$H_1(x, \overbrace{F, \dots, F}^{n-1}) = H_1(x, \overbrace{F, \dots, F}^{n-1}) = 0$. Отсюда, какую бы стратегию ни использовал первый игрок, его выигрыш в такой ситуации всегда будет равен нулю. А это означает оптимальность стратегий $F(x)$.

Теорема 3.8. В аукционе с функцией выигрыша (6.3) равновесие образуют смешанные стратегии вида

$$F(x) = \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{V}\right)\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Для $n = 2$ плотность распределения (6.4) имеет вид $f^*(x) = V^{-1}e^{-x/V}$, для $n \geq 3$:

$$f^*(x) = \frac{1}{n-1} \left(1 - e^{-x/V}\right)^{\frac{1}{n-1}-1} \cdot \frac{1}{V} e^{-x/V} \rightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{если } x \downarrow 0 \\ 0, & \text{если } x \uparrow \infty. \end{cases}$$

Интересно отметить, что хотя условия этих двух аукционов различаются незначительно, оптимальные стратегии имеют совершенно разный вид. В первом случае это степенная функция, а во втором — экспоненциальное распределение. Неожиданно оказывается, что обе оптимальные стратегии могут привести к предложениям, которые больше, чем ценность объекта V . В заключение сравним вероятности превысить данное значение V для обеих моделей аукционов для $n = 2$. Для аукциона по первому предложению данная вероятность равна $1 - F^*(V) = 1 - (1/2)^{-1} = 0.5$, а для аукциона по второму предложению эта вероятность меньше $1 - F^*(V) = 1 - (1 - \exp(-1))^{1/(n-1)} \approx 0.3679$.

§ 3.7. ИГРА НА ИСТОЩЕНИЕ

Существует и другая биологическая интерпретация игры, рассмотренной в предыдущем параграфе. Эта модель близка к модели конкуренции среди животных в борьбе за ресурс V , которая была предложена английским биологом М. Смитом.

Предположим, что $V = V(x)$, положительная и убывающая функция от x , представляет собой некий ресурс на данной территории. За ресурс идет борьба между n животными (игроками), и время игры ограничено единичным интервалом. В течение какого-то времени $x_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n$ животные демонстрируют свою силу, и то из них, которое делает это дольше всех, захватывает весь ресурс. При этом затраты участников пропорциональны времени их затраченных усилий, а затраты победителя равны длине интервала времени, когда его последний конкурент покинул поле битвы.

Будем искать равновесие среди смешанных стратегий в виде функций распределения

$$F(x) = I(0 \leq x < a) \int_0^x h(t) dt + I(a \leq x \leq 1),$$

где a — некоторое значение из интервала $[0, 1]$ и I_A — индикатор события A . Предположим, что все игроки $\{2, \dots, n\}$ используют одну и ту же стратегию F , а первый игрок использует чистую стратегию $x \in [0, 1]$. Его ожидаемый выигрыш равен

$$H_1(x, \overbrace{F, \dots, F}^{n-1}) = \begin{cases} \int_0^x (V(x) - t) d(F(t))^{n-1} - \\ - x \left\{ 1 - (F(x))^{n-1} \right\}, & \text{если } 0 \leq x < a, \\ \int_0^a (V(x) - t) d(F(t))^{n-1}, & \text{если } a < x \leq 1, \end{cases} \quad (7.1)$$

где t есть время прекращения борьбы второго по силе игрока. Пусть

$$Q(x) = V(x) (F(x))^{n-1}, \quad \text{для } 0 < x < a. \quad (7.2)$$

Тогда (7.1) можно представить для $0 < x < a$,

$$\begin{aligned} H_1(x, F, \dots, F) &= Q(x) - \int_0^x t d(F(t))^{n-1} - \\ &- x \left\{ 1 - \frac{Q(x)}{V(x)} \right\} = Q(x) + \int_0^x \frac{Q(t)}{V(t)} dt - x. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Условие $\frac{\partial H_1}{\partial x} = 0$ приводит к линейному дифференциальному уравнению

$$Q'(x) + \frac{Q(x)}{V(x)} = 1, \quad \text{с } Q(0) = 0, \quad (7.4)$$

решение которого есть

$$Q(x) = e^{-\int (V(x))^{-1} dx} \left[\int e^{\int (V(x))^{-1} dx} dx + c \right], \quad (7.5)$$

где c произвольная постоянная.

Предположим, например, $V(x) = \bar{x}$, $0 \leq x \leq 1$. Для этого случая находим

$$Q(x) = \bar{x} \left[\int_0^x dt/\bar{t} + c \right] = \bar{x}(-\log \bar{x} + c).$$

Из граничных условий $Q(0) = 0$ следует $c = 0$, следовательно,

$$Q(x) = -\bar{x} \log \bar{x}, \quad (7.6)$$

что дает вместе с (7.2)

$$F(x) = (-\log \bar{x})^{\frac{1}{n-1}}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (7.7)$$

это возрастающая функция с $F(0) = 0$ и $F(a) = (-\log \bar{a})^{\frac{1}{n-1}}$.
Условие $F(a) = 1$ дает $a = 1 - e^{-1} \approx 0.63212$.

Для $F(x)$ вида (7.4) выигрыш (7.1)–(7.3) первого игрока становится равным для $0 < x < a$:

$$H_1(x, F, \dots, F) = -\bar{x} \log \bar{x} + \int_0^x (-\log \bar{t}) dt - x = 0,$$

так как второе выражение в правой части равно $\bar{x} \log \bar{x} + x$, как следует из соотношения $\int (1 + \log \bar{t}) dt = -\bar{t} \log \bar{t}$.

Для $a < x \leq 1$, $H_1(x, F, \dots, F)$ согласно (7.1) является убывающей функцией от x . Следовательно, если $F^*(x)$ выбрано как определено в (7.4), то

$$H_1(F, F^*, \dots, F^*) \leq H_1(F^*, F^*, \dots, F^*) = 0,$$

\forall функции распределения $F(x)$.

Окончательно приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.9. В игре на истощение с ресурсом вида $V(x) = \bar{x}$ равновесие по Нэшу достигается среди смешанных стратегий вида

$$F^*(x) = I(0 \leq x \leq a)(-\log \bar{x})^{\frac{1}{n-1}} + I(a < x \leq 1),$$

с выигрышем для каждого игрока равным 0, где $a = 1 - e^{-1} (\approx 0.63212)$.

Например, для $n = 2$ оптимальная плотность $f_2^*(x) = (-\log \bar{x})$, а при $n = 3$

$$f_3^*(x) = \frac{1}{2\bar{x}(-\log \bar{x})^{1/2}} \rightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{если } x \downarrow 0, \\ e/2 \approx 1.359, & \text{если } x \uparrow a. \end{cases}$$

Их вид представлен на рис. 3.4. Интересно, отметить, что радикально меняется вид смешанных стратегий. Для $n = 2$ с большей вероятностью надо бороться за ресурс как можно дольше. При увеличении числа соперников следует с большой вероятностью сразу же покидать поле битвы.

Рассуждая аналогично, нетрудно получить более общий результат.

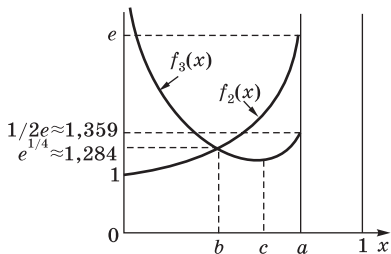


Рис. 3.4

Решение для $n = 2$ и 3 , где $V(x) = \bar{x}$.

Здесь $b = 1 - e^{-1/4} \approx 0.221$,

$c = 1 - e^{-1/2} \approx 0.393$, $a \approx 0.632$.

Теорема 3.10. Для $V(x) = \frac{1}{k}\bar{x}$, ($0 < k \leq 1$), равновесие по Нэшу достигается среди смешанных стратегий вида

$$F^*(x) = \left[(k/\bar{k}) \{ (\bar{x})^{k-1} - 1 \} \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad 0 \leq x < a,$$

где a есть единственный корень в интервале $(0, 1)$ уравнения

$$-\bar{k} \log \bar{a} = -\log k.$$

Оптимальный выигрыш каждого игрока равен 0.

Заметим, что $\lim_{k \rightarrow 1-0} \frac{(\bar{x})^{k-1} - 1}{\bar{k}} = -\log \bar{x}$ и, следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow 1-0} F^*(x) = (-\log \bar{x})^{\frac{1}{n-1}}.$$

§ 3.8. ДУЭЛИ, ТРУЗЛИ И ДРУГИЕ СОРЕВНОВАНИЯ НА МЕТКОСТЬ

Рассмотрим соревнования n игроков, связанные с поражением некоторой мишени (в частном случае своего противника). Каждый из игроков имеет одну пулю, которой он может выстрелить в цель в любой момент времени из интервала $[0, 1]$. Стартуя в момент $t = 0$, он движется к своей цели, которую может достигнуть в момент $t = 1$, и в какой-то момент должен выстрелить в нее. Пусть $A(t)$ есть вероятность поражения цели, если выстрел происходит в момент $t \in [0, 1]$. Предполагается, что $A(t)$ дифференцируема и $A'(t) > 0$, $A(0) = 0$ и $A(1) = 1$.

Выигрыш игрока равен 1, если он поразил свою цель раньше, чем другие игроки, и равен 0 в противном случае. В случае если несколько игроков поразили цель, их выигрыш равен 0. Каждый игрок заинтересован найти такую стратегию, при которой математическое ожидание попадания в цель максимально.

В силу симметрии задачи естественно предположить, что в равновесии все оптимальные стратегии игроков одинаковы. Предположим, что все игроки используют одинаковые смешанные стратегии с функцией распределения $F(t)$ и соответственно плотностью $f(t)$, $a \leq t \leq 1$, где параметр $a \in [0, 1]$. Тогда, ожидаемый выигрыш первого игрока, если он стреляет в момент x , а другие игроки используют смешанные стратегии $F(t)$, равен

$$H_1(x, \overbrace{F, \dots, F}^{n-1}) = \begin{cases} A(x), & \text{если } 0 \leq x < a, \\ A(x) \left[1 - \int_a^x A(t)f(t)dt \right]^{n-1}, & \text{если } a \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (8.1)$$

так как для $a \leq x \leq 1$ игрок I получит выигрыш 1, только в случае, если все другие игроки $2 \sim n$ не стреляли, или стреляли до момента x , но не попали в цель.

Пусть v общий для всех игроков оптимальный выигрыш. Тогда достаточное условие для равновесия будет выглядеть так:

$$H_1(x, F, \dots, F) \begin{cases} \leq \\ = \end{cases} v, \quad \text{для } \begin{cases} 0 \leq x < a \\ a \leq x \leq 1 \end{cases}. \quad (8.2)$$

Для $a \leq x \leq 1$, дифференцируя (8.1) и приравнявая нулю, мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2n-1}{n-1} \left[\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{A''(x)}{A'(x)} \right]. \quad (8.3)$$

Интегрирование от a до x дает

$$\frac{f(x)}{f(a)} = \frac{A'(x)}{A'(a)} \left(\frac{A(x)}{A(a)} \right)^{-\frac{2n-1}{n-1}}, \quad (8.4)$$

откуда

$$f(x) = c(A(x))^{-\frac{2n-1}{n-1}} A'(x). \quad (8.5)$$

Условие $\int_a^1 f(t)dt = 1$ дает

$$c^{-1} = \int_a^1 (A(x))^{-\frac{2n-1}{n-1}} A'(x)dx = \left(\frac{n-1}{n}\right) \left[(A(a))^{-\frac{n}{n-1}} - 1\right]. \quad (8.6)$$

Условие (8.2) на интервале $a \leq x \leq 1$ требует, чтобы выполнялось

$$A(x) \left[1 - \int_a^x A(t)f(t)dt\right]^{n-1} \equiv v,$$

которое приводит вместе с (8.3) после упрощений к равенству

$$\begin{aligned} c(n-1) \left[(A(a))^{-\frac{1}{n-1}} - (A(x))^{-\frac{1}{n-1}}\right] = \\ = 1 - v^{\frac{1}{n-1}} (A(x))^{-\frac{1}{n-1}}, \quad \forall x \in [a, 1]. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Исключая c в соответствии с (8.4), приходим к равенству

$$\begin{aligned} (A(a))^{-\frac{1}{n-1}} - (A(x))^{-\frac{1}{n-1}} = \\ = \frac{1}{n} \left[1 - \left(\frac{v}{A(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right] \left[(A(a))^{-\frac{n}{n-1}} - 1\right], \quad \forall x \in (a, 1). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Следовательно, должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} (A(a))^{-\frac{n}{n-1}} - n(A(a))^{-\frac{1}{n-1}} - 1 = 0 \quad \text{и} \\ v^{\frac{1}{n-1}} \left[(A(a))^{-\frac{n}{n-1}} - 1\right] = n. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Из этих двух уравнений находим $v^{-\frac{1}{n-1}} = (A(a))^{-\frac{1}{n-1}}$, и отсюда $v = A(a)$.

Кроме того, умножая обе части первого уравнения (8.9) на $(A(a))^{\frac{n}{n-1}}$, приходим к уравнению

$$(A(a))^{\frac{n}{n-1}} + nA(a) - 1 = 0. \quad (8.10)$$

Окончательно нам остается установить условие $H_1(x, F, \dots, F) \leq v$, $\forall x \in [0, a]$. А это выполняется, поскольку в силу предположений $A(x) \leq A(a) = v$, $\forall x \in [0, a]$.

Данные рассуждения приводят нас к следующему утверждению.

Теорема 3.11. Пусть α_n единственный корень на $[0, 1]$ уравнения

$$\alpha^{\frac{n}{n-1}} + n\alpha - 1 = 0. \quad (8.11)$$

Тогда равновесие по Нэшу в данной игре состоит из смешанных стратегий вида

$$f^*(x) = \frac{1}{n-1} (\alpha_n)^{\frac{1}{n-1}} (A(x))^{-\frac{2n-1}{n-1}} A'(x), \quad (8.12)$$

для $A^{-1}(\alpha_n) = a_n \leq x \leq 1$.

При этом оптимальные выигрыши игроков в равновесии равны α_n .

Мы видим, что, во-первых, оптимальный выигрыш игроков α_n не зависит от функции точности $A(t)$ и, во-вторых, начальная точка носителя оптимальной стратегии a зависит от $A(t)$. Кроме того, мы видим из (8.12), что вероятность ничьей, т. е. когда все игроки получают нуль, равна $(\alpha_n)^{\frac{n}{n-1}}$.

При $n = 2$ (дуэль) ожидаемый выигрыш равен $\alpha_n = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$, а при $n = 3$ (трузль) $\alpha_n \approx 0.2831$. Интервал носителя распределения зависит от вида функции точности.

Пример 3.1. Пусть $A(x) = x^\gamma, \gamma > 0$. Тогда

$$a_n = A^{-1}(\alpha_n) = \alpha_n^{1/\gamma},$$

и оптимальная стратегия имеет следующую плотность распределения

$$f^*(x) = \frac{\gamma}{n-1} (\alpha_n)^{\frac{1}{n-1}} x^{-(\frac{n}{n-1}\gamma+1)}, \quad \text{для } \alpha_n^{1/\gamma} \leq x \leq 1.$$

При $\gamma = 1$ и $n = 2$ (дуэль) $a_n = \alpha_n = \sqrt{2} - 1$, т. е. начинать стрелять надо после момента 0.4142. Заметим, что для любого $n \geq 2$ a_n возрастает, когда параметр γ возрастает. Это соответствует интуитивному ожиданию, что чем меньше меткость игрока, тем позже надо начинать стрелять.

Пример 3.2. Пусть $A(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}$. Тогда

$$a_n = A^{-1}(\alpha_n) = \log \{1 + (e - 1)\alpha_n\},$$

следовательно, a_n убывает, если n возрастает. Например, при $n = 2$ (дуэль)

$$a_n = \log \{(\sqrt{2} - 1)(e + \sqrt{2})\} \approx 0.5375,$$

а при $n = 3$ (труэль)

$$a_n \approx 0.3964.$$

При этом оптимальные стратегии определяются с помощью плотности распределения вида

$$f^*(x) = \frac{1}{n-1} (\alpha_n)^{\frac{1}{n-1}} (e-1)^{-1} (e^x - 1)^{-\frac{2n-1}{n-1}} e^x,$$

для $a_n \leq x \leq 1$.

§ 3.9. ИГРА ПРЕДСКАЗАНИЯ

Представим, что n игроков стараются предсказать значение u случайной величины U , которая имеет равномерное распределение $U_{[0,1]}$ на интервале $[0, 1]$. Правила игры таковы, что выигрывает тот игрок, который назвал значение, ближайшее к u , но не большее его. При этом он выигрывает единицу, а остальные $n-1$ игроков получают 0. Каждый из игроков стремится максимизировать ожидаемый выигрыш.

Будем искать равновесие в виде распределений с носителем на некотором интервале $[0, a]$, $a \leq 1$, а именно пусть

$$G(x) = I(x < a) \int_0^x g(t) dt + I(x \geq a).$$

Тогда ожидаемый выигрыш игрока I, если его предсказанное значение равно x , а другие игроки следуют смешанной стратегии с функцией распределением $G(t)$ и ее плотностью $g(t)$, равен

$$H_1(x, \overbrace{G, \dots, G}^{n-1}) = \bar{x}, \quad \text{если } a < x < 1. \quad (9.1)$$

Для $0 < x < a$ согласно условиям

$$\begin{aligned} H_1(x, G, \dots, G) &= (G(x))^{n-1} \bar{x} + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} k (G(x))^{n-1-k} \int_x^a g(t) (\bar{G}(t))^{k-1} (t-x) dt, \end{aligned} \quad (9.2)$$

поскольку k игроков ($1 \leq k \leq n-1$) могут назвать значения большие, чем x , а другие $n-1-k$ игроков назвать меньшие, чем x . Заметим, что плотность распределения случайной величины $\min(X_1, \dots, X_k)$ есть $k (\bar{G}(t))^{k-1} g(t)$.

Поскольку интегрирование по частям приводит к равенству

$$\int_x^a (t-x) (\overline{G}(t))^{k-1} g(t) dt = \frac{1}{k} \int_x^a (\overline{G}(t))^k dt,$$

мы можем переписать (9.2) в виде

$$\begin{aligned} H_1(x, \overbrace{G, \dots, G}^{n-1}) &= (G(x))^{n-1} \bar{x} + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} (G(x))^{n-1-k} \int_x^a (\overline{G}(t))^k dt, \end{aligned} \quad (9.3)$$

для $0 < x < a$. Пусть v оптимальное ожидаемое значение выигрыша каждого игрока. Запишем условие смешанного равновесия для $G(x)$

$$H_1(x, G, \dots, G) \begin{cases} \equiv \\ \leq \end{cases} v, \quad \text{для} \quad \begin{cases} 0 \leq x < a \\ a < x \leq 1 \end{cases}. \quad (9.4)$$

Пользуясь (9.3)–(9.4), преобразуем уравнение $\frac{\partial}{\partial x} H_1(x, g, \dots, g) = 0$ на интервале $0 \leq x < a$. Деля обе части уравнения на $(G(x))^{n-1}$ и упрощая, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{\overline{G}(x)}{G(x)} \right)^k &= \frac{g(x)}{G(x)} \left[(n-1) \bar{x} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} (n-1-k) \int_x^a \left(\frac{\overline{G}(t)}{G(x)} \right)^k dt \right]. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Левая часть уравнения (9.5) равна $[G(x)]^{-(n-1)}$, а правая часть может быть представлена как

$$\frac{g(x)}{G(x)} \cdot (n-1) \left[\bar{a} + \int_x^a \left\{ 1 + \frac{\overline{G}(t)}{G(x)} \right\}^{n-2} dt \right].$$

Таким образом, мы можем представить (9.5) в виде

$$\begin{aligned} \bar{a}[G(x)]^{n-2} + \int_x^a (G(x) + \overline{G}(t))^{n-2} dt &= [(n-1)g(x)]^{-1}, \\ 0 < x < a, \quad \forall n \geq 2. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Естественно $g(x)$, $G(x)$ и a зависят от n . Но мы для простоты опускаем индекс n .

Рассмотрим последовательность функций

$$s_k(x) = \left[\bar{a}[G(x)]^k + \int_x^a (G(x) + \bar{G}(t))^k dt \right] / \bar{x}, \quad (9.7)$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, n-2.$$

Очевидно, выполняются неравенства

$$1 \equiv s_0(x) \geq s_1(x) \geq s_2(x) \geq \dots \geq s_{n-2}(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, a]. \quad (9.8)$$

Умножая обе части (9.7) на \bar{x} и дифференцируя, приходим к рекуррентным дифференциальным уравнениям

$$\bar{x}s'_k(x) - s_k(x) = kg(x)\bar{x}s_{k-1}(x) - 1$$

или эквивалентно

$$s'_k(x) + (1 - s_k(x)) / \bar{x} = kg(x)s_{k-1}(x), \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-2 \quad (9.9)$$

с граничными условиями

$$s_k(a) = 1, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-2.$$

Из (9.6)–(9.7) мы видим

$$s_{n-2}(x) = [(n-1)\bar{x}g(x)]^{-1}, \quad (9.10)$$

что эквивалентно

$$g(x) = [(n-1)\bar{x}s_{n-2}(x)]^{-1} \geq [(n-1)\bar{x}]^{-1} \quad (\text{из (9.8)}).$$

Среднее значение этого распределения равно

$$\int_0^a xg(x)dx = \int_0^a \frac{xdx}{(n-1)\bar{x}s_{n-2}(x)}. \quad (9.11)$$

Теорема 3.12. Пусть $\{s_1, \dots, s_{n-2}\}$ есть решение системы дифференциальных уравнений (9.9) и $g(x) = \frac{1}{(n-1)(1-x)s_{n-2}(x)}$. Выберем a из условия $\int_0^a g(x)dx = 1$. Тогда $g(x)$ — оптимальная смешанная стратегия в игре предсказания.

Система (9.9) вместе с (9.10) может быть использована для нахождения решения задачи. Опишем этот алгоритм. Вначале фиксируем значение параметра a и рассматриваем систему дифференциальных уравнений (9.9) на интервале $[0, a]$. Когда найдем решение с граничным условием $s_k(a) = 1, k = 1, \dots, n-2$, определяем плотность распределения $g(x) = [(n-1)s_{n-2}(x)(1-x)]^{-1}, x \in [0, a]$. Затем вычисляем a из условия $\int_0^a g(x) dx = 1$.

Случай $n = 2$.

Из (9.1)–(9.3) следует

$$H_1(x, G) = \begin{cases} G(x)\bar{x} + \int_x^a (t-x)g(t)dt, & \text{для } 0 < x < a, \\ \bar{x}, & \text{для } a < x < 1. \end{cases}$$

Уравнение (9.6) дает для $0 < x < a, g(x) = 1/\bar{x}$, и отсюда $G(x) = -\log \bar{x}, a = 1 - e^{-1} \approx 0.63212$. Для $a < x < 1$ имеет место $H_1(x, g^*) = \bar{x} \leq \bar{a} = H_1(a, g^*)$, следовательно, условие (9.4) удовлетворяется. Общее значение игры равно $e^{-1} \approx 0.36788$.

Случай $n = 3$.

$$H_1(x, G, G) = \begin{cases} (G(x))^2 \bar{x} + 2G(x) \int_x^a (t-x)g(t)dt + \\ + 2 \int_x^a (t-x)\bar{G}(t)g(t)dt, & \text{если } 0 < x < a, \\ \bar{x}, & \text{если } a < x < 1. \end{cases} \quad (9.12)$$

Уравнение (9.9) для $n = 3$ приводит к дифференциальному уравнению

$$s_1'(x) + (1 - s_1(x)) / \bar{x} = g(x)s_0(x) = g(x), \quad (9.13)$$

при этом $s_1(a) = 1$,

и из (2.7) после упрощения

$$\bar{x}s_1(x) = \bar{a}G(x) + \int_x^a (G(x) + \bar{G}(t)) dt = \frac{1}{2g(x)} \quad (9.14)$$

(из (9.6) при $n = 3$).

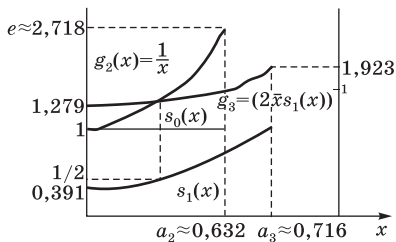


Рис. 3.5
Решения для $n = 2$ и 3

Исключая $g(x)$ из (9.13)–(9.14), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{s_1 s_1'}{s_1^2 - s_1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{x}, \quad 0 < x < a, \quad \text{с } s_1(a) = 1. \quad (9.15)$$

Функция $g(x) = (2s_1(x)\bar{x})^{-1}$ является положительной и непрерывной и представляет плотность распределения, если $\int_0^a g(x)dx = 1$. Отсюда

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^a g(x)dx = \int_0^a \left\{ s_1'(x) + \frac{1 - s_1(x)}{1 - x} \right\} dx = \\ &= 1 - s_1(0) + \int_0^a \frac{1 - s_1(x)}{1 - x} dx, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} s_1(0) &= \int_0^a \frac{1 - s_1(x)}{1 - x} dx = \int_{s_1(0)}^1 \frac{s_1 \bar{s}_1}{s_1^2 - s_1 + \frac{1}{2}} ds_1 \quad (\text{из (2.15)}) = \\ &= -1 + s_1(0) + \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}(2s_1(0) - 1) \\ &\left(\text{так как } \int \frac{ds_1}{s_1^2 - s_1 + r_2} = 2 \tan^{-1} 2x \right) \end{aligned}$$

и поэтому

$$s_1(0) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \tan \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \approx 0.3910. \quad (9.16)$$

Кроме того, интегрируя обе части (9.15) от x до a , мы приходим к управлению

$$\left(s_1^2 - s_1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\tan^{-1}(2s_1-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pi/4 \bar{a}/\bar{x}}. \quad (9.17)$$

Подставляя здесь $x = 0$ и используя $s_1(0) \approx 0.3910$ из (2.16), получаем

$$a = 1 - \left\{2(s_1(0))^2 - 2s_1(0) + 1\right\}^{1/2} e^{-1} \approx 0.7156. \quad (9.18)$$

Условие (9.4) выполняется согласно (9.12) с $v = \bar{a} = 0.2844$.

Решения для $n = 2$ и $n = 3$ изображены на рис. 3.5.

Случай $n = 4$.

Из (9.1)–(9.3) для $n = 4$ имеем

$$H_1(x, G, G, G, G) = \quad (9.19)$$

$$= \begin{cases} (G(x))^3 \bar{x} + \sum_{k=1}^3 \binom{3}{k} (G(x))^{3-k} \int_x^a (\bar{G}(t))^k dt, & 0 < x < a, \\ \bar{x}, & a < x < 1. \end{cases}$$

Система (9.9)–(9.10) становится

$$\begin{cases} s_1'(x) + (1 - s_1(x)) / \bar{x} = g(x)s_0(x) = g(x), & \text{с } s_1(0) = 1, \\ s_2'(x) + (1 - s_2(x)) / \bar{x} = 2g(x)s_1(x), & \text{с } s_2(0) = 1, \\ s_2(x) = (3g(x)\bar{x})^{-1}. \end{cases} \quad (9.20)$$

Плотность распределения имеет вид $g(x) = (3\bar{x}s_2(x))^{-1}$, и мы можем выбрать a так, что $1 = \int_0^a \frac{dx}{3\bar{x}s_2(x)}$. Так как правая часть есть

$\geq \frac{2}{3} \int_0^a \frac{dx}{2\bar{x}s_1(x)}$, мы можем использовать решение для случая $n = 3$.

Исключая $g(x)$ из (9.20), получаем простое дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} s_1'(x) + (1 - s_1(x)) / \bar{x} = (3\bar{x}s_2(x))^{-1}, \\ s_2'(x) + (1 - s_2(x)) / \bar{x} = \frac{2}{3}s_1(x) / (\bar{x}s_2(x)). \end{cases} \quad (9.21)$$

После вычислений находим $a \approx 0.7917$. Условие (9.4) выполняется с $v = \bar{a} \approx 0.2083$.

Другие примеры.

Для случаев $n \geq 5$ вычисления приводят к следующим результатам:

$n = 2;$	$a \approx 0.6321,$	$v \approx 0.3679,$	$\int_0^a xg(x)dx \approx 0.3678,$
3;	0.7156,	0.2844,	
4;	0.7917,	0.2083,	
5;	0.8286,	0.1714,	0.4251,
7;	0.8731,	0.1269,	0.4425,
10;	0.9084,	0.0916,	0.4573.

Мы видим, что когда n возрастает, $a \uparrow 1$, оптимальные выигрыши $\downarrow 0$, и в равновесии плотности распределения асимптотически становятся равномерными распределениями $U_{[0,1]}$.

Задачи и упражнения

1. Игра «выбор способа передвижения по городу».

В игре участвуют n игроков. Каждый из них решает, каким видом транспорта он сегодня воспользуется: $x_i = 0$ — поедет на автомобиле, $x_i = 1$ — поедет на общественном транспорте. Выигрыш i -го игрока зависит от того, сколько еще людей воспользуется тем же видом транспорта, что и он. Функция выигрыша имеет следующий вид:

$$H_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} a(t), & x_i = 1, \\ b(t), & x_i = 0, \end{cases}$$

где $t = 1/n \sum_{j=1}^n x_j$, $a(t)$ и $b(t)$ имеют вид, представленный на рис. 3.6.

Из рисунка следует, что если доля игроков, выбирающих 1, больше t_1 , то личное движение более свободно и водитель чувствует себя лучше, чем пассажир автобуса. Если же доля автомобилистов больше, чем $1 - t_0$, то движение настолько интенсивное, что поехать на автобусе будет спокойнее.

Показать, что решением такой игры является набор $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, что $t_0 + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^* \leq t_1 - \frac{1}{n}$.

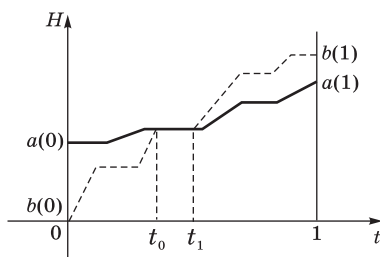


Рис. 3.6

Функция выигрыша в игре
«выбор способа передвижения по городу»

2. Проблема коммуны.

n жителей содержат овец на ферме. При этом у каждого жителя q_i овец. Обозначим общее количество овец $G = q_1 + \dots + q_n$. Максимальное количество овец, которых могут прокормить жители, — G_{\max} . С каждой овцы получается прибыль $v(G)$, а затраты на содержание c . Будем считать, что $v(G) > 0$ при $G < G_{\max}$ и $v(G) = 0$ при $G > G_{\max}$.

Найти выигрыш коммуны в случае равного количества овец у любого жителя. Построить равновесие по Нэшу и показать, что число овец в данном случае будет больше, чем в случае равного разделения между игроками.

3. Задача «охрана окружающей среды».

Каждое из трех предприятий (игроки I, II и III), пользующихся для технических целей водой из некоторого природного водоема, располагает двумя чистыми стратегиями: строить очистные сооружения для отработанной воды или же сбрасывать ее без очистки. Предполагается, что если неочищенную воду сбрасывает только одно предприятие, то вода в водоеме остается пригодной для использования, и предприятия убытка не несут. Если же неочищенную воду сбрасывают не менее двух предприятий, то каждый игрок несет убытки в размере 3 ед. Стоимость использования очистных сооружений обходится каждому предприятию в 1 ед. Составить куб ситуаций и выигрыши игроков в его вершинах. Найти множество ситуаций равновесия как пересечение множества приемлемых ситуаций для каждого из игроков.

4. Байесовская игра.

Байесовской игрой называется игра вида

$$G = \langle N, \{x_i\}_{i=1}^n, T_i, H_i \rangle,$$

где $N = 1, 2, \dots, n$ — множество игроков, $t_i \in T_i$ — типы игроков, неизвестные их противникам.

Игра происходит следующим образом: природа сообщает i -му игроку его тип, игроки выбирают свои стратегии $x_i(t_i)$ и получают выигрыши $H_i(x_1, \dots, x_n, t_i)$.

Равновесием в байесовской игре называется набор стратегий $(x_1^*(t_1), \dots, x_n^*(t_n))$, если для любого игрока i и любого типа t_i максимум по x следующей функции

$$\sum_{t_{-i}} H_i(x_1^*(t_1), \dots, x_{i-1}^*(t_{i-1}), x, x_{i+1}^*(t_{i+1}), \dots, x_n^*(t_n), t_i) P(t_{-i}|t_i),$$

где $t_{-i} = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$, достигается на x_i^* .

Записать задачу 3 в форме байесовской игры при условии, что в проигрыш -4 единицы добавляются случайные равномерно распределенные на $[0, 1]$ величины t_i .

5. Аукцион.

В игре участвуют два игрока, которые предлагают цену за предмет, выставленный на продажу. Игрок I предлагает цену b_1 , при этом ценность предмета для него $v_1 \in [0, 1]$. Игрок II предлагает цену b_2 , при этом ценность предмета для него $v_2 \in [0, 1]$.

Выигрыш i -го игрока имеет вид:

$$H_i(b_1, b_2, v) = \begin{cases} v - b_i, & b_i > b_j, \\ 0, & b_i < b_j, \\ (v - b_i)/2, & b_i = b_j, \end{cases}$$

где $i, j = 1, 2, i \neq j$.

Найти равновесные цены.

6. Доказать, что x^* — равновесие по Нэшу в игре n лиц тогда и только тогда, когда x^* является точкой глобального максимума функции

$$F(x) = \sum_{i=1}^n (H_i(x) - \max_{y_i \in X_i} H_i(x_{-i}, y_i))$$

на множестве X .

7. Найти ситуации, оптимальные по Нэшу в олигополии Курно, для n лиц с функциями выигрышей

$$H_i(x) = x_i(a - b \sum_{j=1}^n x_j - c_j).$$

8. Затопы на дорогах для 3 игроков.

В игре участвуют 3 фирмы, у которых по 2 автомобиля. Они должны проехать из A в B по одной из двух дорог. Задержка на первой дороге составляет $2k$, а на второй — $3k$, где k — число автомобилей. Найти равновесие по Нэшу.

9. Доказать, что олигополия Бертрана является потенциальной игрой.
10. Найти решение задач о дуэли и труэли для случая, когда функция вероятности поражения цели имеет вид $A(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln 2}$.

ИГРЫ n ЛИЦ В РАЗВЕРНУТОЙ ФОРМЕ

В предыдущих главах мы рассматривали игры в нормальной форме, когда игроки в самом начале игры делают свои предложения, и после этого определяются их выигрыши. Однако в реальности игра развивается во времени, игроки могут менять свои стратегии в зависимости от ситуации и своих интересов. Поэтому естественным является представление игры, развивающейся во времени и меняющей свое течение в зависимости от поведения игроков. При этом в игре может быть неопределенность, зависящая от случая, в этих позициях течение игры может меняться случайным образом. Все это приводит нас к представлению игр в развернутой форме или, как еще говорят, к позиционным играм.

Определение 4.1. *Игрой в развернутой форме с полной информацией будем называть пару $\Gamma = \langle N, G \rangle$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков, а $G = \{X, Z\}$ — ориентированный граф без циклов (конечное дерево) с начальной вершиной x_0 и множеством вершин (позиций) X , где $Z(x)$ обозначает множество вершин, непосредственно следующих за вершиной x .*

На рис. 4.1 представлено некое дерево игры с началом в состоянии x_0 . Теперь нужно определить для каждого из игроков, в какой из позиций он должен принимать решение.

Определение 4.2. *Разбиение множества позиций X на $n+1$ непересекающихся подмножеств $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup T$ будем называть разбиением на множества личных позиций игроков. В позициях из множества X_i ход делает игрок i , $i = 1, \dots, n$. Множество T содержит финальные вершины, в которых игра заканчивается.*

Для финальных вершин $x \in T$ выполняется $Z(x) = \emptyset$. В финальных позициях определен выигрыш каждого из игроков $H(x) = (H_1(x), \dots, H_n(x))$, $x \in T$. В каждой позиции x , принадлежащей

множеству личных позиций X_i , игрок i выбирает одну из вершин из множества $Z(x) = \{y_1, \dots, y_k\}$, которые мы будем называть **альтернативами** в позиции x , и игра переходит в следующую позицию. Иногда удобно называть альтернативами дуги, инцидентные с x . Таким образом, каждый из игроков должен определить для себя, каким образом он будет выбирать следующую позицию в каждом из множеств своих личных позиций.

Определение 4.3. *Стратегией игрока i будем называть функцию $u_i(x)$, определенную на множестве личных позиций X_i , $i = 1, \dots, n$, значениями которой являются альтернативы позиции x . Набор всех стратегий $u = (u_1, \dots, u_n)$ будем называть ситуацией в игре.*

Для каждой игровой ситуации однозначно определяется **партия** в игре. Действительно, игра начинается в позиции x_0 . Предположим $x_0 \in X_{i_1}$. Следовательно, ход делает игрок i_1 . Согласно его стратегии $u_{i_1}(x_0) = x_1 \in Z(x_0)$ партия переходит в позицию x_1 . Теперь x_1 принадлежит множеству личных позиций какого-то игрока i_2 . Его стратегия $u_{i_2}(x_1)$ переводит партию в позицию $x_2 \in Z(x_1)$. Партия продолжается до тех пор, пока не попадет в финальную позицию $x_k \in T$. В финальной позиции игра заканчивается, и каждый из игроков получает выигрыш $H_i(x_k)$, $i = 1, \dots, n$. Таким образом, каждой ситуации в игре соответствует определенный выигрыш каждого из игроков, и мы можем считать выигрыши функциями от стратегий игроков, т.е. $H = H(u_1, \dots, u_n)$. Теперь мы можем определить, что является решением в данной игре.

§ 4.1. РАВНОВЕСИЕ В ИГРАХ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Введем удобное обозначение для ситуации $u = (u_1, \dots, u'_i, \dots, u_n)$, в которой только одна стратегия u_i заменена на u'_i . Будем обозначать новую ситуацию как (u_{-i}, u'_i) .

Определение 4.4. *Ситуация $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ называется равновесием по Нэшу, если для каждого из игроков выполняется условие*

$$H_i(u_{-i}^*, u_i) \leq H_i(u^*), \quad \forall u_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Неравенства (1.1), как и раньше, означают, что при отклонении игрока i от равновесия его выигрыш уменьшается. Ниже мы покажем, что равновесий по Нэшу в игре Γ может быть много, но одно из них является особенным. Для того чтобы определить его, сначала введем понятие подыгры игры Γ .

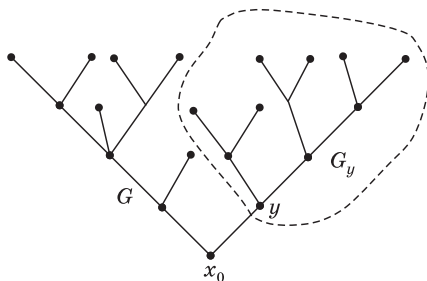


Рис. 4.1

Дерево игры G и поддереву G_y

Определение 4.5. Пусть $y \in X$. Подыгрой $\Gamma(y)$ игры Γ с началом в позиции y называется игра $\Gamma(y) = \langle N, G_y \rangle$, где подграф $G_y = \{X_y, Z\}$ содержит все вершины, следующие за y , множества личных позиций игроков определяются как пересечение $Y_i^y = X_i \cap X_y, i = 1, \dots, n$, множество финальных позиций $T_y = T \cap X_y$, выигрыши i -го игрока в подыгре определяется как $H_i^y(x) = H_i(x), x \in T_y$.

На рис. 4.1 изображено поддерево, соответствующее подыгре с начальной позицией y . Под стратегией i -го игрока в подыгре $\Gamma(y)$ будем понимать сужение стратегии $u_i(x)$ в игре Γ на множество Y_i^y . Будем обозначать такие стратегии $u_i^y(x)$. Набор стратегий $u = (u_1^y, \dots, u_n^y)$ будем называть ситуацией в подыгре. Каждой ситуации в подыгре соответствует партия в подыгре и выигрыш каждого из игроков $H^y(u_1^y, \dots, u_n^y)$.

Определение 4.6. Ситуация равновесия по Нэшу $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ в игре Γ называется абсолютным равновесием или, как еще говорят, совершенным подыгровым равновесием, если для любого $y \in X$ ситуация $(u^*)^y$ является равновесием по Нэшу в подыгре $\Gamma(y)$.

Покажем, что в любой конечной игре с полной информацией всегда существует абсолютное равновесие.

Для этого выделим все позиции, предшествующие финальным, обозначим это множество Z_1 . Предположим, что позиция $x \in Z_1$ принадлежит множеству личных позиций i -го игрока. На множестве финальных позиций $Z(x) = \{y_1, \dots, y_{k_i}\}$, которые следуют за позицией x , выделим ту, в которой выигрыш i -го игрока максимален $H_i(y_j) = \max\{H_i(y_i), \dots, H_i(y_{k_i})\}$. После этого перенесем вектор выигрышей

$H(y_j)$ в позицию y_j и сделаем эту позицию терминальной. И так поступим для всех позиций $x \in Z_1$. Тогда длина дерева игры уменьшится на единицу.

После этого опять выделим множество Z_2 предтерминальных позиций, из которых следуют позиции из Z_1 . Возьмем позицию $x \in Z_2$. Предположим $x \in X_l$, т.е. в этой позиции ходит l -й игрок. На множестве позиций $Z(x) = \{y_1, \dots, y_k\}$, которые следуют за позицией x , выделим ту (например, y_m), в которой выигрыш l -го игрока максимален. После этого перенесем вектор выигрышей $H(y_j)$ в позицию y_m и сделаем эту позицию терминальной. Эту процедуру $T \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow \dots$ будем повторять до тех пор, пока не попадем (а это произойдет, поскольку дерево игры конечно) в начальное состояние x_0 .

Данный алгоритм на каждом шаге будет давать нам равновесные стратегии в каждой подыгре и в конце концов приведет к абсолютному равновесию. Таким образом, мы доказали теорему Куна.

Теорема 4.1. *В игре в развернутой форме с полной информацией всегда существует абсолютное равновесие.*

На рис. 4.2 представлена игра в развернутой форме двух лиц. Множество личных позиций игрока I представлено кружками, а позиции, где ходит игрок II — квадратами. Таким образом, $X_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_4\}$ и $X_2 = \{y_1, y_2\}$. В финальных позициях $T = \{t_1, \dots, t_8\}$ заданы выигрыши обоих игроков. Таким образом, стратегия первого игрока — это вектор из пяти компонент $u = (u_0, \dots, u_4)$, а стратегия второго игрока — вектор $v = (v_1, v_2)$, компоненты которых можно обозначить: «л» (левая альтернатива) и «п» (правая альтернатива). Например, ситуации $u = (\text{л}, \text{п}, \text{л}, \text{п}, \text{л})$, $v = (\text{п}, \text{л})$ соответствует партия, приводящая в вершину t_3 с выигрышами игроков $H_1 = 2, H_2 = 4$.

На рис. 4.3 можно видеть как работает метод обратной индукции, который приводит нас к абсолютному равновесию $u^* = (\text{л}, \text{п}, \text{п}, \text{п}, \text{п})$, $v^* = (\text{л}, \text{п})$, в котором выигрыши игроков равны $H_1 = 6, H_2 = 3$. В любой подыгре на рис. 4.4 данные стратегии дают равновесие по Нэшу.

Заметим, однако, что существуют другие ситуации, которые образуют равновесие по Нэшу, но не являются абсолютным равновесием. Рассмотрим, например, стратегии игроков вида $\bar{u} = (\text{п}, \text{п}, \text{п}, \text{п}, \text{л})$, $\bar{v} = (\text{л}, \text{л})$. Данной ситуации соответствует партия, приводящая в финальную вершину t_6 с выигрышами игроков $H_1 = 7, H_2 = 1$. Ситуация вида \bar{u}, \bar{v} образует равновесие по Нэшу. Для первого игрока это понятно, поскольку в такой ситуации он получает максимальный выигрыш $H_1 = 7$. Для второго же игрока, если он отклонится от своей стратегии

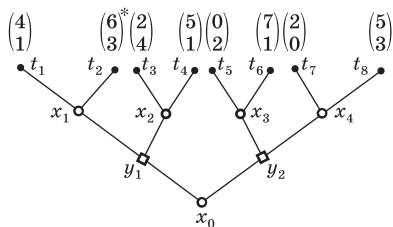


Рис. 4.2

Игра в развернутой форме длины 3:

- — личные позиции игрока I;
- — личные позиции игрока II;
- (*) — абсолютное равновесие

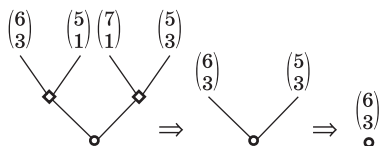


Рис. 4.3

Метод обратной индукции
для построения абсолютного
равновесия

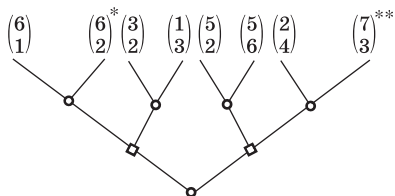


Рис. 4.4

Игра в развернутой форме:

- (*) — равновесие для благожелательных игроков;
- (**) — равновесие для неблагоприятных игроков

\bar{v} и в позиции y_2 выберет альтернативу «п», игра закончится в финальной позиции t_7 с выигрышем второго игрока $H_2 = 0$, что меньше, чем в равновесии. Итак, мы показали, что \bar{u}, \bar{v} есть равновесие по Нэшу. Однако эта ситуация не является абсолютным равновесием, так как в подыгре с начальной вершиной x_4 она не является равновесием по Нэшу. В этой позиции игрок I вместо того, чтобы выбрать правую альтернативу и получить выигрыш, равный 5, ходит влево с выигрышем, равным 2. Такую возможность можно трактовать как некую угрозу игрока I, которой он старается заставить игрока II сыграть таким образом, чтобы попасть в финальную позицию t_7 .

§ 4.2. ИНДИФФЕРЕНТНОЕ РАВНОВЕСИЕ

Абсолютное равновесие может оказаться не единственным в игре в развернутой форме. Это происходит, когда выигрыши какого-то игрока в финальных позициях одинаковы. Тогда его поведение зависит от его отношения к противнику. Тогда говорят о **типе игрока**. Здесь мы будем различать благожелательное и неблагоприятное отношение игроков друг к другу.

Рассмотрим, например, игру в развернутой форме, представленную на рис. 4.4. Для нахождения абсолютного равновесия воспользуемся методом обратной индукции. В позиции x_1 выигрыш первого игрока не зависит от его поведения, в обоих случаях его выигрыш равен 6. Однако это безразлично для второго игрока, при выборе первым игроком хода «л», его выигрыш равен 1, а при выборе «п» — 2. Представим себе, что первый игрок **благожелательно** относится ко второму игроку. Тогда в позиции x_1 он выберет продолжение «п». Аналогичная ситуация в позиции x_3 . Здесь благожелательный первый игрок также выберет альтернативу «п». В позициях x_2 и x_4 выигрыши первого игрока при продолжении различны, поэтому он будет действовать обычным образом, максимизируя свой выигрыш. В конце концов метод обратной индукции приведет нас к абсолютному равновесию $\bar{u} = (л, п, л, п, п)$, $\bar{v} = (л, л)$ с выигрышами игроков $H_1 = 6, H_2 = 2$.

При **неблагожелательном** отношении игроков друг к другу в позиции x_1 первый игрок теперь выберет альтернативу «л», и в позиции x_3 — альтернативу «л». Метод обратной индукции приводит нас к абсолютному равновесию $\bar{u} = (п, л, л, л, п)$, $\bar{v} = (п, п)$ с выигрышами игроков $H_1 = 7, H_2 = 3$.

Мы пришли к парадоксальной ситуации, когда при неблагоприятном отношении игроков друг к другу выигрыши обоих игроков выше, чем при благожелательном отношении. Конечно, возможна и

другая ситуация, когда благожелательное поведение приводит к большим выигрышам игроков, чем неблагоприятное. Но приведенный пример показывает нетривиальность определения «благожелательности».

Существует также другой подход, позволяющий избежать неоднозначности поведения игроков в ситуации, когда любое продолжение игры приводит к одинаковому выигрышу. Этот подход был предложен Петросяном и Мамкиной и заключается в том, что в данной позиции игрок рандомизирует возможные альтернативы с одинаковой вероятностью. Такое равновесие будем называть «индифферентным равновесием».

Итак, перейдем от игры Γ к новой игре, в которой в позициях $x \in X$, где принимающему решение игроку $i(x)$ безразлично, какую из альтернатив $y \in Z_{i(x)}$ выбрать, он выбирает каждую из этих альтернатив $y_k \in Z_{i(x)}$, $k = 1, \dots, |Z_{i(x)}|$ с одинаковой вероятностью $1/|Z_{i(x)}|$. Новую игру обозначим $\bar{\Gamma}$.

Определение 4.7. Ситуация равновесия по Нэшу $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ в игре Γ называется индифферентным равновесием, если она является абсолютным равновесием в игре $\bar{\Gamma}$.

Найдем, например, индифферентное равновесие для игры, изображенной на рис. 4.4. Используем метод обратной индукции. В позиции x_1 игроку I безразлично, какую альтернативу выбрать. Поэтому он выбирает их с одинаковой вероятностью $1/2$. При таком поведении ожидаемый выигрыш игроков равен $H_1 = 6, H_2 = 3/2$. В позиции x_2 альтернатива «л» приносит больший выигрыш. В позиции x_3 первому игроку опять безразлично, какую альтернативу выбрать, и он выбирает их с вероятностью $1/2$. Тогда в данной позиции игроков ожидает выигрыш $H_1 = 5, H_2 = 4$. В позиции x_4 оптимальной является альтернатива «п».

Теперь рассмотрим подыгру $\Gamma(y_1)$. В позиции y_1 ходит второй игрок. Альтернатива «л» приносит ему выигрыш $3/2$ меньше, чем альтернатива «п» с выигрышем 2, поэтому его оптимальная стратегия в позиции y_1 — это «п». В подыгре $\Gamma(y_2)$ в позиции y_2 альтернатива «п» приносит второму игроку выигрыш 7, в то время как «л» дает 4. Значит оптимальная стратегия второго игрока в позиции y_2 — это «п».

Наконец, рассмотрим подыгру $\Gamma(x_0)$. Начинает игру первый игрок. Альтернатива «л» дает ему выигрыш 3, в то время как «п» дает выигрыш 5. Его оптимальная стратегия здесь — альтернатива «п».

Итак, мы нашли индифферентное равновесие $u^* = (п, \frac{1}{2}л + \frac{1}{2}п, л, \frac{1}{2}л + \frac{1}{2}п, п)$, $\bar{v} = (п, л)$, с выигрышами игроков $H_1 = 5, H_2 = 4$.

§ 4.3. ИГРЫ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

В некоторых играх в развернутой форме существуют позиции, в которых партия может развиваться случайным образом. Например, в салонных играх вначале игрокам сдаются карты (играет случай), и затем партия развивается в соответствии с выбранными стратегиями игроков. Это приводит к тому, что игроки точно не знают позицию, в которой в данный момент находится партия, а могут лишь делать предположения об этом. В этом случае говорят об играх с неполной информацией. Ключевую роль здесь играет понятие информационного множества.

Определение 4.8. *Игрой в развернутой форме с неполной информацией будем называть игру n лиц $\Gamma = \langle N, G \rangle$ на древовидном графе $G = \{X, Z\}$ с начальной вершиной x_0 и множеством вершин (позиций) X , где:*

1. *Задано разбиение множества позиций X на $n+2$ непересекающихся подмножеств $X = X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_n \cup T$, где X_i — множество личных позиций игрока i , $i = 1, \dots, n$ и X_0 — множество позиций, где «ходит» случай, множество T содержит финальные вершины, в которых определены выигрыши всех игроков $H(x) = (H_1(x), \dots, H_n(x))$.*

2. *Задано подразбиение каждого множества $X_i, i = 1, \dots, n$ на непересекающиеся подмножества $X_i^j, j = 1, \dots, J_i$, которые мы будем называть **информационными множествами** i -го игрока, которые обладают свойством, что все вершины, входящие в одно и то же информационное множество, имеют одинаковое число альтернатив, и никакая из них не может следовать за вершиной из этого же информационного множества.*

В каждой позиции $x \in X_0$, где делает ход случай, предполагается задано распределение вероятностей на множестве альтернатив вершины x . Например, если $Z(x) = \{y_1, \dots, y_k\}$, то в вершине x определены вероятности $p(y|x), y \in Z(x)$ перехода партии в следующую позицию. Покажем на примерах возможный вид информационных разбиений и его влияние на оптимальное решение.

Пример 4.1. Антагонистическая игра с полной информацией.

Ход 1. Игрок I выбирает из альтернатив «л, п».

Ход 2. Играет «случай» и с одинаковой вероятностью выбирается одна из альтернатив «л, п».

Ход 3. Игрок II, зная и выбор первого игрока, и случайный ход, выбирает из альтернатив «л, п».

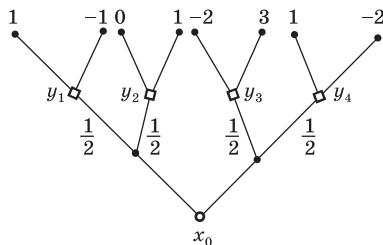


Рис. 4.5
Игра с полной информацией

Выигрыш первого игрока в терминальных позициях имеет вид $H(л, л, л) = 1$, $H(л, л, п) = -1$, $H(л, п, л) = 0$, $H(л, п, п) = 1$, $H(п, л, л) = -2$, $H(п, л, п) = 3$, $H(п, п, л) = 1$, $H(п, п, п) = -2$, а вид дерева игры представлен на рис. 4.5.

Стратегия первого игрока u принимает два значения «л, п», а стратегия второго игрока $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ принимает $2^4 = 16$ значений. Однако, чтобы не перебирать все возможные стратегии, упростим игру. В позиции y_1 игроку II оптимально использовать альтернативу «п», в позиции y_2 — альтернативу «л», в позиции y_3 — оптимальную стратегию «л» и в позиции y_4 — альтернативу «п».

Таким образом, в начальной позиции x_0 , если игрок I выберет альтернативу «л», его ожидает выигрыш $\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}0 = -1/2$, в то время как при альтернативе «п» его ожидаемый выигрыш равен $\frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}(-2) = -2$. Следовательно, равновесие здесь $u = (л)$, $v = (п, л, л, п)$ и значение игры равно $-1/2$, т. е. игра выгодна для второго игрока.

Пример 4.2. Антагонистическая игра с отсутствием информации.

Ход 1. Игрок I выбирает из альтернатив «л, п».

Ход 2. Играет «случай» и с одинаковой вероятностью выбирается одна из альтернатив «л, п».

Ход 3. Игрок II, не зная выбора первого игрока и не зная случайного хода, выбирает из альтернатив «л, п».

Выигрыш первого игрока в терминальных позициях имеет тот же вид, что и в примере 1. Вид дерева игры представлен на рис. 4.6, где пунктирной линией выделено информационное множество второго игрока.

В этом варианте стратегия первого игрока u , как и раньше, принимает два значения «л, п». Стратегия второго игрока v также принимает

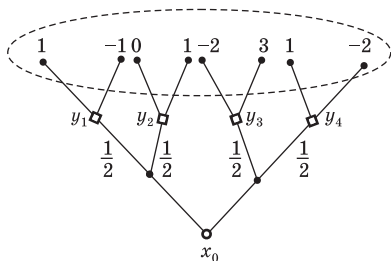


Рис. 4.6

Игра с отсутствием информации

два значения «л, п», поскольку он не знает в какой из позиций находится партия. Матрица выигрышей данной игры имеет вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{л} & \text{п} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{л} \\ \text{п} \end{array} & \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right). \end{array}$$

Действительно, $H(\text{л}, \text{л}) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}0 = \frac{1}{2}$, $H(\text{л}, \text{п}) = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1 = 0$, $H(\text{п}, \text{л}) = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}1 = -\frac{1}{2}$, $H(\text{п}, \text{п}) = \frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}(-2) = \frac{1}{2}$.

Равновесие в данной матричной игре достигается в смешанных стратегиях $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ и $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, и значение игры равно $1/6$. Мы видим, что отсутствие информации для второго игрока сделало эту игру невыгодной для него.

Пример 4.3. Антагонистическая игра с неполной информацией.

Ход 1. Игрок I выбирает из альтернатив «л, п».

Ход 2. Игрует «случай» и с одинаковой вероятностью выбирается одна из альтернатив «л, п».

Ход 3. Игрок II, не зная выбора первого игрока, но зная случайный ход, выбирает из альтернатив «л, п».

Выигрыш первого игрока в терминальных позициях имеет тот же вид, что и в примере 4.1. Вид дерева игры представлен на рис. 4.7, где пунктирной линией выделено информационное множество второго игрока. Оно отличается от примера 4.2 тем, что состоит из двух подмножеств X_2^1 и X_2^2 .

В этом случае стратегия первого игрока u , как и раньше, принимает два значения «л, п». Стратегия второго игрока $v = (v_1, v_2)$ состоит из двух компонент для каждого из информационных множеств X_2^1 и X_2^2 и

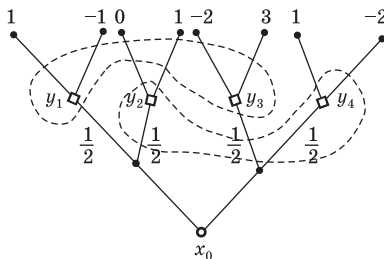


Рис. 4.7

Игра с неполной информацией

принимает четыре значения. Матрица выигрышей данной игры имеет вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{лл} & \text{лп} & \text{пл} & \text{пп} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{л} \\ \text{п} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{array}$$

Действительно, $H(\text{л}, \text{лл}) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}0 = \frac{1}{2}$, $H(\text{л}, \text{лп}) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}1 = 1$, $H(\text{л}, \text{пл}) = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}0 = -\frac{1}{2}$, $H(\text{л}, \text{пп}) = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1 = 0$, $H(\text{п}, \text{лл}) = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}1 = -\frac{1}{2}$, $H(\text{п}, \text{лп}) = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}(-2) = -2$, $H(\text{п}, \text{пл}) = \frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}1 = 2$, $H(\text{п}, \text{пп}) = \frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}(-2) = \frac{1}{2}$.

Равновесие в данной матричной игре достигается в смешанных стратегиях $(\frac{5}{7}, \frac{2}{7})$ и $(0, \frac{1}{7}, 0, \frac{6}{7})$, и значение игры равно $1/7$. Мы видим, что наличие некоторой информации у второго игрока позволило ему уменьшить свой проигрыш по сравнению с предыдущим примером.

Эти примеры показывают важность информационного разбиения дерева игры. Находясь в информационном множестве, игрок точно не знает позиции, в которой находится партия. Все позиции в данном информационном множестве для него идентичны. Поэтому его стратегия зависит лишь от данного информационного множества. Пусть множество личных позиций i -го игрока разбито на информационные множества $X_i^1 \cup \dots \cup X_i^{J_i}$. Под альтернативами здесь удобнее понимать дуги, соединяющие вершины x и $y \in Z(x)$.

Определение 4.9. Пусть в позиции $x \in X_i^j$ у i -го игрока есть k_j альтернатив, т. е. $Z(x) = \{y_1, \dots, y_{k_j}\}$. Чистой стратегией в игре с неполной информацией i -го игрока называется функция $u_i = u_i(X_i^j)$, $j = 1, \dots, J_i$, которая каждому информационному множеству приписывает некоторую альтернативу $k \in \{1, \dots, k_j\}$.

Так же, как это было в игре с полной информацией, если задан профиль чистых стратегий (u_1, \dots, u_n) и альтернативы случайных ходов, однозначно определяется партия игры и выигрыш каждого из игроков. У каждого из игроков лишь конечный набор стратегий, их число равно $k_1 \times \dots \times k_{J_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Определение 4.10. *Смешанной стратегией в игре с неполной информацией i -го игрока называется распределение вероятностей $\mu_i = \mu_i(u_i)$ на множестве чистых стратегий i -го игрока.*

$\mu_i(u_i)$ есть вероятность реализации чистой стратегии $(u_i(X_i^1) = k_1, \dots, u_i(X_i^{J_i}) = k_{J_i})$.

Определение 4.11. *Позиция $x \in X$ называется возможной для чистой стратегии u_i (μ_i), если существует такая ситуация $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$ ($\mu = (\mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_n)$), что партия проходит через позицию x с положительной вероятностью. Множество таких позиций обозначим $Poss_{u_i}$ ($Poss_{\mu_i}$). Информационное множество X_i^j называется существенным для u_i (μ_i), если оно содержит хотя бы одну возможную для u_i (μ_i) позицию. Набор таких множеств, существенных для u_i (μ_i), обозначим Rel_{u_i} (Rel_{μ_i}).*

Пусть $t \in T$ — некоторая финальная вершина, обозначим партию с началом в x_0 и концом в t через $[x_0, t]$. Предположим, что в партии $[x_0, t]$ игроку i принадлежит какая-то позиция. Обозначим через x его последнюю позицию в партии, $x \in X_i^j \cap [x_0, t]$, и через k — альтернативу в данной позиции, которая принадлежит партии $[x_0, t]$, $i = 1, \dots, n$. Для данного профиля стратегий $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ вероятность реализации такой партии в игре равна

$$P_\mu[x_0, t] = \left(\sum_{u: X_i^j \in Rel_{u_i}, u_i(X_i^j) = k} \prod_{i=1}^n \mu_i(u_i) \right) \prod_{x \in X_0 \cap [x_0, t], y \in Z(x) \cap [x_0, t]} p(y|x). \quad (3.1)$$

В (3.1) мы суммируем по всем профилям чистых стратегий, которые реализуют данную партию, и умножаем на вероятности альтернатив, принадлежащих данной партии, для случайных ходов. Выигрыши игроков для данного профиля смешанных стратегий определяются как средние значения

$$H_i(\mu_1, \dots, \mu_n) = \sum_{t \in T} H_i(t) P_\mu[x_0, t], \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Так как число чистых стратегий конечно, данная игра в развернутой форме эквивалентна некоторой бескоалиционной игре в нормальной форме, и, следовательно, из общей теории бескоалиционных игр следует существование равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Теорема 4.2. *В игре в развернутой форме с неполной информацией существует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.*

§ 4.4. ИГРЫ С ПОЛНОЙ ПАМЯТЬЮ

Хотя принципиально игры в развернутой форме с неполной информацией имеют решение в классе смешанных стратегий, их трудно использовать из-за большой размерности. В последующих моделях реальных игр мы будем использовать так называемые стратегии поведения.

Определение 4.12. *Стратегией поведения i -го игрока называется вектор-функция β_i , который для каждого информационного множества X_i^j задает распределение вероятностей на множестве альтернатив $(1, \dots, k_j)$ для позиций $x \in X_i^j$, $j = 1, \dots, J_i$. Понятно, что*

$$\sum_{k=1}^{k_j} \beta_i(X_i^j, k) = 1, \quad j = 1, \dots, J_i.$$

Пусть t — некоторая финальная позиция и $[x_0, t]$ — соответствующая партия. Тогда если задан профиль стратегий поведения — $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, то вероятность реализации партии $[x_0, t]$ равна

$$\begin{aligned} P_\beta[x_0, t] &= \\ &= \prod_{i \in N, j=1, \dots, J_i, k \in [x_0, t]} \beta_i(X_i^j, k) \prod_{x \in X_0 \cap [x_0, t], y \in Z(x) \cap [x_0, t]} p(y|x). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ожидаемый выигрыш игроков при данном профиле стратегий имеет вид

$$H_i(\beta_1, \dots, \beta_n) = \sum_{t \in T} H_i(t) P_\beta[x_0, t], \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Очевидно, что каждой стратегии поведения соответствует некоторая смешанная стратегия, но обратное неверно. Тем не менее, в достаточно широком классе игр, можно ограничиться поиском равновесий лишь в классе стратегий поведения. Это игры с полной памятью.

Определение 4.13. Игра Γ называется игрой с полной памятью для i -го игрока, если для любой чистой стратегии u_i и любого информационного множества X_i^j , такого что $X_i^j \in Rel u_i$, следует, что любая позиция $x \in X_i^j$ возможна.

Согласно определению, в игре с полной памятью любая позиция из существенного информационного множества возможна. В игре с полной памятью любой игрок может точно восстановить альтернативы, которые он выбирал на предыдущих ходах.

Теорема 4.3. В игре Γ с полной памятью любой смешанной стратегии μ соответствует некоторая стратегия поведения, которая дает такое же распределение вероятностей на множестве партий.

Доказательство. Пусть Γ — игра с полной памятью и μ некоторая смешанная стратегия. Построим с ее помощью стратегию поведения специального вида для каждого игрока. Пусть X_i^j — информационное множество i -го игрока и k — некоторая альтернатива в позиции $x \in X_i^j$, $k = 1, \dots, k_j$. Обозначим

$$P_\mu(X_i^j) = \sum_{u_i: X_i^j \in Rel u_i} \mu_i(u_i) \quad (4.3)$$

вероятность выбора чистой стратегии u_i , для которой возможно информационное множество X_i^j , и

$$P_\mu(X_i^j, k) = \sum_{u_i: X_i^j \in Rel u_i, u_i(X_i^j) = k} \mu_i(u_i) \quad (4.4)$$

вероятность выбора чистой стратегии u_i , для которой возможно информационное множество X_i^j и альтернатива $u_i(X_i^j) = k$. Справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{k_j} P_\mu(X_i^j, k) = P_\mu(X_i^j).$$

Очевидно, что в игре с полной памятью, если партия $[x_0, t]$ с финальной позицией t проходит через позицию $x_1 \in X_i^j$ игрока i , альтернативу k , и затем следующая позиция игрока i будет $x_2 \in X_i^l$ (см. рис. 4.8), то множества чистых стратегий

$$\{u_i: X_i^j \in Rel u_i, u_i(X_i^j) = k\} \text{ и } \{u_i: X_i^l \in Rel u_i\}$$

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_6)$. Согласно (4.6) соответствующая стратегия поведения будет иметь следующий вид. В первом информационном множестве

$$\beta(X_1, л) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad \beta(X_1, п) = \mu_4 + \mu_5 + \mu_6,$$

и во втором информационном множестве

$$\beta(X_2, л) = \frac{\mu_4}{\mu_4 + \mu_5 + \mu_6}, \quad \beta(X_2, с) = \frac{\mu_5}{\mu_4 + \mu_5 + \mu_6},$$

$$\beta(X_2, п) = \frac{\mu_6}{\mu_4 + \mu_5 + \mu_6}.$$

Мы видим, что для изображенной партии

$$\beta(X_1, п)\beta(X_2, с) = \mu_5,$$

т. е. совпадает со смешанной стратегией для реализации (п,с).

Покажем, что стратегия поведения вида (4.6) дает в точности такое же распределение вероятностей на всех партиях, как и сама смешанная стратегия μ .

Рассмотрим партию $[x_0, t]$. t — финальная вершина. Предположим, что партия $[x_0, t]$ пересекает последовательно информационные множества i -го игрока $X_i^1, \dots, X_i^{J_i}$ и при этом выбираются альтернативы k_1, \dots, k_{J_i} , принадлежащие пути $[x_0, t]$. Если хотя бы одно из этих информационных множеств несущественно для μ_i , то $P_\mu[x_0, t] = P_\beta[x_0, t] = 0$. Поэтому предположим, что все $X_i^j \in Rel \mu_i, j = 1, \dots, J_i$.

Из (4.5) следует, что для β , определенной соотношениями (4.6), для любого i имеет место равенство

$$\begin{aligned} \prod_{j=1, \dots, J_i, k \in [x_0, t]} \beta_i(X_i^j, k) &= \\ &= \prod_{j=1, \dots, J_i, k \in [x_0, t]} \frac{P_\mu(X_i^j, k)}{P_\mu(X_i^j)} = P_\mu(X_i^{J_i}, k_{J_i}). \end{aligned}$$

Вычислим $P_\beta[x_0, t]$ для β , определенной (4.6). Вначале преобразуем первое произведение в формуле (4.1):

$$\prod_{i \in N, j=1, \dots, J_i, k \in [x_0, t]} \beta_i(X_i^j, k) = \prod_{i \in N, k_{J_i} \in [x_0, t]} P_\mu(X_i^{J_i}, k_{J_i}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i \in N} \left(\sum_{u_i: X_i^{J_i} \in Rel u_i, u_i(X_i^{J_i}) = k_{J_i}} \mu_i(u_i) \right) = \\
&= \left(\sum_{u: X_i^{J_i} \in Rel u_i, u_i(X_i^{J_i}) = k_{J_i}} \prod_{i=1}^n \mu_i(u_i) \right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&P_\beta[x_0, t] = \\
&= \left(\sum_{u: X_i^{J_i} \in Rel u_i, u_i(X_i^{J_i}) = k_{J_i}} \prod_{i=1}^n \mu_i(u_i) \right) \prod_{x \in X_0 \cap [x_0, t], y \in Z(x) \cap [x_0, t]} p(y|x).
\end{aligned}$$

Последнее выражение совпадает с представлением (3.1) для $P_\mu[x_0, t]$.

Итак, мы показали, что в играх с полной памятью распределения смешанных стратегий и соответствующих стратегий поведения совпадают, следовательно, совпадают и средние выигрыши игроков для таких стратегий. Таким образом, при поиске ситуаций равновесия в таких играх можно ограничиться рассмотрением более узкого класса стратегий поведения. В последующих главах мы продемонстрируем использование стратегий поведения.

Задачи и упражнения

1. Найти абсолютное равновесие в задаче с полной информацией, дерево игры в которой имеет вид, представленный на рис. 4.9.
2. Найти равновесие при благожелательном и неблагоприятном поведении игроков (см. рис. 4.10).
3. Найти условие, при котором неблагоприятное поведение дает больший выигрыш обоим игрокам, чем при благожелательном поведении.
4. Найти индифферентное равновесие в игре с деревом, как в задаче 2.
5. Привести к нормальной форме следующую игру, представленную на рис. 4.11.

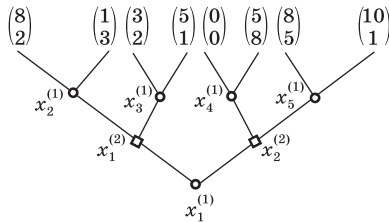


Рис. 4.9

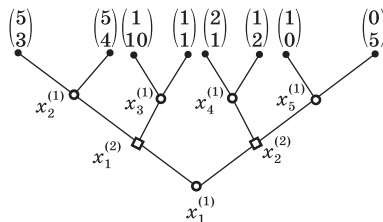


Рис. 4.10

6. Найти равновесие в задаче с неполной информацией, дерево игры в которой имеет вид, представленный на рис. 4.12.
7. Найти равновесие в задаче с неполной информацией, дерево игры в которой имеет вид, представленный на рис. 4.13.
8. Привести пример игры в развернутой форме с неполной памятью.
9. Карточная игра.

В игре участвуют два игрока, у каждого из них по две карты. У игрока I — $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, а у игрока II — $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Еще две карты лежат на столе — $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. Затем верхняя карта из лежащих на столе переворачивается. Игроки выбирают одну из своих карт и кладут на стол. Игрок, положивший старшую карту, выигрывает у противника стоимость перевернутой карты на столе (если положили одинаковые карты, то ничья). Построить дерево игры и указать информационные множества.

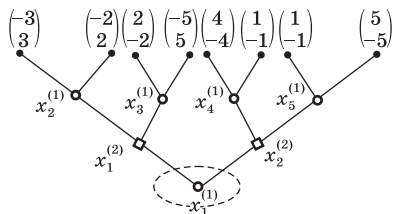


Рис. 4.11

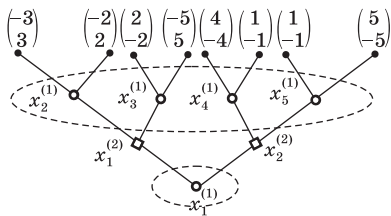


Рис. 4.12

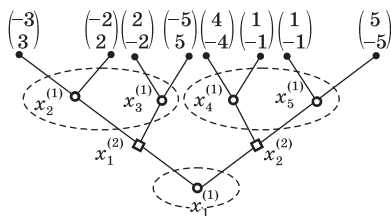


Рис. 4.13

10. Построить дерево игры, описанной в задаче 9, где x, y, z — независимые одинаково распределенные случайные величины с равномерным распределением на $[0, 1]$.

САЛОННЫЕ И СПОРТИВНЫЕ ИГРЫ

К салонным играм относятся всевозможные карточные игры, шахматы, шашки и др. Многие известные математики, такие как Дж. фон Нейман, Беллман, Карлин, Фергюсон, Сакагучи и другие, пробовали применить методы теории игр к этим играм. Как мы отмечали выше, шахматы не очень интересный объект для изучения, поскольку это конечная игра с полной информацией и, следовательно, в ней всегда существует равновесие. В последнее время созданы очень сильные шахматные программы, которые превосходят возможности человека, такие как Deep Fritz, Hydra, Rybka и др.

Карточные же игры представляют собой игры с неполной информацией, поэтому интересно смоделировать методами теории игр такие психологические понятия, как риск, блеф и др. Равновесие в таких играх будем искать в классе стратегий поведения.

Начнем наше исследование с карточной игры покер. Опишем эту популярную карточную игру. Колода карт для игры в покер состоит из 52 карт, которые делятся на четыре равные группы по масти. Масти называются: пики, трефы, бубны, червы. В свою очередь масти различаются по значению. Имеется 13 значений: 2, 3, ..., 10, валет, дама, король, туз. В игре покер каждому из игроков сдается пять карт. Каждый из наборов карт имеет определенное значение. Иерархия значений определяется следующим образом. На первом месте находится комбинация флеш-ройяль (10, валет, дама, король, туз одной масти), вероятность ее появления равна приблизительно $1.5 \cdot 10^{-6}$.

Далее следуют, соответственно по возрастанию вероятности появления:

- каре (четыре карты одного значения), вероятность — 0.0002;
- фул (три карты одного значения и две карты другого значения), вероятность — 0.0014;
- стрит (пять последовательных по значению карт любой масти), вероятность — 0.0035;

- тройка (три карты одного значения и две разные карты), вероятность — 0.0211;
- две двойки (две пары карт одного значения в каждой паре), вероятность — 0.0475;
- одна двойка (только одна пара карт одного значения), вероятность — 0.4225.

После выбора карт игроки начинают делать ставки. После этого карты вскрываются, и тот из них, который имеет лучшую комбинацию, забирает банк. Поскольку игроки не знают значения карт противника, это игра с неполной информацией.

§ 5.1. ПОКЕР.

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ

В качестве математической модели этой игры рассмотрим игру двух лиц, назовем их к примеру Петр и Павел. В начале игры игроки делают взнос, равный единице. После этого они получают две карты достоинством x и y , не имея информации о карте противника. Первый ход у Петра. Он имеет выбор, либо спасовать, и тогда он теряет свой взнос, либо сделать ставку s , где $s > 1$. В последнем случае ход переходит к Павлу, и он имеет те же возможности. Если он пасует, то теряет свой взнос, в противном случае игроки открывают карты и тогда выигрывает тот, чья карта больше.

Заметим, что значения карт игроков случайны и в этом случае мы должны определить вероятностный характер всевозможных исходов. Предположим, что значения карт лежат в интервале от 0 до 1 и все эти значения равновероятны, т.е. случайные величины x и y имеют равномерное распределение на интервале $[0, 1]$.

Давайте определим стратегии в этой игре. Каждый из игроков знает лишь свою карту, и значит, его решение должно основываться лишь на этом. Поэтому под стратегией Петра в этой игре мы будем понимать функцию $\alpha(x)$ — вероятность сделать ставку, если на руках у него карта x . Поскольку α — вероятность, то ее значения $0 \leq \alpha \leq 1$ и $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ — это вероятность спасовать. Аналогично, если Петр сделал ставку, то стратегией Павла будет функция $\beta(y)$ — вероятность поддержать ставку, если у него на руках карта y . Понятно, что $0 \leq \beta \leq 1$.

В процессе игры будут выпадать различные комбинации карт, и следовательно, выигрыш каждого из игроков будет случайным. В качестве критерия будем использовать среднее значение выигрыша. В данной игре если стратегии игроков α, β выбраны, то в силу условий игры средний выигрыш первого игрока определяется соотношениями

-1 , с вероятностью $\bar{\alpha}(x)$,
 $+1$, с вероятностью $\alpha(x)\bar{\beta}(y)$,
 $(c+1)\text{sgn}(x-y)$, с вероятностью $\alpha(x)\beta(y)$,
 где функция $\text{sgn}(x-y)$ равна 1, если $x > y$; -1 , если $x < y$ и 0, если $x = y$.

В силу этих соотношений средний выигрыш Петра будет равен

$$\begin{aligned}
 H(\alpha, \beta) = \int_0^1 \int_0^1 & \left[-\bar{\alpha}(x) + \alpha(x)\bar{\beta}(y) + \right. \\
 & \left. + (c+1)\text{sgn}(x-y)\alpha(x)\beta(y) \right] dx dy.
 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Теперь игра полностью определена. Мы определили стратегии в игре и выигрыш. Первый игрок желает максимизировать, а второй игрок — минимизировать средний выигрыш (1.1).

5.1.1. Оптимальные стратегии

Нетрудно понять, какой вид должны иметь оптимальные стратегии. Для этого представим выигрыш (1.1) в следующем виде, выделив члены, содержащие $\alpha(x)$:

$$H(\alpha, \beta) = \int_0^1 \alpha(x) \left[1 + \int_0^1 \left(\bar{\beta}(y) + (c+1)\text{sgn}(x-y)\beta(y) \right) dy \right] dx - 1. \quad (1.2)$$

Обозначим выражение в квадратных скобках в (1.2) через $Q(x)$. Тогда из (1.2) следует, что оптимальная стратегия $\alpha^*(x)$ Петра, максимизирующая его выигрыш, должна иметь следующий вид. Если $Q(x) > 0$, то $\alpha^*(x) = 1$, и если $Q(x) < 0$, то $\alpha^*(x) = 0$. Если же $Q(x) = 0$, $\alpha^*(x)$ может принимать любые значения.

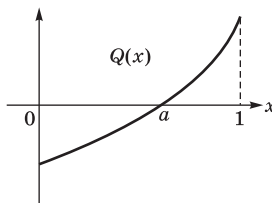


Рис. 5.1
Функция $Q(x)$

Поскольку функция $\operatorname{sgn}(x - y)$, а вместе с ней и функция $Q(x)$ — неубывающая, то, как видно из рис. 5.1, оптимальная стратегия $\alpha^*(x)$ должна определяться некоторым порогом a , и если полученная карта x имеет значение, меньшее, чем a , то следует пасовать, в противном случае — делать ставку.

Аналогично, представляя выигрыш $H(\alpha, \beta)$ в виде

$$H(\alpha, \beta) = \int_0^1 \beta(y) \left[\int_0^1 \alpha(x) \left(-(c+1)\operatorname{sgn}(y-x) - 1 \right) dx \right] dy + \int_0^1 (2\alpha(x) - 1) dx, \quad (1.3)$$

мы получаем, что оптимальная стратегия Павла $\beta^*(y)$ также определяется некоторым пороговым значением b , больше которого он делает ставку, и пасует в противном случае.

Найдем эти оптимальные пороги a^*, b^* .

Предположим, что Петр использует стратегию α с порогом a . Тогда проигрыш Павла, согласно (1.3), имеет вид

$$H(\alpha, \beta) = \int_0^1 \beta(y) G(y) dy + 2(1-a) - 1, \quad (1.4)$$

где $G(y) = \int_a^1 \left[-(c+1)\operatorname{sgn}(y-x) - 1 \right] dx$.

После несложных вычислений получаем, что

$$G(y) = \int_a^1 c dx = c(1-a), \quad \text{если } y < a,$$

$$G(y) = \int_a^y (-c-2) dx + \int_y^1 c dx =$$

$$= -2(c+1)y + a(c+2) + c, \quad \text{если } y \geq a.$$

На рис. 5.2 показан вид функции $G(y)$, из которого видно, что оптимальный порог b определяется соотношением $-2(c+1)b + a(c+2) + c = 0$, откуда находим

$$b = \frac{1}{2(c+1)} [a(c+2) + c]. \quad (1.5)$$

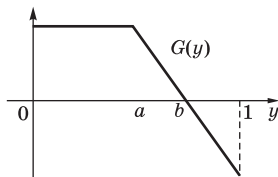


Рис. 5.2
Функция $G(y)$

Таким образом, оптимальный порог второго игрока однозначно определяется значением порога первого игрока. При этом минимальное значение проигрыша Павла равно

$$\begin{aligned} H(\alpha, \beta) &= \int_b^1 G(y) dy + 2(1-a) - 1 = \\ &= \int_b^1 [-2(c+1)y + a(c+2) + c] dy + 2(1-a) - 1. \end{aligned}$$

После интегрирования получим

$$\begin{aligned} H(\alpha, \beta) &= -(c+1)(1-b^2) + [a(c+2) + c](1-b) - 2a + 1 = \\ &= (c+1)b^2 - b[a(c+2) + c] + ac. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подставляя оптимальное значение порога b из (1.5) в (1.6), получим представление минимального проигрыша Павла как функцию аргумента a :

$$H(a) = \frac{1}{4(c+1)}[a(c+2) + c]^2 - \frac{1}{2(c+1)}[a(c+2) + c]^2 + ac.$$

После несложных преобразований получаем

$$H(a) = \frac{(c+2)^2}{4(c+1)} \left[-a^2 + 2a \frac{c^2}{(c+2)^2} - \frac{c^2}{(c+2)^2} \right]. \quad (1.7)$$

Поскольку a является стратегией Петра, естественно, что он будет стараться максимизировать минимальный проигрыш Павла (1.7). Таким образом, окончательно мы приходим к задаче, в которой нужно найти максимум параболы,

$$h(a) = -a^2 + 2a \frac{c^2}{(c+2)^2} - \frac{c^2}{(c+2)^2}.$$

Вид этой параболы изображен на рис. 5.3. Ее максимум достигается в точке

$$a^* = \left(\frac{c}{c+2} \right)^2,$$

лежащей на интервале $[0, 1]$. Подставляя это значение в (1.5), найдем оптимальный порог второго игрока

$$b^* = \frac{c}{c+2}.$$

При этом значение выигрыша первого игрока (оно будет наилучшим и для Петра, и для Павла) найдем, подставив оптимальный порог a^* в (1.7),

$$H^* = H(a^*, b^*) = \frac{(c+2)^2}{4(c+1)} \left[\left(\frac{c}{c+2} \right)^4 - \left(\frac{c}{c+2} \right)^2 \right] = - \left(\frac{c}{c+2} \right)^2.$$

Мы видим, что значение игры отрицательно, т.е. первый игрок (Петр) находится в невыгодном положении.

5.1.2. Особенности оптимального поведения в покере

Итак, оптимальные стратегии игроков и значение игры найдены. Мы получили, что оптимальный порог первого игрока меньше, чем у второго, т.е. он должен быть более осторожен. Значение игры отрицательно, это связано с тем, что ход первого игрока дает некоторую информацию о его карте второму игроку.

Теперь обсудим вопрос о единственности оптимальных стратегий. Как мы видели из рис. 5.2, в случае, если первый игрок (Петр) использует оптимальную стратегию $\alpha^*(x)$ с порогом $a^* = \left(\frac{c}{c+2} \right)^2$, то

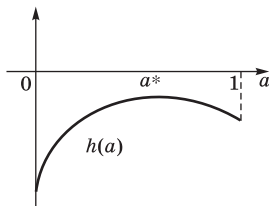


Рис. 5.3
Функция $h(a)$

наилучшим ответом второго игрока (Павла) будет также использование пороговой стратегии $\beta^*(y)$ с порогом $b^* = \frac{c}{c+2}$, т.е. оптимальная стратегия Павла определяется однозначно.

Давайте теперь зафиксируем стратегию Павла с порогом b^* и найдем наилучший ответ Петра. Для этого опять обратимся к выражению (1.2) и вычислим функцию $Q(x)$. Для данного b^* находим, что если $x < b^*$, то

$$\begin{aligned} Q(x) &= 1 + \int_0^1 \left(\bar{\beta}(y) + (c+1) \operatorname{sgn}(x-y) \beta(y) \right) dy = \\ &= 1 + \int_0^{b^*} dy - \int_{b^*}^1 (c+1) dy = 1 + b^* - (c+1)(1-b^*) = 0. \end{aligned}$$

Если же $x \geq b^*$, то

$$\begin{aligned} Q(x) &= 1 + b^* + \int_{b^*}^x (c+1) dy - \int_x^1 (c+1) dy = \\ &= 1 + b^* + (c+1)(x-b^*) - (c+1)(1-x) = \\ &= 2(c+1)x + (c+2)(b^*+1). \end{aligned}$$

Как видно из рис. 5.4, функция $Q(x)$ на интервале $(b^*, 1]$ положительна, и, следовательно, если у Петра карта $x > b^*$, его наилучшим решением является сделать ставку. Однако если значение x лежит в интервале $[0, b^*]$, то $Q(x) = 0$ и $\alpha^*(x)$ может принимать любые значения, так как это не влияет на значение выигрыша (1.2). Конечно, найденная нами стратегия с порогом a^* удовлетворяет этому условию. Однако интересно, нет ли какой-либо другой стратегии Петра $\alpha(x)$, для которой оптимальная стратегия Павла совпадет с $\beta^*(y)$.

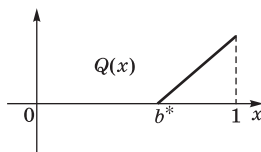


Рис. 5.4
Функция $Q(x)$

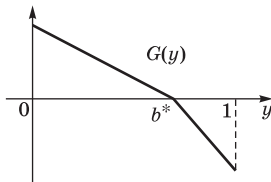


Рис. 5.5
Функция $G(y)$

Оказывается, такие стратегии существуют. Рассмотрим, например, стратегию $\alpha(x)$ такого вида. Если $x \geq b^*$, то по-прежнему, первый игрок делает ставку, если же $x < b^*$, то с вероятностью $p = \frac{2}{c+2}$ он делает ставку и с вероятностью $\bar{p} = 1 - p = \frac{c}{c+2}$ пасует. Найдем наилучший ответ второго игрока для стратегии такого вида. Как и раньше, представим выигрыш в виде (1.4). Функция $G(y)$ теперь имеет вид:

$$G(y) = \int_0^{b^*} p(-(c+1)\operatorname{sgn}(y-x) - 1)dx + \int_{b^*}^1 (-(c+1)\operatorname{sgn}(y-x) - 1)dx,$$

откуда находим, что если $y < b^*$, то

$$\begin{aligned} G(y) &= p \int_0^y (-(c+1) - 1)dx + p \int_y^{b^*} (c+1 - 1)dx + \int_{b^*}^1 (c+1 - 1)dx = \\ &= -2p(c+1)y + pcb^* + c(1 - b^*), \end{aligned}$$

и для $y \geq b^*$

$$\begin{aligned} G(y) &= p \int_0^{b^*} (-c-2)dx + \int_{b^*}^y (-c-2)dx + \int_y^1 cdx = \\ &= -2(c+1)y + (c+2)b^*(1-p) + c. \end{aligned}$$

Вид функции $G(y)$ изображен на рис. 5.5. Заметим, что в силу выбора p $G(b^*) = 0$ и, следовательно, наилучшей стратегией Павла по-прежнему остается стратегия $\beta^*(y)$.

Таким образом, мы нашли еще одно решение данной игры. Это решение принципиально отличается от предыдущего для первого игрока. Теперь, даже имея малое значение карты на руках, Петр может сделать ставку. Этот эффект в карточных играх называется блефом. Игрок

изображает, что у него на руках большая карта, понуждая противника сказать «пас». Отметим, однако, что вероятность блефа тем меньше, чем больше значение ставки c . Например, для $c = 100$ вероятность блефа должна быть меньше 0.02.

§ 5.2. МОДЕЛЬ ПОКЕРА С ПЕРЕМЕННОЙ СТАВКОЙ

В рассмотренной выше модели покера ставка c была фиксирована, однако в реальной игре она может меняться. Рассмотрим модификацию данной модели с переменной ставкой.

Итак, так же как и раньше, игроки Петр и Павел делают в начале игры взнос, равный единице. После этого они получают две карты достоинством x и y , не имея информации о карте противника. На первом шаге Петр делает ставку $c(x)$, которая зависит от значения его карты x . Ход переходит к Павлу, и он может либо спасовать, и потерять свой взнос в банке, либо поддержать вызов противника. Тогда он добавляет в банк $c(x)$, игроки открывают карты, и выигрывает тот из них, чья карта больше. Итак, в данной модели Петр выигрывает либо единицу, либо $(1 + c(x))sgn(x - y)$. Задачей здесь является найти оптимальную функцию $c(x)$ и оптимальный ответ второго игрока. Эту проблему сформулировал в конце 1950-х годов Беллман.

Рассмотрим вначале дискретную модель данной игры. Предположим, что ставка Петра может принимать одно значение из следующего фиксированного набора $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n$. Тогда стратегией первого игрока является смешанная стратегия $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$, где $\alpha_i(x)$ — вероятность поставить в игре c_i , $i = 1, \dots, n$, если значение его карты равно x . Тогда $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Стратегией второго игрока будет стратегия поведения $\beta(y) = (\beta_1(y), \dots, \beta_n(y))$, где $\beta_i(y)$ — вероятность уравнивать ставку c_i , $0 \leq \beta_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$, при выбранной карте y . Соответственно $\bar{\beta}_i(y) = 1 - \beta_i(y)$ — вероятность паса при ставке c_i и карте y .

Ожидаемый выигрыш первого игрока равен

$$H(\alpha, \beta) = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left[\alpha_i(x) \bar{\beta}_i(y) + (1 + c_i)sgn(x - y) \alpha_i(x) \beta_i(y) \right] dx dy. \quad (2.1)$$

Разберем вначале случай $n = 2$.

5.2.1. Модель покера с двумя ставками

Итак, предположим, что первый игрок в зависимости от выбранной карты x может поставить одну из двух ставок c_1 или c_2 , $c_1 < c_2$. Таким образом, его стратегию можно определить с помощью функции $\alpha(x)$. $\alpha(x)$ — это вероятность ставки c_1 . Соответственно $\bar{\alpha}(x) = 1 - \alpha(x)$ — вероятность ставки c_2 . У второго игрока стратегия определяется с помощью двух функций $\beta_1(y)$, $\beta_2(y)$, которые обозначают вероятности поддержать соответственно ставки c_1 и c_2 . Функция выигрыша (2.1) примет вид

$$H(\alpha, \beta) = \int_0^1 \int_0^1 \left[\alpha(x) \bar{\beta}_1(y) + (1 + c_1) \operatorname{sgn}(x - y) \alpha(x) \beta_1(y) + \right. \\ \left. + (1 - \alpha(x)) \bar{\beta}_2(y) + (1 + c_2) \operatorname{sgn}(x - y) (1 - \alpha(x)) \beta_2(y) \right] dx dy. \quad (2.2)$$

Найдем вначале вид оптимальной стратегии второго игрока. Выделим в (2.2) слагаемые с β_1 и β_2 . Они имеют вид

$$\int_0^1 \beta_1(y) dy \left[\int_0^1 \alpha(x) (-1 + (1 + c_1) \operatorname{sgn}(x - y)) dx \right] \quad (2.3)$$

и

$$\int_0^1 \beta_2(y) dy \left[\int_0^1 (1 - \alpha(x)) (-1 + (1 + c_2) \operatorname{sgn}(x - y)) dx \right]. \quad (2.4)$$

Функция $\operatorname{sgn}(x - y)$ не возрастает по y , следовательно, и выражения в квадратных скобках в (2.3)–(2.4), обозначим их $G_i(y)$, $i = 1, 2$, также представляют собой невозрастающие функции по y (см. рис. 5.6). Предположим, что функции $G_i(y)$ пересекают ось O_y на интервале $[0, 1]$ в точках b_i , $i = 1, 2$.

Второй игрок заинтересован минимизировать выражения (2.3)–(2.4). Чтобы интегралы в этих выражениях принимали минимальные значения, необходимо, чтобы $\beta_i(y)$ было равно нулю для $G_i(y) > 0$ и равно 1 для $G_i(y) < 0$, $i = 1, 2$. Отсюда его оптимальная стратегия имеет вид $\beta_i(y) = I(y \geq b_i)$, $i = 1, 2$, где $I(A)$ — индикатор множества A . То есть второй игрок поддерживает ставку первого при достаточно больших картах (превышающих порог b_i , $i = 1, 2$). Поскольку $c_1 < c_2$, то естественно предположить, что порог для поддержания большей ставки также должен быть больше, т. е. $b_1 < b_2$. Пороги b_1, b_2 определяются уравнениями $G_i(b_i) = 0$, $i = 1, 2$ или согласно (2.3)–(2.4),

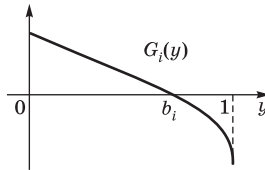


Рис. 5.6
Функция $G_i(y)$

$$\int_0^{b_1} (-2 - c_1)\alpha(x)dx + \int_{b_1}^1 c_1\alpha(x)dx = 0 \quad (2.5)$$

и

$$\int_0^{b_2} (-2 - c_2)\bar{\alpha}(x)dx + \int_{b_2}^1 c_2\bar{\alpha}(x)dx = 0. \quad (2.6)$$

Теперь перейдем к построению оптимальной стратегии первого игрока $\alpha(x)$. Выделим в выигрыше (2.2) выражение с $\alpha(x)$:

$$\int_0^1 \alpha(x)dx \left[\int_0^1 \beta_2(y) - \beta_1(y) + \right. \\ \left. + \operatorname{sgn}(x - y) ((1 + c_1)\beta_1(y) - (1 + c_2)\beta_2(y)) dy \right].$$

Выражение в квадратных скобках обозначим $Q(x)$. Тогда для тех x , где $Q(x) < 0$, оптимальная стратегия $\alpha(x)$ будет равна нулю, для x , где $Q(x) > 0$, $\alpha(x) = 1$. Там же, где $Q(x) = 0$, $\alpha(x)$ может принимать произвольные значения. После преобразований

$$Q(x) = \int_0^x (c_1\beta_1(y) - c_2\beta_2(y)) dy + \\ + \int_x^1 ((2 + c_2)\beta_2(y) - (2 + c_1)\beta_1(y)) dy.$$

Производная функции $Q(x)$:

$$Q'(x) = (2 + 2c_1)\beta_1(x) - (2 + 2c_2)\beta_2(x)$$

с учетом вида стратегий $\beta_i(x), i = 1, 2$ принимает вид

$$Q'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0, b_1], \\ 2 + 2c_1, & \text{если } x \in (b_1, b_2), \\ -2(c_2 - c_1), & \text{если } x \in [b_2, 1]. \end{cases}$$

Таким образом, функция $Q(x)$ на интервале $[0, b_1]$ постоянна, на интервале (b_1, b_2) возрастает и на интервале $[b_2, 1]$ убывает.

Потребуем, чтобы на интервале $[0, b_1]$ функция $Q(x)$ была равна нулю и пересекала ось O_x в некоторой точке a на интервале $[b_2, 1]$ (см. рис. 5.7). Тогда будут иметь место соотношения $b_1 < b_2 < a$. Для этого необходимо выполнение условий

$$Q(0) = \int_{b_2}^1 (2 + c_2) dy - \int_{b_1}^1 (2 + c_1) dy = 0$$

и

$$Q(a) = \int_{b_1}^a c_1 dy - \int_{b_2}^a c_2 dy + \int_a^1 (c_2 - c_1) dy = 0.$$

Упрощая эти условия, получим

$$(1 - b_1)(2 + c_1) = (1 - b_2)(2 + c_2)$$

$$(c_2 - c_1)(2a - 1) = c_2 b_2 - c_1 b_1.$$

При выполнении этих условий оптимальная стратегия первого игрока будет иметь вид

$$\alpha(x) = \begin{cases} \text{произвольное значение,} & \text{если } x \in [0, b_1], \\ 1, & \text{если } x \in (b_1, a), \\ 0, & \text{если } x \in [a, 1]. \end{cases}$$

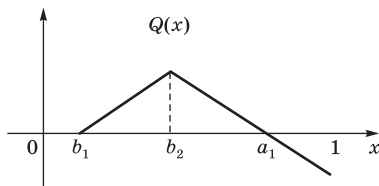


Рис. 5.7
Функция $Q(x)$

Тогда условия (2.5)–(2.6) можно переписать в виде

$$\int_0^{b_1} \alpha(x) dx = \frac{c_1(a - b_1)}{2 + c_1} = b_1 - \frac{c_2(1 - a)}{2 + c_2}. \quad (2.7)$$

Таким образом, параметры для определения оптимальных стратегий игроков определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} (1 - b_1)(2 + c_1) &= (1 - b_2)(2 + c_2), \\ (c_2 - c_1)(2a - 1) &= c_2b_2 - c_1b_1, \\ \frac{c_1(a - b_1)}{2 + c_1} &= b_1 - \frac{c_2(1 - a)}{2 + c_2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Можно показать, что система уравнений (2.8) имеет решение $0 \leq b_1 < b_2 \leq a \leq 1$. Ниже мы покажем это для общего случая.

Особенностью оптимальной стратегии первого игрока является то, что на интервале $[0, b_1]$ его стратегия может быть произвольной, лишь бы выполнялось условие (2.7). Это соответствует стратегии блефа в игре, поскольку для маленьких карт первый игрок может объявить высокую ставку в игре. У второго игрока оптимальная стратегия предписывает при маленьких картах выходить из игры, а при достаточно больших — поддерживать ту или иную ставку противника.

Например, при $c_1 = 2, c_2 = 4$ оптимальные параметры такие: $b_1 = 0.345, b_2 = 0.563, a = 0.891$. При картах со значениями меньше 0.345 первый игрок блефует, если же карты больше этого значения, но меньше 0.891 он ставит ставку 2, а при картах больших 0.891 он ставит ставку 4. Второй игрок поддерживает соответственно ставку 2, если его карты в интервале $[0.345, 0.563]$, и 4, если они больше 0.563. В других случаях он пасует.

5.2.2. Модель покера с n ставками

Теперь предположим, что первый игрок после получения карты x может объявить ставку из следующего набора значений $0 < c_1 < \dots < c_n$. Тогда его стратегией будет смешанная стратегия $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$, где $\alpha_i(x)$ представляет вероятность объявить ставку c_i . После этого ход переходит ко второму игроку. В зависимости от выбранной карты y , он может спасовать и потерять свой взнос в банке либо продолжить игру. В последнем случае он должен уравнивать ставку первого игрока. Игроки вскрывают карты, и выигрывает тот, чье значение больше. Стратегией второго игрока является стратегия поведения

$\beta(y) = (\beta_1(y), \dots, \beta_n(y))$, где $\beta_i(y)$ — вероятность уравнивать ставку первого игрока, которая равна c_i , $i = 1, \dots, n$. Функция выигрыша имеет вид

$$H(\alpha, \beta) = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left[\alpha_i(x) \bar{\beta}_i(y) + \right. \\ \left. + (1 + c_i) \operatorname{sgn}(x - y) \alpha_i(x) \beta_i(y) \right] dx dy. \quad (2.9)$$

Найдем вначале оптимальную стратегию второго игрока. Для этого перепишем функцию (2.9) в виде

$$H(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \beta_i(y) dy \left[\int_0^1 \alpha_i(x) (-1 + \right. \\ \left. + (1 + c_i) \operatorname{sgn}(x - y)) dx \right] + 1. \quad (2.10)$$

Обозначим выражение в квадратных скобках как $G_i(y)$. Для каждой фиксированной стратегии $\alpha(x)$ и ставки c_i второй игрок заинтересован минимизировать (2.10). Поэтому его оптимальная стратегия для любого $i = 1, \dots, n$ должна иметь вид

$$\beta_i(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } G_i(y) > 0, \\ 1, & \text{если } G_i(y) < 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $G_i(y)$

$$G_i(y) = -(2 + c_i) \int_0^y \alpha_i(x) dx + c_i \int_y^1 \alpha_i(x) dx$$

не возрастает по y . Кроме того, $G_i(0) = c_i \int_0^1 \alpha_i(x) dx \geq 0$ и $G_i(1) = -(2 + c_i) \int_0^1 \alpha_i(x) dx \leq 0$. Следовательно, всегда существует корень b_i уравнения $G_i(y) = 0$ (см. рис. 5.6). b_i удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{b_i} \alpha_i(x) dx = \frac{c_i}{2 + c_i} \int_{b_i}^1 \alpha_i(x) dx. \quad (2.11)$$

Таким образом, оптимальная стратегия второго игрока принимает вид

$$\beta_i(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq y < b_i, \\ 1, & \text{если } b_i \leq y \leq 1, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$. Заметим, что набор $b_i, i = 1, \dots, n$, удовлетворяющих уравнению (2.11) существует для любой стратегии $\alpha(x)$.

Теперь перейдем к построению оптимальной стратегии первого игрока. Представим выигрыш (2.9) в виде

$$H(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \alpha_i(x) Q_i(x) dx, \quad (2.12)$$

где

$$Q_i(x) = \int_0^1 (\bar{\beta}_i(y) + (1 + c_i) \operatorname{sgn}(x - y) \beta_i(y)) dy$$

или

$$Q_i(x) = b_i + (1 + c_i) \left(\int_0^x \beta_i(y) dy - \int_x^1 \beta(y) dy \right). \quad (2.13)$$

Для каждого x первый игрок ищет стратегию $\alpha(x)$, которая максимизирует выигрыш (2.12). Заметим, что это другая оптимизационная задача, отличная от той, которую мы исследовали в рассуждениях для второго игрока.

Здесь $\alpha(x)$ — смешанная стратегия, $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) = 1$. Максимальное значение выигрыша (2.12) достигается при таком $\alpha(x)$, что $\alpha_i(x) = 1$, если для данного x $Q_i(x)$ принимает значения большие, чем другие $Q_j(x), j \neq i$, и $\alpha_i(x) = 0$ в противном случае. Если же для данного значения x все значения $Q_i(x)$ совпадают, то $\alpha(x)$ может принимать произвольные значения.

Будем искать оптимальную стратегию $\alpha(x)$ в специальном виде. Пусть на интервале $[0, b_1]$ все функции $Q_i(x)$ совпадают, т. е. $Q_1(x) = \dots = Q_n(x)$. Это будет соответствовать стратегии блефа для первого игрока. Положим $a_1 = b_1$. Далее пусть на интервале $[a_1, a_2]$ функция $Q_1(x) > \max\{Q_j(x), j \neq 1\}$, на интервале $[a_2, a_3]$ пусть $Q_2(x) > \max\{Q_j(x), j \neq 2\}$ и т. д. На интервале $[a_n, 1]$ предположим, что

максимальное значение принимает $Q_n(x)$. Тогда оптимальная стратегия первого игрока примет вид

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} \text{произвольное значение,} & \text{если } x \in [0, b_1], \\ 1, & \text{если } x \in [a_i, a_{i+1}), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Уточним вид функции $Q_i(x)$. Упрощая (2.13), получим

$$Q_i(x) = \begin{cases} b_i - (1 + c_i)(1 - b_i), & \text{если } 0 \leq x < b_i, \\ (1 + c_i)(2x - 1) - c_i b_i, & \text{если } b_i \leq x \leq 1. \end{cases}$$

На интервале $[0, b_i]$ функция $Q_i(x)$ принимает постоянные значения. Потребуем, чтобы эти значения для всех функций $Q_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ были одинаковы, т. е.

$$b_i - (1 + c_i)(1 - b_i) = k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда все b_i , $i = 1, \dots, n$ можно определить по формуле

$$b_i = \frac{1 + k + c_i}{2 + c_i} = 1 - \frac{1 - k}{2 + c_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

Из (2.15) сразу следует, что $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Это соответствует интуитивным соображениям, что второй игрок должен поддерживать более высокую ставку при больших картах.

На интервале $[b_i, 1]$ функция $Q_i(x)$ является линейной. Обозначим точки пересечения функций $Q_{i-1}(x)$ и $Q_i(x)$ через a_i , $i = 2, \dots, n$. При этом $a_1 = b_1$. Для того чтобы оптимальная стратегия $\alpha(x)$ имела вид (2.14), потребуем, чтобы $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Тогда на интервале $[a_i, a_{i+1})$ функция $Q_i(x)$ будет максимальной, $i = 1, \dots, n$. График расположения функций $Q_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ представлен на рис. 5.8.

Точки пересечения a_i находятся из уравнений

$$(1 + c_{i-1})(2a_i - 1) - c_{i-1}b_{i-1} = (1 + c_i)(2a_i - 1) - c_i b_i, \quad i = 2, \dots, n,$$

или после простых преобразований

$$a_i = 1 - \frac{\bar{k}}{(2 + c_{i-1})(2 + c_i)}, \quad i = 2, \dots, n, \quad (2.16)$$

где $\bar{k} = 1 - k$.

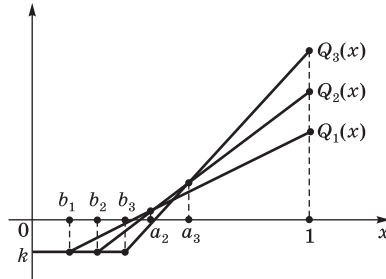


Рис. 5.8
Оптимальные стратегии

Остается определить k . Напомним, что оптимальные пороги стратегии второго игрока b_i удовлетворяли уравнению (2.11), которое с учетом вида (2.14) стратегии α примет вид

$$\int_0^{b_1} \alpha_i(x) dx = \frac{c_i}{2 + c_i} (a_{i+1} - a_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.17)$$

Складывая все уравнения (2.17) и учитывая условие $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) = 1$, получим

$$b_1 = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{2 + c_i} (a_{i+1} - a_i),$$

откуда

$$\frac{1 + k + c_1}{2 + c_1} = \bar{k}A,$$

где

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{c_i (c_{i+1} - c_{i-1})}{(2 + c_{i-1})(2 + c_i)^2(2 + c_{i+1})}.$$

Здесь в сумме мы считаем $c_0 = -1, c_{n+1} = \infty$. Отсюда

$$k = 1 - \frac{2 + c_1}{A(2 + c_1) + 1}.$$

Очевидно, что A и вместе с ним \bar{k} положительны. Следовательно, последовательность a_i является монотонной, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Кроме того, все пороги a_i лежат в интервале $[0, 1]$.

Подытожим проделанные рассуждения. Оптимальная стратегия первого игрока имеет вид

$$\alpha_i^*(x) = \begin{cases} \text{произвольная функция,} \\ \text{для которой выполняется (2.17),} & \text{если } x \in [0, b_1], \\ 1, & \text{если } x \in [a_i, a_{i+1}), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $a_i = 1 - \frac{\bar{k}}{(2+c_{i-1})(2+c_i)}$, $i = 2, \dots, n$. Заметим, что на интервале $[0, b_1)$ первый игрок блефует. При малых значениях карт он может поставить любую ставку. Для определенности можно разбить отрезок $[0, b_1)$, последовательно начиная от нуля, на интервалы длиной $\frac{c_i}{2+c_i}(a_{i+1} - a_i)$, $i = 1, \dots, n$ (их сумма по построению равна b_1) и положить $\alpha_i^*(x) = c_i$ на соответствующем интервале. Для $x > b_1$ первый игрок должен ставить ставку c_i на интервале $[a_i, a_{i+1})$.

Оптимальная стратегия второго игрока определяется как

$$\beta_i^*(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq y < b_i, \\ 1, & \text{если } b_i \leq y \leq 1, \end{cases}$$

где $b_i = \frac{1+k+c_i}{2+c_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Значение игры найдем из (2.12):

$$\begin{aligned} H(\alpha^*, \beta^*) &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \alpha_i^*(x) Q_i(x) dx = \\ &= \int_0^{b_1} k \sum_{i=1}^n \alpha_i^*(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} Q_i(x) dx, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} H(\alpha^*, \beta^*) &= kb_1 + \sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) [(1+c_i)(a_i + a_{i+1}) - \\ &\quad - (1+c_i + c_i b_i)]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Например, для игры, в которой размеры ставок равны $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 6$, последовательно находим параметры

$$\begin{aligned} A &= \frac{c_1(c_2 + 1)}{(2+c_1)^2(2+c_2)} + \frac{c_2(c_3 - c_2)}{(2+c_1)(2+c_2)^2(2+c_3)} + \\ &\quad + \frac{c_3}{(2+c_2)(2+c_3)^2} \approx 0.122, \end{aligned}$$

$$k = 1 - \frac{2 + c_1}{A(2 + c_1) + 1} \approx -1.193$$

и затем оптимальные стратегии

$$b_1 = \frac{1 + k + c_1}{2 + c_1} \approx 0.269, \quad b_2 = \frac{1 + k + c_2}{2 + c_2} \approx 0.561,$$

$$b_3 = \frac{1 + k + c_3}{2 + c_3} \approx 0.725,$$

$$a_1 = b_1 \approx 0.269, \quad a_2 = 1 - \frac{1 - k}{(2 + c_1)(2 + c_2)} \approx 0.854,$$

$$a_3 = 1 - \frac{1 - k}{(2 + c_2)(2 + c_3)} \approx 0.945.$$

Наконец, значение игры равно

$$H(\alpha^*, \beta^*) \approx -0.117.$$

Значение игры отрицательно, поэтому игра невыгодна для первого игрока.

5.2.3. Асимптотические свойства стратегий в модели покера с переменной ставкой

Вернемся к проблеме, сформулированной в начале параграфа. Предположим, что получив карту x , первый игрок может объявить ставку $c(x)$, которая может принимать произвольное значение из R . Воспользуемся результатами, полученными в предыдущем разделе.

Выберем некоторое положительное число B и нанесем на отрезке $[0, B]$ равномерную сеть $\{B/n, B/n, \dots, Bn/n\}$, где n — некоторое целое число. Будем считать узлы этой сетки значениями ставок в игре, т.е. $c_i = Bi/n$. При этом мы будем неограниченно увеличивать n и i , но таким образом, чтобы сохранялось равенство $Bi/n = c$ для некоторого c . После этого мы будем неограниченно увеличивать B .

Найдем предельные значения параметров, определяющих оптимальные стратегии игроков в игре с такими ставками. Найдем вначале предел A :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n \frac{c_i(c_{i+1} - c_{i-1})}{(2 + c_{i-1})(2 + c_i)^2(2 + c_{i+1})} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{B \frac{i}{n} 2 \frac{B}{n}}{(2 + B \frac{i-1}{n})(2 + B \frac{i}{n})^2(2 + B \frac{i+1}{n})}. \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ данная интегральная сумма сходится к интегралу

$$A \rightarrow \int_0^B \frac{2c}{(2+c)^4} dc = \frac{1}{12} - \frac{2B}{3(2+B)^3} - \frac{1}{3(2+B)^2},$$

который при $B \rightarrow \infty$ имеет предел $A = 1/12$. Отсюда немедленно получаем предельное значение для k , $k = 1 - \frac{2}{2A+1} = -5/7$.

Теперь мы можем определить пороговое значение для блефа первого игрока. $b_1 = a_1 = 1 - (1 - k)/(2 + B/n) \rightarrow 1 - (1 + 5/7)/2 = 1/7$. Итак, если у первого игрока значение карт меньше $1/7$, он блефует.

Теперь перейдем к определению размера ставки, которую первый игрок должен ставить в зависимости от значения его карты x . Согласно определению найденной выше оптимальной стратегии первого игрока $\alpha^*(x)$, он ставит ставку c_i в интервале $[a_i, a_{i+1})$, где

$$a_i = 1 - \frac{1 - k}{(2 + c_{i-1})(2 + c_i)}.$$

Таким образом, ставка $c = c(x)$, которая соответствует карте x , удовлетворяет уравнению

$$x = 1 - \frac{1 - k}{(2 + c)^2},$$

откуда находим

$$c(x) = \sqrt{\frac{12}{7(1-x)}} - 2. \quad (2.19)$$

Выражение (2.19) неотрицательно при $x \geq 4/7$, следовательно, при $1/7 \leq x < 4/7$ первый игрок не ставит ничего. При значении карт $x \geq 4/7$ размер его ставки определяется формулой (2.19).

Определим асимптотическое поведение второго игрока. При $y < 1/7$ он пасует. Если же $y \geq 1/7$, второй игрок согласно (2.15) поддерживает заявленную ставку первого игрока c при значении карт, больших

$$y \geq 1 - \frac{1 - k}{2 + c} = 1 - \frac{12}{7(2 + c)}.$$

Поведение оптимальных стратегий обоих игроков представлено на рис. 5.9.

Остается вычислить предельное значение игры. Воспользуемся выражением (2.18). Переходя к пределу, получим

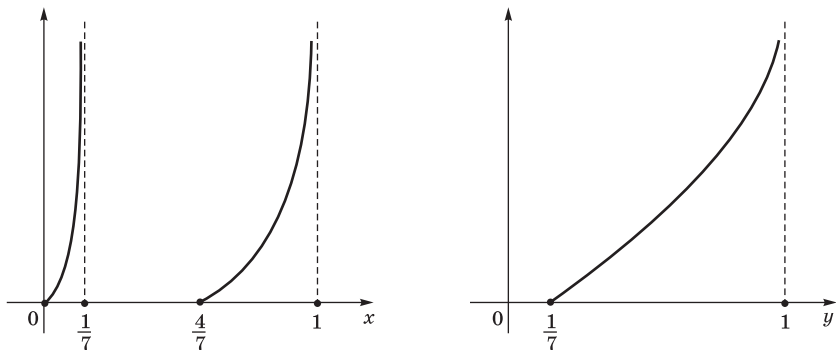


Рис. 5.9

Оптимальные стратегии в покере

$$\begin{aligned}
 kb_1 + \int_0^{\infty} \frac{2(1-k)}{(2+c)^3} (1+c) \left[2\left(1 - \frac{1-k}{(2+c)^2}\right) - \left(1 + \frac{c(1+k+c)}{(1+c)(2+c)}\right) \right] dc = \\
 = -\frac{5}{49} + \frac{24}{7} \int_0^{\infty} \frac{1+c}{(2+c)^3} \left(1 - \frac{24}{7(2+c)^2} - \frac{c(\frac{2}{7}+c)}{(1+c)(2+c)} \right) dc = \\
 = -\frac{5}{49} + \frac{18}{49}. \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

Заметим, однако, что к предельному значению (2.20) нужно добавить выигрыш, который получается при значении карт первого игрока в интервале $[1/7, 4/7]$, т. е.

$$\int_{\frac{1}{7}}^{\frac{4}{7}} \left(\frac{1}{7} + \int_{\frac{1}{7}}^1 \operatorname{sgn}(x-y) dy \right) dx = \frac{3}{49} \int_{\frac{1}{7}}^{\frac{4}{7}} \left(2x - \frac{8}{7} \right) dx = -\frac{6}{49}. \quad (2.21)$$

Складывая (2.20) и (2.21), получим

$$H(\alpha^*, \beta^*) = -\frac{5}{49} + \frac{18}{49} - \frac{6}{49} = \frac{1}{7}.$$

Итак, предельное значение игры равно $1/7$, она выгодна первому игроку. Оптимальные стратегии полностью определены. Интересно, что выигрыш и стратегии определяются через число 7, которое неожиданно появилось в результате аналитических вычислений.

§ 5.3. ПРЕФЕРАНС. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ

Преферанс также является популярной карточной игрой. В преферанс можно играть вдвоем, втроем, вчетвером и впятером. Колода карт для игры в преферанс состоит из 32 карт, которые делятся на четыре равные группы по масти. Масти упорядочены по возрастанию их ценности следующим образом: пики, трефы, бубны, червы. В свою очередь масти различаются по значению. Имеется 8 значений: 7, 8, 9, 10, валет, дама, король, туз. В начале игры каждому из игроков сдается какое-то количество карт и определенное количество карт лежит в прикупе. После сдачи карт начинается борьба за прикуп. Игроки постепенно увеличивают ставки, соответственно вистуя или пасуя. После окончания торговли игроки начинают собственно игру, вскрывая одну за другой свои карты. Преферанс имеет множество правил. Их описание не является целью данной статьи. Ниже мы опишем простейшую модель игры преферанс и попытаемся выявить характерные для этой игры моменты. Когда следует вистовать или пасовать? Когда брать прикуп? Что представляет собой блеф в данной игре?

В качестве теоретико-игровой модели преферанса рассмотрим игру P , в которой играют два игрока Петр и Павел. В начале игры игроки получают карты достоинством x и y , и одна карта z сдается в прикуп. Предположим, что значения карт являются случайными величинами с значениями в интервале $[0, 1]$ и любые значения из этого интервала равновероятны. В этом случае говорят, что случайные величины x, y, z имеют равномерное распределение на интервале $[0, 1]$.

Первым ходит Петр. Он имеет выбор, либо вистовать (т. е. играть на повышение), либо пасовать. В первом случае он может взять прикуп z , выбрать карту с большим значением и сбросить карту с меньшим значением. После этого игроки открывают свои карты. Если значение карты Петра больше, чем значение карты Павла, то Петр получает от Павла некоторую плату A ; если карта Павла больше карты Петра, то Петр платит Павлу B , где $B > A$. Если же карты равны, то объявляется ничья.

Если на первом шаге Петр пасует, то ход переходит ко второму игроку. Павел имеет те же возможности. Если он вистует, то он может взять прикуп z и сбросить карту с меньшим значением. После этого игроки открывают карты. Теперь уже Павел получает от Петра плату A , если его карта больше, или платит B , если его карта меньше. Если карты равны, то ничья.

Отличительная особенность преферанса — игра на «распасах». Если оба игрока пасуют, прикуп остается нетронутым, игроки открывают

свои карты и ситуация теперь меняется. Выигрывает тот из игроков, чья карта меньше. Если $x < y$, Петр получает от Павла плату C , если $x > y$, то Павел платит Петру C , иначе ничья.

Все эти возможности можно изобразить в виде таблицы, где для сокращения записи мы обозначили $\max(x, z) = x \vee z$.

Таблица 5.1
Выигрыши игроков

Петр (1-й шаг)	Павел (2-й шаг)	Выигрыш Петра
Прикуп		A , если $x \vee z > y$; 0 , если $x \vee z = y$; $-B$, если $x \vee z < y$
Пас	Прикуп	$-A$, если $y \vee z > x$; 0 , если $y \vee z = x$; B , если $y \vee z < x$
Пас	Пас	C , если $x < y$; 0 , если $x = y$; $-C$, если $x > y$

5.3.1. Стратегии и функция выигрыша

Определим стратегии в этой игре. Каждый из игроков знает лишь свою карту, и значит, его решение должно основываться лишь на этом. Поэтому под стратегией Петра в этой игре мы будем понимать функцию $\alpha(x)$ — вероятность сказать «вист», если на руках у него карта x . Поскольку α — вероятность, то ее значение лежит в промежутке от 0 до 1. Обозначим $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ — вероятность спасовать. Аналогично, если Петр пасует, то стратегией Павла будет функция $\beta(y)$ — вероятность виста, если у него на руках карта y . Понятно, что $0 \leq \beta \leq 1$.

Так как выигрыш в этой игре является случайной величиной, в качестве критерия в игре мы будем использовать среднее значение выигрыша или, что то же самое, математическое ожидание выигрыша. В данной игре, если стратегии игроков α, β выбраны, то в силу определения игры (см. табл. 5.1) выигрыш первого игрока для данной комбинации карт x, y, z определяется следующим образом:

1) с вероятностью $\alpha(x)$ выигрыш равен A на множестве $x \vee z > y$ и $-B$ на множестве $x \vee z < y$,

2) с вероятностью $\bar{\alpha}(x)\beta(y)$ выигрыш равен $-A$ на множестве $y \vee z > x$ и B на множестве $y \vee z < x$,

3) с вероятностью $\bar{\alpha}(x)\bar{\beta}(y)$ выигрыш равен C на множестве $x < y$ и $-C$ на множестве $x > y$.

Так как значения x, y, z могут принимать любые значения из интервала $[0, 1]$, средний выигрыш первого игрока будет представлять собой тройной интеграл

$$\begin{aligned} H(\alpha, \beta) = & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \alpha(x) \left[AI_{\{x \vee z > y\}} - BI_{\{x \vee z < y\}} \right] + \right. \\ & + \bar{\alpha}(x)\beta(y) \left[-AI_{\{y \vee z > x\}} + BI_{\{y \vee z < x\}} \right] + \\ & \left. + \bar{\alpha}(x)\bar{\beta}(y) \left[CI_{\{x < y\}} - CI_{\{x > y\}} \right] \right\} dx dy dz, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где для удобства записи мы используем функцию $I_A(x, y, z)$ (так называемый индикатор множества A), которая равна 1, если (x, y, z) принадлежит A и 0 в противном случае.

Для примера покажем как можно вычислить, скажем, первый интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \alpha(x) I_{\{x \vee z > y\}} dx dy dz = \int_0^1 \alpha(x) dx \left[\int_0^1 \int_0^1 I_{\{x \vee z > y\}} dy dz \right]. \quad (3.2)$$

Двойной интеграл в квадратных скобках вычислим как повторный интеграл $J(x) = \int_0^1 dz \int_0^1 I_{\{x \vee z > y\}} dy$, разбив его на два интеграла. Имеем

$$J(x) = \int_0^x dz \int_0^1 I_{\{x \vee z > y\}} dy + \int_x^1 dz \int_0^1 I_{\{x \vee z > y\}} dy.$$

В первом интеграле $x \geq z$, следовательно, $I_{\{x \vee z > y\}} = I_{\{x > y\}}$, а во втором интеграле наоборот, $I_{\{x \vee z > y\}} = I_{\{z > y\}}$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
J(x) &= \int_0^x dz \int_0^1 I_{\{x>y\}} dy + \int_x^1 dz \int_0^1 I_{\{z>y\}} dy = \\
&= x \int_0^1 I_{\{x>y\}} dy + \int_x^1 dz \int_0^1 I_{\{z>y\}} dy = \\
&= x \int_0^x dy + \int_x^1 dz \int_0^z dy = x^2 + \int_x^1 zdz = \frac{x^2+1}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, тройной интеграл в (3.2) преобразуется в интеграл $\int_0^1 \alpha(x) \frac{x^2+1}{2} dx$. Аналогично вычисляются остальные интегралы в (3.1). Мы предоставляем это читателю в качестве упражнения.

После некоторых преобразований мы можем переписать (3.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
H(\alpha, \beta) &= \int_0^1 \alpha(x) \left[x^2(A+B)/2 + (A-B)/2 - C(1-2x) \right] dx + \\
&+ \int_0^1 \beta(y) \left[-y^2(A+B)/2 - (A-B)/2 + C(1-2y) \right] dy + \\
&+ \int_0^1 \alpha(x) dx \left[(A-x(A+B)-C) \int_0^x \beta(y) dy + (A+C) \int_x^1 \beta(y) dy \right].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Выигрыш $H(\alpha, \beta)$ в формуле (3.3) представлен таким образом, что первая и вторая строки содержат выражения, в которые входят α и β по отдельности, а в третью строку входит их произведение.

Ниже мы найдем стратегии игроков $\alpha^*(x)$ и $\beta^*(y)$, которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\max_{\alpha} H(\alpha, \beta^*) = \min_{\beta} H(\alpha^*, \beta) = H(\alpha^*, \beta^*). \tag{3.4}$$

Тогда для любых других стратегий α и β будут выполняться неравенства

$$H(\alpha, \beta^*) \leq H(\alpha^*, \beta^*) \leq H(\alpha^*, \beta),$$

т. е. стратегии α^*, β^* будут образовывать равновесие.

5.3.2. Равновесие в случае $\frac{B-A}{B+C} \leq \frac{3A-B}{2(A+C)}$

Предположим, что на первом шаге Петр всегда вступает, т.е. $\alpha^*(x) = 1$. В этом случае от поведения Павла ничего не зависит, и, как мы видим из (3.1), выигрыш Петра $H(\alpha^*, \beta)$ составляет величину

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left[AI_{\{x \vee z > y\}} - BI_{\{x \vee z < y\}} \right] dx dy dz.$$

Как мы видели в (3.2),

$$H(\alpha^*, \beta) = A \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{2} dx - B \left[1 - \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{2} dx \right] = \frac{2A - B}{3}. \quad (3.5)$$

Таким образом, Петр всегда гарантирует себе выигрыш $\frac{2A-B}{3}$.

Теперь предположим, что Павел использует стратегию $\beta^*(y)$ вида

$$\beta^*(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \geq a, \\ 0, & \text{если } y < a, \end{cases} \quad (3.6)$$

где a некоторое число из интервала $[0, 1]$. В этом случае из (3.3) находим, что

$$\begin{aligned} H(\alpha, \beta^*) &= \int_0^1 \alpha(x) G(x) dx + \\ &+ \int_0^1 \beta^*(y) \left[-\frac{y^2(A+B)}{2} - \frac{A-B}{2} + C(1-2y) \right] dy, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где функция

$$G(x) = \begin{cases} x^2(A+B)/2 + 2Cx + (A-B)/2 - \\ - C + (A+C)(1-a), & \text{если } x < a, \\ -x^2(A+B)/2 + x(A+B)a + \\ + (3A-B)/2 - a(A-C), & \text{если } x \geq a. \end{cases} \quad (3.8)$$

Второе слагаемое в (3.7) не зависит от $\alpha(x)$. Поэтому отсюда вытекает, что оптимальная стратегия Петра, максимизирующая выигрыш $H(\alpha, \beta^*)$, имеет вид

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } G(x) > 0, \\ 0, & \text{если } G(x) < 0, \\ \text{произвольное значение} & \\ \text{в интервале } [0, 1], & \text{если } G(x) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Из (3.8) мы видим, что функция $G(x)$ состоит из двух парабол. Покажем, что если a произвольное число из интервала $\mathbf{U} = [0, 1] \cap \left[\frac{B-A}{B+C}, \frac{3A-B}{2(A+C)} \right]$, то график функции $G(x)$ для данных значений параметров A, B, C, a имеет вид, изображенный на рис. 5.10.

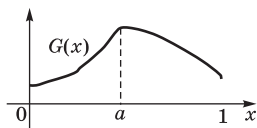


Рис. 5.10
Функция $G(x)$

Действительно, для любого $a \in \mathbf{U}$ из (3.8) получаем

$$G(0) = \frac{A-B}{2} - C + (A+C)(1-a) = \frac{3A-B}{2} - (A+C)a \geq 0,$$

так как в силу выбора $a \leq \frac{3A-B}{2(A+C)}$, и

$$G(1) = A - B + a(B+C) \geq 0,$$

поскольку $a \geq \frac{B-A}{B+C}$. Следовательно, функция $G(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 5.10. Тогда из (3.9) следует, что стратегия $\alpha^*(x)$, дающая максимум $V(\alpha, \beta^*)$, имеет вид $\alpha^* \equiv 1$.

Таким образом, если стратегии Петра и Павла равны соответственно $\alpha^* \equiv 1$ и $\beta^*(y) = I_{\{y \geq a\}}$, где $a \in \mathbf{U}$, то, как мы видели, Петр гарантирует себе выигрыш, равный $\frac{2A-B}{3}$, а больше этой величины Павел ему и не даст выиграть. Другими словами,

$$\max_{\alpha} H(\alpha, \beta^*) = \min_{\beta} H(\alpha^*, \beta) = H(\alpha^*, \beta^*) = \frac{2A-B}{3},$$

что доказывает оптимальность стратегий α^*, β^* .

Следовательно, в случае когда $\frac{B-A}{B+C} \leq \frac{3A-B}{2(A+C)}$, оптимальные стратегии в игре P имеют вид $\alpha^* \equiv 1$ и $\beta^*(y) = I_{\{y \geq a\}}$, где a — произвольное число из интервала $\mathbf{U} = [0, 1] \cap \left[\frac{B-A}{B+C}, \frac{3A-B}{2(A+C)} \right]$, и значение игры равно $H^* = \frac{2A-B}{3}$.

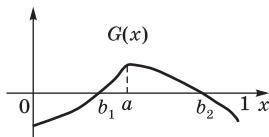


Рис. 5.11
Функция $G(x)$

5.3.3. Равновесие в случае $\frac{3A-B}{2(A+C)} < \frac{B-A}{B+C}$

В случае

$$\frac{3A-B}{2(A+C)} < \frac{B-A}{B+C},$$

мы находим, что если Павел использует стратегию $\beta(y)$ вида (3.6), то из (3.8) следует, что для a из интервала $\mathbf{U} = [\frac{3A-B}{2(A+C)}, \frac{B-A}{B+C}]$:

$$G(0) = \frac{3A-B}{2} - (A+C)a \leq 0,$$

$$G(1) = (A-B) + a(B+C) \leq 0.$$

т. е. график функции $y = G(x)$ вида (3.8) пересекает ось абсцисс так, как показано на рис. 5.11.

Таким образом, если Павел использует стратегию $\beta(y) = I_{\{y \geq a\}}$ с некоторым $a \in \mathbf{U}$, то наилучшим ответом Петра будет стратегия вида

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } b_1 \leq x \leq b_2, \\ 0, & \text{если } x < b_1, x > b_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

или в короткой записи $\alpha^*(x) = I_{\{b_1 \leq x \leq b_2\}}$, где b_1, b_2 можно найти как решение системы уравнений: $G(b_1) = 0, G(b_2) = 0$. Из (3.8) приходим к системе уравнений

$$b_1^2 \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} - C(1-2b_1) + (A+C)(1-a) = 0 \quad (3.11)$$

$$-b_2^2 \frac{A+B}{2} + b_2(A+B)a + \frac{A-B}{2} + A - a(A-C) = 0. \quad (3.12)$$

Теперь предположим, что Петр использует стратегию вида (3.10) $\alpha^*(x) = I_{\{b_1 \leq x \leq b_2\}}$ и найдем наилучший ответ Павла $\beta^*(y)$, который

минимизирует $H(\alpha^*, \beta)$ по β . Подставляя $\alpha^*(x)$ в (3.1), можно представить функцию $H(\alpha^*, \beta)$ в виде

$$H(\alpha^*, \beta) = \int_0^1 \beta(y) R(y) dy + \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{x^2(A+B)}{2} + \frac{A-B}{2} - c(1-2x) \right] dx, \quad (3.13)$$

в котором второе выражение не зависит от $\beta(y)$ и в котором $R(y)$ имеет вид

$$R(y) = \begin{cases} -y^2(A+B)/2 - 2Cy - (A-B)/2 + C + \\ + (A-C)(b_2 - b_1) - (A+B)(b_2^2 - b_1^2)/2, & \text{если } y < b_1, \\ -(A-B)/2 + C + b_2(A-C) - \\ - b_2^2(A+B)/2 - b_1(A+C), & \text{если } b_1 \leq y \leq b_2, \\ -y^2(A+B)/2 - 2Cy - (A-B)/2 + C + \\ + (A+C)(b_2 - b_1), & \text{если } b_2 < y \leq 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Из вида (3.13) немедленно следует, что оптимальная стратегия $\beta^*(y)$ определяется соотношениями

$$\beta^*(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } R(y) < 0, \\ 0, & \text{если } R(y) > 0, \\ \text{произвольное значение} & \\ \text{в интервале } [0, 1], & \text{если } R(y) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Заметим, что функция $R(y)$ на интервале $[b_1, b_2]$ принимает постоянные значения. Положим ее равной нулю, т. е.

$$-b_2^2 \frac{A+B}{2} + b_2(A-C) - b_1(A+C) - \frac{A-B}{2} + C = 0. \quad (3.16)$$

Тогда она примет вид, представленный на рис. 5.12.

Из (3.15) будет следовать, что оптимальной стратегией Павла, в частности, будет стратегия вида $\beta^*(y) = I_{\{y \geq a\}}$, где a произвольное число из интервала $[b_1, b_2]$. Система уравнений (3.11), (3.12) и (3.16) дает решение игровой проблемы.

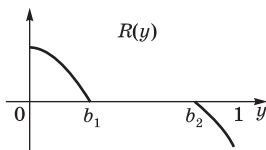


Рис. 5.12
Функция $R(y)$

5.3.4. Особенности оптимального поведения в предпочтании

Давайте теперь проанализируем полученное решение. В случае $\frac{B-A}{B+C} \leq \frac{3A-B}{2(A+C)}$ Петру следует вистовать, взять прикуп и открыть карты. Его выигрыш составит величину $\frac{2A-B}{3}$. Заметим, что если $B < 2A$, то игра выгодна для него.

Если $\frac{3A-B}{2(A+C)} < \frac{B-A}{B+C}$, оптимальная стратегия меняется. Петр должен вистовать, когда его карта имеет среднее значение (не маленькое и не большое). В противном случае следует пасовать. У Павла оптимальная стратегия проще. Он будет вистовать, если карта имеет большое значение и пасовать в противном случае. В этой игре есть эффект блефа. После того как Петр спасовал, Павел должен угадать, какая карта на руках у Петра — большая или маленькая.

Ниже в табл. 5.2 представлены оптимальные стратегии для игроков и значение игры для различных значений A, B, C . Заметим, что значение игры может быть найдено из (13), подставляя $\beta^*(y) = I_{\{y \geq a\}}$, с значениями a_1, b_1, b_2 , определенными из системы (3.11), (3.12), (3.16).

§ 5.4. МОДЕЛЬ ПРЕФЕРАНСА С РОЗЫГРЫШЕМ КАРТ

В предыдущих параграфах различные наборы карт в покере и предпочтании моделировались одной случайной величиной из единичного интервала. Однако в предпочтании, например, многое зависит от того, какие карты входят в набор, и от последовательности, в которой игроки вскрывают карты. В предпочтании карты вскрываются одна за другой, старшая карта побивает другую, и после этого ход переходит к игроку со старшей картой. Здесь мы рассмотрим естественное обобщение предыдущей модели, когда набор карт у каждого из игроков будет моделироваться двумя случайными величинами.

Рассмотрим игру двух игроков, как и раньше это Петр и Павел. В начале игры игроки делают в банк взнос, равный единице. После этого каждый из игроков получает по две карты, которые являются независимыми равномерно распределенными на интервале $[0, 1]$

Таблица 5.2
Оптимальные стратегии

A	B	C	$\alpha^*(x) = I_{\{b_1 \leq x \leq b_2\}}$		$\beta^*(y) = I_{\{y \geq a\}}$	H^*
			b_1	b_2	a	
5	6	8	0	1	0.071	1.333
3	4	1	0	1	0.2	0.666
3	5	0	0	1	0.4	0.333
1	20	0	0.948	0.951	0.948	-0.024
1	2	1	0.055	0.962	0.307	-0.344
1	2	2	0.046	0.964	0.229	-0.417
1	2	3	0.039	0.968	0.184	-0.467
1	2	4	0.034	0.971	0.154	-0.504
1	4	3	0.288	0.824	0.359	-0.519
1	3	4	0.146	0.892	0.242	-0.592
1	2	20	0.010	0.989	0.044	-0.669
1	10	10	0.356	0.792	0.392	-1.366
3	8	2	0.282	0.845	0.413	-2.058

случайными величинами. Каждый из игроков имеет две возможности: пасовать либо сделать ставку $A > 1$. Если один из игроков пасует, его противник забирает банк. Если оба игрока пасуют, объявляется ничья. Если оба игрока делают ставки, то игроки вскрывают карты, игрок, у которого наименьшая карта больше, чем самая большая у противника, выигрывает банк.

5.4.1. Модель преферанса с одновременными ходами

Рассмотрим вначале модель преферанса, в которой игроки делают свой ход одновременно. Предположим, что их карты x_i, y_i независимые равномерно распределенные случайные величины на интервале $[0, 1]$, где $i = 1, 2$. Без ограничения общности будем считать $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$.

Представим выигрыш первого игрока в виде матрицы

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{ставка} & \text{пас} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ставка} \\ \text{пас} \end{array} & \left(\begin{array}{cc} A(I_{\{x_1 > y_2\}} - I_{\{y_1 > x_2\}}) & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right), \end{array}$$

где $I_{\{A\}}$ индикатор A .

Определим стратегии в игре. Стратегию первого игрока обозначим $\alpha(x_1, x_2)$ — это вероятность того, что первый игрок сделает ставку при данных картах x_1, x_2 . Тогда $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ — вероятность, что он спасует. Аналогично для второго игрока $\beta(y_1, y_2)$ — вероятность продолжить игру при картах y_1, y_2 . Тогда $\bar{\beta} = 1 - \beta$ — вероятность паса.

Ожидаемый выигрыш первого игрока равен

$$\begin{aligned}
 H(\alpha, \beta) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \{ \alpha \bar{\beta} - \bar{\alpha} \beta + A \alpha \beta [I_{\{x_1 > y_2\}} - I_{\{y_1 > x_2\}}] \} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 = \\
 &= 2 \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 \alpha(x_1, x_2) dx_2 - 2 \int_0^1 dy_1 \int_{y_1}^1 \beta(y_1, y_2) dy_2 + \\
 &+ 4A \int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_0^1 \int_{y_1}^1 \alpha(x_1, x_2) \beta(y_1, y_2) [I_{\{x_1 > y_2\}} - I_{\{y_1 > x_2\}}] dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 = \\
 &= 2 \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 \alpha(x_1, x_2) dx_2 - 2 \int_0^1 dy_1 \int_{y_1}^1 \beta(y_1, y_2) dy_2 + \\
 &+ 4A \int_0^1 \int_{y_1}^1 \beta(y_1, y_2) \left[\int_{y_2}^1 dx_1 \int_{x_1}^1 \alpha(x_1, x_2) dx_2 - \int_0^{y_1} dx_1 \int_{x_1}^{y_1} \alpha(x_1, x_2) dx_2 \right] dy_1 dy_2.
 \end{aligned}$$

Теорема 5.1. *Оптимальные стратегии в игре с функцией выигрыша $H(\alpha, \beta)$ имеют вид*

$$\alpha^*(x_1, x_2) = I_{\{x_2 \geq a\}}, \quad \beta^*(y_1, y_2) = I_{\{y_2 \geq a\}},$$

где $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{A}}$. Значение игры равно 0.

Доказательство. Предположим, что первый игрок использует стратегию $\alpha^*(x_1, x_2) = I_{\{x_2 \geq a\}}$, (см. рис. 5.13), где $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{A}}$, и найдем наилучший ответ второго игрока. Перепишем функцию выигрыша в виде

$$\begin{aligned}
 H(\alpha^*, \beta) &= 2 \int_0^1 \int_{x_1}^1 \alpha^*(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\
 &+ 2 \int_0^1 \int_{y_1}^1 \beta(y_1, y_2) \cdot R(y_1, y_2) dy_1 dy_2,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

где функция $R(y_1, y_2)$ имеет вид

$$R(y_1, y_2) = \begin{cases} -2Ay_2(1-a) - Aa^2 + \\ + A - 1, & \text{если } y_1 \leq y_2 < a, \\ Ay_2^2 - 2Ay_2 + \\ + A - 1, & \text{если } y_1 < a \leq y_2, \\ A(y_2^2 - y_1^2) - 2Ay_2 + \\ + Aa^2 + A - 1, & \text{если } a \leq y_1 \leq y_2. \end{cases} \quad (4.2)$$

В (4.1) первое слагаемое не зависит от $\beta(y_1, y_2)$. Отсюда следует, что оптимальная стратегия второго игрока, которая минимизирует выигрыш $H(\alpha^*, \beta)$, должна быть следующего вида:

$$\beta^*(y_1, y_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } R(y_1, y_2) < 0, \\ 0, & \text{если } R(y_1, y_2) > 0, \\ \text{произвольная} \\ \text{с значениями в } [0, 1], & \text{если } R(y_1, y_2) = 0. \end{cases}$$

Из (4.2) следует, что функция $R(y_1, y_2)$ в области $y_1 \leq y_2 < a$ и $y_1 < a \leq y_2$ зависит только от y_2 . Кроме того, функция $R(y_1, y_2)$ на этом множестве убывает и равна нулю в точке $y_2 = a$ в силу выбора a . Следовательно, первая строка в (4.2) всегда положительна, а вторая — неположительна.

Выражение в третьей строке неположительно в области $a \leq y_1 \leq y_2$, так как $R(y_1, y_2)$ убывает по обоим переменным y_2 и y_1 и, следовательно, достигает своего максимума при $y_2 = a$, $y_1 = a$, при этом максимальное значение равно $R(a, a) = Aa^2 - 2Aa + A - 1 = 0$ при $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{A}}$.

Таким образом, $R(y_1, y_2) > 0$ для $y_2 < a$ и $R(y_1, y_2) \leq 0$ для $y_2 \geq a$.

Отсюда наилучшей стратегией второго игрока является $\beta^*(y_1, y_2) = I_{\{y_2 \geq a\}}$, где $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{A}}$.

Из симметрии задачи следует, что наилучшей стратегией первого игрока против стратегии $\beta^*(y_1, y_2) = I_{\{y_2 \geq a\}}$ будет стратегия $\alpha^*(x_1, x_2) = I_{\{x_2 \geq a\}}$.

Отсюда $\max_{\alpha} V(\alpha, \beta^*) = \min_{\beta} V(\alpha^*, \beta)$, откуда немедленно вытекает, что стратегии α^*, β^* образуют равновесие в игре.

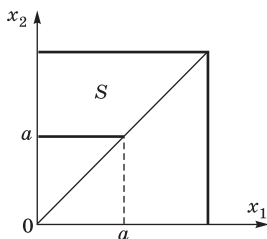


Рис. 5.13
Пороговая стратегия $\alpha^*(x_1, x_2)$

5.4.2. Модель предпочтита, где игроки ходят по очереди

Давайте предположим, что игроки объявляют свои решения по очереди.

Игрок	карты	ход 1	ход 2	платеж
I	x_1, x_2	вист		
		пас		
II	y_1, y_2		вист	$A[I_{\{x_1 > y_2\}} - I_{\{y_1 > x_2\}}]$
			пас	1
			вист	-1

В начале игры игроки кладут по единице в банк. Первый игрок начинает. Он может выбрать одну из двух альтернатив: либо пасовать, либо сыграть на повышение. В последнем случае ход переходит ко второму игроку, который имеет те же альтернативы: либо спасовать и игра заканчивается, либо поддержать ставку. Тогда игроки вскрывают свои карты. Если младшая карта одного из игроков больше наибольшей карты противника, этот игрок выигрывает некую стоимость $A > 1$. В противном случае объявляется ничья.

Функция выигрыша первого игрока в этом варианте игры примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 H(\alpha, \beta) = & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \{-\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + A\alpha\beta[I_{\{x_1 > y_2\}} - \\
 & - I_{\{y_1 > x_2\}}]\} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 = 2 \int_0^1 \int_0^1 \alpha(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - 1 - \\
 & - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \alpha(x_1, x_2) \beta(y_1, y_2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 + \\
 & + 4A \int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_0^1 \int_{y_1}^1 \alpha(x_1, x_2) \beta(y_1, y_2) [I_{\{x_1 > y_2\}} - \\
 & - I_{\{y_1 > x_2\}}] dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 = 4 \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 \alpha(x_1, x_2) dx_2 - 1 + \\
 & + 2 \int_0^1 \int_{x_1}^1 \alpha(x_1, x_2) [2A \int_0^{x_1} dy_1 \int_{y_1}^{x_1} \beta(y_1, y_2) dy_2 - \\
 & - 2A \int_{x_2}^1 dy_1 \int_{y_1}^1 \beta(y_1, y_2) dy_2 - 2 \int_0^1 dy_1 \int_{y_1}^1 \beta(y_1, y_2) dy_2] dx_1 dx_2.
 \end{aligned}$$

Упрощая, приходим к выражению

$$\begin{aligned}
 H(\alpha, \beta) = & 4 \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 \alpha(x_1, x_2) dx_2 - 1 + \\
 & + 2 \int_0^1 \int_{y_1}^1 \beta(y_1, y_2) [2A \int_{y_2}^1 dx_1 \int_{x_1}^1 \alpha(x_1, x_2) dx_2 - \\
 & - 2A \int_0^{y_1} dx_1 \int_{x_1}^{y_1} \alpha(x_1, x_2) dx_2 - 2 \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 \alpha(x_1, x_2) dx_2] dy_1 dy_2.
 \end{aligned}$$

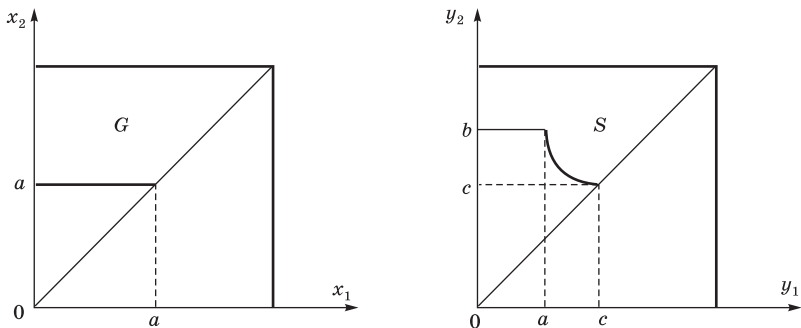


Рис. 5.14
Стратегии игроков I и II

Предположим, что первый игрок использует стратегию $\alpha^*(x_1, x_2) = I_{\{x_2 \geq a\}}$ с некоторым порогом a , для которого

$$a \leq \frac{A-1}{A+1}, \quad (4.3)$$

и найдем наилучший ответ второго игрока. Перепишем функцию выигрыша $H(\alpha, \beta)$ в виде

$$H(\alpha^*, \beta) = 4 \int_0^1 \int_{x_1}^1 \alpha^*(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - 1 + \\ + 2 \int_0^1 \int_{y_1}^1 \beta(y_1, y_2) \cdot R(y_1, y_2) dy_1 dy_2,$$

где функция $R(y_1, y_2)$ имеет вид

$$R(y_1, y_2) = \begin{cases} -2Ay_2(1-a) + (A-1)(1-a^2), & \text{если } y_1 \leq y_2 \leq a, \\ A(1-y_2)^2 - (1-a^2), & \text{если } y_1 \leq a < y_2, \\ A[(1-y_2)^2 - (y_1^2 - a^2)] - (1-a^2), & \text{если } a < y_1 \leq y_2. \end{cases}$$

Рассуждая, как и выше, находим, что оптимальная стратегия β^* зависит только от знака функции $R(y_1, y_2)$.

Заметим, что функция $R(y_1, y_2)$ на множестве $y_1 \leq y_2 \leq a$ зависит только от $y_2 \in [0, a]$. Следовательно, для фиксированного y_1 $R(y_1, y_2)$ убывает на этом интервале и $R(y_1, 0) > 0$. В силу выбора

а (4.3) $R(y_1, a) = A(1 - a)^2 - (1 - a^2) \geq 0$ и, следовательно, в области $y_1 \leq y_2 \leq a$ функция $R(y_1, y_2)$ неотрицательна. Это означает, что наилучшей стратегией второго игрока в данной области является $\beta(y_1, y_2) = 0$.

На множестве $y_1 \leq a < y_2$ функция $R(y_1, y_2) = A(1 - y_2)^2 - (1 - a^2)$ зависит только от y_2 и является непрерывной убывающей функцией, причем $R(y_1, y_2 = a) = A(1 - a)^2 - (1 - a^2) \geq 0$ и $R(y_1, y_2 = 1) = -(1 - a^2) < 0$. Следовательно, найдется такая точка $b \in [a, 1)$, что $R(y_1, b) = 0$. b является корнем уравнения $A(1 - b)^2 = 1 - a^2$, откуда

$$b = 1 - \sqrt{\frac{1 - a^2}{A}}. \quad (4.4)$$

Отсюда в области $y_1 \leq a < y_2$ наилучшая стратегия второго игрока $\beta^*(y_1, y_2)$ имеет вид $\beta^*(y_1, y_2) = I_{\{y_2 \geq b\}}$, где b удовлетворяет (4.4).

Разобьем область $a < y_1 \leq y_2$ на два подмножества: $\{a < y_1 \leq c, y_1 \leq y_2\}$ и $\{c < y_1 \leq y_2\}$, где $c = a^2 \frac{A+1}{2A} + \frac{A-1}{2A}$. Очевидно, что $a \leq c \leq b$, где $a \in \left[0, \frac{A-1}{A+1}\right]$.

Рассмотрим уравнение $R(y_1, y_2) = 0$ в области $\{a < y_1 \leq c, y_1 \leq y_2\}$. Его можно переписать в следующем виде:

$$y_1 = f(y_2) = \sqrt{y_2^2 - 2y_2 + a^2 \frac{A+1}{A} + \frac{A-1}{A}}. \quad (4.5)$$

Мы видим, что функция $f(y_2)$ является непрерывной и убывающей на интервале $y_2 \in [c, b]$, кроме того, $f(c) = c$ и $f(b) = a$.

Таким образом, оптимальная стратегия второго игрока в области $\{a < y_1 \leq c, y_1 \leq y_2\}$ такова, что $\beta^*(y_1, y_2) = 1$ для $y_1 \geq f(y_2)$ и $\beta^*(y_1, y_2) = 0$ для $y_1 < f(y_2)$.

На множестве $\{c < y_1 \leq y_2\}$ $R(y_1, y_2) < 0$ и, следовательно, наилучший ответ — это $\beta^*(y_1, y_2) = 1$.

Все эти рассуждения приводят к выводу, что оптимальная стратегия второго игрока имеет вид $\beta^*(y_1, y_2) = I_{\{(y_1, y_2) \in \mathcal{S}\}}$, где \mathcal{S} имеет вид, как на рис. 5.14. Напомним, что граница области \mathcal{S} на множестве $[a, c] \times [c, b]$ определена уравнением (4.5).

Параметры a , b , c , входящие в определение этой области, удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} 0 \leq a \leq c \leq b \leq \frac{A-1}{A+1}, \\ c = a^2 \frac{A+1}{2A} + \frac{A-1}{2A}, \\ b = 1 - \sqrt{\frac{1-a^2}{A}}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Предположим теперь, что второй игрок использует стратегию вида $\beta^*(y_1, y_2) = I_{\{(y_1, y_2) \in \mathcal{S}\}}$, где область \mathcal{S} имеет вид, представленный выше, с параметрами a , b и c . В соответствии с определением выигрыш первого игрока примет вид

$$H(\alpha, \beta^*) = 2 \int_0^1 \int_{x_1}^1 \alpha(x_1, x_2) G(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - 1,$$

где функция

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) = & 2A \int_0^{x_1} dy_1 \int_{y_1}^{x_1} \beta(y_1, y_2) dy_2 - \\ & - 2A \int_{x_2}^1 dy_1 \int_{y_1}^1 \beta(y_1, y_2) dy_2 - 2 \int_0^1 dy_1 \int_{y_1}^1 \beta(y_1, y_2) dy_2 + 2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из (4.7) следует, что функция $G(x_1, x_2)$ не убывает по обоим аргументам и на множестве $x_1 \leq x_2 \leq a$ зависит только от аргумента x_2 :

$$G(x_1, x_2) = 2Ax_2(1-b) - 2AS + 2(1-S), \quad (4.8)$$

где $S = \int_0^1 \int_{y_1}^1 \beta^*(y_1, y_2) dy_1 dy_2$ есть площадь области \mathcal{S} .

Площадь \mathcal{S} можно представить в виде

$$S = \frac{1-b^2}{2} + \int_c^b \left(y_2 - \sqrt{y_2^2 - 2y_2 + a^2 \frac{A+1}{A} + \frac{A-1}{A}} \right) dy_2. \quad (4.9)$$

В силу условий на a, b, c

$$2c = a^2 \frac{A+1}{A} + \frac{A-1}{A} \quad \text{и} \quad b^2 - 2b + 2c = a^2.$$

Вместе с этими соотношениями S примет вид

$$S = \frac{1-c}{2} + a \frac{1-b}{2} + \frac{2c-1}{2} \ln \left| \frac{2c-1}{a+b-1} \right|.$$

Выберем a в виде

$$a = \frac{S}{1-b} - \frac{1-S}{A(1-b)}. \quad (4.10)$$

В этом случае функция $G(x_1, x_2)$ вида (4.8) будет отрицательной в области $x_1 \leq x_2 \leq a$, а на ее границе $x_2 = a$ будет $G(x_1, a) = 0$.

Ранее мы уже отмечали, что функция $G(x_1, x_2)$ не убывает по обоим аргументам и, следовательно, неотрицательна в оставшейся области $x_2 > a$. Отсюда немедленно вытекает, что наилучшая стратегия первого игрока α^* , которая максимизирует выигрыш $H(\alpha, \beta^*)$, имеет вид $\alpha^* = I_{\{x_2 \geq a\}}$.

Остается доказать существование решения системы условий (4.6) и (4.10). Ранее мы показали, что любому $a \in \left[0, \frac{A-1}{A+1}\right]$ однозначно соответствуют b, c и S , удовлетворяющие (4.6) и (4.9). Давайте докажем, что найдется такое a^* , при котором (4.10) выполнено.

Введем в рассмотрение функцию $\Delta(a) = \Delta(a, b(a), c(a)) = \frac{S}{1-b} - \frac{1-S}{A(1-b)} - a$. Уравнение $\Delta(a) = 0$ имеет решение a^* , поскольку $\Delta(a)$

непрерывна и на концах интервала $\left[0, \frac{A-1}{A+1}\right]$ принимает значения с разными знаками.

Действительно, $\Delta(a=0) = \frac{(A-1)^2 + (A+1) \ln A}{4A\sqrt{A}} \geq 0$ при $A \geq 1$, так как эта функция возрастает по A и равна нулю при $A = 1$. Также $\Delta\left(a = \frac{A-1}{A+1}\right) = -\frac{(A-1)^2}{2A(A+1)} < 0$.

Полученное решение сформулируем в виде утверждения.

Теорема 5.2. *Оптимальное решение игры с функцией выигрыша $H(\alpha, \beta)$ имеет вид:*

$$\alpha^*(x_1, x_2) = I_{\{x_2 \geq a^*\}}, \beta^*(y_1, y_2) = I_{\{(y_1, y_2) \in S\}},$$

где a, b, c, S определены системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{1-b} - \frac{1-S}{A(1-b)} - a = 0, \\ S = \frac{1-c}{2} + a\frac{1-b}{2} + \frac{2c-1}{2} \ln \left| \frac{2c-1}{a+b-1} \right|, \\ c = a^2 \frac{A+1}{2A} + \frac{A-1}{2A}, \\ b = 1 - \sqrt{\frac{1-a^2}{A}} \end{array} \right.$$

и множество S имеет вид, описанный выше.

Значения параметров оптимальных стратегий для различных случаев приведены в таблице 5.3. Мы видим, что значение игры отрицательно. Несправедливость игры для первого игрока объясняется тем, что он ходит первым и дает некоторую существенную информацию второму игроку, который может это использовать в своей оптимальной игре.

$$\begin{aligned} H(\alpha^*, \beta^*) &= -1 + 4 \int_0^1 \int_{x_1}^1 \alpha^*(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\ &+ 2 \int_0^1 \int_{y_1}^1 \beta^*(y_1, y_2) R(y_1, y_2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 = \\ &= 1 - 2a^2 + \frac{4}{3} Aa^3(b-c) + 2 \left\{ a \int_c^1 [A(1-y)^2 - (1-a^2)] dy + \right. \\ &+ \frac{A}{3} \int_c^b (y^2 - 2y + 2c)^{3/2} dy + \int_c^1 dy_2 \int_a^{y_2} [A(1-y_2)^2 - A(y_1^2 - a^2) - (1-a^2)] dy_1 - \\ &\quad \left. - \int_c^b \sqrt{y^2 - 2y + 2c} [A(1-y)^2 + Aa^2 - (1-a^2)] dy \right\}. \end{aligned}$$

Замечание 5.1. В симметричной модели с двумя картами оптимальные стратегии обоих игроков таковы, что нужно играть на повышение

Таблица 5.3
Оптимальные стратегии и выигрыши

A	a	b	c	S	$H(\alpha^*, \beta^*)$
1.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000	0.0000
2.00	0.2569	0.3166	0.2995	0.4503	-0.0070
3.00	0.3604	0.4614	0.4199	0.3956	-0.0302
4.00	0.4248	0.5473	0.4878	0.3538	-0.0590
5.00	0.4711	0.6055	0.5331	0.3215	-0.0883
6.00	0.5069	0.6481	0.5665	0.2957	-0.1163
7.00	0.5359	0.6809	0.5927	0.2746	-0.1424
8.00	0.5600	0.7071	0.6139	0.2569	-0.1667
9.00	0.5806	0.7286	0.6317	0.2418	-0.1892
10.00	0.5984	0.7466	0.6469	0.2287	-0.2100
100.00	0.8600	0.9489	0.8685	0.0533	-0.6572
1000.00	0.9552	0.9906	0.9561	0.0099	-0.8833

только при существовании достаточно большой карты. Другая карта может быть очень маленькой. В модели, где игроки ходят по очереди, как мы видим из вида области S , оптимальная стратегия предписывает второму игроку играть на повышение, если одна из его карт достаточно большая, а также в некоторых случаях, когда обе карты не очень большие.

§ 5.5. ДВАДЦАТЬ ОДНО. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ

В «двадцать одно» играют два игрока. Каждому игроку из колоды 36 карт последовательно одна за другой выдаются карты. Каждая карта имеет некоторое численное значение, валет — 2, дама — 3, король — 4, туз — 11, остальным картам предписано то значение, которое на них написано. Игроки выбирают какое-то число карт и подсчитывают сумму значений выбранных карт. После этого карты вскрываются и выигрывает тот игрок, который набрал большую сумму значений карт, но при этом не превысив порог 21. Если же сумма карт одного из игроков больше 21, а у его противника меньше этого значения, выигрывает второй игрок. В остальных случаях объявляется ничья. «Двадцать од-

но» — популярная игра в игорных домах. Обычной стратегией, которую используют крупные, это выбирать карты до тех пор, пока сумма значений не превысит 17, и затем останавливаться.

5.5.1. Стратегии и функция выигрыша

В качестве теоретико-игровой модели можно предложить следующую конструкцию. Предположим, что каждый из игроков наблюдает за суммой независимых одинаково распределенных случайных величин

$$s_n^{(k)} = \sum_{i=1}^n x_i^{(k)}, \quad k = 1, 2.$$

Предположим для простоты, что карты $\{x_i^{(k)}\}, i = 1, 2, \dots$ равномерно распределены на интервале $[0, 1]$. Критический порог, через который нельзя перескакивать, примем равным единице.

Предположим, что какой-то игрок использует пороговую стратегию $u, 0 < u < 1$, т. е. останавливает свой выбор как только сумма его карт s_n превысит u . Обозначим момент остановки τ . Таким образом,

$$\tau = \min\{n \geq 1 : s_n \geq u\}.$$

Чтобы выписать функцию выигрыша в игре, нужно найти распределение остановленной суммы s_τ .

Представим $u \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} P\{s_\tau \leq x\} &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{s_n \leq x, \tau = n\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{s_1 < u, \dots, s_{n-1} < u, s_n \in [u, x]\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$P\{s_\tau \leq x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} (x-u) = \exp(u)(x-u). \quad (5.1)$$

Отсюда вероятность обрыва равна

$$P\{s_\tau > 1\} = 1 - P\{s_\tau \leq 1\} = 1 - \exp(u)(1-u). \quad (5.2)$$

Теперь мы можем перейти к построению равновесия в игре. Предположим, что второй игрок использует пороговую стратегию u . Найдем наилучший отклик первого игрока.

Обозначим текущее значение суммы первого игрока $s_n^{(1)} = x$. Если $x \leq u$, то ожидаемый выигрыш первого игрока при остановке наблюдений равен

$$h(x|u) = +P\{s_{\tau_2}^{(2)} > 1\} - P\{s_{\tau_2}^{(2)} \leq 1\} = 2P\{s_{\tau_2}^{(2)} > 1\} - 1.$$

Если же $x > u$, то ожидаемый выигрыш равен

$$\begin{aligned} h(x|u) &= +P\{s_{\tau_2}^{(2)} < x\} + P\{s_{\tau_2}^{(2)} > 1\} - P\{x < s_{\tau_2}^{(2)} \leq 1\} = \\ &= 2 \left[P\{s_{\tau_2}^{(2)} < x\} + P\{s_{\tau_2}^{(2)} > 1\} \right] - 1. \end{aligned}$$

С учетом (5.1), (5.2) получаем, что выигрыш при остановке в состоянии x равен

$$h(x|u) = 2 [\exp(u)(x - u) + 1 - \exp(u)(1 - u)] - 1 = 1 - 2 \exp(u)(1 - x).$$

Если же первый игрок продолжит выбор и остановится на следующем шаге, получив некоторую карту y , то его выигрыш составит величину $1 - 2 \exp(u)(1 - x - y)$, если $x + y \leq 1$ и $-P\{s_{\tau_2}^{(2)} \leq 1\} = -\exp(u)(1 - u)$, если $x + y > 1$. Следовательно, ожидаемый выигрыш при продолжении равен

$$Ph(x|u) = \int_0^{1-x} (1 - 2 \exp(u)(1 - x - y)) dy - \int_{1-x}^1 \exp(u)(1 - u) dy.$$

После упрощений

$$Ph(x|u) = 1 - x - \exp(u) (1 - x(1 + u) + x^2).$$

Очевидно, что функция $h(x|u)$ при $x \geq u$ монотонно возрастает по x , в то время как $Ph(x|u)$ монотонно убывает. Последнее следует из отрицательности производной

$$\frac{dPh(x|u)}{dx} = -1 + \exp(u)(1 + u - 2x),$$

поскольку для $u > 0$ и $x \geq u$ имеет место

$$\exp(-u) > 1 - u \geq 1 + u - 2x.$$

Таким образом, зная стратегию u второго игрока, первый игрок может найти наилучший ответ, сравнивая выигрыш при остановке и

продолжении выбора. Оптимальный порог x_u определяется из уравнения

$$h(x|u) = Ph(x|u)$$

или

$$1 - 2 \exp(u)(1 - x) = 1 - x - \exp(u) (1 - x(1 + u) + x^2).$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$x = \exp(u) (1 - x(1 - u) - x^2). \quad (5.3)$$

При этом в силу монотонности функций $h(x|u)$ и $Ph(x|u)$, если такой порог существует, то он единственный.

Из симметрии игры следует, что равновесие должно состоять из идентичных стратегий. Поэтому положим $x_u = u$. Из уравнения (5.3) находим, что такая стратегия должна удовлетворять уравнению

$$\exp(u) = \frac{u}{1 - u}. \quad (5.4)$$

Решение уравнения (5.4) существует и равно $u^* \approx 0.659$.

Итак, оптимальное поведение обоих игроков следующее. Они выбирают карты до тех пор, пока полученная сумма не превысит порогового значения $u^* \approx 0.659$. После этого останавливаются и вскрывают карты. При этом вероятность перескока через критический порог равна

$$P\{s_\tau > 1\} = 1 - \exp(u)(1 - u) = 1 - u \approx 0.341.$$

Замечание 5.2. Чтобы найти оптимальную стратегию игрока, мы сравнивали выигрыш при остановке с выигрышем при продолжении выбора еще на один шаг. Хотя нужно было сравнивать с выигрышем при продолжении на какое угодно количество шагов. В главе 9 мы рассмотрим общий случай игр с оптимальной остановкой, где покажем, что в монотонном случае, когда выигрыш при остановке не убывает, а выигрыш при продолжении на один шаг не возрастает, достаточно ограничиться именно данными функциями выигрыша.

§ 5.6. ФУТБОЛ. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Представьте тренеров двух команд I и II, которые должны распределить своих игроков на футбольном поле. В реальной игре их всего 11 персон с каждой стороны. Предположим, что ворота игрока I расположены справа, а игрока II — слева на футбольном поле. Разобьем

футбольное поле на n секторов и предположим для удобства, что n нечетно. Игра начинается с середины поля из сектора $m = (n + 1)/2$ и продолжается до тех пор, пока мяч не пересечет либо правую кромку поля (игрок I выиграл), либо левую кромку поля (игрок II выиграл).

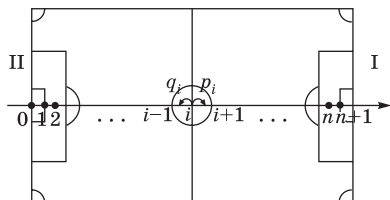


Рис. 5.15

Случайные блуждания на футбольном поле

Представим движение мяча как случайное блуждание на множестве состояний $\{0, 1, \dots, n, n+1\}$, где 0 и $n+1$ поглощающие состояния (см. рис. 5.15). Предположим, что с каждым состоянием $i \in \{1, \dots, n\}$ связаны вероятности p_i и $q_i = 1 - p_i$ перехода соответственно вправо в состояние $i+1$ и влево в состояние $i-1$. Данные вероятности зависят от соотношения игроков в данном секторе. Естественно предположить, что чем больше игроков команды I в секторе i , тем больше вероятность движения мяча влево. Если обозначить число игроков команды I в секторе i как x_i , а число игроков команды II как y_i , то будем считать вероятность p_i как некоторую невозрастающую дифференцируемую функцию $g(x_i/y_i)$, удовлетворяющую условию $g(1) = 1/2$. Последнее означает, что если ресурсы игроков в данном секторе равны, то случайное блуждание является симметричным. Например, g может иметь вид $g(x_i/y_i) = y_i/(x_i + y_i)$. Заметим, что здесь, в отличие от классического случайного блуждания, вероятности перехода зависят от состояния и от стратегий игроков.

Обозначим через π_i вероятность выигрыша игрока I при условии, что мяч находится в секторе i . С вероятностью q_i мяч сдвинется либо влево, где игрок I выиграет с вероятностью π_{i-1} , либо вправо, где игрок I выиграет с вероятностью π_{i+1} . Запишем систему уравнений Колмогорова для вероятностей $\{\pi_i\}$, $i = 0, \dots, n+1$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= q_1 + p_1 \pi_2, \\ \pi_i &= q_i \pi_{i-1} + p_i \pi_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \pi_n &= q_n \pi_{n-1}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

В первом и последнем уравнениях учтено, что $\pi_0 = 1, \pi_{n+1} = 0$. Положим $s_i = q_i/p_i, i = 1, \dots, n$. Тогда систему (6.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \pi_1 - \pi_2 &= s_1(1 - x_1), \\ \pi_i - \pi_{i+1} &= s_i(\pi_{i-1} - \pi_i), \quad i = 1, \dots, n, \\ \pi_n &= s_n(\pi_{n-1} - \pi_n). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Обозначая теперь $c_i = s_1 \dots s_i, i = 1, \dots, n$, из (6.2) находим $\pi_n = c_n(1 - \pi_1)$ и $\pi_i - \pi_{i+1} = c_i(1 - \pi_i)$ для $i = 1, \dots, n-1$. Складывая эти соотношения, получим

$$\pi_1 = (c_1 + \dots + c_n)(1 - \pi_1),$$

откуда находим $\pi_1 = (c_1 + \dots + c_n)/(1 + c_1 + \dots + c_n)$ и остальные π_i :

$$\pi_i = \frac{c_i + c_{i+1} + \dots + c_n}{1 + c_1 + \dots + c_n}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.3)$$

Таким образом, если распределение игроков по секторам известно, мы можем вычислить величины

$$c_i = \prod_{j=1}^i \frac{1 - g(x_j/y_j)}{g(x_j/y_j)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.4)$$

и затем найти шансы команд π_i для каждой ситуации i . Для удобства будем считать ресурсы игроков равными единице и бесконечно делимыми. Итак, стратегия игрока I — это распределение ресурса по секторам $x = (x_1, \dots, x_n), x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$, где $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, и стратегия

игрока II — это вектор $y = (y_1, \dots, y_n), y_j \geq 0, j = 1, \dots, n$, где $\sum_{j=1}^n y_j = 1$.

Игрок I заинтересован максимизировать π_m , в то время как игрок II заинтересован минимизировать эту вероятность.

Чтобы найти равновесие в этой антагонистической игре, составим функцию Лагранжа

$$L(x, y) = \pi_m + \lambda_1(x_1 + \dots + x_n - 1) + \lambda_2(y_1 + \dots + y_n - 1),$$

и найдем оптимальные стратегии (x^*, y^*) из условия $\partial L / \partial x = 0, \partial L / \partial y = 0$.

Находим

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \pi_m}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial x_k} + \lambda_1.$$

Согласно (6.4)

$$\frac{\partial c_j}{\partial x_k} = 0, \quad \text{для } k > j,$$

следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \sum_{j=k}^n \frac{\partial \pi_m}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial x_k} + \lambda_1. \quad (6.5)$$

Для $j \geq k$ находим

$$\frac{\partial c_j}{\partial x_k} = -\frac{g'(\frac{x_k}{y_k})}{y_k g(\frac{x_k}{y_k})(1 - g(\frac{x_k}{y_k}))} c_j = -\alpha_k c_j, \quad j = k, \dots, n. \quad (6.6)$$

Теперь из (6.5) и (6.6) следует, что при $k \geq m$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_k} &= \sum_{j=k}^n \frac{1 + c_1 + \dots + c_{m-1}}{(1 + c_1 + \dots + c_n)^2} (-\alpha_k c_j) + \lambda_1 = \\ &= -\frac{\alpha_k}{(1 + c_1 + \dots + c_n)^2} (1 + c_1 + \dots + c_{m-1})(c_k + \dots + c_n) + \lambda_1. \end{aligned} \quad (6.7)$$

При $k < m$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_k} &= \sum_{j=k}^{m-1} \frac{-(c_m + \dots + c_n)}{(1 + c_1 + \dots + c_n)^2} (-\alpha_k c_j) + \\ &+ \sum_{j=m}^n \frac{1 + c_1 + \dots + c_{m-1}}{(1 + c_1 + \dots + c_n)^2} (-\alpha_k c_j) + \lambda_1 = \\ &= -\frac{\alpha_k}{(1 + c_1 + \dots + c_n)^2} (1 + c_1 + \dots + c_{k-1})(c_m + \dots + c_n) + \lambda_1. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Выражения (6.7) и (6.8) можно записать в виде одного выражения

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = -\frac{\alpha_k}{(1 + c_1 + \dots + c_n)^2} (1 + c_1 + \dots + c_{m \vee k - 1})(c_{m \vee k} + \dots + c_n) + \lambda_1, \quad (6.9)$$

где $i \vee j = \min\{i, j\}$ и $i \wedge j = \max\{i, j\}$.

Аналогичные выражения получаются для $\partial L / \partial y_k, k = 1, \dots, n$. Вначале находим

$$\frac{\partial c_j}{\partial y_k} = \begin{cases} 0, & \text{если } j < k, \\ \frac{x_k g'(\frac{x_k}{y_k})}{y_k^2 g(\frac{x_k}{y_k})(1 - g(\frac{x_k}{y_k}))} c_j = \frac{x_k}{y_k} \alpha_k c_j, & \text{если } j \geq k, \end{cases} \quad (6.10)$$

и затем

$$\frac{\partial L}{\partial y_k} = \frac{x_k}{y_k} \frac{\alpha_k}{(1 + c_1 + \dots + c_n)^2} (1 + c_1 + \dots + c_{m \vee k - 1})(c_{m \vee k} + \dots + c_n) + \lambda_2. \quad (6.11)$$

Теперь переходим к нахождению стационарной точки функции $L(x, y)$. Условие $\partial L / \partial x_1 = 0$ вместе с (6.9) при $k = 1$ приводит к уравнению

$$\lambda_1 = \alpha_1 \frac{c_m + \dots + c_n}{(1 + c_1 + \dots + c_n)^2}.$$

Соответственно условие $\partial L / \partial y_1 = 0$ вместе с (6.11) приводит к уравнению

$$\lambda_2 = \frac{x_1}{y_1} \lambda_1.$$

Для $k \geq 2$ из условий $\partial L / \partial x_k = 0, \partial L / \partial y_k = 0$ следует, что при $k > m$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \alpha_k(1 + c_1 + \dots + c_{m-1})(c_k + \dots + c_n) &= \alpha_1(c_m + \dots + c_n), \\ \frac{x_k}{y_k} \alpha_k(1 + c_1 + \dots + c_{m-1})(c_k + \dots + c_n) &= \frac{x_1}{y_1} \alpha_1(c_m + \dots + c_n). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Для $k \leq m$ получаются соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_k(1 + c_1 + \dots + c_{k-1}) &= \alpha_1, \\ \frac{x_k}{y_k} \alpha_k(1 + c_1 + \dots + c_{m-1}) &= \frac{x_1}{y_1} \alpha_1. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Из (6.12)–(6.13) вытекает

$$\frac{x_k}{x_1} = \frac{y_k}{y_1}, \quad \text{для всех } k = 1, \dots, n.$$

Суммируя эти соотношения и учитывая $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k = 1$, получаем $x_1 = y_1$ и, следовательно,

$$x_k = y_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Итак, в равновесии распределение ресурсов обоих игроков должно быть одинаковым.

Для одинаковых ресурсов согласно условию $g(1) = 1/2$ и определению (6.4) находим

$$c_1 = \dots = c_n = 1.$$

Из (6.12)-(6.13) вытекает

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{k}\alpha_1 & \text{для } k \leq m, \\ \frac{n-m+1}{m(n-k+1)}\alpha_1 & \text{для } k > m, \end{cases}$$

Из (6.6) следует, что в равновесии $\alpha_k = 4g'(1)/y_k$, следовательно, $y_k = y_1\alpha_1/\alpha_k$. Отсюда

$$x_k = y_k = \begin{cases} ky_1 & \text{для } k \leq m, \\ \frac{m(n-k+1)}{n-m+1}y_1 & \text{для } k > m. \end{cases}$$

Просуммируем все y_k по $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m ky_1 + \sum_{k=m+1}^n \frac{m(n-k+1)}{n-m+1}y_1 &= y_1 \left(\sum_{k=1}^m k + \frac{m}{n-m+1} \sum_{k=1}^{n-m} k \right) = \\ &= y_1 \left(\frac{m(m+1)}{2} + \frac{m}{n-m+1} \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} \right) = y_1 \frac{m(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Учитывая $\sum_{k=1}^n y_k = 1$, находим $y_1 = \frac{2}{m(n+1)}$.

Таким образом,

$$x_k = y_k = \begin{cases} \frac{2k}{m(n+1)} & \text{для } k \leq m, \\ \frac{2(n-k+1)}{(n+1)(n-m+1)} & \text{для } k > m. \end{cases}$$

Игра начинается с середины поля, поэтому $m = (n+1)/2$. Окончательно находим оптимальное распределение игроков на поле

$$x_k = y_k = \begin{cases} \frac{4k}{(n+1)^2} & \text{для } k \leq (n+1)/2, \\ \frac{4(n-k+1)}{(n+1)^2} & \text{для } k > (n+1)/2. \end{cases} \quad (6.14)$$

Замечание 5.3. Мы видим, что оптимальное распределение игроков имеет треугольный вид. При этом, игроки так должны быть распределены на поле, чтобы мяч описывал симметричное случайное блуждание. Если предположить, что футбольное поле разбито на 3 сектора: защита, середина, нападение, то согласно (6.14) оптимальное распределение должно быть таким: $x^* = y^* = (1/4, 1/2, 1/4)$, т. е. в центре должно быть сосредоточено 50% ресурсов и равные количества в нападении и защите. Для реального футбола с 11 игроками равновесное распределение достигается при распределении игроков в виде (3, 6, 2) или (3, 5, 3).

Задачи и упражнения

1. Покер двух лиц.

В начале игры игроки I и II кладут по единице в банк и получают карты x и y . После этого они имеют две стратегии: пасовать или играть. Во втором случае игрок должен положить в банк еще c единиц, $c > 0$. В развернутой форме игра имеет вид:

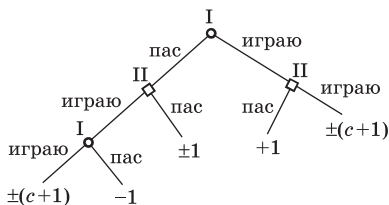


Рис. 5.16

Выигрывает игрок, у которого карта больше. Найти оптимальные стратегии поведения и значение игры.

2. Покер с повышением ставок.

В начале игры игроки I и II кладут по единице в банк и получают карты x и y . Игроки имеют три стратегии: пас, играю, повышаю. Во втором и третьем случае они добавляют в банк еще c и d единиц, $c, d > 0$. В развернутой форме игра имеет вид:

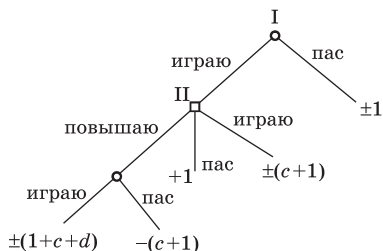


Рис. 5.17

Найти оптимальные стратегии поведения и значение игры.

3. Покер с двумя повышениями ставок.

В начале игры игроки I и II кладут по единице в банк и получают карты x и y . Игроки имеют три стратегии: пас, играю, повышаю. Во втором случае они должны добавить в банк 2 единицы, а в третьем — 6 единиц стоимости. В развернутой форме игра имеет вид:

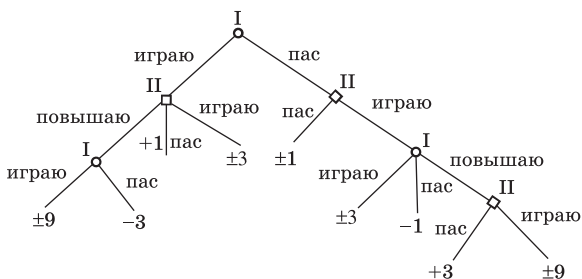


Рис. 5.18

Найти оптимальные стратегии и значение игры.

4. Построить модель покера для трех и более игроков.
5. Предложить модель преферанса двух лиц с тремя картами и розыгрышем карт.
6. Игра с обменом.

Два игрока I и II получают карты x и y , x, y — независимые величины с равномерным распределением на $[0,1]$. Каждый из игроков, посмотрев свою карту, может предложить противнику обмен

картами. Если оба игрока согласны, то они меняются картами, если оба не согласны, то нет. Если только один игрок желает обмена, то он происходит с вероятностью p . Выигрышем игрока является значение карты, оставшейся у него на руках. Найти оптимальные стратегии игроков.

7. Игра с обменом и зависимыми картами.

Игра имеет те же правила, что и в задаче 6, но случайные величины x и y зависимы и имеют совместное распределение

$$f(x, y) = 1 - \gamma(1 - 2x)(1 - 2y), \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

Найти оптимальные стратегии в данной игре.

8. Построить модель предпочтения для трех и более игроков.

9. Игра «двадцать одно».

Два игрока наблюдают за суммами независимых одинаково распределенных случайных величин $S_n^{(1)} = \sum_{i=1}^n x_i^{(1)}$ и $S_n^{(2)} = \sum_{i=1}^n x_i^{(2)}$, где $x_i^{(1)}$ и $x_i^{(2)}$ имеют экспоненциальное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 . Порог, через который нельзя перескакивать, равен $K = 21$. Выигрывает игрок, остановивший наблюдения правее противника, но не набравший значения K . Найти оптимальные стратегии и значение игры.

10. Игра «двадцать одно» с нормальным распределением.

Пусть модель такая же, как в задаче 8, но наблюдения имеют вид $S_n^{(1)} = \sum_{i=1}^n (x_i^{(1)})^+$ и $S_n^{(2)} = \sum_{i=1}^n (x_i^{(2)})^+$, (здесь $a^+ = \max(0, a)$), где $x_i^{(1)}$ и $x_i^{(2)}$ имеют нормальное распределение с различными средними $a_1 = -1$ и $a_2 = 1$ и одинаковым среднеквадратическим отклонением $\sigma = 1$. Найти оптимальные стратегии и значение игры.

МОДЕЛИ ПЕРЕГОВОРОВ

Модели переговоров являются традиционным предметом теории игр. Переговоры окружают нас в реальной жизни. Основные требования к переговорам:

- должны быть определены участники переговоров;
- должна быть определена очередность предложений;
- должны быть определены выигрыши игроков;
- переговоры должны заканчиваться;
- для равных участников выигрыши должны быть равны.

Классической задачей теории переговоров является задача о разделе пирога. Заметим, что название задачи «раздел пирога» достаточно условно и может относиться к любой задаче распределения ресурса.

§ 6.1. РАЗДЕЛ ПИРОГА

Представьте пирог и двух игроков, которые хотят разделить пирог на две равные части (рис. 6.1). Как это сделать, чтобы оба участника были удовлетворены? Решение просто, один из участников разрезает пирог, а второй выбирает. Оба участника удовлетворены. Один уверен, что он разделит пирог на равные части, а второй выбрал понравившийся ему кусок.

Пусть теперь три игрока делят пирог. Решение теперь будет такое (рис. 6.2). Два игрока делят так же как раньше. После этого каждый из них разрезает свою часть на три равные части, приглашает третьего игрока и просит выбрать понравившийся кусок. Все игроки удовлетворены, поскольку все игроки уверены, что получили по крайней мере $1/3$ часть пирога.

В случае n игроков рассуждения можно провести по индукции. Пусть для $n - 1$ игрока задача решена, пирог разделен на $n - 1$ часть и все $n - 1$ игроков удовлетворены. Затем каждый из этих игроков разрезает свой кусок на n частей и приглашает n -го игрока. Тот выбирает

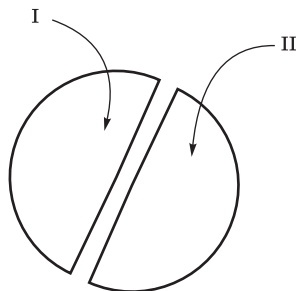


Рис. 6.1

Задача о разделе пирога для двух игроков

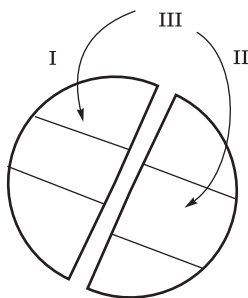


Рис. 6.2

Задача о разделе пирога для трех игроков

понравившийся кусок, и его часть составляет $(n-1) \times \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n}$. Все n игроков удовлетворены.

Эту же задачу можно решить с помощью другой процедуры. Представьте пирог в виде единичного интервала. Ведущий ведет нож, начиная с начала. Как только, кто-то из участников говорит: «стоп», ему достается данный кусок и он выбывает из дележа. Потом ведущий продолжает процедуру с другими участниками. Понятно, что равновесием является точка $1/n$. До этой точки останавливать ведущего невыгодно, а после этой точки тоже, поскольку остальным участникам достанется меньший кусок.

В приведенных примерах игроки были равноправны, поэтому основная задача здесь была соблюсти справедливость процедуры дележа. Однако во многих моделях переговоров игроки неравноправны и могут выдвигать какие-то аргументы в пользу этого.

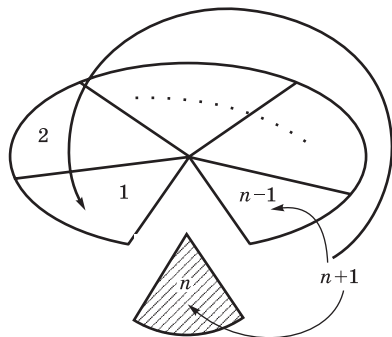


Рис. 6.3

Задача о разделе пирога для n игроков

Рис. 6.4

Задача о разделе пирога для двух игроков

§ 6.2. АРБИТРАЖНОЕ РЕШЕНИЕ НЭША

Существует очень простая схема нахождения решения в переговорах общего вида, которую предложил Дж. Нэш. В этой схеме окончательное решение принимает арбитр, который руководствуется некоторыми правилами. Данные правила удовлетворяют аксиомам, которые характеризуют свойства, которым должно удовлетворять решение задачи. Дадим вначале основные определения.

Рассматривается переговорная задача с $N = \{1, 2, \dots, n\}$ игроками. Обозначим множество допустимых решений как X . Например, в задаче о разделе пирога это будет вектор, соответствующий возможному варианту раздела $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Каждому x соответствуют полезности игроков, которые определяются с помощью функций

$h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x))$. Рассмотрим теперь множество всевозможных выигрышей $H = \{h(x) : x \in X\}$, оно называется **переговорным множеством**. Предположим, что множество H выпуклое компактное множество в R^n . В множестве H задана начальная точка для переговоров $h^0 \in H$, ее еще называют точкой статус-кво. Будем интерпретировать точку статус-кво как выигрыши, которые получают игроки в случае, если не придут к соглашению (рис. 6.5).

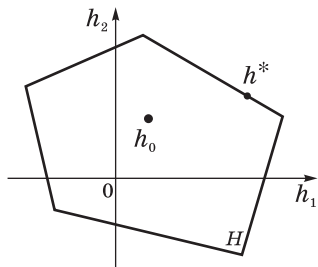


Рис. 6.5

Арбитражное решение Нэша:

H — переговорное множество,

h_0 — точка статус-кво, h^* — решение

Определение 6.1. Тройка $\Gamma = \langle N, H, h^0 \rangle$ называется арбитражной схемой Нэша.

Нас интересует решающее правило, которое каждой арбитражной игре Γ приписывает некоторое решение $h^* \in R^n$. Обозначим его как функцию $h^* = \varphi(H, h^0)$.

Потребуем, чтобы данное решающее правило удовлетворяло следующим аксиомам справедливости.

1. *Реализуемость:*

$$h^* \in H.$$

2. *Индивидуальная рациональность:*

$$h^* \geq h^0.$$

3. *Оптимальность по Парето.* Если $h \in H$ и $h \geq h^*$, то $h = h^*$.

4. *Независимость от посторонних альтернатив.* Если $h^* \in G \subset H$ и $h^* = \varphi(H, h^0)$, то $h^* = \varphi(G, h^0)$.

5. *Линейность.* Пусть сделано линейное преобразование $h' = \alpha h + \beta$ и $h^* = \varphi(H, h^0)$. Тогда $\varphi(H', \alpha h^0 + \beta) = \alpha h^* + \beta$.

6. *Симметрия.* Пусть в h^0 все компоненты равны и множество H симметрично, т.е. если $h \in H$, тогда и любая перестановка $\pi h \in H$. Тогда если $h^* = \varphi(H, h^0)$, то $\pi h^* = h^*$.

Первые три аксиомы понятны. Четвертая означает, что при больших возможностях игроки согласятся на решение h^* и при меньших возможностях тоже. Аксиома линейности утверждает, что при линейных преобразованиях принцип оптимальности сохраняется. Шестая аксиома говорит о равноправии игроков.

Для простоты предположим, что в множестве H существует точка h , у которой все h_i строго больше i -й компоненты точки h^0 . Тогда имеет место теорема.

Теорема 6.1. *Существует единственная функция $\varphi(H, h^0) = h^*$, удовлетворяющая аксиомам 1–6. При этом, эта функция определяется следующим образом:*

$$\varphi(H, h^0) = \{h : \max_{h \in H, h \geq h^0} g(h, H, h^0) = g(h^*, H, h^0)\},$$

где

$$g(h, H, h^0) = \prod_{i=1}^n (h_i - h_i^0).$$

Доказательство. Заметим, что определение функции $\varphi(H, h^0)$ корректно, поскольку функция g непрерывна и определена на компактном множестве H , следовательно, максимум функции g всегда достигается. Более того, этот максимум единственный. Действительно, максимум функции g совпадает с максимумом функции $\log g(h, H, h^0)$, которая строго вогнута, и, следовательно, имеет максимум только в одной точке.

Функция $\varphi(H, h^0)$ удовлетворяет всем шести аксиомам. Действительно, аксиомы 1 и 2 выполняются по построению. Аксиома 3 выполняется, поскольку функция $g(h, H, h^0)$ возрастает по каждому аргументу. Аксиома 4 следует из того, что при расширении области определения функции g ее максимальное значение не уменьшится. Покажем справедливость аксиомы 5. Пусть сделано линейное преобразование и $H' = \alpha H + \beta$. Тогда

$$g(h', H', \alpha h^0 + \beta) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i h_i + \beta_i - \alpha_i h_i^0 - \beta_i) = g(h, H, h^0) \prod_{i=1}^n \alpha_i,$$

откуда следует, что максимум достигается в точке $\alpha h^* + \beta$. Наконец аксиома 6 следует из того, что если у точки h^0 все компоненты одинаковы, то функция $g(h, H, h_0)$ инвариантна относительно перестановки сомножителей и, следовательно, в ее максимальной точке все компоненты одинаковы.

Докажем единственность такой функции. Введем в рассмотрение новую функцию

$$q(h) = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h_i^* - h_i^0},$$

где h^* точка максимума функции $g(h, H, h^0)$. Максимум функции $q(h)$ на множестве H достигается также в точке h^* . Действительно, предположим противное. Тогда найдется точка $h \in H$, в которой $q(h) > q(h^*)$. Возьмем точку на отрезке $[h, h^*]$ вида

$$h' = \epsilon h + (1 - \epsilon)h^* = h^* + \epsilon(h - h^*).$$

В силу выпуклости H $h' \in H$. Теперь находим

$$g(h', H, h^0) = \prod_{i=1}^n (h_i^* - h_i^0 + \epsilon(h_i - h_i^*)).$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$g(h', H, h^0) = g(h^*, H, h^0) + \epsilon g(h^*, H, h^0) q(h - h^*) + o(\epsilon). \quad (2.1)$$

По предположению $q(h) > q(h^*)$. Из линейности функции q следует $q(h - h^*) > 0$. Но тогда из (2.1) следует, что при достаточно малом ϵ имеет место $g(h', H, h^0) > g(h^*, H, h^0)$, что противоречит определению точки h^* . Итак, мы доказали, что

$$q(h) \leq q(h^*), \forall h \in H. \quad (2.2)$$

Теперь рассмотрим множество

$$G = \{h : q(h) \leq q(h^*)\}.$$

В силу (2.2) $H \subset G$. В силу аксиомы 4 решение переговорной задачи на множестве G совпадает с решением на множестве H . Найдем решение переговорной задачи на множестве G . Сделаем линейное преобразование

$$h'_i = \frac{h_i - h_i^0}{h_i^* - h_i^0}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

При таком преобразовании точка h^0 перейдет в 0, а множество G перейдет в множество

$$G' = \{h' : \sum_{i=1}^n h'_i \leq n\}.$$

По аксиоме 6 решение переговорной задачи с симметричным множеством G' и точкой статус-кво 0 должно иметь одинаковые компоненты, что вместе с аксиомой 3 дает

$$h(G', 0) = (1, 1, \dots, 1). \quad (2.4)$$

Наконец, воспользовавшись аксиомой 5, и применяя линейное преобразование (2.3), мы получим

$$h^* = h(H, h^0).$$

Поскольку решение переговорной задачи (2.4) было единственно, отсюда следует единственность решения h^* . Теорема доказана.

Замечание 6.1. Решение арбитражной схемы Нэша имеет простой геометрический смысл. Оно соответствует вершине параллелепипеда наибольшего объема, вписанного в переговорное множество, одной из вершин которого является точка статус-кво.

§ 6.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕГОВОРЫ

Рассмотрим последовательные переговоры двух лиц, связанные с разделом пирога единичного размера. Предположим, что игроки по очереди предлагают друг другу, как разделить пирог, и процесс заканчивается, как только один из них примет предложение другого. При этом предположим, что со временем происходит дисконтирование выигрыша, т. е. на первом шаге размер пирога равен единице, на втором — $\delta < 1$, на третьем — δ^2 и т. д. Чтобы не было неопределенности, пусть на первом шаге и последующих нечетных шагах предложение делает первый игрок, а на четных — второй игрок. Предложение удобно представлять в виде пары (x_1, x_2) , где x_1 — доля пирога для первого игрока, а x_2 — доля второго. Будем искать здесь абсолютное равновесие, т. е. равновесие во всех подыграх данной игры, используя метод обратной индукции.

Начнем анализ со случая трех шагов. Схема переговоров выглядит так.

1. Игрок I делает предложение $(x_1, 1 - x_1)$, где $x_1 \leq 1$. Если игрок II согласен, игра заканчивается, первый игрок получает x_1 , а второй

$1 - x_1$. Если же игрок II не согласен, игра переходит на следующий шаг.

2. Игрок II делает новое предложение $(x_2, 1 - x_2)$, где $x_2 \leq 1$. Если первый игрок принимает предложение, игра заканчивается. Первый игрок получает x_2 , а второй $1 - x_2$. Если же игрок I отвергает предложение, игра переходит на третий шаг.

3. Игра заканчивается и первый игрок получает y , а второй $1 - y$, где $y \leq 1$ — некоторое заданное число. Мы увидим далее, что при большом промежутке переговоров это значение не влияет на оптимальное решение.

Для нахождения абсолютного равновесия воспользуемся методом обратной индукции. Предположим, переговоры находятся на втором шаге и предложение делает игрок II. Он должен сделать такое предложение x_2 первому игроку, чтобы это было выгоднее, чем его выигрыш на шаге 3. С учетом дисконтирования, выигрыш игрока I на последнем шаге равен δy . Таким образом, игрок I согласится с предложением x_2 , если только

$$x_2 \geq \delta y.$$

Но тогда, если игрок II предложит первому игроку $x_2 = \delta y$, ему достанется $1 - \delta y$. Если же он сделает предложение, невыгодное для игрока I, то игра перейдет на шаг 3, и второй игрок получит с учетом дисконтирования $\delta(1 - y)$. Заметим, что $\delta(1 - y) < 1 - \delta y$. Поэтому оптимальное предложение второго игрока $x_2^* = \delta y$.

Теперь предположим, что переговоры находятся на первом шаге и предложение делает первый игрок. Он знает, какое предложение сделает второй игрок на следующем шаге. Поэтому игрок I должен сделать такое предложение игроку II $1 - x_1$, чтобы оно давало тому выигрыш больший или равный, чем дисконтированный выигрыш последнего на втором шаге, т. е. $\delta(1 - x_2^*) = \delta(1 - \delta y)$. Игрок II будет удовлетворен, если $1 - x_1 \geq \delta(1 - \delta y)$ или

$$x_1 \leq 1 - \delta(1 - \delta y).$$

Итак, чтобы предложение было принято, игроку I достаточно сделать предложение $x_1 = 1 - \delta(1 - \delta y)$. Если же он предложит меньше, его ждет дисконтированный выигрыш на втором шаге $\delta x_2^* = \delta^2 y$. Но это меньше, чем $1 - \delta(1 - \delta y)$. Таким образом, оптимальное предложение первого игрока $x_1^* = 1 - \delta(1 - \delta y)$, и оно будет принято вторым игроком. Последовательность $\{x_1^*, x_2^*\}$ является абсолютным равновесием в данной игре переговоров из трех шагов.

Дальше, рассуждая индуктивно, предположим, что абсолютное равновесие в игре переговоров из n шагов таково, что

$$x_1^{(n)} = 1 - \delta + \delta^2 - \dots + (-\delta)^{n-2} + (-\delta)^{n-1}y. \quad (3.1)$$

Рассмотрим теперь первый шаг в игре переговоров, состоящих из $n + 1$ шага. Первый игрок должен предложить второму игроку долю $1 - x_1^{(n+1)}$, большую или равную, чем дисконтированный доход игрока II на следующем шаге. По индукционному предположению этот доход есть $\delta(1 - x_1^{(n)})$. Итак, предложение будет принято игроком II, если

$$1 - x_1^{(n+1)} \geq \delta(1 - \delta + \delta^2 - \dots + (-\delta)^{n-2} + (-\delta)^{n-1}y)$$

или

$$x_1^{(n+1)} = 1 - \delta(1 - \delta + \delta^2 - \dots + (-\delta)^{n-2} + (-\delta)^{n-1}y). \quad (3.2)$$

Выражение (3.2) совпадает с (3.1) для игры с $n + 1$ шагом.

Для больших n последнее слагаемое в (3.1), содержащее y , становится бесконечно малым, а оптимальное предложение первого игрока становится равным $x_1^* = 1/(1 + \delta)$.

Теорема 6.2. *В последовательной игре переговоров двух лиц существует абсолютное равновесие вида*

$$\left(\frac{1}{1 + \delta}, \frac{\delta}{1 + \delta} \right).$$

Можно воспользоваться индукцией и перенести полученные результаты на случай последовательной игры переговоров n лиц. Однако мы найдем абсолютное равновесие другим способом.

Вначале опишем саму схему переговоров n лиц.

1. Игрок I делает предложение каждому из игроков (x_1, x_2, \dots, x_n) , где $x_1 + \dots + x_n = 1$. Если все игроки согласны, игра заканчивается и игрок i получает x_i , $i = 1, \dots, n$. Если кто-то из игроков не согласен, игра переходит на следующий шаг и при этом игрок I становится последним.

2. Игрок II становится лидером и делает новое предложение $(x'_2, x'_3, \dots, x'_n, x'_1)$, где $x'_1 + \dots + x'_n = 1$. Если все игроки принимают предложение, игра заканчивается. Игрок i получает x'_i , $i = 1, \dots, n$. Если же какой-то игрок отвергает предложение, игра переходит на следующий шаг. При этом второй игрок становится последним.

3. Игрок III становится лидером и делает предложение и т. д. Игра может длиться бесконечно долго.

Как и ранее, мы предположим, что на каждом следующем шаге происходит дисконтирование выигрыша на величину δ . Из-за данного дисконтирования игрокам невыгодно торговаться слишком долго. Для нахождения абсолютного равновесия воспользуемся следующими рассуждениями.

На первом шаге предложение делает первый игрок. Он должен предложить второму игроку такую величину x_2 , не меньшую, чем та, какую бы тот сам предложил себе, став бы лидером на следующем шаге. С учетом дисконтирования эта величина равна δx_1 . Таким образом, первый игрок должен предложить второму величину

$$x_2 \geq \delta x_1.$$

Аналогично первый игрок должен предложить третьему игроку величину x_3 , которая должна быть не меньше, чем величина, которую третий игрок предложит самому себе, став лидером на третьем шаге, т. е. $\delta^2 x_1$. Отсюда

$$x_3 \geq \delta^2 x_1.$$

Продолжая рассуждения, мы приходим к выводу, что предложение первого игрока устроит всех остальных игроков, если будут выполняться условия

$$x_i \geq \delta^{i-1} x_1, \quad i = 2, \dots, n.$$

Предлагая $x_i = \delta^{i-1} x_1, i = 2, \dots, n$, игрок I удовлетворяет остальных игроков. При этом ему самому остается доля

$$1 - (\delta x_1 + \delta^2 x_1 + \dots + \delta^{n-1} x_1),$$

которая должна совпадать с его предложением x_1 самому себе. Из этого условия

$$1 - (\delta x_1 + \delta^2 x_1 + \dots + \delta^{n-1} x_1) = x_1$$

находим

$$x_1^* = (1 + \delta + \dots + \delta^{n-1})^{-1} = \frac{1 - \delta}{1 - \delta^n}.$$

Теорема 6.3. В последовательной игре переговоров n лиц существует абсолютное равновесие вида

$$\left(\frac{1 - \delta}{1 - \delta^n}, \frac{\delta(1 - \delta)}{1 - \delta^n}, \dots, \frac{\delta^{n-1}(1 - \delta)}{1 - \delta^n} \right). \quad (3.3)$$

Из вида (3.3) следует, что первый игрок находится в предпочтительном положении и его выигрыш становится тем больше, чем коэффициент дисконтирования. Это естественно, поскольку размер пирога со временем быстро убывает и роль участников с большими порядковыми номерами становится незначительной.

§ 6.4. ПЕРЕГОВОРЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРЕДЛОЖЕНИЯМИ

Рассмотрим теперь задачу раздела пирога, где предложения делаются не самими игроками, а некоторым независимым арбитром, который генерирует некоторые предложения, а игроки либо соглашаются с этим предложением, либо нет. Рассмотрим здесь игру двух лиц. Предположим, что решение должно быть сделано в течение K шагов.

Пусть $x_i, i = 1, 2, \dots, K$ — последовательность случайных предложений, которые мы интерпретируем как последовательность предложений арбитра на шаге i . Предположим, что x_i — независимые равномерно распределенные на интервале $[0, 1]$ случайные величины. Когда предложение x_i поступает, оба игрока могут принять его, и тогда первому игроку достанется величина x_i , а второму $1 - x_i$. Если оба игрока отвергают предложение, переговоры переходят на следующий шаг. Если же один игрок принимает предложение, а второй отвергает, то переговоры заканчиваются в пользу «обиженного» игрока. Обозначим стратегию «принять» предложение через (A) , а стратегию «отвергнуть» через (R) . Тогда при исходе $(A - R)$ выигрыш первого игрока составляет $x_i \wedge 1 - x_i$, а при исходе $(R - A)$ выигрыш равен $x_i \vee 1 - x_i$, где \wedge и \vee обозначают соответственно минимум и максимум двух чисел.

Процесс переговоров продолжается до тех пор, пока кто-то из игроков не примет предложение арбитра либо пока не наступит последний шаг, и тогда выигрыш первого игрока составит x_K . Предположим также, что во времени выигрыш игроков дисконтируется. Здесь $\delta, 0 < \delta \leq 1$ — дисконтирующий фактор.

Описанная игра представляет собой многошаговую игру. Чтобы написать уравнение оптимальности, воспользуемся индукцией. Представим, что до конца переговоров остается k шагов и игрокам от арбитра поступает очередное предложение x . Каждый из них может принять его или отвергнуть. В случае $(A - A)$, $(A - R)$, $(R - A)$ игра заканчивается с выигрышем $x, x \wedge 1 - x, x \vee 1 - x$ соответственно. В случае же $(R - R)$ игра продолжается, но выигрыш дисконтируется. Предположим, что игрокам уже известен оптимальный выигрыш H_{k-1} в игре с $k - 1$ шагами. Тогда нахождение оптимальных стратегий на данном

шаге сводится к матричной игре вида

$$H_k(x) = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} x & x \wedge 1 - x \\ x \vee 1 - x & \delta H_{k-1} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Поскольку предложение арбитра x является случайным, значение H_k игры, состоящей из k периодов, является математическим ожиданием значения данной матричной игры. Итак, уравнение оптимальности имеет рекуррентный вид

$$H_k = E\{\text{val } H_k(x)\}, \quad k = 1, \dots, K$$

с граничным условием $H_0 = 0$.

Теорема 6.4. Для любого $k = 1, \dots, K$ оптимальная стратегия первого игрока имеет вид

$$I: \begin{cases} A, & \text{если } \delta H_{k-1} < x < 1 - \delta H_{k-1}, \\ R, & \text{если } x \leq \delta H_{k-1} \text{ или } 1 - \delta H_{k-1} \leq x, \end{cases}$$

а оптимальная стратегия игрока II есть R .

Значение игры удовлетворяет рекуррентным соотношениям $H_k = (\delta H_{k-1})^2 + 1/4$ и $H_k < 1/2$, $k = 1, \dots, K$.

Доказательство. $H_0 < 1/2$. Предположим, что $H_{k-1} < 1/2$ для некоторого $k \geq 1$, и докажем $H_k < 1/2$.

Пусть $x \in [0, 0.5]$. Тогда матрица выигрышей первого игрока примет вид

$$\begin{pmatrix} x & x \\ 1 - x & \delta H_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Второй столбец матрицы не больше чем первый. Следовательно, оптимальная стратегия игрока II есть R . Чтобы определить оптимальную стратегию игрока I, сравним x и δH_{k-1} . Если $x \leq \delta H_{k-1}$, то оптимальная стратегия игрока I есть R , и A в противном случае.

Пусть теперь $x \in [0.5, 1]$. В этом случае матрица выигрышей имеет вид

$$\begin{pmatrix} x & 1 - x \\ x & \delta H_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Второй столбец не больше чем первый, следовательно, оптимальная стратегия игрока II есть R . Сравним $1 - x$ и δH_{k-1} . Если $1 - x > \delta H_{k-1}$

(т.е. $x < 1 - \delta H_{k-1}$), то оптимальная стратегия I есть A , и если $1 - x \leq \delta H_{k-1}$ или $x \geq 1 - \delta H_{k-1}$, то R .

Отсюда значение игры удовлетворяет уравнению

$$H_k = \int_0^{\delta H_{k-1}} \delta H_{k-1} dx + \int_{\delta H_{k-1}}^{0.5} x dx + \\ + \int_{0.5}^{1-\delta H_{k-1}} (1-x) dx + \int_{1-\delta H_{k-1}}^1 \delta H_{k-1} dx = (\delta H_{k-1})^2 + \frac{1}{4}.$$

Покажем, что $H_{k-1} < 1/2 \Rightarrow H_k < 1/2$. Это следует из цепочки неравенств

$$H_{k-1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{2\delta}; \quad \delta H_{k-1} < \frac{1}{2}; \quad (\delta H_{k-1})^2 < \frac{1}{4}; \\ H_k = (\delta H_{k-1})^2 + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}.$$

По индукции из $H_0 = 0$ следует, что для всех $k \leq K$ имеет место

$$H_{k-1} \in [0, 0.5) \Rightarrow H_k \in [0, 0.5).$$

Найдем, к чему приводят переговоры на большом промежутке времени.

Теорема 6.5. При $n \rightarrow \infty \lim H_n = \frac{1 - \sqrt{1 - \delta^2}}{2\delta^2}$.

Доказательство. Чтобы найти асимптотику H_n , воспользуемся соотношением $H_k = (\delta H_{k-1})^2 + \frac{1}{4}$. Заметим $H_1 - H_0 = 1/4 > 0$. Пусть для некоторого $k \leq K - 1$ имеет место $H_k - H_{k-1} > 0$. Тогда

$$H_{k+1} - H_k = (\delta H_k)^2 + \frac{1}{4} - (\delta H_{k-1})^2 - \frac{1}{4} = \\ = \delta^2 (H_k^2 - H_{k-1}^2) > 0.$$

Отсюда следует, что последовательность H_k возрастает. Кроме того, она ограничена сверху 0.5, и следовательно, имеет предел.

Предел H удовлетворяет уравнению $H = (\delta H)^2 + \frac{1}{4}$. Данное уравнение имеет два корня $\frac{1 + \sqrt{1 - \delta^2}}{2\delta^2}$ и $\frac{1 - \sqrt{1 - \delta^2}}{2\delta^2}$, но только второе удовлетворяет условию $H < 1/2$.

Таким образом, предел последовательности H_n равен $\frac{1 - \sqrt{1 - \delta^2}}{2\delta^2}$. Когда $\delta \in (0; 1]$ возрастает, это значение возрастает от $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$.

§ 6.5. ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ПЕРЕГОВОРОВ

В модели переговоров со случайными предложениями их продолжительность также является случайной. Интересно оценить эту величину. Определим случайную величину τ — число периодов, в течение которых переговоры продолжаются при оптимальном поведении игроков. Если для переговоров выделено k шагов, то τ может принимать любое значение от 1 до k .

Теорема 6.6. *Средняя продолжительность переговоров равна $E_k \tau = 1 + \sum_{t=1}^{k-1} \prod_{r=1}^t \{2\delta H_{k-r}\}$.*

Доказательство. Найдем распределение случайной величины τ . Переговоры могут завершиться на первом шаге, если случайное предложение x_1 попадет в интервал $(\delta H_{k-1}, 1 - \delta H_{k-1})$. Так как x_1 распределено равномерно на интервале $[0, 1]$, вероятность этого события равна $1 - 2\delta H_{k-1}$. Таким образом, вероятность того, что переговоры закончатся на первом шаге ($\tau = 1$), равна $1 - 2\delta H_{k-1}$. Если переговоры не закончились, то вероятность остановки на втором шаге ($\tau = 2$) равна

$$2\delta H_{k-1}(1 - 2\delta H_{k-2}) = 2\delta H_{k-1} - (2\delta)^2 H_{k-1} H_{k-2}.$$

Аналогично вероятность остановки на t шаге равна

$$\begin{aligned} & (2\delta)^{t-1} H_{k-1} H_{k-2} \dots H_{k-(t-1)} (1 - 2\delta H_{k-t}) = \\ & = (2\delta)^{t-1} H_{k-1} H_{k-2} \dots H_{k-(t-1)} - (2\delta)^t H_{k-1} H_{k-2} \dots H_{k-(t-1)} H_{k-t}. \end{aligned}$$

Итак, распределение случайной величины τ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} P\{\tau = 1\} &= 1 - 2\delta H_{k-1}, \\ P\{\tau = t\} &= (2\delta)^{t-1} H_{k-1} H_{k-2} \dots H_{k-(t-1)} (1 - 2\delta H_{k-t}) \\ &\quad \text{для } t = 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Теперь вычислим математическое ожидание

$$\begin{aligned} E_k \tau &= \sum_{t=1}^k P\{\tau \geq t\} = 1 + \sum_{t=1}^{k-1} (2\delta)^t H_{k-1} H_{k-2} \dots H_{k-t} = \\ &= 1 + \sum_{t=1}^{k-1} \prod_{r=1}^t \{2\delta H_{k-r}\}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 6.7. *Имеет место рекуррентное соотношение*

$$E_{k+1}\tau = 1 + 2\delta H_k E_k\tau$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_k\tau = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \right].$$

Доказательство. Имеет место

$$\begin{aligned} E_{k+1}\tau - E_k\tau &= 2\delta H_k + (2\delta)^2 H_k H_{k-1} + (2\delta)^3 H_k H_{k-1} H_{k-2} + \dots \\ &\quad \dots + (2\delta)^n H_k H_{k-1} \dots H_1 - (2\delta H_{k-1} + (2\delta)^2 H_{k-1} H_{k-2} + \\ &\quad + (2\delta)^3 H_{k-1} H_{k-2} H_{k-3} + \dots + (2\delta)^{k-1} H_{k-1} H_{k-2} \dots H_1) = \\ &= 1 + (2\delta H_k - 1) + 2\delta H_{k-1} (2\delta H_k - 1) + \dots \\ &\quad \dots + (2\delta)^{k-1} H_{k-1} H_{k-2} \dots H_1 (2\delta H_k - 1) = 1 + (2\delta H_k - 1) E_k\tau, \end{aligned}$$

следовательно, $E_{k+1}\tau = 1 + 2\delta H_k E_k\tau$.

В теореме 6.5 было показано, что H_k возрастающая последовательность. Покажем по индукции, что $E_k\tau$ также возрастает. Сначала заметим, что $1 + \frac{\delta}{2} = E_2\tau > E_1\tau = 1$. Если теперь предположить, что для всех $t \leq k-1$ $E_{t+1}\tau > E_t\tau$, то для $t = k$ получим

$$H_k E_k\tau > H_{k-1} E_{k-1}\tau,$$

$$E_{k+1}\tau = 1 + 2\delta H_k E_k\tau > 1 + 2\delta H_{k-1} E_{k-1}\tau = E_k\tau.$$

Последовательность $E_k\tau$ ограничена сверху значением $\frac{1}{1-\delta}$, поскольку $E_1\tau = 1 < \frac{1}{1-\delta}$ для $k = 1$, и если $E_k\tau < \frac{1}{1-\delta}$ (кроме того, $H_k < 1/2$), то

$$E_{k+1}\tau = 1 + 2\delta H_k E_k\tau < 1 + 2\delta H_k \frac{1}{1-\delta} < 1 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{1}{1-\delta}.$$

Следовательно, $E_k \tau$ имеет предел E , который удовлетворяет уравнению

$$E = 1 + 2\delta H E. \text{ Он равен } E = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \right].$$

Для $\delta = 1$ предел $E_k \tau$ равен $+\infty$. Разностному уравнению $H_k = (H_{k-1})^2 + 1/4$ соответствует дифференциальное уравнение $h' = \frac{(1-2h)^2}{4}$. Его решение с граничным условием $h(0) = 0$ есть $h(k) = \frac{k}{2(k+2)}$.

Подставляя это решение в выражение $E_k \tau$, получим

$$\begin{aligned} E_k \tau &\sim 1 + \sum_{t=1}^{k-1} \prod_{r=1}^t \left\{ \frac{k-r}{k-r+2} \right\} = 1 + \sum_{t=1}^{k-1} \frac{(k-t+1)(k-t)}{(k+1)k} = \\ &= 1 + \sum_{t=1}^{k-1} \left(1 - \frac{t}{k+1} \right) \left(1 - \frac{t}{k} \right) = 1 + \frac{(k-1)k(k+1)}{3k(k+1)} = \\ &= 1 + \frac{k-1}{3} = \frac{k+2}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда $E_k \tau \sim \frac{k}{3}$, т. е. в переговорах без дисконтирования среднее время переговоров занимает примерно третью часть отпущенного времени для их проведения.

Таблица 6.1

	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.3$	$\delta = 0.5$	$\delta = 0.7$	$\delta = 0.9$	$\delta = 1$
v_1	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
v_2	0.250625	0.255625	0.265625	0.280625	0.300625	0.3125
v_3	0.250628	0.255881	0.267639	0.288588	0.323204	0.347656
v_4	0.250628	0.255893	0.267908	0.290809	0.334613	0.370865
v_5	0.250628	0.255893	0.267944	0.291439	0.340693	0.387541
v_6	0.250628	0.255893	0.267948	0.291619	0.344018	0.400188
v_7	0.250628	0.255893	0.267949	0.29167	0.345862	0.41015
v_8	0.250628	0.255893	0.267949	0.291685	0.346893	0.418223
v_9	0.250628	0.255893	0.267949	0.291689	0.347471	0.424911
v_{10}	0.250628	0.255893	0.267949	0.29169	0.347796	0.430549
V	0.250628	0.255893	0.267949	0.291691	0.348216	0.5

Таблица 6.2

δ n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45	1.5
3	1.05277	1.111	1.176	1.25	1.332	1.425	1.53	1.65	1.785	1.937
4	1.05277	1.112	1.181	1.261	1.357	1.473	1.618	1.802	2.038	2.347
5	1.05277	1.112	1.181	1.263	1.363	1.491	1.659	1.891	2.228	2.741
6	1.05277	1.112	1.181	1.2637	1.365	1.497	1.677	1.941	2.366	3.124
7	1.05277	1.112	1.181	1.2637	1.366	1.499	1.685	1.969	2.465	3.501
8	1.05277	1.112	1.181	1.2637	1.366	1.5	1.688	1.984	2.535	3.872
9	1.05277	1.112	1.181	1.2637	1.366	1.5	1.689	1.992	2.583	4.238
10	1.05277	1.112	1.181	1.2637	1.366	1.5	1.69	1.996	2.615	4.602
E	1.05277	1.11237	1.18139	1.26376	1.36603	1.5	1.69024	2.	2.67945	$+\infty$

Численные расчеты представлены в табл. 6.1, 6.2. В табл. 6.1 представлены значения игры для различных δ и n . В табл. 6.2 показано среднее время переговоров. Оно изменяется от 1 до ∞ .

§ 6.6. ПЕРЕГОВОРЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРЕДЛОЖЕНИЯМИ И ЛОТЕРЕЕЙ

Выше мы рассмотрели модель переговоров, где арбитр на каждом шаге предлагал игрокам некоторый вариант раздела пирога. При этом игроки были в одинаковых условиях. В данном параграфе мы будем использовать похожую схему, но где арбитр будет делать предложения обоим игрокам, при этом решение в случае конфликта будет выбираться с помощью лотереи. В такой постановке можно рассмотреть несимметричную игру, когда один из игроков находится в предпочтительном положении, нежели чем его противник.

Пусть $(X_i, Y_i), i = 1, 2, \dots, K$ последовательность пар независимых одинаково распределенных случайных величин. Для удобства предположим, что они распределены равномерно на $[0, 1]^2$. Мы интерпретируем эту пару на шаге i как предложение арбитра каждому из игроков I и II. Когда предложение (X_i, Y_i) приходит, игроки I и II должны либо принять его (A) либо отвергнуть (R) ожидая, что в будущем поступит более выгодное предложение. Оба игрока заинтересованы принять максимальное предложение.

Если оба игрока принимают предложения на i -м шаге, игра заканчивается с платежами: X_i игроку I и Y_i игроку II. Если оба игрока отвергают i -е предложение, переговоры переходят на шаг $i + 1$. Если выбор игроков есть $(R - A)$ или $(A - R)$, то для того, чтобы определить исход переговоров, разыгрывается лотерея. При этом в случае $(R - A)$ с вероятностью p игра переходит на следующий шаг и с вероятностью $1 - p$ игра заканчивается с соответствующими платежами. В случае же $(A - R)$ игра с вероятностью p заканчивается, игроки получают соответствующие выигрыши и с вероятностью $1 - p$ переходят на следующий шаг. Без ограничения общности $p \in [1/2, 1]$.

Таким образом, в этой лотерее с вероятностью p проходит решение игрока I, и с вероятностью $\bar{p} = 1 - p$ решение игрока II. Будем говорить, что вес первого игрока есть p , а второго $1 - p$. Переговоры справедливы, если $p = 1/2$, и несправедливы, если p отлочно от $1/2$.

Заметим, что если использовать эту игру переговоров в задаче раздела пирога, то можно считать, что после выбора пары (X_i, Y_i) делят пирог соответственно как $(X_i/(X_i + Y_i), Y_i/(X_i + Y_i))$.

Обозначим (u_k, v_k) оптимальные выигрыши игроков в игре, в которой до конца переговоров осталось k шагов. Рассуждая по индукции, приходим к уравнению оптимальности

$$(u_k, v_k) = E \left[\text{val } H_k(X, Y) \right], \quad (6.1)$$

где

$$H_k(x, y) = \begin{array}{cc} R & A \\ A \left(\begin{array}{cc} u_{k-1}, v_{k-1} & pu_{k-1} + \bar{p}x, pv_{k-1} + \bar{p}y \\ px + \bar{p}u_{k-1}, py + \bar{p}v_{k-1} & x, y \end{array} \right) \end{array} \quad (6.2)$$

и

$$(k \geq 1; \quad u_0 = v_0 = 0).$$

Определим состояние (x, y, k) , где k шагов остается до конца и текущие предложения есть x и y .

Теорема 6.8. *Равновесием в игре является пара стратегий вида: в состоянии (x, y, k) :*

- I выбирает A (R), если $x \geq (<)u_{k-1}$, независимо от y ,
- II выбирает A (R), если $y \geq (<)v_{k-1}$, независимо от x .

Значение игры удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$u_k = T_1(u_{k-1}, v_{k-1}), \quad v_k = T_2(u_{k-1}, v_{k-1}), \quad k = 1, \dots, K, \quad (6.3)$$

где

$$\begin{aligned} T_1(u, v) &= \frac{1}{2} \left\{ pu^2 + \bar{p}(2u - 1)v + 1 \right\}, \\ T_2(u, v) &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{p}v^2 + p(2v - 1)u + 1 \right\}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Доказательство. Легко показать, что биматричная игра $H_k(x, y)$ для любых $(x, y) \in [0, 1]^2$ имеет единственное равновесие, такое что

	если $y < v_{k-1}$	$y \geq v_{k-1}$
если $x < u_{k-1}$	$R - R$ u, v	$R - A$ $pu + \bar{p}x, pv + \bar{p}y$
$x \geq u_{k-1}$	$A - R$ $px + \bar{p}u, py + \bar{p}v$	$A - A$ x, y

Здесь во втором столбце стоят платежи игрокам I и II, где для краткости $u = u_{k-1}$ и $v = v_{k-1}$. Следовательно, из (6.1)

$$\begin{aligned} u_k &= u^2 v + \bar{v} \int_0^u (pu + \bar{p}x) dx + \bar{v} \int_u^1 x dx + v \int_u^1 (px + \bar{p}u) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ pu^2 + \bar{p}(2u - 1)v + 1 \right\} = T_1(u, v). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} v_k &= uv^2 + u \int_v^1 (pv + \bar{p}y) dy + \bar{u} \int_v^1 y dy + \bar{u} \int_0^v (py + \bar{p}v) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{p}v^2 + p(2v - 1)u + 1 \right\} = T_2(u, v). \end{aligned}$$

Соотношения (6.3)–(6.4) доказаны.

Теорема 6.9. Для любых $k \geq 1$ $u_k \geq v_k$. При $k \rightarrow \infty$, $u_k \uparrow u_\infty$ и $v_k \uparrow v_\infty$, где (u_∞, v_∞) есть единственный корень системы уравнений

$$u = T_1(u, v), \quad v = T_2(u, v)$$

или, что эквивалентно,

$$pu^2 = (2u - 1)(1 - \bar{p}v), \quad \bar{p}v^2 = (2v - 1)(1 - pu). \quad (6.5)$$

Доказательство. Используя те же самые обозначения, что и в теореме 6.8, приходим к выражению

$$\begin{aligned} u_k - v_k &= T_1(u, v) - T_2(u, v) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ p(u^2 + u - 2uv) - \bar{p}(v^2 + v - 2uv) \right\}, \end{aligned}$$

которое из индукционных соображений неотрицательно, так как $u^2 + u - 2uv \geq (u - v)^2 + (u - v^2) \geq 0$ и $u^2 + u - 2uv \geq v^2 + v - 2uv$. Это доказывает, что $u_k \geq v_k, k \geq 1$.

Также из (6.4)

$$\begin{aligned} u_k - u_{k-1} &= T_1(u_{k-1}, v_{k-1}) - T_1(u_{k-2}, v_{k-2}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[p(u_{k-1}^2 - u_{k-2}^2) + \bar{p} \left\{ (2u_{k-1} - 1)v_{k-1} - (2u_{k-2} - 1)v_{k-2} \right\} \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} v_k - v_{k-1} &= T_2(u_{k-1}, v_{k-1}) - T_2(u_{k-2}, v_{k-2}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\bar{p}(v_{k-1}^2 - v_{k-2}^2) + p \left\{ (2v_{k-1} - 1)u_{k-1} - (2v_{k-2} - 1)u_{k-2} \right\} \right], \end{aligned}$$

Эти два равенства вместе с $u_k, v_k \geq \frac{1}{2}, k \geq 1$, дают

$$\left(u_{k-1} \geq u_{k-2}, v_{k-1} \geq v_{k-2} \right) \Rightarrow \left(u_k \geq u_{k-1}, v_k \geq v_{k-1} \right).$$

Таким образом, оба u_k и v_k возрастают и ограничены 1, отсюда они имеют пределы при $k \rightarrow \infty$, которые удовлетворяют системе уравнений $u = T_1(u, v), v = T_2(u, v)$. Данную систему перепишем в виде

$$pu^2 = (2u - 1)(1 - \bar{p}v), \quad \bar{p}v^2 = (2v - 1)(1 - pu),$$

что совпадает с (6.5). Первое уравнение описывает гиперболу, проходящую через точки $(1, 1)$ и $(1 - \sqrt{\bar{p}/p}, 0)$, а второе гиперболу, проходящую через точки $(1, 1)$ и $(0, (1 - \sqrt{p})/\bar{p})$ (см. рис. 6.3). Эта система имеет единственный корень в треугольнике $\frac{1}{2} < v < u < 1$.

Рассмотрим два специальных случая.

Следствие 6.1. Для $p = 1/2$ игра симметрична. Оптимальные стратегии обоих игроков в состоянии (x, y, k) есть: выбрать А (R), если $x \geq (<)u_{k-1}$, где u_k удовлетворяет уравнению

$$u_k = \frac{1}{4}(3u_{k-1}^2 - u_{k-1} + 2), \quad (k \geq 1, u_0 = 0).$$

Оптимальные выигрыши для обоих игроков одинаковы и равны u_k .
 $u_k \uparrow 2/3$ при $k \rightarrow \infty$.

Следствие 6.2. Для $p = 1$ оптимальные стратегии в состоянии (x, y, k) есть: выбрать $A(R)$, если $x \geq (<)u_{k-1}$, для I и всегда выбирать R , пока не закончится игра, для II игрока. Оптимальные выигрыши равны (u_k, v_k) , где

$$u_k = \frac{1}{2}(u_{k-1}^2 + 1), \quad (k \geq 1, u_0 = 0), \quad (6.6)$$

$$v_k = \frac{1}{2}, \quad (k \geq 1).$$

В табл. 6.3 приведены оптимальные выигрыши для различных p и k .

Заметим, что оптимальные решения данной игры имеют следующие интересные свойства.

(1) Компоненты матрицы $H_k(x, y)$ для игрока I не содержат y , а для игрока II не содержат x . Оптимальные стратегии каждого игрока не зависят от случайной величины, наблюдаемой оппонентом. Однако оптимальный выигрыш каждого игрока зависит от выигрыша оппонента.

(2) В равновесии игроки выбирают либо $R - R$ либо $A - A$.

Последовательность (6.6) называется последовательностью Мозера и часто появляется в задачах наилучшего выбора.

§ 6.7. ПЕРЕГОВОРЫ В ЗАДАЧЕ О ЗАРПЛАТЕ

Во второй главе мы рассмотрели задачу о зарплате в виде арбитражной процедуры, в которой игроки I (профсоюз) и II (менеджер) в случае конфликта предложений решают свой спор с помощью некоторого арбитражного комитета. Решение при этом достигалось за один шаг. Однако можно и в этой задаче организовать процесс переговоров на основе рассмотренной выше схемы случайных предложений.

Зафиксируем вначале временной горизонт K для переговоров. Пусть $(X_i, Y_i), i = 1, 2, \dots, K$ последовательность пар независимых одинаково распределенных случайных величин. Предположим, что они принимают неотрицательные значения. Их функции распределения и плотности обозначим соответственно $F(x), G(y)$ и $f(x), g(y), x, y \geq 0$. Мы интерпретируем эту пару на шаге i как предложение арбитра каждому из игроков I и II. Когда предложение (X_i, Y_i) приходит, игроки I и II должны либо принять его (A), либо отвергнуть (R), ожидая, что в будущем поступит более выгодное предложение. Это игра с нулевой

Таблица 6.3

	$p = 0.5$	0.6		0.8		1
n	$u_n = v_n$	u_n	v_n	u_n	v_n	$u_n(v_n = 1/2)$
1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
2	0.5625	0.575	0.55	0.6	0.525	0.625
3	0.5967	0.6157	0.5778	0.6545	0.5396	0.6953
4	0.6179	0.6405	0.5955	0.6880	0.5499	0.7417
5	0.6319	0.6565	0.6076	0.7100	0.5576	0.7751
6	0.6415	0.6673	0.6162	0.7251	0.5638	0.8004
7	0.6483	0.6748	0.6225	0.7357	0.5688	0.8203
8	0.6531	0.6801	0.6271	0.7433	0.5729	0.8365
9	0.6566	0.6839	0.6305	0.7489	0.5761	0.8498
10	0.6592	0.6867	0.6331	0.7530	0.5788	0.8611
Limit	2/3	0.6946	0.6408	0.7663	0.5899	1

суммой, первый игрок заинтересован получить максимальное значение, а второй минимизировать это значение.

Опишем процедуру принятия решения. Если оба игрока принимают предложения на i -м шаге, игра заканчивается с выигрышем первого игрока: $(X_i + Y_i)/2$. Если оба игрока отвергают i -е предложение, переговоры переходят на шаг $i + 1$.

Если один игрок принимает предложение, а второй отвергает, арбитр принимает решение в пользу обиженной (отвергающей) стороны. А именно выигрыш равен

$$X_i \wedge Y_i, \text{ если решение } A - R,$$

$$X_i \vee Y_i, \text{ если решение } R - A,$$

где $a \wedge b = \min(a, b)$ и $a \vee b = \max(a, b)$. Процесс продолжается до тех пор, пока кто-то из игроков не примет предложения либо пока не наступит шаг K . На последнем шаге они вынуждены принять данное предложение.

Пусть H_k значение данной игры, состоящей из k периодов. Уравнение оптимальности имеет вид

$$H_k = E\{val H_k(X, Y)\},$$

где $val H_k(x, y)$ есть значение матричной игры

$$H_k(x, y) = \begin{matrix} & A & R \\ \begin{matrix} A \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} (x+y)/2 & x \wedge y \\ x \vee y & \delta H_{k-1} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$k = 2, 3, \dots$ и граничное условие $H_1 = E(X + Y)/2$.

Нетрудно видеть, что матрица $H_k(x, y)$ имеет единственную седловую точку, которая зависит от (x, y) . А именно значение игры с матрицей $H_k(x, y)$ равно

$$val H_k(x, y) = \begin{cases} x \wedge y & \text{если } H_{k-1} \leq x \wedge y, \\ H_{k-1}, & \text{если } x \wedge y < H_{k-1} < x \vee y, \\ x \vee y, & \text{если } H_{k-1} \geq x \vee y. \end{cases}$$

Но тогда уравнение оптимальности примет вид

$$H_k = E\{X \wedge Y \cdot I_{\{H_{k-1} \leq X \wedge Y\}}\} + \\ + E\{H_{k-1} \cdot I_{\{X \wedge Y < H_{k-1} < X \vee Y\}}\} + E\{X \vee Y \cdot I_{\{H_{k-1} \geq X \vee Y\}}\}.$$

Перепишем его в виде

$$H_k - H_{k-1} = E\{(X \wedge Y - H_{k-1})I_{\{H_{k-1} \leq X \wedge Y\}}\} + \\ + E\{(X \vee Y - H_{k-1})I_{\{H_{k-1} \geq X \vee Y\}}\}. \quad (7.1)$$

Выражение $(X \wedge Y - H_{k-1})I_{\{H_{k-1} \leq X \wedge Y\}}$ равно либо $X \wedge Y - H_{k-1}$, либо нулю, поэтому

$$E\{(X \wedge Y - H_{k-1})I_{\{H_{k-1} \leq X \wedge Y\}}\} = E(X \wedge Y - H_{k-1})^+,$$

где $a^+ = \max(a, 0)$. Аналогично

$$E\{(H_{k-1} - X \vee Y)I_{\{H_{k-1} > X \vee Y\}}\} = E(H_{k-1} - X \vee Y)^+.$$

Тогда (7.1) можно представить в виде

$$H_k - H_{k-1} = E(X \wedge Y - H_{k-1})^+ - E(H_{k-1} - X \vee Y)^+. \quad (7.2)$$

Введем в рассмотрение функции $R_1(z) = E(X \wedge Y - z)^+$ и $R_2(z) = E(z - X \vee Y)^+$. Тогда уравнение (7.2) примет вид

$$H_k = H_{k-1} + R_1(H_{k-1}) - R_2(H_{k-1}). \quad (7.3)$$

Подытоживая эти рассуждения, приходим к следующему утверждению.

Теорема 6.10. *Значение игры о зарплате удовлетворяет рекуррентным соотношениям*

$$H_k = H_{k-1} + R_1(H_{k-1}) - R_2(H_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots$$

$H_1 = E(X + Y)/2$. *Оптимальные стратегии игроков на k -м шаге имеют вид*

$$\begin{aligned} A - R, & \text{ если } H_{k-1} < x \wedge y, \\ R - A, & \text{ если } H_{k-1} > x \vee y, \\ R - R, & \text{ иначе.} \end{aligned}$$

Интересно отметить, что в равновесие не входит стратегия $A-A$, за исключением последнего шага. Исследуем асимптотику значения игры на большом промежутке времени переговоров. Особую роль здесь играет решение уравнения $R_1(z) = R_2(z)$.

Лемма 6.1. *Существует и единственно решение z_0 уравнения $R_1(z) = R_2(z)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $R_1(z) = E(X \wedge Y - z)^+$. Функция распределения случайной величины $X \wedge Y$ имеет вид

$$\begin{aligned} P\{X \wedge Y \leq t\} &= 1 - P\{X \wedge Y > t\} = \\ &= 1 - P\{X > t\}P\{Y > t\} = 1 - \bar{F}(t)\bar{G}(t), \end{aligned}$$

где $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$, $\bar{G}(t) = 1 - G(t)$. Тогда

$$R_1(z) = E(X \wedge Y - z)^+ = \int_z^\infty (t - z) d(1 - \bar{F}(t)\bar{G}(t)).$$

Интегрируя по частям, приходим к выражению

$$R_1(z) = \int_z^\infty (1 - \bar{F}(t)\bar{G}(t)) dt. \quad (7.4)$$

Аналогично функция распределения случайной величины $X \vee Y$ имеет вид

$$P\{X \vee Y \leq t\} = P\{X \leq t\}P\{Y \leq t\} = F(t)G(t),$$

следовательно,

$$R_2(z) = E(z - X \vee Y)^+ = \int_0^z (z - t) d(F(t)G(t)) = \int_0^z F(t)G(t) dt. \quad (7.5)$$

Из (7.4) следует, что $R_1(z)$ положительная убывающая функция и $R_1(0) > 0$, и $\lim_{t \rightarrow \infty} R_1(t) = 0$. А из (7.5) следует, что $R_2(z)$ положительная возрастающая функция и $R_2(0) = 0$, и $\lim_{t \rightarrow \infty} R_2(t) = E\{X \vee Y\} > 0$. Это доказывает, что существует единственная точка пересечения кривых $R_1(z)$ и $R_2(z)$.

Согласно лемме если $H_{k-1} < z_0$, то $R_1(H_{k-1}) < R_2(H_{k-1})$. Следовательно,

$$H_k = H_{k-1} + R_1(H_{k-1}) - R_2(H_{k-1}) > H_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Таким образом, если $H_1 = E(X + Y)/2 < z_0$, то последовательность $H_k, k \geq 1$ монотонно возрастает и ее предел равен z_0 . Аналогично если $H_1 = E(X + Y)/2 > z_0$, то последовательность $H_k, k \geq 1$ монотонно убывает и сходится к z_0 .

Таким образом, z_0 является асимптотическим решением задачи переговоров для большого числа шагов. Как мы видели в лемме 6.1, это значение можно найти из уравнения

$$\int_z^\infty (1 - \bar{F}(t)\bar{G}(t)) dt = \int_0^z F(t)G(t)dt. \quad (7.6)$$

Равномерное и линейное распределение. Найдем, например, решение задачи переговоров для случая, когда X равномерно распределено на интервале $[0, 1]$, а Y имеет плотность распределения вида $g(y) = 2y, y \in [0, 1]$. Из (7.4) находим

$$R_1(z) = \int_z^1 (1-t)(1-t^2)dt = \frac{2}{3}(1-z)^3 - \frac{1}{4}(1-z)^4,$$

а из (7.5)

$$R_2(z) = \int_0^z t^3 dt = \frac{z^4}{4}.$$

Начальное значение $H_1 = E(X + Y)/2 = 1/2(1/2 + 2/3) = 7/12 \approx 0.5833$. Следующее значение равно:

$$\begin{aligned} H_2 = H_1 + R_1(H_1) - R_2(H_1) &= \frac{7}{12} + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{7}{12}\right)^3 - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{7}{12}\right)^4 - \frac{1}{4} \frac{7^4}{12^4} \approx 0.5951. \end{aligned}$$

Далее последовательно находим $H_3 \approx 0.6013$, $H_4 \approx 0.6045$, ...

Асимптотическое значение переговоров в данном случае находится из уравнения

$$\frac{2}{3}(1-z)^3 - \frac{1}{4}(1-z)^4 = \frac{z^4}{4}$$

и равно $z_0 \approx 0.6082$.

Экспоненциальное распределение. Рассмотрим теперь переговоры, когда X и Y имеют экспоненциальное распределение, соответственно $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$, и $G(y) = 1 - \exp(-\mu y)$, $y \geq 0$. Тогда из (7.4)–(7.5) находим

$$\begin{aligned} R_1(z) &= \int_z^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)z}, \\ R_2(z) &= \int_0^z (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\mu t}) dt = z - \frac{1 - e^{-\lambda z}}{\lambda} - \\ &\quad - \frac{1 - e^{-\mu z}}{\mu} + \frac{1 - e^{-(\lambda + \mu)z}}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

Асимптотическое решение задачи переговоров в данном случае находится как решение уравнения (7.6)

$$\frac{2}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)z} + \frac{1 - e^{-\lambda z}}{\lambda} + \frac{1 - e^{-\mu z}}{\mu} = z + \frac{1}{\lambda + \mu}.$$

Например, при $\lambda = 1$, $\mu = 2$ значение $z_0 \approx 0.5527$.

В заключение заметим, что данная схема проведения переговоров о зарплате отличается от рассмотренной ранее тем, что здесь действительно переговоры представляют собой процесс, в котором арбитр представлен в виде некоего набора правил.

§ 6.8. ПЕРЕГОВОРЫ ТРЕХ ЛИЦ. ПРАВИЛО БОЛЬШИНСТВА

Рассмотрим теперь многошаговую игру трех лиц, связанную с задачей раздела пирога. Пусть для переговоров отведено K шагов. На k -м шагу игроки получают предложения соответственно x^k, y^k, z^k . Предположим, как и раньше, что это независимые одинаково распределенные случайные величины. Без потери общности предположим, что x^k, y^k, z^k

для любого k равномерно распределены на $[0, 1]$. После того как получены предложения всеми игроками, они должны решить либо принять данное предложение, либо отвергнуть, ожидая более выгодное предложение в будущем.

Если по крайней мере два игрока приняли данное предложение, переговоры прекращаются и игроки получают соответствующие выигрыши. В противном случае переговоры переходят на следующий шаг. Это мы называем правилом большинства. Процесс продолжается до тех пор, пока большинство игроков не примет текущие предложения либо пока не наступит шаг K . Каждый игрок заинтересован максимизировать ожидаемый выигрыш.

Обозначим H_k значение игры, где до конца переговоров осталось k шагов. Заметим, что из симметрии следует, что оптимальные выигрыши и оптимальные стратегии одинаковы для всех игроков. Равновесие будем искать в классе **стратегий поведения**.

Сначала предположим, что на k -м шагу каждый игрок знает лишь свое предложение. Обозначим x, y, z предложения игроков I, II, III соответственно. Пусть $\mu_1(x)$ ($\mu_2(y)$, $\mu_3(z)$) вероятности того, что игрок I (II, III) примет текущее предложение x (y, z). Обозначим $\bar{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$.

Теорема 6.11. *Оптимальные стратегии игроков на k -м шаге есть $\mu_i(x) = I_{\{x \geq H_{k-1}\}}$, $i = 1, 2, 3$. Значение игры удовлетворяет рекуррентным соотношениям*

$$H_k = H_{k-1} + (1 - H_{k-1})^2(1/2 - (H_{k-1})^2), \quad H_0 = 0.$$

Здесь I_A индикатор A .

Доказательство. Уравнение оптимальности имеет вид

$$\begin{aligned} H_k = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \bigg\{ & \mu_1 \mu_2 \mu_3 x + \bar{\mu}_1 \mu_2 \mu_3 x + \mu_1 \bar{\mu}_2 \mu_3 x + \\ & + \mu_1 \mu_2 \bar{\mu}_3 x + \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3 H_{k-1} + \mu_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3 H_{k-1} + \\ & + \bar{\mu}_1 \mu_2 \bar{\mu}_3 H_{k-1} + \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \mu_3 H_{k-1} \bigg\}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8.1)$$

$H_0 = 0$. Перепишем (8.1) в виде

$$H_k = \int_0^1 \mu_1(x) dx \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (x - H_{k-1})(\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2\mu_3) \right\} dy dz +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (x - H_{k-1})\mu_2\mu_3 + H_{k-1} \right\} dx dy dz. \quad (8.2)$$

Цель игрока I максимизировать свой выигрыш. В формуле (8.2) игрок может повлиять только на первый интеграл. Обозначим

$$G_k(x) = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (x - H_{k-1})(\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2\mu_3) \right\} dy dz.$$

Очевидно, оптимальная стратегия игрока I имеет вид

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_k(x) \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из симметрии оптимальные стратегии игроков II и III должны быть такими же, поэтому предположим, что $\mu_2 = \mu_3$. Имеет место $G_k(0) \leq 0$ и $G_k(1) \geq 0$, потому что $0 \leq H_{k-1} \leq 1$. Тогда $\exists a$, для которого $G_k(a) = 0$.

Найдем равновесие в игре среди пороговых стратегий. Пусть $\mu_2 = I_{\{y \geq a\}}$ и $\mu_3 = I_{\{z \geq a\}}$. Тогда можно разбить $G_k(x)$ на 4 части:

$$\begin{aligned} G_k(x) = & \int_0^a \int_0^a \left\{ (x - H_{k-1}) \times 0 \right\} dy dz + \int_0^a \int_a^1 \left\{ (x - H_{k-1}) \times 1 \right\} dy dz + \\ & + \int_a^1 \int_0^a \left\{ (x - H_{k-1}) \times 1 \right\} dy dz + \int_a^1 \int_a^1 \left\{ (x - H_{k-1}) \times 0 \right\} dy dz. \end{aligned} \quad (8.3)$$

После упрощений

$$G_k(x) = 2a(1-a)(x - H_{k-1}).$$

Условие $G_k(a) = 0$ дает $a = H_{k-1}$. Отсюда окончательно получаем

$$G_k(x) = 2H_{k-1}(1 - H_{k-1})(x - H_{k-1}).$$

Таким образом, если игроки II и III используют пороговые стратегии $\mu_2 = I_{\{y \geq H_{k-1}\}}$ и $\mu_3 = I_{\{z \geq H_{k-1}\}}$, то наилучший ответ игрока I также будет $\mu_1 = I_{\{x \geq H_{k-1}\}}$.

Каждая из μ_i , $i = 1, 2, 3$ на k -м шаге есть $I_{\{x \geq H_{k-1}\}}$ из $a = H_{k-1}$ и $G_k(x) \geq 0$ для $x \geq H_{k-1}$.

Подставляя $G_k(x)$ в (8.2), получим

$$\begin{aligned}
 H_k &= \int_0^1 \mu_1(x) G_k(x) dx + \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (x - H_{k-1}) \mu_2 \mu_3 + H_{k-1} \right\} dx dy dz = \\
 &= \int_{H_{k-1}}^1 1 \times 2H_{k-1}(1 - H_{k-1})(x - H_{k-1}) dx + \\
 &+ \int_0^1 (x - H_{k-1}) dx \int_{H_{k-1}}^1 \int_{H_{k-1}}^1 1 dy dz + H_{k-1}.
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Отсюда следует рекуррентная формула для H_k :

$$H_k = H_{k-1} + (1 - H_{k-1})^2 \left(\frac{1}{2} - (H_{k-1})^2 \right).$$

Следствие 6.3. $\lim_{k \rightarrow \infty} H_k = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Доказательство. $H_0 = 0$, отсюда $H_1 = \frac{1}{2}$, $H_2 = \frac{9}{16}$ и т. д. Очевидно, что если $0 \leq H_{k-1} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то H_k возрастает. Покажем, что если $\frac{1}{2} \leq H_{k-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $\frac{1}{2} \leq H_k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Это эквивалентно

$$H_k = H_{k-1} + (1 - H_{k-1})^2 \left(\frac{1}{2} - (H_{k-1})^2 \right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

или

$$(H_{k-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}) \left(1 - (1 - H_{k-1})^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + H_{k-1} \right) \right) \leq 0.$$

Поскольку $(H_{k-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}) \leq 0$, мы должны показать, что $1 \geq (1 - H_{k-1})^2 (\frac{1}{\sqrt{2}} + H_{k-1})$. Это следует из того, что при условиях $\frac{1}{2} \leq H_{k-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ выполняется неравенство

$$(1 - H_{k-1})^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + H_{k-1} \right) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Отсюда последовательность H_{k-1} (с $H_0 = 0$) возрастает и ограничена $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, она имеет предел. Предел равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Это следует из того, что если мы предположим, что предел меньше $\frac{1}{\sqrt{2}}$, например $c^* = \frac{1}{\sqrt{2}} - \epsilon$, то если мы подставим c^* в формулу для H_k , получим значение, которое больше, чем c^* . Это противоречит определению предела. Отсюда $H = \frac{1}{\sqrt{2}}$ есть асимптотическое значение игры для 3 лиц и больших k .

Предположим теперь, что каждый из игроков информируется не только о своем предложении, но и предложениях других игроков.

Теорема 6.12. *Оптимальные стратегии в игре с полной информацией имеют тот же вид, что и в игре без информации.*

Доказательство. Найдем оптимальную стратегию первого игрока. Предположим, он знает предложения y, z и игроки II и III используют стратегии порогового вида $\mu_2(y) = I_{\{y \geq a\}}$ и $\mu_3(z) = I_{\{z \geq a\}}$. Найдем наилучший ответ $\mu_1(x, y, z)$, который максимизирует выигрыш игрока I.

$$\begin{aligned}
 H_k = & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \mu_1(x, y, z) \times (x - H_{k-1})(\mu_2(y) + \right. \\
 & \left. + \mu_3(z) - 2\mu_2(y)\mu_3(z)) \right\} dx dy dz + \\
 & + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (x - H_{k-1})\mu_2(y)\mu_3(z) + H_{k-1} \right\} dx dy dz.
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

Представим первый интеграл в (8.5) в виде

$$\begin{aligned}
 H_k = & \int_0^1 \int_0^a \int_0^a \left\{ \mu_1(x, y, z) \times 0 \right\} dx dy dz + \\
 & + \int_0^1 \int_0^a \int_a^1 \left\{ \mu_1(x, y, z) \times (x - H_{k-1}) \times 1 \right\} dx dy dz + \\
 & + \int_0^1 \int_a^1 \int_0^a \left\{ \mu_1(x, y, z) \times (x - H_{k-1}) \times 1 \right\} dx dy dz + \\
 & + \int_0^1 \int_a^1 \int_a^1 \left\{ \mu_1(x, y, z) \times 0 \right\} dx dy dz + \dots
 \end{aligned}$$

Мы видим, что оптимальное μ_1 есть:

$$\mu_1(x, y, z) = \begin{cases} \forall, & \text{если } y \in [0, a] \text{ и } z \in [0, a], \\ I_{\{x-H_{k-1} \geq 0\}}, & \text{если } y \in [0, a] \text{ и } z \in [a, 1], \\ I_{\{x-H_{k-1} \geq 0\}}, & \text{если } y \in [a, 1] \text{ и } z \in [0, a], \\ \forall, & \text{если } y \in [a, 1] \text{ и } z \in [a, 1]. \end{cases}$$

Следовательно, оптимальная стратегия игрока I есть $\mu_1(x, y, z) = I_{\{x \geq H_{k-1}\}}$, и она не зависит от y, z .

§ 6.9. ГОЛОСОВАНИЕ В ПЕРЕГОВОРАХ n ЛИЦ

Рассмотрим многошаговую игру n лиц, связанную с задачей раздела пирога. Игра длится не более K шагов. На k -м шагу i -й игрок получает предложение $x_i^{(k)}$. Предполагается, что $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ — независимые случайные величины. После того как получены предложения всеми игроками, они должны решить либо принять данное предложение, либо отвергнуть, ожидая более выгодное предложение в будущем. Без потери общности предположим, что x_i равномерно распределены на $[0, 1]$.

После того как игроки сделали выбор, подсчитывается число игроков, которые приняли и отвергли данные предложения соответственно. Если число игроков, выбравших «отвергнуть» больше или равно числу игроков, выбравших «принять», игра продолжается, и игроки переходят к шагу $k - 1$. Иначе игра прекращается и каждый из игроков получает соответствующее значение $x^{(k)}$. Процесс продолжается до тех пор, пока либо более половины игроков не примет текущие предложения, либо пока не наступит шаг $k = 0$, тогда никто не получает ничего. Каждый игрок заинтересован максимизировать ожидаемый выигрыш.

Пусть H_k^n — оптимальный выигрыш игрока I на k -м шаге в игре n лиц. Обозначим $\mu^1 = \mu$, $\mu^0 = 1 - \mu$. Будем использовать обозначение μ^σ , для $\sigma = \{0, 1\}$.

Представим, что на k -м шаге набор предложений (x_1, x_2, \dots, x_n) есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Тогда

$$H_k^n = \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_n \sum_{(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_1^{\sigma_1} \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \times \right.$$

$$\times \left[\begin{array}{ll} x_1, & \text{если } \sum_{i=1}^n \sigma_i > \frac{n}{2}, \\ H_{k-1}^n, & \text{если } \sum_{i=1}^n \sigma_i \leq \frac{n}{2} \end{array} \right] \Bigg\} dx_1 \dots dx_n.$$

Сумма в интеграле берется по всевозможным бинарным наборам длины n . Их число равно 2^n .

Разобьем эту сумму на две части: интегралы с μ_1 и $(1 - \mu_1)$:

$$\begin{aligned} H_k^n = & \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_n \mu_1 \times \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \times F_{1,k} \right\} dx_1 \dots dx_n + \\ & + \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_n (1 - \mu_1) \times \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \times F_{2,k} \right\} dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

$$\text{где } F_{1,k} = \begin{cases} x_1, & \text{если } \sum_{i=2}^n \sigma_i > \frac{n}{2} - 1, \\ H_{k-1}^n, & \text{если } \sum_{i=2}^n \sigma_i \leq \frac{n}{2} - 1 \end{cases}$$

$$\text{и } F_{2,k} = \begin{cases} x_1, & \text{если } \sum_{i=2}^n \sigma_i > \frac{n}{2}, \\ H_{k-1}^n, & \text{если } \sum_{i=2}^n \sigma_i \leq \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Группируя в первом интеграле множители с μ_1 , получим

$$\begin{aligned} H_k^n = & \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_n \mu_1 \times \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \times (F_{1,k} - F_{2,k}) \right\} dx_1 \dots dx_n + \\ & + \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_n \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \times F_{2,k} \right\} dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Разность $(F_{1,k} - F_{2,k})$ равна

$$F_k = (F_{1,k} - F_{2,k}) = \begin{cases} (x_1 - H_{k-1}^n), & \text{если } \frac{n}{2} - 1 < \sum_{i=2}^n \sigma_i \leq \frac{n}{2}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Неравенство

$$\frac{n}{2} - 1 < \sum_{i=2}^n \sigma_i \leq \frac{n}{2}$$

эквивалентно

$$\sum_{i=2}^n \sigma_i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Следовательно, $F_k \neq 0$, если $\sum_{i=2}^n \sigma_i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Подставим F_k в первый интеграл в (9.1). Предположим, что все игроки II, ..., n используют одинаковые стратегии $\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_n$. Игрок I может повлиять только на первую часть суммы (9.1). Перепишем ее в виде (здесь предполагается, что μ_1 зависит только от x_1)

$$\int_0^1 \mu_1(x_1) dx_1 \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n-1} \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \times F_k \right\} dx_2 \dots dx_n,$$

$$\text{или } \int_0^1 \mu_1(x_1) G_k^n(x_1) dx_1.$$

$G_k^n(0) \leq 0$ и $G_k^n(1) \geq 0$, потому что $0 \leq H_{k-1}^n \leq 1$. Отсюда $\exists a$, для которого $G_k^n(a) = 0$. Пусть $\mu_i(x_i) = I_{\{x_i \geq a\}}$ для всех $i \in [2, n]$. Наилучший ответ игрока I есть

$$\mu_1(x_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_k^n(x_1) \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Упростим $G_k^n(x_1)$. Обозначим $\int_0^a = \int_0^a$ и $\int_a^1 = \int_a^1$. Тогда можно переписать $G_k^n(x_1)$ в виде

$$G_k^n(x_1) = \sum_{(\sigma'_2 \dots \sigma'_n)} \underbrace{\int_{\sigma'_2} \dots \int_{\sigma'_n}}_{n-1} \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \times F_k \right\} dx_2 \dots dx_n. \quad (9.2)$$

Заметим, что для фиксированного набора $(\sigma'_2, \dots, \sigma'_n)$ и $\mu_i = I_{\{x_i \geq a\}}$ имеет место следующее тождество:

$$\underbrace{\int_{\sigma'_2} \dots \int_{\sigma'_n}}_{n-1} \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} (\mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \times F_k(x_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)) dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \underbrace{\int_{\sigma'_2} \dots \int_{\sigma'_n}}_{n-1} (1 \times F_k(x_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n)) dx_2 \dots dx_n. \quad (9.3)$$

Но $F_k(x_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=2}^n \sigma_i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Число $(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$, для которых $F_k \neq 0$, равно $\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Тогда каждый интеграл (9.3) в сумме (9.2) для $F_k \neq 0$ равен

$$(1-a)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a^{n-1-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (x_1 - H_{k-1}^n).$$

Следовательно,

$$G_k^n(x_1) = \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (1-a)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a^{n-1-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (x_1 - H_{k-1}^n).$$

$G_k^n(a) = 0$ влечет $a = H_{k-1}^n$ и $\mu_1 = I_{\{x_1 \geq H_{k-1}^n\}}$. Теперь мы можем найти первую часть суммы (9.1)

$$\int_0^1 \mu_1(x_1) \times \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (1 - H_{k-1}^n)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (H_{k-1}^n)^{n-1-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (x_1 - H_{k-1}^n) dx_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (1 - H_{k-1}^n)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2} (H_{k-1}^n)^{n-1-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Теперь найдем вторую часть в (9.1), используя тождество (9.3),

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 dx_1 \sum_{(\sigma'_2 \dots \sigma'_n)} \underbrace{\int_{\sigma'_2} \dots \int_{\sigma'_n}}_{n-1} \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left(\mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \times F_{2,k} \right) dx_2 \dots dx_n = \\
 & = \int_0^1 dx_1 \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \underbrace{\int_{\sigma_2} \dots \int_{\sigma_n}}_{n-1} (1 \times F_{2,k}) dx_2 \dots dx_n = \\
 & = \int_0^1 \left\{ \binom{n-1}{0} (H_{k-1}^n)^{n-1} \times H_{k-1}^n + \right. \\
 & + \binom{n-1}{1} (H_{k-1}^n)^{n-2} (1 - H_{k-1}^n)^1 \times H_{k-1}^n + \dots \\
 & \dots + \binom{n-1}{[\frac{n}{2}]} (H_{k-1}^n)^{n-1-[\frac{n}{2}]} (1 - H_{k-1}^n)^{[\frac{n}{2}]} \times H_{k-1}^n + \\
 & + \binom{n-1}{[\frac{n}{2}] + 1} (H_{k-1}^n)^{n-2-[\frac{n}{2}]} (1 - H_{k-1}^n)^{[\frac{n}{2}] + 1} \times x_1 + \dots \\
 & \left. \dots + \binom{n-1}{n-1} (1 - H_{k-1}^n)^{n-1} \times x_1 \right\} dx_1.
 \end{aligned}$$

Упрощение дает ту же сумму, в которой нужно изменить x_1 на $\frac{1}{2}$. Подставляя $\frac{1}{2} = (\frac{1}{2} - H_{k-1}^n + H_{k-1}^n)$ и используя формулу бинома Ньютона, приходим к выражениям

$$\begin{aligned}
 & \left((1 - H_{k-1}^n) + H_{k-1}^n \right)^{n-1} \times H_{k-1}^n + \\
 & + \binom{n-1}{[\frac{n}{2}] + 1} (H_{k-1}^n)^{n-2-[\frac{n}{2}]} (1 - H_{k-1}^n)^{[\frac{n}{2}] + 1} \left(\frac{1}{2} - H_{k-1}^n \right) + \dots \\
 & \dots + \binom{n-1}{n-2} (H_{k-1}^n)^1 (1 - H_{k-1}^n)^{n-2} \left(\frac{1}{2} - H_{k-1}^n \right) + \\
 & + \binom{n-1}{n-1} (1 - H_{k-1}^n)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - H_{k-1}^n \right).
 \end{aligned}$$

После упрощений вторая часть суммы (9.1) принимает вид

$$H_{k-1}^n + \left(\frac{1}{2} - H_{k-1}^n \right) (1 - H_{k-1}^n)^{[\frac{n}{2}] + 1} \times P(H_{k-1}^n),$$

где

$$P(x) = \binom{n-1}{[\frac{n}{2}] + 1} x^{n-2-[\frac{n}{2}]} + \binom{n-1}{[\frac{n}{2}] + 2} x^{n-3-[\frac{n}{2}]} (1-x) + \dots \\ \dots + \binom{n-1}{n-2} x (1-x)^{n-3-[\frac{n}{2}]} + \binom{n-1}{n-1} (1-x)^{n-2-[\frac{n}{2}]}.$$

Окончательно получаем рекуррентную формулу для оптимального выигрыша игроков в общем случае.

Теорема 6.13. *Оптимальные стратегии в игре n лиц имеют вид $\mu_i(x) = I_{\{x \geq H_{k-1}^n\}}, i = 1, \dots, n$, где*

$$H_k^n = H_{k-1}^n + (1 - H_{k-1}^n)^{[\frac{n}{2}] + 1} \left(\frac{1}{2} \binom{n-1}{[\frac{n}{2}]} (1 - H_{k-1}^n) \cdot \right. \\ \left. \cdot (H_{k-1}^n)^{n-1-[\frac{n}{2}]} + \left(\frac{1}{2} - H_{k-1}^n \right) \times P(H_{k-1}^n) \right),$$

$k = 1, 2, \dots, n$, и $H_k^0 = 0$.

§ 6.10. ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ПЕРЕГОВОРАХ ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ ИГРОКОВ

Обозначим $H^n = \lim_{k \rightarrow \infty} (H_k^n)$ — значение игры при бесконечном числе шагов. Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (H^n) = \frac{1}{2}$. Значение H^n равно корню следующего многочлена:

$$\frac{1}{2} \binom{n-1}{[\frac{n}{2}]} (1 - H^n) (H^n)^{n-1-[\frac{n}{2}]} + \left(\frac{1}{2} - H^n \right) \times P(H^n) \quad (10.1)$$

на интервале $H^n \in [\frac{1}{2}, 1]$. Мы должны показать, что корень этого многочлена стремится к $\frac{1}{2}$ при $n \rightarrow \infty$.

Сделаем замену $t = \frac{(1-H^n)}{H^n}$. Тогда многочлен (10.1) примет следующий вид:

$$\frac{1}{2} (H^n)^{n-[\frac{n}{2}]} M_n(t),$$

где

$$M_n(t) = \left[\binom{n-1}{[\frac{n}{2}]} t + (t^2 - 1) \left\{ \binom{n-1}{[\frac{n}{2}] + 1} + \binom{n-1}{[\frac{n}{2}] + 2} t + \right. \right. \\ \left. \left. + \binom{n-1}{[\frac{n}{2}] + 3} t^2 + \dots + \binom{n-1}{n-2} t^{n-[\frac{n}{2}]-3} + \binom{n-1}{n-1} t^{n-[\frac{n}{2}]-2} \right\} \right]. \quad (10.2)$$

Если t возрастает от 0 к 1, то H^n убывает от 1 к $\frac{1}{2}$. Покажем, что корень t'_n многочлена $M_n(t)$ стремится к 1, когда $n \rightarrow \infty$.

Перепишем $M_n(t)$ в следующем виде:

$$M_n(t) = a_{n,0} + a_{n,1}t + a_{n,2}t^2 + a_{n,3}t^3 + \dots \\ \dots + a_{n,n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}t^{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} + a_{n,n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}t^{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} + a_{n,n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}t^{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

где

$$a_{n,0} = -\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, \\ a_{n,1} = \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}, \\ a_{n,2} = \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} - \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3}, \\ a_{n,3} = \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2} - \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 4}, \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{n,n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} = \binom{n-1}{n-3} - \binom{n-1}{n-1}, \\ a_{n,n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} = \binom{n-1}{n-2}, \\ a_{n,n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n-1}{n-1}.$$

Легко видеть, что для $t \geq 0$ все производные $M_n(t)$ больше или равны 0:

$$M'_n(t) \geq 0, \\ M''_n(t) \geq 0, \\ \dots \\ M_n^{(n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)'}(t) = (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)! > 0.$$

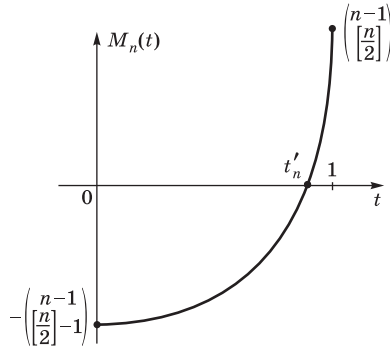


Рис. 6.6
Вид функции $M_n(t)$

$M_n(t)$ возрастает на $t \in [0, 1]$ и вогнута на этом интервале. $M_n(0) = -\left(\frac{n-1}{[\frac{n}{2}] + 1}\right)$, $M_n(1) = \left(\frac{n-1}{[\frac{n}{2}]}\right)$. Значит, $\exists! t'_n \in (0, 1) : M_n(t'_n) = 0$. Покажем, что $t'_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Функция $M_n(t)$ имеет следующий геометрический вид, представленный на рис. 6.6.

Рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{M_n(t)}{|a_{n,0}|} dt. \quad (10.3)$$

$M_n(t)$ — монотонная, непрерывная и вогнутая функция при $t \in [0, \infty)$. Значение интеграла в пределе (10.3) больше или равно -1 . Если бы предел (10.3) был бы равен -1 , это бы означало, что корень многочлена (10.2) стремится к 1, или ($t'_n \rightarrow 1$),

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{M_n(t)}{|a_{n,0}|} dt &= -1 + \frac{a_{n,1}}{2|a_{n,0}|} + \frac{a_{n,2}}{3|a_{n,0}|} + \frac{a_{n,3}}{4|a_{n,0}|} + \dots \\ &\dots + \frac{a_{n,n-[\frac{n}{2}]-2}}{(n-[\frac{n}{2}]-1)|a_{n,0}|} + \frac{a_{n,n-[\frac{n}{2}]-1}}{(n-[\frac{n}{2}]|a_{n,0}|} + \frac{a_{n,n-[\frac{n}{2}]}}{(n-[\frac{n}{2}]+1)|a_{n,0}|} = \\ &= -1 + \frac{\left(\frac{n-1}{[\frac{n}{2}]}\right) - \left(\frac{n-1}{[\frac{n}{2}]+2}\right)}{2\left(\frac{n-1}{[\frac{n}{2}]+1}\right)} + \frac{\left(\frac{n-1}{[\frac{n}{2}]+1}\right) - \left(\frac{n-1}{[\frac{n}{2}]+3}\right)}{3\left(\frac{n-1}{[\frac{n}{2}]+1}\right)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3} \left\{ \frac{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + k} - \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + k + 2}}{(k+2) \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}} \right\} + \\
& + \frac{\binom{n-1}{n-2}}{(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}} + \frac{\binom{n-1}{n-1}}{(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}}.
\end{aligned}$$

Предположим для определенности, что $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$ и $n \geq 6$. Тогда

$$\frac{\binom{n-1}{\frac{n}{2}} - \binom{n-1}{\frac{n}{2} + 2}}{2 \binom{n-1}{\frac{n}{2} + 1}} = \frac{n+2}{n-2} - \frac{n-4}{n+4} < \frac{6}{n-2} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\binom{n-1}{\frac{n}{2} + 1} - \binom{n-1}{\frac{n}{2} + 3}}{3 \binom{n-1}{\frac{n}{2} + 1}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{(n-4)(n-6)}{(n+4)(n+6)} \right) < \frac{20}{3n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\binom{n-1}{n-2}}{(n - \frac{n}{2}) \binom{n-1}{\frac{n}{2} + 1}} < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\binom{n-1}{n-1}}{(n - \frac{n}{2} + 1) \binom{n-1}{\frac{n}{2} + 1}} < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

Теперь оценим сумму:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-3} \frac{\left[\binom{n-1}{\frac{n}{2}+k} - \binom{n-1}{\frac{n}{2}+k+2} \right]}{(k+2) \binom{n-1}{\frac{n}{2}+1}} = \\
& = \left(\frac{n}{2} + 1 \right)! \left(\frac{n}{2} - 2 \right)! \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-3} \frac{\frac{\frac{n}{2}+k+1}{\frac{n}{2}-k-1} - \frac{\frac{n}{2}-k-2}{\frac{n}{2}+k+2}}{(k+2) \left(\frac{n}{2} + k + 1 \right)! \left(\frac{n}{2} - k - 2 \right)!} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{n}{2} + 1\right)! \left(\frac{n}{2} - 2\right)! \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-3} \frac{n(2k+3)}{(k+2)\left(\frac{n}{2} + k + 2\right)! \left(\frac{n}{2} - k - 1\right)!} \leq \\
&\leq \frac{2n\left(\frac{n}{2} + 1\right)! \left(\frac{n}{2} - 2\right)!}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-3} \binom{n+1}{\frac{n}{2} + k + 2} \leq \\
&\leq \frac{2n\left(\frac{n}{2} + 1\right)! \left(\frac{n}{2} - 2\right)!}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} = \\
&= \frac{2n\left(\frac{n}{2} + 1\right)! \left(\frac{n}{2} - 2\right)!}{(n+1)!} 2^{n+1} = \frac{8}{n+1} \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)^{\frac{1}{2}n-1}} = \\
&= \frac{8}{n+1} \frac{1}{P\{S_{n-1} = \frac{n}{2} + 1\}}, \tag{10.4}
\end{aligned}$$

где $P\{S_{n-1} = \frac{n}{2} + 1\}$ есть вероятность $\frac{n}{2} + 1$ успехов в серии $n - 1$ испытаний Бернулли, с вероятностью успеха $p = 0.5$. В соответствии с локальной предельной теоремой для больших n выполняется

$$P\{S_{n-1} = \frac{n}{2} + 1\} \sim \frac{1}{\sqrt{2(n-1)p(1-p)}} \exp\left[-\frac{n-1}{2p(1-p)}\left(\frac{\frac{n}{2} + 1}{n-1} - p\right)^2\right].$$

Следовательно,

$$(10.4) \sim \frac{4\sqrt{2\pi} \exp\left[\frac{9}{2n}\right]}{\sqrt{n}} \sim \frac{4\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, значение предела (10.3) равно -1 . А значит, единственный корень $M_n(t)$ на интервале $t \in [0, 1]$ стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$, что в свою очередь эквивалентно $H_n \rightarrow \frac{1}{2}$ при $n \rightarrow \infty$.

Итак, значение игры в задаче переговоров с голосованием при неограниченном возрастании числа игроков стремится к $\frac{1}{2}$. Это означает вырождение игры в простую форму: при оптимальном поведении каждый игрок принимает предложение, если оно больше $\frac{1}{2}$, или отвергает предложение, если оно меньше $\frac{1}{2}$.

Задачи и упражнения

1. Составление расписания для двух лиц.

Два игрока договариваются о дате встречи в один из дней недели. Одному игроку удобно сделать это во вторник, а другому —

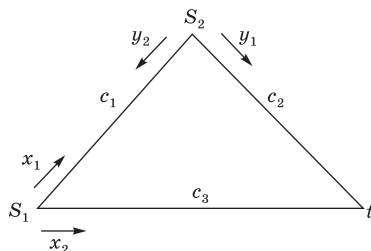


Рис. 6.7

в четверг. Таким образом, множество стратегий имеет вид $X = Y = 1, 2, \dots, 7$. Для определения даты встречи игроки используют схему случайных предложений. Вероятностный механизм с одинаковой вероятностью делает предложения от 1 до 7. Игроки соглашаются или нет. Число шагов равно $k = 5$. Найти оптимальные стратегии.

2. Составление расписания с помощью арбитражной процедуры.

Два игрока договариваются о дате встречи в один из дней недели $1, 2, \dots, 7$. Одному игроку удобно встретиться в начале недели, а другому — в конце. Они делают предложения, и после этого случайный арбитр генерирует некое число a (с одинаковой вероятностью это может быть либо 3, либо 4) и сравнивает предложения с этим числом. Он выбирает для встречи то предложение, которое ближе к числу a . Найти оптимальные стратегии.

3. Составление расписания для трех и более лиц.

Игроки $1, 2, \dots, n$ договариваются о дате проведения конференции. Для простоты пусть это будут месяцы года $T = 1, 2, \dots, 12$. Каждый из игроков имеет свое предложение $a_1, \dots, a_n \in T$. Неудобство других для игрока i оценивается любым образом:

$$f_i(t) = \min\{|t - a_i|, |t + 12 - a_i|\}, \quad t \in T, i = 1, \dots, n.$$

Используя схему случайных предложений, определить оптимальные стратегии поведения для интервала времени $K = 5$.

Рассмотреть случай трех игроков, использующих правило большинства. Рассмотреть модель с четырьмя игроками и сравнить выигрыши при разных порогах принятия решения, равные 2 и 3.

4. Два игрока I и II посылают трафик из вершин S_1 и S_2 соответственно в вершину t в сети, представленной на рис. 6.7. Пропускные способности каналов S_1S_2 , S_2t и S_1t равны соответственно c_1 , c_2 , c_3 . Игрок I использует полосу пропускания x_1 на маршруте (S_1, S_2, t) и x_2 — на маршруте (S_1, t) . Игрок II использует полосу пропускания y_1 на маршруте (S_1, t) и y_2 — на маршруте (S_2, S_1, t) . Каждый игрок заинтересован максимизировать свою суммарную полосу пропускания. Провайдер должен распределить квоты на полосы между игроками. Квоты есть верхние пороги для используемых полос. Пусть $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$.
5. В информационной сети, изображенной на рис. 6.8, три игрока I, II и III, находящиеся в вершинах S_1 , S_2 и S_3 , посылают трафик в вершину t . Пропускные способности каналов приведены на рисунке. Игрок I может воспользоваться маршрутами S_1S_2t , S_1S_3t и $S_1S_2S_3t$. Игрок II может использовать маршруты S_3t и S_2S_3t . Игрок III может выбрать маршруты S_3t , S_1S_3t и $S_3S_1S_2t$. Все игроки заинтересованы минимизировать свою задержку, которая равна сумме задержек данного игрока на всех каналах. Задержку на канале с пропускной способностью c , где проходит трафик w , рассмотрим в виде $f(w) = \frac{1}{c-w}$. Распределить квоты для всех игроков, используя арбитражную схему Нэша.

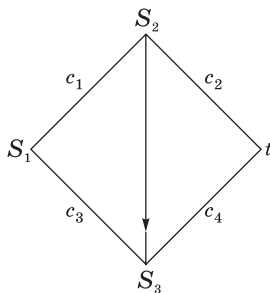


Рис. 6.8

6. Сетевой аукцион.

Продавец выставляет в информационной сети некоторый товар. Покупатели не знают заявленной цены s и начинают торги, постепенно повышая предложения. Делают они это одновременно, или увеличивая предложения каждый раз на одну и ту же величину, или умножая ее каждый раз на величину $\alpha > 1$ (у каждого

игрока может быть своя величина α). Игрок, назвавший первым цену большую или равную s , получает товар. Если таких игроков несколько, продавец предпочитает наибольшие предложения. Каждый из игроков заинтересован купить товар. Найти оптимальные стратегии игроков.

7. Квоты на трафик.

Пользователи $1, \dots, n$ делают заказ у провайдера на трафик на месяц в размере x_1, \dots, x_n . Предполагается, что $\sum_{i=1}^n x_i$ превышает размеры канала s . Определить квоты, используя схему случайных предложений.

8. Перераспределение квот на трафик.

Провайдер выделил пользователям $1, \dots, n$ квоты на трафик c_1, \dots, c_n , $\sum_{i=1}^n c_i = s$. В конце месяца оказалось, что некоторые пользователи не выбрали свои квоты. Определить новые квоты на трафик.

9. Арбитражная процедура на плоскости.

Две строительные фирмы хотят получить заказ на строительство дома. Предложения представляют пару чисел (t, c) , где t — время строительства и c — цена предполагаемого строительства. Заказчик заинтересован уменьшить цену и время строительства, а цели фирм противоположны. Случайный арбитр распределен на круге единичного диаметра с плотностью распределения в полярных координатах $f(r, \theta) = \frac{3(1-r)}{\pi}$. Найти оптимальные предложения игроков, если один из них заинтересован максимизировать время, а другой — цену.

10. Задача о пиратах.

Пираты (10 человек) захватили корабль с добычей 100 слитков золота. Они должны разделить добычу. Процедура дележа такова. Вначале капитан предлагает вариант дележа. Игроки голосуют. Если больше или ровно половина команды одобряет его предложение, дележ происходит. В противном случае пираты убивают капитана и дележ предлагает игрок II. Так происходит до тех пор, пока игроки не договорятся. Найти абсолютное равновесие.

ИГРЫ С ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКОЙ

Здесь мы рассмотрим игры, в которых стратегиями игроков являются моменты остановки некоторых процессов наблюдений. Этот класс задач близок к моделям переговоров, рассмотренных в предыдущей главе. Игроки в данной игре получают независимо друг от друга значения некоторого случайного процесса и в любой момент времени могут прекратить наблюдения с сохранением текущего наблюдаемого значения. После этого значения игроков сравниваются, и определяется выигрыш каждого из них. Подобные задачи возникают также в моделях выбора наилучшего из рассматриваемых объектов, в моделях поведения агентов на валютной бирже, динамических играх и др.

Начнем рассмотрение данного класса игр с игры двух лиц, в которой игроки I и II наблюдают последовательно значения некоторых независимых случайных процессов x_n и y_n , $n = 0, 1, \dots, N$ и в любые моменты времени (соответственно τ и σ) могут остановиться с текущими значениями x_τ и y_σ . После этого данные значения сравниваются, и выигрывает игрок, выбравший наибольшее значение. Таким образом, функция выигрыша в данной антагонистической игре имеет вид

$$H(\tau, \sigma) = P\{x_\tau > y_\sigma\} - P\{x_\tau < y_\sigma\}.$$

Заметим, что поскольку наблюдения здесь являются случайными величинами, то и стратегии также являются случайными величинами, принимающими целые значения из множества $\{0, 1, \dots, N\}$. Решение об остановке в момент n должно быть принято только на основании уже просмотренных наблюдений x_1, \dots, x_n , $n = 0, 1, \dots, N$. Другими словами, события $\{\tau \leq n\}$ должны быть измеримы в неубывающей последовательности σ -алгебр $\mathcal{F}_n = \sigma\{x_1, \dots, x_n\}$, $n = 0, 1, \dots, N$.

Для решения данного класса игр опишем общую схему построения равновесия с использованием метода обратной индукции. Если стратегия одного из игроков (например, игрока II) зафиксирована, то задача

нахождения $\sup_{\tau} H(\tau, \sigma)$ превращается в задачу оптимальной остановки для одного игрока с некоторой функцией выигрыша при остановке $\sup_{\tau} Ef(x_{\tau})$, где

$$f(x) = P\{y_{\sigma} < x\} - P\{y_{\sigma} > x\}.$$

Чтобы найти

$$\sup_{\tau} Ef(x_{\tau}),$$

будем использовать метод обратной индукции. Обозначим оптимальный ожидаемый выигрыш игрока в состоянии, когда были пропущены все $n-1$ наблюдений, и текущее наблюдение на n -м шаге равно x , через $v(x, n) = \sup_{\tau} E\{f(x_{\tau})/x_n = x\}$. В данном состоянии игрок, остановив наблюдения, получит выигрыш $f(x_n) = f(x)$. Если же он продолжит наблюдения и далее будет действовать оптимально, его ожидаемый выигрыш составит величину $E\{v(x_{n+1}, n+1)/x_n = x\}$. Сравнивая эти выигрыши, можно построить оптимальную стратегию. Тогда уравнение оптимальности примет рекуррентный вид

$$v(x, n) = \max\{f(x), E\{v(x_{n+1}, n+1)/x_n = x\}\}, \\ n = 1, \dots, N-1, \quad v(x, N) = f(x).$$

Например, если $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $G(x)$, то ожидаемый выигрыш при продолжении равен

$$Ev(x_{n+1}, n+1) = \int_R v(x, n+1) dG(x).$$

Если же это марковский процесс на конечном множестве $E = \{1, 2, \dots, k\}$ с матрицей переходных вероятностей p_{ij} , $i, j = 1, \dots, k$, то ожидаемый выигрыш при продолжении равен

$$E\{v(x_{n+1}, n+1)/x_n = x\} = \sum_{y=1}^k v(y, n+1)p_{xy}.$$

Сначала на примере простой игры мы найдем равновесие, используя обычную теоретико-игровую технику, а затем построим решение в более широком классе игр, используя метод обратной индукции.

§ 7.1. ИГРА С ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКОЙ ДЛЯ ДВУХ НАБЛЮДЕНИЙ

Игра состоит из двух этапов. На первом этапе каждому из игроков I и II предлагаются значения некоторых случайных величин x_1 и y_1 . Они могут выбрать их либо отвергнуть. В последнем случае им будут предложены новые значения: x_2 первому игроку и y_2 второму игроку. На этом игра заканчивается, игроки показывают друг другу значения, и выигрывает тот из них, у кого значение больше. Никакой информацией о поведении противника игроки не обладают. Все случайные величины независимы, и для удобства будем считать их равномерно распределенными на единичном интервале $[0, 1]$.

Удобно здесь стратегии игроков определить с помощью порогов u и v ($0 \leq u, v \leq 1$) таких, что если $x_1 \geq u$ (соответственно $y_1 \geq v$), то игрок I (II) останавливается на x_1 (y_1), в противном случае игрок выбирает второе значение x_2 (y_2). Таким образом, для данных стратегий выбранные наблюдения имеют вид

$$x_\tau = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1 \geq u, \\ x_2, & \text{если } x_1 < u, \end{cases} \quad y_\sigma = \begin{cases} y_1, & \text{если } y_1 \geq v, \\ y_2, & \text{если } y_1 < v. \end{cases}$$

Для вычисления функции выигрыша в игре нам понадобится функция распределения случайных величин x_τ, y_σ . Для $x < u$ событие $\{x_\tau \leq x\}$ происходит только тогда, когда первое наблюдение x_1 было меньше u , а второе стало меньше x . Для $x \geq u$ событие $\{x_\tau \leq x\}$ происходит либо если первое наблюдение x_1 попало в интервал $[u, x]$, либо если первое наблюдение меньше u , а второе меньше или равно x . Таким образом,

$$F_1(x) = P\{x_\tau \leq x\} = ux + I_{\{x \geq u\}}(x - u).$$

Аналогично

$$F_2(y) = P\{y_\sigma \leq y\} = vy + I_{\{y \geq v\}}(y - v).$$

Для выбранных стратегий (u, v) функцию выигрыша можно представить в виде

$$\begin{aligned} H(u, v) &= P\{x_\tau > y_\sigma\} - P\{x_\tau < y_\sigma\} = \\ &= \int_0^1 [P\{y_\sigma < x\} - P\{y_\sigma > x\}] dF_1(x) = \int_0^1 [2F_2(y) - 1] dF_1(x). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Последовательно упрощая (1.1) для $v \leq u$,

$$\begin{aligned} H(u, v) &= 2 \int_0^1 F_2(y) dF_1(x) - 1 = \\ &= 2 \left[\int_0^v u dx \int_0^x v dy + \int_v^u u dx \left(\int_0^v v dy + \int_v^x (1+v) dy \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_u^1 (1+u) dx \left(\int_0^v v dy + \int_v^x (1+v) dy \right) \right] - 1, \end{aligned}$$

приходим к выражению

$$H(u, v) = (u - v)(1 - u - uv). \quad (1.2)$$

Для $v > u$ согласно симметрии задачи имеет место

$$H(u, v) = -H(v, u) = (u - v)(1 - v - uv). \quad (1.3)$$

Если стратегия второго игрока v зафиксирована, то наилучший ответ игрока I, доставляющий максимум выражения (1.2), находится из условия

$$\frac{\partial H(u, v)}{\partial u} = 1 - u - uv - (v + 1)(u - v) = 0.$$

Отсюда находим

$$u(v) = \frac{v^2 + v + 1}{2(v + 1)}.$$

Из симметрии задачи следует, что оптимальные стратегии игроков должны быть одинаковы. Приравнявая $u(v) = v$, приходим к уравнению

$$\frac{v^2 + v + 1}{2(v + 1)} = v,$$

которое эквивалентно

$$v^2 + v - 1 = 0.$$

Решением последнего является знаменитое «золотое сечение»

$$u^* = v^* = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Аналогично, находя наилучший ответ игрока I для выражения (1.3) для $v > 0$, приходим к выражениям

$$\frac{\partial H(u, v)}{\partial u} = 1 - v - uv - v(u - v) = 0,$$

откуда

$$u(v) = \frac{v^2 - v + 1}{2v}.$$

Приравнявая $u = v$, также приходим к золотому сечению $u^* = v^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Итак, если какой-то игрок использует стратегию с золотым сечением, то наилучшим ответом противника также является данная стратегия. Это означает, что ситуация (u^*, v^*) является равновесием по Нэшу в данной игре.

Заметим, что данный подход можно использовать и для решения игры с произвольным числом наблюдений, однако он является чрезвычайно трудоемким. Существует другой способ решения задач оптимальной остановки, который мы и будем использовать в дальнейшем. Он основан на уже используемом нами ранее методе обратной индукции, который мы адаптируем для решения данного класса задач. Он позволит нам найти решение игровой задачи оптимальной остановки, рассмотренной здесь для произвольного числа наблюдений, а также для многих других игровых задач с оптимальной остановкой.

§ 7.2. ИГРА С ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКОЙ ДЛЯ НЕЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Пусть $\{x_n, n = 1, \dots, N\}$ и $\{y_n, n = 1, \dots, N\}$ две совокупности независимых одинаково распределенных случайных величин с непрерывной функцией распределения $G(x), x \in R$ и плотностью $g(x), x \in R$. Рассмотрим игру $\Gamma_N(G)$ следующего вида. Игроки I и II в каждый момент времени $n = 0, \dots, N$ получают значение соответствующей случайной величины. При этом они могут либо остановиться на данном значении x_n и y_n соответственно, либо продолжить наблюдения далее. На последнем шаге N , если выбор еще не сделан, наблюдения прекращаются, и игрок получает значение последней случайной величины. Моменты остановки наблюдений τ и σ , которые являются случайными величинами с целыми значениями из множества $\{1, 2, \dots, N\}$, и есть стратегии в данной игре. Задача игрока — остановиться на наблюдении со значением большим, чем у противника.

Будем искать оптимальные правила остановки в классе пороговых стратегий $u = (u_1, \dots, u_{N-1})$, $v = (v_1, \dots, v_{N-1})$ вида

$$\tau(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 \geq u_1, \\ n, & \text{если } x_1 < u_1, \dots, x_{n-1} < u_{n-1}, x_n \geq u_n, \\ N, & \text{если } x_1 < u_1, \dots, x_{N-1} < u_{N-1} \end{cases}$$

и

$$\sigma(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } y_1 \geq v_1, \\ n, & \text{если } y_1 < v_1, \dots, y_{n-1} < v_{n-1}, y_n \geq v_n, \\ N, & \text{если } y_1 < v_1, \dots, y_{N-1} < v_{N-1}, \end{cases}$$

где будем считать

$$u_{N-1} < u_{N-2} < \dots < u_1, \text{ и } v_{N-1} < v_{N-2} < \dots < v_1. \quad (2.1)$$

Как и в предыдущем параграфе, для выбранных стратегий (u, v) функцию выигрыша можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} H(u, v) &= P\{x_\tau > y_\sigma\} - P\{x_\tau < y_\sigma\} = \\ &= \int_0^1 [P\{y_\sigma < x\} - P\{y_\sigma > x\}] dF_1(x) = E\{2F_2(x_{\tau(u)}) - 1\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $F_1(x)$, $F_2(y)$ — функции распределения случайных величин $x_{\tau(u)}$ и $y_{\sigma(v)}$ соответственно.

Лемма 7.1. Для стратегий $\tau(u)$ и $\sigma(v)$ функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$ имеют плотности вида

$$f_1(u, x) = \left[\prod_{i=1}^{N-1} G(u_i) + \sum_{i=1}^{N-1} \prod_{j=1}^{i-1} G(u_j) I_{\{x \geq u_i\}} \right] g(x), \quad (2.3)$$

и

$$f_2(v, y) = \left[\prod_{i=1}^{N-1} G(v_i) + \sum_{i=1}^{N-1} \prod_{j=1}^{i-1} G(v_j) I_{\{y \geq v_i\}} \right] g(y). \quad (2.4)$$

Доказательство проводится индукцией по N . Докажем, например, (2.3). Равенство (2.4) доказывается аналогично. При $N = 1$ $f_1(x) = g(x)$. Предположим, что равенство (2.3) имеет место для некоторого $N = n$, и докажем его для $N = n + 1$. Из определения пороговой стратегии $u = (u_1, \dots, u_n)$ имеем

$$f_1(u_1, \dots, u_n, x) = G(u_1)f_1(u_2, \dots, u_n) + I_{x_1 \geq u_1}g(y),$$

что вместе с индукционным предположением дает

$$\begin{aligned} f_1(u_1, \dots, u_n, x) &= G(u_1) \left[\prod_{i=2}^n G(u_i) + \sum_{i=2}^n \prod_{j=2}^{i-1} G(u_j) I_{\{x \geq u_i\}} \right] g(x) + \\ &+ I_{\{x_1 \geq u_1\}} g(y) = \left[\prod_{i=1}^n G(u_i) + \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} G(u_j) I_{\{x \geq u_i\}} \right] g(x). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Зафиксируем стратегию $\sigma(v)$ второго игрока и найдем наилучший ответ первого игрока. Для этого игрок I должен максимизировать по u выражение $\sup_u E\{2F_2(x_{\tau(u)}) - 1\}$.

Для упрощения выкладок предположим, что все наблюдения распределены равномерно на единичном интервале $[0, 1]$. Это не ограничивает общности, поскольку иначе можно перейти к наблюдениям $G(x_n), G(y_n), n = 1, \dots, N$, которые будут иметь равномерное распределение. Для нахождения $\sup_u E\{2F_2(x_{\tau(u)}) - 1\}$ воспользуемся методом обратной индукции, описанным в начале данной главы. Запишем уравнение оптимальности

$$v(x, n) = \max \left\{ 2 \int_0^x f_2(v, t) dt - 1, Ev(x_{n+1}, n + 1) \right\}, \quad n = 1, \dots, N - 1.$$

Продemonстрируем его применение для случая $N = 2$, когда игрок I наблюдает случайные величины x_1, x_2 , а игрок II наблюдает y_1, y_2 . Как следует из леммы, плотность распределения $f_2(v, y)$ имеет вид

$$f_2(v, y) = \begin{cases} v, & \text{если } 0 \leq y < v, \\ 1 + v, & \text{если } v \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Тогда функция выигрыша $f(x) = 2 \int_0^x f_2(v, t) dt - 1$ при остановке в состоянии x может быть представлена в виде

$$f(x) = \begin{cases} 2vx - 1, & \text{если } 0 \leq x < v, \\ 1 - 2(1 - x)(1 + v), & \text{если } v \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Если же игрок I, получив наблюдение x , решит сделать еще один шаг, его ожидает выигрыш

$$\begin{aligned} Ev(x_2, 2) &= \int_0^1 f(t) dt = \\ &= \int_0^v (2vt - 1) dt + \int_v^1 (1 - 2(1 - t)(1 + v)) dt = v^2 - v. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Согласно уравнению оптимальности игрок I, получив наблюдение x на первом шаге, останавливается, если $f(x) \geq Ev(x_2, 2)$, и переходит к следующему наблюдению, если $f(x) < Ev(x_2, 2)$. Функция $f(x)$, определенная (2.5), монотонно возрастает, а функция $Ev(x_2, 2)$ вида (2.6) не зависит от x (см. рис. 7.1). Следовательно, существует единственная точка пересечения этих функций $u' \in [0, 1]$. Если $u' \leq v$, то u' определяется условием

$$2vu' - 1 = v^2 - v, \quad (2.7)$$

а если $u' > v$, то условием

$$1 - 2(1 - u')(1 + v) = v^2 - v. \quad (2.8)$$

Таким образом, если игрок II использует стратегию с порогом v , то оптимальная стратегия игрока I определяется множеством остановки $S = [u', 1]$ и множеством продолжения $C = [0, u']$.

Выберем v так, чтобы оно совпало с u' . Уравнения (2.7) и (2.8) приводят к одному и тому же уравнению

$$v^2 + v - 1 = 0,$$

решение которого есть золотое сечение $v^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Итак, если игрок II использует пороговую стратегию v^* , то наилучшим ответом игрока I также является пороговая стратегия с тем же порогом $u^* = v^*$. Верно и обратное. Это означает оптимальность пороговых стратегий, основанных на золотом сечении.

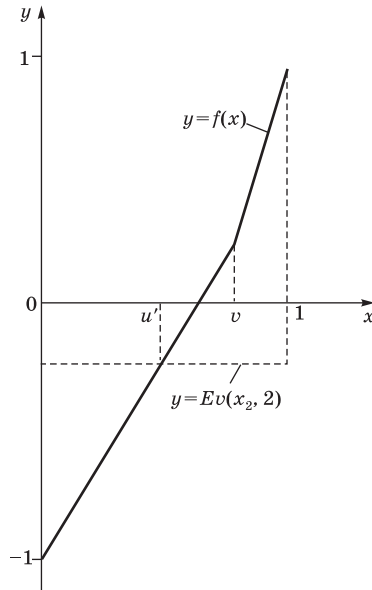


Рис. 7.1

Мы пришли к тому же решению, которое было получено в предыдущем параграфе. Однако данная схема нахождения момента оптимальной остановки, основанная на методе обратной индукции, более эффективна в данном классе задач. Кроме того, теперь не надо априори предполагать, что оптимальные стратегии должны быть порогового вида. Это прямо следует из решения уравнения оптимальности.

Покажем, как можно использовать данную схему в случае игры с произвольным числом наблюдений.

§ 7.3. ИГРА $\Gamma_N(G)$ ДЛЯ $N \geq 3$

Рассмотрим общий случай игры $\Gamma_N(G)$, где игроки получают независимые равномерно распределенные случайные величины $\{x_n, n = 1, \dots, N\}$ и $\{y_n, n = 1, \dots, N\}$, и $N \geq 3$. Предположим, что второй игрок использует стратегию порогового вида $\sigma(v)$ с порогом, удовлетворяющими условию

$$v_{N-1} < v_{N-2} < \dots < v_1. \quad (3.1)$$

Согласно лемме 7.1 плотность $f_2(v, y)$ имеет вид

$$f_2(v, y) = \sum_{i=k}^N \prod_{j=0}^{i-1} v_j, \quad \text{если } v_k \leq y \leq v_{k-1},$$

где $k = 1, \dots, N$ и для удобства положим $v_0 = 1, v_N = 0$. Таким образом, в точке $y = v_k$ функция $f_2(v, y)$ делает скачок на величину $\prod_{j=0}^{k-1} v_j$.

Для построения наилучшего ответа игрока I на данную стратегию, воспользуемся уравнением оптимальности

$$v(x, n) = \max \left\{ 2 \int_0^x f_2(v, t) dt - 1, Ev(x_{n+1}, n+1) \right\}, \quad (3.2)$$

$$n = 1, \dots, N-1$$

с граничным условием

$$v(x, N) = 2 \int_0^x f_2(v, t) dt - 1.$$

Функция выигрыша $f(x) = 2 \int_0^x f_2(v, t) dt - 1$ при остановке в состоянии x может быть представлена в виде

$$f(x) = f(v_k) + 2(x - v_k) \sum_{i=k}^N \prod_{j=0}^{i-1} v_j, \quad v_k \leq x \leq v_{k-1} \quad (3.3)$$

или

$$f(x) = f(v_{k-1}) + 2(x - v_{k-1}) \sum_{i=k}^N \prod_{j=0}^{i-1} v_j, \quad v_k \leq x \leq v_{k-1}.$$

График функции $y = f(x)$ представляет собой ломаную линию, поднимающуюся от точки $(0, -1)$ до точки $(1, 1)$ (см. рис. 7.2).

В уравнении (3.2) для любого n под знаком максимума стоят монотонно возрастающая функция $f(x)$ и функция $Ev(x_{n+1}, n+1)$, значения которой не зависят от x . Это позволяет упростить уравнение оптимальности

$$v(x, n) = \begin{cases} Ev(x_{n+1}, n+1), & 0 \leq x \leq u_n, \\ f(x), & u_n \leq x \leq 1, \end{cases}$$

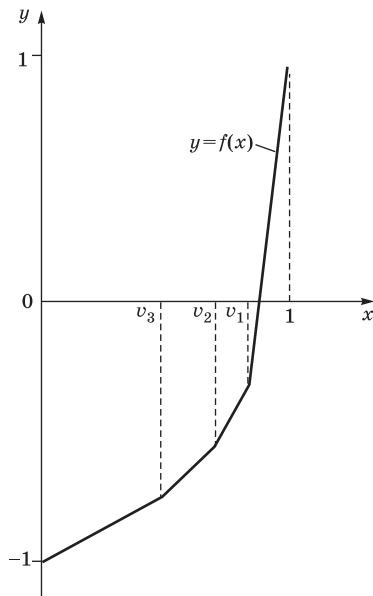


Рис. 7.2

где u_n — точка пересечения функций $y = f(x)$ и $y = Ev(x_{n+1}, n + 1)$. Таким образом, если на n -м шаге наблюдение превышает u_n , следует прекратить наблюдения, в противном случае — продолжить их. Очевидно, что

$$u_{N-1} < \dots < u_2 < u_1.$$

Потребуем выполнения равенства

$$u_n = v_n, \quad n = 1, \dots, N-1.$$

Это приводит к системе условий

$$f(u_n) = Ev(u_{n+1}, n+1), \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (3.4)$$

При $n = N-1$ из (3.4) следует

$$f(u_{N-1}) = Ev(u_N, N) = \int_0^1 f(t) dt. \quad (3.5)$$

Согласно (3.3) получаем

$$\sum_{i=1}^{N-1} u_j(1 - u_i) + 2 \prod_{i=1}^{N-1} u_i u_{N-1} = 1. \quad (3.6)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} f(u_{N-2}) &= Ev(u_{N-1}, N-1) = \int_0^{u_{N-1}} v(t, N-1) dt + \int_{u_{N-1}}^1 f(t) dt = \\ &= \int_0^{u_{N-1}} f(u_{N-1}) dt + \int_{u_{N-1}}^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \frac{u_{N-1}}{2} [1 + f(u_{N-1})]. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (3.5) и обозначений $u_N = 0$, $f(u_N) = -1$ вытекает

$$f(u_{N-2}) - f(u_{N-1}) = \frac{u_{N-1} + u_N}{2} (f(u_{N-1}) - f(u_N)).$$

По индукции нетрудно доказать справедливость равенства

$$\begin{aligned} f(u_{n-1}) - f(u_n) &= \frac{u_n + u_{n+1}}{2} (f(u_n) - f(u_{n+1})), \\ n &= 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (3.3) находим

$$f(u_n) - f(u_{n+1}) = 2 \sum_{k=n+1}^{N-1} \prod_{j=1}^{k-1} u_j (u_n - u_{n+1}),$$

что вместе с (3.7) дает

$$2 \sum_{k=n}^{N-1} \prod_{j=1}^{k-1} u_j (u_{n-1} - u_n) = 2 \sum_{k=n+1}^{N-1} \prod_{j=1}^{k-1} u_j \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{2}.$$

Сокращая на $2 \prod_{j=1}^{n-1} u_j$, получим

$$(u_{n-1} - u_n) \left[1 + \sum_{k=n+1}^{N-1} \prod_{j=n}^{k-1} u_j \right] = \sum_{k=n+1}^{N-1} \prod_{j=n}^{k-1} u_j \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{2}.$$

Теперь выразим из последнего соотношения u_{n-1} :

$$u_{n-1} = u_n + \frac{u_n - u_{n+1}}{2} \frac{\sum_{k=n+1}^{N-1} \prod_{j=n}^{k-1} u_j}{1 + \sum_{k=n+1}^{N-1} \prod_{j=n}^{k-1} u_j}, \quad n = 2, \dots, N-1. \quad (3.8)$$

Несложный анализ системы уравнений (3.6), (3.8) показывает, что существует решение этой системы, удовлетворяющее условию $u_{N-1} < \dots < u_2 < u_1$, причем при возрастании N значение u_1 становится сколь угодно близко к единице, а u_{N-1} стремится к некоторому пороговому значению $u_{N-1}^* \approx 0.715$. В табл. 7.1 приведены численные значения оптимальных порогов для различных N .

Таблица 7.1

N	u_1^*	u_2^*	u_3^*	u_4^*	u_5^*
2	0.618				
3	0.742	0.657			
4	0.805	0.768	0.676		
5	0.842	0.821	0.781	0.686	
6	0.869	0.855	0.833	0.791	0.693

Таким образом, если игрок II использует стратегию $\sigma(u^*)$, определенную с помощью порогов $u_n^*, n = 1, \dots, N-1$, удовлетворяющих системе (3.6), (3.8), то согласно методу обратной индукции наилучший ответ игрока I также будет иметь пороговый вид с теми же пороговыми значениями, что и у игрока II, а это будет обозначать оптимальность данной стратегии в этой игре. Подытожим все приведенные рассуждения в теореме.

Теорема 7.1. В игре $\Gamma_N(G)$ равновесие достигается среди пороговых стратегий вида

$$\tau(u^*) = \begin{cases} 1, & \text{если } G(x_1) \geq u_1^*, \\ n, & \text{если } G(x_1) < u_1^*, \dots, G(x_{n-1}) < u_{n-1}^*, G(x_n) \geq u_n^*, \\ N, & \text{если } G(x_1) < u_1^*, \dots, G(x_{N-1}) < u_{N-1}^* \end{cases}$$

и

$$\sigma(u^*) = \begin{cases} 1, & \text{если } G(y_1) \geq u_1^*, \\ n, & \text{если } G(y_1) < u_1^*, \dots, G(y_{n-1}) < u_{n-1}^*, G(y_n) \geq u_n^*, \\ N, & \text{если } G(y_1) < u_1^*, \dots, G(y_{N-1}) < u_{N-1}^*, \end{cases}$$

где $u_n^*, n = 1, \dots, N-1$ удовлетворяют системе (3.6), (3.8).

Например, при $n = 3$ из системы (3.6), (3.8) находим, что оптимальные пороги равны $u_1^* = 0.742$, $u_2^* = 0.657$, а при $n = 4$ оптимальные пороги $u_1^* = 0.805$, $u_2^* = 0.768$, $u_3^* = 0.676$.

Мы получили, что равновесие по Нэшу в данной игре с оптимальной остановкой последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин достигается в классе чистых стратегий. Игроки вычисляют в начале игры свои пороги и затем сравнивают поступающие наблюдения с этими порогами, и если они превосходят их значения, прекращают наблюдения. Однако равновесие не обязательно состоит из чистых стратегий. Ниже будет найдено равновесие в игре со случайными блужданиями, и оно будет достигаться среди смешанных стратегий.

§ 7.4. ИГРА С ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКОЙ НА СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЯХ

Рассмотрим игру $\Gamma(a, b)$ двух лиц, определенную на случайных блужданиях следующего вида. Пусть x_n и y_n — симметричные случайные блуждания на множестве целых чисел $E = \{0, 1, \dots, k\}$, начинающиеся соответственно в состояниях a и b в E . Пусть для определенности $a \leq b$. В любом из внутренних состояний $i \in E$ блуждание с одинаковой вероятностью сдвигается влево или вправо и поглощается на его концах (в точках 0 и k). Игроки I и II наблюдают за блужданиями x_n и y_n и могут остановить их в какие-то моменты времени τ и σ . Эти случайные моменты времени есть стратегии игроков. Тогда если $x_\tau > y_\sigma$, выигрывает первый игрок. Если $x_\tau < y_\sigma$, выигрывает второй игрок. Если же $x_\tau = y_\sigma$, объявляется ничья. Игроки не обладают никакой информацией о поведении противника.

Как и раньше, данная игра является антагонистической с функцией выигрыша

$$H(\tau, \sigma) = E\{I_{\{x_\tau > y_\sigma\}} - I_{\{x_\tau < y_\sigma\}}\}.$$

Для решения игровой задачи воспользуемся приемом, описанным в начале данной главы, а именно сведем данную игровую задачу к решению двух задач оптимальной остановки. Вначале заметим, что для

того, чтобы найти равновесие, достаточно найти такую пару стратегий (τ^*, σ^*) игроков I и II, чтобы выполнялось

$$\sup_{\tau} H(\tau, \sigma^*) = \inf_{\sigma} H(\tau^*, \sigma) = H^*.$$

Тогда (τ^*, σ^*) есть равновесие и H^* значение игры $\Gamma(a, b)$.

Решение первой задачи $\sup_{\tau} H(\tau, \sigma^*)$ есть задача оптимальной остановки $\sup_{\tau} Ef(x_{\tau})$ для первого игрока с функцией выигрыша при остановке

$$f_1(x) = P\{y_{\sigma^*} < x\} - P\{y_{\sigma^*} > x\}, \quad x = 0, 1, \dots, k.$$

Для ее решения будем использовать метод обратной индукции. Аналогично решение второй задачи $\inf_{\sigma} H(\tau^*, \sigma)$ есть задача оптимальной остановки $\sup_{\sigma} Ef(y_{\sigma})$ для второго игрока с функцией выигрыша при остановке

$$f_2(y) = P\{x_{\tau^*} < y\} - P\{x_{\tau^*} > y\}, \quad y = 0, \dots, k.$$

Чтобы упростить вид функций выигрыша при остановке, введем в рассмотрение векторы $s = (s_0, s_1, \dots, s_k)$ и $t = (t_0, t_1, \dots, t_k)$, где

$$s_i = P\{x_{\tau} = i\}, \quad t_i = P\{y_{\sigma} = i\}, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

которые будем называть *спектрами стратегий* τ и σ . Теперь если стратегия σ зафиксирована, то задача нахождения $\sup_{\tau} H(\tau, \sigma)$ сводится к задаче оптимальной остановки случайного блуждания x_n с функцией выигрыша при остановке

$$f_1(x) = 2 \sum_{i=0}^x t_i - t_x - 1, \quad x = 0, 1, \dots, k. \quad (4.1)$$

Аналогично задача нахождения $\inf_{\sigma} H(\tau, \sigma)$ при фиксированном τ есть задача оптимальной остановки случайного блуждания y_n с функцией выигрыша при остановке

$$f_2(y) = 2 \sum_{i=0}^y s_i - s_y - 1, \quad y = 0, 1, \dots, k. \quad (4.2)$$

Для решения данных задач оптимальной остановки воспользуемся методом обратной индукции и запишем уравнение оптимальности.

Для определенности сделаем это для первого игрока. Обозначим оптимальный ожидаемый выигрыш игрока I в ситуации, когда блуждание находится в состоянии $x_n = x \in E$ через

$$v_1(x) = \sup_{\tau} E\{f_1(x_{\tau})/x_n = x\}.$$

В данном состоянии игрок, остановив наблюдения, получит выигрыш $f(x_n) = f(x)$. Если же он продолжит наблюдения и далее будет действовать оптимально, его ожидаемый выигрыш составит величину

$$E\{v_1(x_{n+1})/x_n = x\} = \frac{1}{2}v_1(x-1) + \frac{1}{2}v_1(x+1).$$

Сравнивая эти выигрыши, можно построить оптимальную стратегию. Тогда уравнение оптимальности примет рекуррентный вид

$$v_1(x) = \max\{f_1(x), \frac{1}{2}v_1(x-1) + \frac{1}{2}v_1(x+1)\}, \quad x = 1, \dots, k-1. \quad (4.3)$$

В поглощающих состояниях

$$v_1(0) = f_1(0), \quad v_1(k) = f_1(k).$$

Уравнение (4.3) удобно решать геометрически. Из (4.3) следует, что его решение удовлетворяет условиям $v_1(x) \geq f_1(x)$, $x = 0, \dots, k$, т. е. график функции $y = v_1(x)$ лежит выше графика $y = f_1(x)$. Кроме того,

$$v_1(x) \geq \frac{1}{2}v_1(x-1) + \frac{1}{2}v_1(x+1), \quad x = 1, \dots, k-1.$$

Последнее условие означает, что функция $v_1(x)$ является вогнутой. Таким образом, для нахождения решения (4.3) достаточно построить график функции $y = f_1(x)$, $x = 0, \dots, k$ и натянуть поверх него нитку. Положение нитки и даст решение $v_1(x)$. Тем самым будет определена и оптимальная стратегия игрока I: в состояниях $S = \{x : v_1(x) = f_1(x)\}$ нужно останавливаться, а в состояниях $C = \{x : v_1(x) > f_1(x)\}$ — продолжать наблюдения. Эти же рассуждения относятся и к решению уравнения оптимальности для второго игрока.

Таким образом, если функции $v_1(x)$ и $v_2(y)$ найдены, то

$$\sup_{\tau} H(\tau, \sigma^*) = \sup_{\tau} E f_1(x_{\tau}) = v_1(a),$$

$$\inf_{\sigma} H(\tau^*, \sigma) = -\sup_{\sigma} E f_2(y_{\sigma}) = -v_2(b).$$

Тогда если для некоторого набора стратегий (τ^*, σ^*) будет иметь место равенство

$$v_1(a) = -v_2(b) = H^*, \quad (4.4)$$

то это будет означать оптимальность стратегий (τ^*, σ^*) .

Перед тем как перейти к построению оптимальных стратегий, отметим некоторые свойства спектров стратегий.

7.4.1. Свойства спектров стратегий

Покажем, что множество спектров стратегий формирует некоторый многогранник в пространстве R^{k+1} . Это позволит нам представить решение соответствующей задачи оптимальной остановки как некоторую задачу линейного программирования.

Теорема 7.2. *Для того чтобы вектор $s = (s_0, \dots, s_k)$ представлял спектр некоторой стратегии τ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$\sum_{i=0}^k i s_i = a, \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=0}^k s_i = 1, \quad (4.6)$$

$$s_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, k. \quad (4.7)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть τ — момент остановки и s — его спектр. Из определения s немедленно следует справедливость условий (4.6)–(4.7). Условие (4.5) следует из следующих рассуждений. Для симметричного случайного блуждания имеет место замечательное соотношение

$$E\{x_{n+1}/x_n = x\} = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x+1) = x,$$

или

$$E\{x_{n+1}/x_n\} = x_n. \quad (4.8)$$

В этом случае говорят, что последовательность $x_n, n \geq 0$ образует *мартингал*. Из условия (4.8) следует, что среднее значение мартингала не меняется во времени, т. е. $E x_n = E x_0, n = 1, 2, \dots$. В частности, это верно и для момента остановки τ . Отсюда

$$E x_\tau = E x_0 = a.$$

Замечая, что

$$Ex_\tau = \sum_{i=0}^k iP\{x_\tau = i\} = \sum_{i=0}^k is_i,$$

приходим к (4.5).

Отсюда, в частности, следует, что момент остановки τ_{ij} , определенный двумя порогами i и j ($0 \leq i < a < j \leq k$), который предписывает продолжать наблюдения до тех пор, пока блуждание не попадет в одно из состояний i или j , имеет согласно (4.5)–(4.6) спектр, удовлетворяющий условиям

$$s_i + s_j = 1, \quad s_i \cdot i + s_j \cdot j = a,$$

откуда $s_i = \frac{j-a}{j-i}$, $s_j = \frac{a-i}{j-i}$.

Таким образом, спектр стратегии τ_{ij} равен

$$s_{ij} = \left(0, \dots, 0, \frac{j-a}{j-i}, 0, \dots, 0, \frac{a-i}{j-i}, 0, \dots, 0 \right). \quad (4.9)$$

Также заметим, что спектр стратегии $\tau_0 \equiv 0$ равен

$$s_0 = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad (4.10)$$

где все компоненты кроме a -й равны нулю.

Достаточность. Множество S всех векторов $s = (s_0, \dots, s_k)$, удовлетворяющих условиям (4.5)–(4.7), является выпуклым многогранником и, следовательно, совпадает с выпуклой оболочкой конечного числа крайних точек.

Точка s выпуклого множества S называется *крайней точкой*, если она не может быть представлена в виде

$$s = (s^{(1)} + s^{(2)})/2, \quad \text{где } s^{(1)} \neq s^{(2)} \text{ и } s^{(1)}, s^{(2)} \in S.$$

Покажем, что крайние точки множества S имеют вид (4.9), (4.10). Действительно, любой вектор s вида (4.5)–(4.7), у которого по крайней мере три компоненты отличны от нуля (т.е. s_l, s_i, s_j , где $0 \leq l < i < j \leq k$), может быть представлен как полусумма векторов

$$s^{(1)} = (\dots, s_l - e_1, \dots, s_i + e, \dots, s_j - e_2, \dots),$$

$$s^{(2)} = (\dots, s_l + e_1, \dots, s_i - e, \dots, s_j + e_2, \dots),$$

где $e_1 + e_2 = e$, $e_1 = \frac{j-i}{i-l} \cdot e$, $0 < e \leq \min\{s_l, s_i, s_j\}$ принадлежат множеству S .

Таким образом, все крайние точки многогранника S могут иметь вид (4.9) либо (4.10). Следовательно, любой вектор s , удовлетворяющий условиям (4.5)–(4.7), может быть представлен как выпуклая комбинация векторов s_0, s_{ij} :

$$s = \nu_0 s_0 + \sum \nu_{ij} s_{ij},$$

где $\nu_0 \geq 0, \nu_{ij} \geq 0$,

$$\nu_0 + \sum \nu_{ij} = 1$$

(здесь суммирование идет по всем (i, j) , таким что $0 \leq i < a < j \leq k$). Но тогда, выбирая стратегию τ_0 с вероятностью ν_0 и стратегии τ_{ij} — с вероятностями ν_{ij} , мы получим смешанную стратегию ν , имеющую в точности спектр s . Это доказывает достаточность условий (4.5)–(4.7). Теорема доказана.

7.4.2. Построение равновесия

Перейдем теперь к нахождению равновесия (τ^*, σ^*) . Согласно теореме 7.2 достаточно ограничиться построением спектров оптимальных стратегий (s^*, t^*) . Это векторы, удовлетворяющие условиям

$$s_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, k; \quad \sum_{i=0}^k s_i = 1; \quad \sum_{i=0}^k s_i i = a; \quad (4.11)$$

$$t_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, k; \quad \sum_{i=0}^k t_i = 1; \quad \sum_{i=0}^k t_i i = b. \quad (4.12)$$

Лемма 7.2. *Существует такая стратегия σ^* игрока II, что*

$$\sup_{\tau} H(\tau, \sigma^*) = (a - b)/b. \quad (4.13)$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 7.2 и вместо стратегии σ^* построим ее спектр t^* . Сначала предположим, что

$$k < 2b - 1. \quad (4.14)$$

Определим вектор $t^* = (t_0, t_1, \dots, t_k)$ соотношениями

$$t_i = \begin{cases} 1/b, & i = 1, 3, 5, \dots, 2(k-b)-1, \\ 1 - (k-b)/b, & i = k, \\ 0, & \text{для остальных } i \in E. \end{cases} \quad (4.15)$$

Проверим, что вектор вида (4.15) удовлетворяет условиям (4.12). Действительно, для всех $i \in E$ имеет место $t_i \geq 0$ (для $i = k$ это следует из (4.14)). Затем находим

$$\sum_{i=0}^k t_i = \frac{1}{b}(k-b) + 1 - \frac{k-b}{b} = 1,$$

$$\sum_{i=0}^k t_i i = \frac{1}{b} [1 + 3 + \dots + 2(k-b) - 1] + k \left(1 - \frac{k-b}{b}\right) = b.$$

Следовательно, условия теоремы 7.2 выполнены, и тогда вектор t^* представляет собой спектр какой-то стратегии σ^* .

Найдем теперь $\sup_{\tau} H(\tau, \sigma^*)$. Для этого, как мы уже отмечали, нужно решить задачу оптимальной остановки с функцией выигрыша при остановке $f_1(x)$ вида (4.1). Подставив (4.15) в (4.1), находим

$$f_1(i) = \begin{cases} i/b - 1, & i = 0, \dots, 2(k-b), \\ 2(k-b)/b - 1, & i = 2(k-b) + 1, \dots, k-1, \\ k/b - 1, & i = k. \end{cases}$$

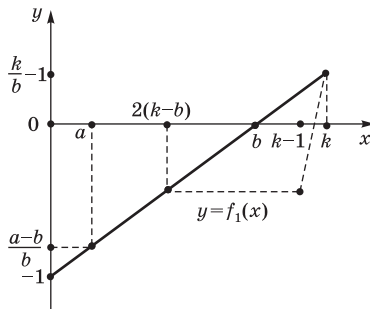


Рис. 7.3

Для решения уравнения оптимальности воспользуемся геометрическими соображениями, приведенными выше. На рис. 7.3 представлен график функции $y = f_2(x)$, которая представляет собой прямую линию, соединяющую на рисунке точки $(x=0, y=-1)$ и $(x=k, y=k/b-1)$. Уравнение этой прямой линии есть $y = x/b - 1$. Но тогда решением уравнения оптимальности (4.3) будет функция

$$v_1(i) = i/b - 1.$$

В состоянии $i = a$ отсюда находим

$$v_1(a) = (a - b)/b,$$

что доказывает (4.13).

Если $k \geq 2b - 1$, определим t^* в виде

$$t_i = \begin{cases} 1/b, & \text{если } i = 1, 3, \dots, 2b - 1, \\ 0, & \text{для остальных } i \in E. \end{cases} \quad (4.16)$$

Вектор t^* вида (4.16) удовлетворяет условиям (4.12) и, следовательно, есть спектр некоторой стратегии. Функция $f_1(x)$ принимает вид

$$f_1(i) = \begin{cases} i/b - 1, & i = 0, \dots, 2b - 1, \\ 1, & i = 2b, \dots, k. \end{cases}$$

Ее график представлен на рис. 7.4, откуда мы находим, что функция $v_1(x)$ совпадает с функцией $f_1(x)$. Отсюда следует, что на интервале $[0, 2b]$ $v_1(x)$ имеет вид

$$v_1(i) = i/b - 1,$$

что опять приводит к справедливости (4.13). Лемма доказана.

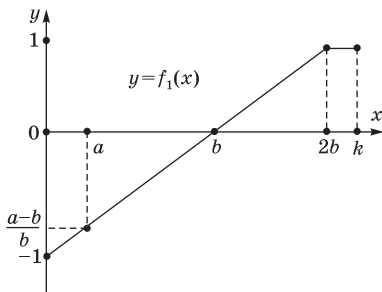


Рис. 7.4

Лемма 7.3. Существует стратегия τ^* игрока I , такая что

$$\inf_{\sigma} H(\tau^*, \sigma) = (a - b)/b. \quad (4.17)$$

Доказательство проведем аналогично лемме 7.1. Сначала рассмотрим случай

$$k \leq 2b.$$

Определим вектор $s^* = (s_0, s_1, \dots, s_k)$ соотношениями

$$s_i = \begin{cases} 1 - \frac{a}{b+1}, & \text{если } i = 0, \\ \frac{a}{b(b+1)}, & \text{если } i = 2, 4, \dots, 2(k-b-1), \\ \frac{a(2b-k+1)}{b(b+1)}, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{для остальных } i \in E. \end{cases} \quad (4.18)$$

Легко проверить, что вектор вида (4.18) удовлетворяет условиям (4.11) и, следовательно, согласно теореме 7.2 представляет собой спектр некоторой стратегии τ^* игрока I. Подставив (4.18) в (4.2), находим

$$f_2(i) = \begin{cases} -\frac{a}{b+1}, & i = 0, \\ \frac{a}{b(b+1)}(i-b) + \frac{b-a}{b}, & i = 1, \dots, 2(k-b)-1, \\ f_2(2(k-b)-1), & i = 2(k-b), \dots, k-1, \\ \frac{a}{b(b+1)}(k-b) + \frac{b-a}{b}, & i = k. \end{cases} \quad (4.19)$$

График функции (4.19) представлен на рис. 7.5.

Прямая линия, уравнение которой имеет вид

$$y = \frac{a}{b(b+1)}(x-b) + \frac{b-a}{b},$$

совпадает в точках $x = 1, 2, \dots, 2(k-b)$, $2(k-b)+1, \dots, k-1$ и $x = 0$, как следует из (4.19), с графиком функции $y = f_2(x)$ и лежит над ней в точках $x = 2(k-b)$, $2(k-b)+1, \dots, k-1$ и $x = 0$. Последнее приводит к соотношениям

$$y(0) = -\frac{a}{b+1} + \frac{b-a}{b} \geq -\frac{a}{b+1} = f_2(0).$$

Но тогда отсюда вытекает, что на интервале $[1, k]$ функция $v_2(x)$ имеет вид

$$v_2(i) = \frac{a}{b(b+1)}(i-b) + \frac{b-a}{b}$$

и, следовательно,

$$v_2(b) = \frac{b-a}{b},$$

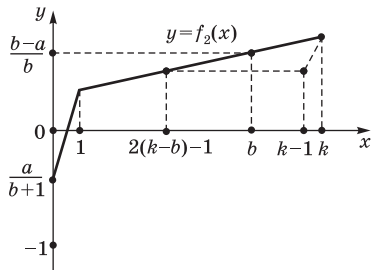


Рис. 7.5

что доказывает (4.17).

Пусть теперь $k \geq 2b + 1$. Определим спектр s^* в виде

$$s_i = \begin{cases} 1 - \frac{a}{b+1}, & \text{если } i = 0, \\ \frac{a}{b(b+1)}, & \text{если } i = 2, 4, \dots, 2b, \\ 0, & \text{для остальных } i \in E. \end{cases}$$

В этом случае

$$f_2(i) = \begin{cases} -\frac{a}{b+1}, & i = 0, \\ \frac{a}{b(b+1)}(i - b) + \frac{b-a}{b}, & i = \overline{1, 2b}, \\ 1, & i = \overline{2b+1, k}. \end{cases}$$

Из рис. 7.6 следует, что функция $v_2(x)$ совпадает с $f_2(x)$, отсюда

$$v_2(b) = f_2(b) = (b-a)/b,$$

что доказывает лемму 7.3.

Итак, если мы выберем стратегии τ^* и σ^* так, как показано в леммах 7.1 и 7.2, из соотношений (4.13), (4.17) будет следовать

$$\sup_{\tau} H(\tau, \sigma^*) = \inf_{\sigma} H(\tau^*, \sigma) = (a-b)/b.$$

А это в свою очередь приводит к следующему утверждению.

Теорема 7.3. Если $x_n(w)$, $y_n(w)$ — симметричные случайные блуждания на множестве E , то значение игры $\Gamma(a, b)$ равно

$$H^* = (a-b)/b.$$

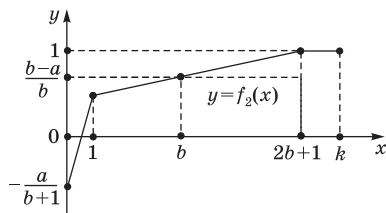


Рис. 7.6

Мы видим, что решение игровой задачи здесь лежит в классе смешанных стратегий, которые представляют собой вероятностные распределения на множестве двупороговых стратегий. Каждый из игроков выбирает с какой-то вероятностью пороги i, j слева и справа от начала блуждания и затем продолжает наблюдения до тех пор, пока блуждание не выйдет на эти границы. При этом значение игры равно вероятности того, что блуждание с началом в точке a , достигнет нуля прежде, чем точки b , взятой со знаком минус. Интересно, что оно не зависит от значения правой границы интервала блуждания.

§ 7.5. ИГРЫ НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА

Игры наилучшего выбора представляют собой вариант игр с оптимальной остановкой. Представим, что есть N объектов, упорядоченных по качеству. Наилучший объект имеет номер 1. Объекты поступают к игроку в случайном порядке, так что он может их сравнить между собой, но не может вернуться назад к уже просмотренным. Цель игрока — выбрать лучший объект. Такая задача имеет также название «задача о секретаре», «задача о невесте», «задача о парковке» и др.

В этой задаче мы имеем дело с особым процессом наблюдений. Опишем его. Будем считать, что все объекты перенумерованы $\{1, 2, \dots, N\}$, объект 1 лучший по качеству. Номер объекта будем называть его рангом. Объекты поступают в случайном порядке. Все перестановки $N!$ равновероятны. Обозначим a_n абсолютный ранг объекта, появившегося в момент n , $n = 1, \dots, N$. Проблема здесь в том, что игрок, получив объект в момент n , не знает его абсолютного ранга. Сравнивая объекты между собой, он знает лишь относительный ранг y_n данного объекта среди уже просмотренных, который равен

$$y_n = \sum_{i=1}^n I(a_i \leq a_n),$$

где $I(A)$ индикатор события A . Если все поступившие до момента n объекты имели ранг выше данного, то этот объект имеет относительный ранг 1. Таким образом, наблюдая относительные ранги y_n , игрок должен делать какие-то заключения об абсолютном ранге a_n . Сами относительные ранги y_n — независимые случайные величины, причем в силу равновероятности всех перестановок $P\{y_n = i\} = 1/n, i = 1, \dots, n$, т. е. относительный ранг n -го объекта с одинаковой вероятностью может быть равен любому значению от 1 до n . В задаче наилучшего выбора у игрока может быть два критерия: найти правило остановки τ , при котором достигается максимум вероятности найти лучший объект $P\{a_\tau = 1\}$, либо минимизировать ожидаемый ранг объекта $E\{a_\tau\}$. Остановимся вначале на задаче, в которой игрок заинтересован максимизировать вероятность найти лучший объект.

Введем в рассмотрение случайную последовательность $x_n = P\{a_n = 1/y_n\}, n = 1, 2, \dots, N$. Заметим, что для любого момента остановки τ

$$Ex_\tau = \sum_{n=1}^N E\{x_n I_{\{\tau=n\}}\} = \sum_{n=1}^N E\{P\{a_n = 1/y_n\} I_{\{\tau=n\}}\}.$$

Решение об остановке $\tau = n$ принимается на основании значения y_n , поэтому по свойству условных математических ожиданий

$$Ex_\tau = \sum_{n=1}^N E\{I_{\{a_n=1\}} I_{\{\tau=n\}}\} = E\{I_{\{a_\tau=1\}}\} = P\{a_\tau = 1\}.$$

Таким образом, задача нахождения правила остановки, которое максимизирует вероятность найти лучший объект, является задачей оптимальной остановки случайного процесса $x_n, n = 1, \dots, N$. Данная последовательность образует марковскую цепь на множестве состояний $E = \{0, 1, \dots, N\}$, где мы добавили состояние обрыва 0.

Лемма 7.4. *Справедливо соотношение*

$$x_n = P\{a_n = 1/y_n\} = \begin{cases} \frac{n}{N}, & \text{если } y_n = 1, \\ 0, & \text{если } y_n > 1. \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, что если $y_n > 1$, то данный объект не может быть лучшим, поэтому $x_n = P\{a_n = 1/y_n\} = 0$. Если же $y_n = 1$,

т. е. n -й объект лучший среди просмотренных, то

$$x_n = P\{a_n = 1/y_n = 1\} = \frac{P\{a_n = 1\}}{P\{a_n < \min\{a_1, \dots, a_{n-1}\}\}}.$$

В силу равновозможности всех перестановок $P\{a_n = 1\} = 1/N$. Вероятность $P\{a_n < \min\{a_1, \dots, a_{n-1}\}\}$, что в перестановке из n чисел минимальный элемент стоит на n -м месте, также равна $1/n$. Отсюда

$$x_n = P\{a_n = 1/y_n = 1\} = \frac{1/N}{1/n} = \frac{n}{N}.$$

Лемма доказана.

Из леммы 7.4 следует, что при оптимальном поведении мы должны останавливаться лишь на объектах с относительным рангом 1. Такие объекты будем называть **претендентами**. Итак, если в момент n поступает объект-претендент, то если мы выбираем его, вероятность того, что этот объект наилучший, равна n/N . Сравнивая выигрыш в случае остановки и продолжения наблюдений, можно найти оптимальное правило. Воспользуемся методом обратной индукции для нахождения оптимального правила. Определим его с помощью функции оптимального ожидаемого выигрыша $v_n, n = 1, \dots, N$.

Рассмотрим конечный момент $n = N$. Выигрыш игрока равен x_N . Это либо нуль, либо единица, в зависимости от того, является ли данный объект претендентом или нет. Положим $v_N = 1$.

На шаге $n = N - 1$, если игрок остановится, его выигрыш будет равен x_{N-1} (либо 0, либо $(N-1)/N$). Если же продолжит, то его ждет выигрыш

$$Ex_N = \frac{1}{N} \cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot 0 = \frac{1}{N}.$$

Сравнивая выигрыши, находим оптимальное правило

$$v_{N-1} = \max\{x_{N-1}, Ex_N\} = \max\left\{\frac{N-1}{N}, \frac{1}{N}\right\}.$$

На шаге $n = N - 2$ при остановке выигрыш равен x_{N-2} (либо 0, либо $(N-2)/N$). Если игрок продолжит, то с вероятностью $1/(N-1)$ претендент появится на шаге $N-1$ и с вероятностью

$$\left(1 - \frac{1}{N-1}\right) \frac{1}{N} = \frac{N-2}{(N-1)N}$$

на шаге N . Тогда его ждет выигрыш

$$Ex_{N-1} = \frac{1}{N-1} \frac{N-1}{N} + \frac{N-2}{(N-1)N} = \frac{N-2}{N} \left(\frac{1}{N-2} + \frac{1}{N-1} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_{N-2} &= \max\{x_{N-2}, Ex_{N-1}\} = \\ &= \max\left\{ \frac{N-2}{N}, \frac{N-2}{N} \left(\frac{1}{N-2} + \frac{1}{N-1} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Продолжая эти рассуждения дальше, мы приходим на шаге n к уравнению

$$v_n = \max\{x_n, Ex_{n+1}\} = \max\left\{ \frac{n}{N}, \frac{n}{N} \left(\sum_{i=n+1}^N \frac{1}{i-1} \right) \right\}, \quad n = N, \dots, 1.$$

Заметим, что если на n -м шаге игрок продолжит, то следующий претендент может появиться в момент $n+1$ с вероятностью $1/(n+1)$, в момент $i, i > n$ с вероятностью

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{i-1}\right) \frac{1}{i} = \frac{n}{(i-1)i}. \quad (5.1)$$

Правило остановки определяется следующим образом. Надо останавливаться на объектах, которые являются претендентами и для которых выигрыш при остановке больше или равен выигрышу при продолжении. Множество остановок определяется неравенствами

$$S = \left\{ n : \frac{n}{N} \geq \frac{n}{N} \left(\sum_{i=n+1}^N \frac{1}{i-1} \right) \right\},$$

откуда множество S имеет вид $[r, r+1, \dots, N]$, где r удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{i=r}^{N-1} \frac{1}{i} \leq 1 < \sum_{i=r-1}^{N-1} \frac{1}{i}. \quad (5.2)$$

Теорема 7.4. В игре наилучшего выбора, в которой нужно максимизировать вероятность найти наилучший объект, оптимальная стратегия состоит в том, что следует останавливаться на объекте, появившемся после момента времени r , который определяется соотношениями (5.2) и является наилучшим из всех рассмотренных.

При больших N неравенства (5.2) можно представить в интегральном виде

$$\int_{i=r}^{N-1} \frac{1}{t} dt \leq 1 < \int_{i=r-1}^{N-1} \frac{1}{t} dt,$$

откуда следует, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r}{N} = 1/e \approx 0.368$. Таким образом, при большом N следует останавливать свой выбор на первом претенденте после N/e просмотренных объектов.

Мы получили, что оптимальное поведение в данной игре описывается с помощью стратегий порогового вида $\tau(r)$. Игрок определяет некоторое пороговое значение r , до этого момента он лишь наблюдает за объектами и определяет среди них относительно лучший. После этого момента игрок останавливается на первом же объекте, который лучше всех предыдущих. Конечно, он может пропустить наилучший объект, если он появится среди первых $r-1$ объектов, или не дойти до него, остановившись на относительно лучшем, но не наилучшем. Чтобы вычислить вероятность найти наилучший объект при оптимальной стратегии, найдем спектр пороговой стратегии $\tau(r)$.

Лемма 7.5. Пусть в задаче наилучшего выбора игрок использует пороговую стратегию $\tau(r)$. Спектр такой стратегии (вероятности выбора i -го объекта) имеет вид

$$P\{\tau(r) = i\} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = 1, \dots, r-1, \\ \frac{r-1}{i(i-1)}, & \text{если } i = r, \dots, N, \\ \frac{r-1}{N}, & \text{если } i = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Стратегия $\tau(r)$ предписывает останавливаться только в состояниях $r, r+1, \dots, N$, поэтому $P\{\tau(r) = i\} = 0$ для $i = 1, \dots, r-1$. Событие $\{\tau = r\}$ эквивалентно тому, что в последовательности a_1, \dots, a_r последний элемент является минимальным. Вероятность этого события равна $P\{\tau(r) = r\} = 1/r$. Событие же $\tau(r) = i$, где $i = r+1, \dots, N$, эквивалентно тому, что в последовательности $a_1, \dots, a_{r-1}, a_r, \dots, a_i$ минимальный элемент стоит на i -м месте, а второй по величине элемент стоит на j -м месте, где $1 \leq j \leq r-1$. Вероятность такого события равна

$$P\{\tau = i\} = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(i-2)!}{i!} = \frac{(i-2)!}{i!} (r-1) = \frac{r-1}{i(i-1)}.$$

Вероятность обрыва $P\{\tau(r) = 0\}$ определим из равенства

$$P\{\tau(r) = 0\} = 1 - \sum_{i=r}^N \frac{r-1}{i(i-1)} = \frac{r-1}{N}.$$

Лемма доказана.

Вероятность обрыва $P\{\tau(r) = 0\} = (r-1)/N$ и есть вероятность того, что при данном пороговом правиле $\tau(r)$ игрок пропустит наилучший объект. Мы видим, что при оптимальном правиле поведения игрок гарантирует найти наилучший объект с вероятностью, приблизительно равной 0.368.

§ 7.6. ИГРА НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА, ГДЕ НУЖНО ОСТАНОВИТЬСЯ РАНЬШЕ ПРОТИВНИКА

В предыдущем параграфе игроки действовали автономно, поскольку их функция выигрыша зависела лишь от их собственного поведения. Рассмотрим теперь игру двух лиц с ненулевой суммой, в которой каждый из игроков заинтересован найти наилучший объект раньше противника. Интерпретацией такой игры может быть ситуация на рынке, когда фирмы–производители ждут благоприятного заказа или проводят исследования по усовершенствованию своего товара, и чем раньше это будет сделано, тем выгоднее это будет для фирмы.

Итак, рассмотрим игру следующего вида. Два игрока I и II получают в случайном порядке объекты, упорядоченные от 1 до N . У каждого из игроков свой набор объектов. Все $N!$ перестановок равновероятны. В какой-то момент времени игроки делают свой выбор. После этого выборы сравниваются. Тогда выигрыш каждого из игроков равен 1, если он остановился на наилучшем объекте и сделал это раньше противника. Будем использовать те же обозначения, что и в предыдущем параграфе. Абсолютные и относительные ранги для игроков I и II будем обозначать как a_n, a'_n и y_n, y'_n . Итак, функции выигрыша в этой игре имеют вид

$$\begin{aligned} H_1(\tau, \sigma) &= E\{I_{\{a_\tau=1, a'_\sigma \neq 1\}} + I_{\{a_\tau=1, a'_\sigma=1, \tau < \sigma\}}\} = \\ &= P\{a_\tau = 1, a'_\sigma \neq 1\} + P\{a_\tau = 1, a'_\sigma = 1, \tau < \sigma\}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

и

$$\begin{aligned} H_2(\tau, \sigma) &= E\{I_{\{a_\tau \neq 1, a'_\sigma=1\}} + I_{\{a_\tau=1, a'_\sigma=1, \tau > \sigma\}}\} = \\ &= P\{a_\tau \neq 1, a'_\sigma = 1\} + P\{a_\tau = 1, a'_\sigma = 1, \tau > \sigma\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Поскольку игра симметрична, достаточно найти оптимальную стратегию одного из игроков. Сделаем это, например, для первого игрока.

Зафиксируем стратегию σ игрока II и найдем наилучший ответ игрока I. Воспользуемся схемой, использованной в предыдущем параграфе. Введем в рассмотрение случайную последовательность

$$x_n = E\{I_{\{a_n=1, a'_\sigma \neq 1\}} + I_{\{a_n=1, a'_\sigma=1, n < \sigma\}} / y_n\}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Рассуждая так же, как выше, можно показать

$$E\{x_\tau\} = H_1(\tau, \sigma).$$

Таким образом, задача нахождения оптимального ответа игрока I представляет собой задачу оптимальной остановки случайной последовательности x_n , $n = 1, \dots, N$. Из независимости случайных величин a_n, a'_n следует, что x_n можно выразить в виде

$$\begin{aligned} x_n &= P\{a_n = 1/y_n\} [P\{a'_\sigma \neq 1\} + P\{a'_\sigma = 1, n < \sigma\}] = \\ &= P\{a_n = 1/y_n\} [1 - P\{a'_\sigma = 1\} + P\{a'_\sigma = 1, n < \sigma\}]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x_n = P\{a_n = 1/y_n\} [1 - P\{a'_\sigma = 1, \sigma \leq n\}], \quad n = 1, \dots, N.$$

Воспользовавшись леммой 7.4, приходим к представлению

$$x_n = \frac{n}{N} I_{\{y_n=1\}} [1 - P\{a'_\sigma = 1, \sigma \leq n\}], \quad n = 1, \dots, N. \quad (6.3)$$

Выражение (6.3) представляет собой выигрыш игрока I в случае остановки на n -м объекте. Теперь видно, что для нахождения наилучшего ответа игрока I нужно следить за появлением в последовательности объектов только претендентов. Опять воспользуемся для этого методом обратной индукции.

Оптимальные стратегии в данной игре будем искать среди пороговых стратегий $\tau(r)$, предписывающих прекращать наблюдения, как только последовательность x_n попадет в множество $\{r, r+1, \dots, N\}$. Предположим, что игрок II использует пороговую стратегию $\sigma(r)$. Тогда из (6.3) немедленно вытекает, что для $n \leq r-1$ выигрыш в случае остановки равен

$$x_n = \frac{n}{N} I_{\{y_n=1\}}, \quad n = 1, \dots, r-1.$$

Для $n \geq r$ вычислим вероятность $P\{a'_\sigma = 1, \sigma \leq n\}$:

$$\begin{aligned} P\{a'_\sigma = 1, \sigma \leq n\} &= \sum_{i=r}^n P\{a'_j = 1, \sigma = j\} = \\ &= \sum_{i=r}^n P\{\sigma = j\} P\{a'_j = 1/y'_j = 1\}. \end{aligned}$$

Из леммы 7.5 $P\{\sigma = j\} = \frac{r-1}{j(j-1)}$, а из леммы 7.4 $P\{a'_j = 1/y'_j = 1\} = j/N$. Отсюда

$$P\{a'_\sigma = 1, \sigma \leq n\} = \sum_{i=r}^n \frac{r-1}{j(j-1)} \frac{j}{N} = \frac{r-1}{N} \sum_{j=r}^n \frac{1}{j-1}.$$

Теперь из (6.3) находим

$$x_n = \frac{n}{N} I_{\{y_n=1\}} \left[1 - \frac{r-1}{N} \sum_{j=r}^n \frac{1}{j-1} \right], \quad n = r, \dots, N. \quad (6.4)$$

Итак, выигрыш при остановке в состоянии n определен, и мы можем перейти к нахождению оптимального правила остановки. Определим его с помощью функции оптимального ожидаемого выигрыша $v_n, n = 1, \dots, N$ и метода обратной индукции. Будем предполагать, что n -й поступивший объект является наилучшим из предыдущих.

Рассмотрим конечный момент $n = N$. Выигрыш игрока равен x_N . Согласно (6.4) это:

$$x_N = \left[1 - \frac{r-1}{N} \sum_{j=r}^N \frac{1}{j-1} \right].$$

На последнем шаге игрок всегда должен останавливаться, поскольку при продолжении его выигрыш будет равен нулю. Положим $v_N = x_N$.

На шаге $n = N - 1$, если игрок остановится, его выигрыш будет равен

$$x_{N-1} = \frac{N-1}{N} \left[1 - \frac{r-1}{N} \sum_{j=r}^{N-1} \frac{1}{j-1} \right].$$

Если же продолжит, то его ждет выигрыш

$$Ex_N = \frac{1}{N} \left[1 - \frac{r-1}{N} \sum_{j=r}^N \frac{1}{j-1} \right].$$

Сравнивая выигрыши, находим оптимальное правило

$$v_{N-1} = \max\{x_{N-1}, Ex_N\} = \max\left\{\frac{N-1}{N} \left[1 - \frac{r-1}{N} \sum_{j=r}^{N-1} \frac{1}{j-1}\right], \frac{1}{N} \left[1 - \frac{r-1}{N} \sum_{j=r}^N \frac{1}{j-1}\right]\right\}.$$

Продолжая эти рассуждения дальше и используя выражения (5.1) для вероятностей перехода, мы приходим на шаге n к уравнению

$$v_n = \max\{x_n, Ex_{n+1}\} = \max\left\{x_n, \sum_{i=n+1}^N \frac{n}{i(i-1)} x_i\right\}, \quad n = N, \dots, 1.$$

Вычислим ожидаемый выигрыш при продолжении на один шаг. Для $r \leq n \leq N-1$ имеет место представление

$$\begin{aligned} Ex_{n+1} &= \sum_{i=n+1}^N \frac{n}{i(i-1)} \frac{i}{N} \left[1 - \frac{r-1}{N} \sum_{j=r}^i \frac{1}{j-1}\right] = \\ &= \frac{n}{N} \sum_{i=n}^{N-1} \frac{1}{i} - \frac{n(r-1)}{N^2} \sum_{i=n}^{N-1} \sum_{j=r-1}^i \frac{1}{j}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Для $1 \leq n \leq r-1$ имеет место

$$\begin{aligned} Ex_{n+1} &= \sum_{i=n+1}^{r-1} \frac{n}{i(i-1)} \frac{i}{N} + \sum_{i=r}^N \frac{n}{i(i-1)} \frac{i}{N} \left[1 - \frac{r-1}{N} \sum_{j=r}^i \frac{1}{j-1}\right] = \\ &= \frac{n}{N} \sum_{i=n}^{N-1} \frac{1}{i} - \frac{n(r-1)}{N^2} \sum_{i=r-1}^{N-1} \sum_{j=r-1}^i \frac{1}{j}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

На рис. 7.7 изображены графики функций $y = x_n$ и $y = Ex_{n+1}$, $n = 0, \dots, N$ для случая $N = 10$ и $r = 4$.

Мы уже отмечали, что из симметрии задачи следует, что оптимальные стратегии игроков должны быть одинаковы. Поэтому выберем r таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$x_{r-1} < Ex_r, \quad x_r \geq Ex_{r+1}.$$

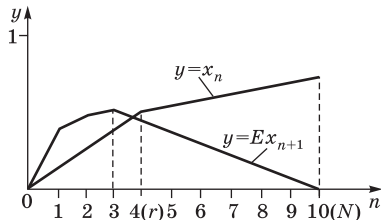


Рис. 7.7

Из (6.4)–(6.6) после упрощений следует, что такое r должно удовлетворять неравенствам

$$1 < \sum_{i=r-1}^{N-1} \frac{1}{i} \left(1 - \frac{r-1}{N} \sum_{j=r-1}^i \frac{1}{j} \right) \leq 1 + \frac{N-r}{N(r-1)}. \quad (6.7)$$

Теорема 7.5. Ситуация равновесия в игре скорейшего наилучшего выбора достигается среди стратегий порогового вида $(\tau(r), \sigma(r))$, где r удовлетворяет условиям (6.7).

Доказательство. Предположим, что игрок II использует стратегию $\sigma(r)$, где r удовлетворяет условиям (6.7). Докажем, что наилучший ответ игрока I представляет собой стратегию $\tau(r)$ с тем же порогом r . Для этого достаточно показать, что

$$x_n < Ex_{n+1}, \quad n = 1, \dots, r-1,$$

$$x_n \geq Ex_{n+1}, \quad n = r, \dots, N.$$

Для $n = 1, \dots, r-1$ согласно (6.6) имеет место

$$Ex_{n+1} - x_n = \frac{n}{N} \left[\sum_{i=n}^{r-2} \frac{1}{i} + \sum_{i=r-1}^{N-1} \frac{1}{i} \left(1 - \frac{r-1}{N} \sum_{j=r-1}^i \frac{1}{j} \right) - 1 \right].$$

Это выражение строго положительно в силу условия (6.7).

Если же $n = r, \dots, N$, то согласно (6.4), (6.5) находим

$$Ex_{n+1} - x_n = \frac{n}{N} \left[\sum_{i=n}^{N-1} \frac{1}{i} \left(1 - \frac{r-1}{N} \sum_{j=r-1}^i \frac{1}{j} \right) - \right. \\ \left. - 1 + \frac{r-1}{N} \sum_{i=r-1}^{n-1} \frac{i}{i} \right] = \frac{n}{N} G(n).$$

Выражение в квадратных скобках $G(n)$ в точке $n = r$ в силу второго условия (6.7) неположительно. Это свойство выполняется и в остальных точках $n = r+1, \dots, N-1$, поскольку функция $G(n)$ не возрастает по n , что вытекает из соотношений

$$G(n+1) - G(n) = -\frac{1}{n} \left[1 - \frac{r-1}{N} \sum_{i=r-1}^n \frac{1}{i} - \frac{r-1}{N} \right]$$

и неотрицательности выражения

$$1 - \frac{r-1}{N} \sum_{i=r-1}^n \frac{1}{i} - \frac{r-1}{N}, \quad n = r, \dots, N-1.$$

Последнее следует из неравенств

$$1 - \frac{r-1}{N} \sum_{i=r-1}^n \frac{1}{i} - \frac{r-1}{N} \geq 1 - \frac{r-1}{N} \sum_{i=r-1}^{N-1} \frac{1}{i} - \frac{r-1}{N} \geq \\ \geq \frac{r-1}{N} \left(\frac{N-r+1}{r-1} - \sum_{i=r-1}^{N-1} \frac{1}{i} \right) \geq 0.$$

Теорема доказана.

На рис. 7.8 представлены оптимальные пороги в задаче наискорейшего наилучшего выбора для различных N .

В заключение исследуем асимптотический вариант этой игровой задачи, когда $N \rightarrow \infty$. Предположим, что отношение r/N стремится к некоторому значению $z \in [0, 1]$. Условия (6.7) для больших N превращаются в уравнение

$$-\ln z - z \ln^2 \left(\frac{z}{2} \right) = 1.$$

Его решение $z^* \approx 0.295$ и дает асимптотически оптимальное соотношение r/N . Мы видим, что, в отличие от решения 0.368 предыдущей задачи, теперь нужно останавливаться быстрее. Ошибки при этом возрастут, но это необходимо для того, чтобы опередить противника.

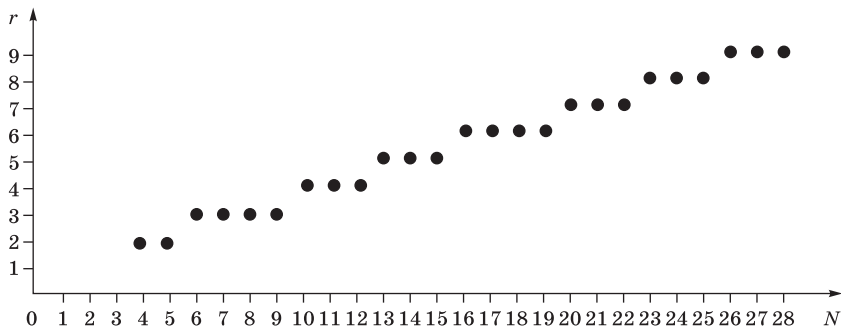


Рис. 7.8

§ 7.7. ИГРА НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА С РАНГОВЫМ КРИТЕРИЕМ. ЛОТЕРЕЯ

Если в рассмотренных выше играх критерием являлась вероятность выбора наилучшего объекта, или объекта ранга 1, то теперь предположим, что игроки заинтересованы в минимизации ожидаемого ранга выбранного объекта.

Рассмотрим следующую игру наилучшего выбора. Определенное число N кандидатов интервьюируются на позицию секретаря. Они представляют себя один за другим, и все $N!$ перестановок равновероятны. Два игрока I и II одновременно интервьюируют n -го кандидата и определяют его или ее относительный ранг y для I и z для II относительно уже просмотренных. Наилучший кандидат имеет ранг 1. Данные игроки могут представлять, например, президента компании и его заместителя. Президент, скажем, заинтересован в профессиональных способностях кандидата, а вице-президент — в знании иностранных языков у кандидата. Предположим, что данные способности кандидатов (их относительные ранги) являются независимыми для обоих игроков. У каждого из игроков есть две возможности: либо принять кандидата A , либо отвергнуть R . Если выбор игроков есть $(R - R)$, то n -й кандидат отвергается и приглашается $(n + 1)$ -й кандидат. Если выбор есть $(A - A)$, то игра заканчивается с выигрышами для игроков, равными их абсолютным рангам. Если выбор игроков различается, разыгрывается лотерея. При этом принимается решение, которое было сделано игроком I с вероятностью p или игроком II с вероятностью $\bar{p} = 1 - p$. Игра справедлива, если $p = 1/2$. Если все кандидаты за исключением последнего были отвергнуты, то на последнем шаге

принимается решение $(A - A)$. Каждый из игроков заинтересован минимизировать ожидаемый ранг выбранного кандидата. Обозначим данную игру $\Gamma_N(p)$.

Итак, игроки наблюдают последовательность относительных рангов $\{(y_n, z_n)\}_{i=1}^n$. В силу равновозможности всех перестановок относительные ранги распределены равномерно и могут принимать любые значения от 1 до n с одинаковой вероятностью,

$$P\{y_n = y, z_n = z\} = n^{-2},$$

$$\forall y, z = 1, 2, \dots, n.$$

Предположим также, что $\{y_n\}_{n=1}^N$ и $\{z_n\}_{n=1}^N$ независимы.

Лемма 7.6. *Предположим, что относительный ранг кандидата на n -м шаге равен y . Тогда математическое ожидание его абсолютно-го ранга равно*

$$E\{a_n/y_n = y\} = Q(n, y) = \frac{N+1}{n+1}y.$$

Доказательство. Пусть относительный ранг n -го кандидата равен y . Найдём вероятность $P\{a_n = r | y_n = y\}$ того, что абсолютный ранг этого кандидата равен r , где $r = y, y+1, \dots, N-n+y$. Воспользуемся тем, что событие, заключающееся в том, что после выбора n объектов последний объект, имеющий относительный ранг y , имеет абсолютный ранг r , эквивалентно событию, когда при выборке n объектов $k_1, \dots, k_{y-1}, k_y, \dots, k_n$ из общего числа N объектов $1, 2, \dots, r-1, r, \dots, N$ объекты k_1, \dots, k_{y-1} будут выбраны из объектов $1, \dots, r-1$, а объекты k_y, \dots, k_n будут выбраны из объектов r, \dots, N . Тогда нужная вероятность равна

$$P\{a_n = r | y_n = y\} = \frac{\binom{r-1}{y-1} \binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}, \quad (7.1)$$

$$r = y, y+1, \dots, N-n+y.$$

Формула (7.1) определяет отрицательное гипергеометрическое распределение. Теперь мы можем вычислить ожидаемый абсолютный ранг

n -го кандидата при условии, что его относительный ранг был равен y .

$$\begin{aligned} Q(n, y) &\equiv \sum_{r=y}^{N-(n-y)} r \binom{r-1}{y-1} \binom{N-r}{n-y} / \binom{N}{n} = \\ &= \frac{N+1}{n+1} y \sum_{r=y}^{N-(n-y)} \binom{r}{y} \binom{N-r}{n-y} / \binom{N+1}{n+1} = \frac{N+1}{n+1} y. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Итак, после поступления n -го кандидата, игроки наблюдают относительные ранги $(y_n, z_n) = (y, z)$. Если оба игрока выбирают $(R - R)$, n -й кандидат отвергается, и игроки интервьюируют $(n+1)$ -го кандидата и переходят в состояние y_{n+1}, z_{n+1} . Если выбор игроков $(A - A)$, игра заканчивается с выигрышами $\frac{N+1}{n+1}y$ для I и $\frac{N+1}{n+1}z$ для II. При разных выборах используется лотерея и выбирается решение игрока I (или II) с вероятностью p (соответственно $1 - p$). На последнем шаге всегда принимается последний кандидат.

Определим состояние (n, y, z) , в котором:

- 1) первые $n-1$ кандидатов были отвергнуты и игрокам предъявлен n -й кандидат;
 - 2) относительные ранги текущего кандидата равны $y_n = y$ и $z_n = z$.
- Обозначим u_n, v_n оптимальные ожидаемые значения выигрышей игроков на шаге n , когда первые n кандидатов были отвергнуты. Воспользуемся методом обратной индукции и выпишем уравнение оптимальности.

$$(u_{n-1}, v_{n-1}) = n^{-2} \sum_{y, z=1}^n Val M_n(y, z), \quad (7.2)$$

где $Val M_n(y, z)$ — значение игры с матрицей $M_n(y, z)$ вида

	R	A	
R	u_n, v_n	$\bar{p}Q(n, y) + pu_n,$ $\bar{p}Q(n, z) + pv_n$	
A	$pQ(n, y) + \bar{p}u_n,$ $pQ(n, z) + \bar{p}v_n$	$Q(n, y), Q(n, z)$	(7.3)

$$\left(n = 1, 2, \dots, N-1; u_{N-1} = v_{N-1} = \frac{1}{N} \sum_{y=1}^N y = \frac{N+1}{2} \right).$$

Без ограничения общности предположим $1/2 \leq p \leq 1$.

Теорема 7.6. *Оптимальные стратегии игроков в игре с матрицей (7.3) имеют вид:*

- игрок I выбирает $A(R)$, если $Q(n, y) \leq (>)u_n$, независимо от z ;
- игрок II выбирает $A(R)$, если $Q(n, z) \leq (>)v_n$, независимо от y .

Значения u_n, v_n удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$u_{n-1} = pE \left[Q(n, y_n) \wedge u_n \right] + \\ + \bar{p}E \left[\frac{N+1}{2} I\{Q(n, z_n) \leq v_n\} + u_n I\{Q(n, z_n) > v_n\} \right], \quad (7.4)$$

$$v_{n-1} = \bar{p}E \left[Q(n, z_n) \wedge v_n \right] + \\ + pE \left[\frac{N+1}{2} I\{Q(n, y_n) \leq u_n\} + v_n I\{Q(n, y_n) > u_n\} \right], \quad (7.5)$$

$$(n = 1, 2, \dots, N-1; \quad u_{N-1} = v_{N-1} = \frac{N+1}{2}),$$

где $I\{C\}$ — индикатор события C . Оптимальные выигрыши в игре $\Gamma_N(p)$ равны u_0, v_0 (обозначим их U^n, V^n).

Доказательство. Нетрудно видеть, что биматричная игра (7.3) для любых $(y, z) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ имеет равновесие в чистых стратегиях вида

	$Q(n, z) > v_n$	$Q(n, z) \leq v_n$	
	$R-R$	$R-A$	
$Q(n, y) > u_n$	u, v	$\bar{p}Q(n, y) + pu,$ $\bar{p}Q(n, z) + pv$	(7.6)
	$A-R$		
$Q(n, y) \leq u_n$	$pQ(n, y) + \bar{p}u,$ $pQ(n, z) + \bar{p}v$	$A-A$ $Q(n, y), Q(n, z)$	

В каждой клетке стоят выигрыши игроков I и II, где индексы u_n, v_n опущены для простоты. Рассмотрим только первую компоненту и просуммируем все выигрыши, умножив их на n^{-2} ;

$$\begin{aligned}
& n^{-2} \sum_{y,z=1}^n Q(n, y) \left[I\{Q(n, y) \leq u, Q(n, z) \leq v\} + \right. \\
& + pI\{Q(n, y) \leq u, Q(n, z) > v\} + \bar{p}I\{Q(n, y) > u, Q(n, z) \leq v\} \left. \right] + \\
& + n^{-2} u \sum_{y,z=1}^n \left[\bar{p}I\{Q(n, y) \leq u, Q(n, z) > v\} + \right. \\
& + pI\{Q(n, y) > u, Q(n, z) \leq v\} + I\{Q(n, y) > u, Q(n, z) > v\} \left. \right].
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Первая сумма в (7.7) равна

$$\begin{aligned}
& n^{-2} \sum_{y,z=1}^n Q(n, y) \left[pI\{Q(n, y) \leq u\} + \bar{p}I\{Q(n, z) \leq v\} \right] = \\
& = pn^{-1} \sum_{y=1}^n Q(n, y) I\{Q(n, y) \leq u\} + \\
& + \bar{p}n^{-1} \sum_{z=1}^n \frac{N+1}{2} I\{Q(n, z) \leq v\},
\end{aligned} \tag{7.8}$$

так как

$$n^{-1} \sum_{y=1}^n Q(n, y) = \frac{1}{n} \sum_{y=1}^n \frac{N+1}{n+1} y = \frac{N+1}{2}.$$

Рассмотрим вторую сумму в (7.7).

$$\begin{aligned}
& n^{-2} u \sum_{y,z=1}^n \left[pI\{Q(n, y) > u\} + \bar{p}I\{Q(n, z) > v\} \right] = \\
& = n^{-1} u \left[p \sum_{y=1}^n I\{Q(n, y) > u\} + \bar{p} \sum_{z=1}^n I\{Q(n, z) > v\} \right].
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Подставив (7.8) и (7.9) в (7.7), получим (7.4). Аналогично доказывается представление (7.5). Теорема доказана.

Обозначая $\bar{y}_n = u_n \frac{n+1}{N+1}$ и $\bar{z}_n = v_n \frac{n+1}{N+1}$ для $n = 0, 1, \dots, N-1$, мы можем представить систему (7.4)–(7.5) в виде

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{n-1} = & \frac{p}{n+1} \left[\frac{1}{2} [\bar{y}_n] ([\bar{y}_n] + 1) + \bar{y}_n (n - [\bar{y}_n]) \right] + \\
& + \frac{\bar{p}}{n+1} \left[\frac{1}{2} (n+1) [\bar{z}_n] + \bar{y}_n (n - [\bar{z}_n]) \right],
\end{aligned}$$

$$\bar{z}_{n-1} = \frac{\bar{p}}{n+1} \left[\frac{1}{2} [\bar{z}_n] ([\bar{z}_n] + 1) + \bar{z}_n (n - [\bar{z}_n]) \right] + \\ + \frac{p}{n+1} \left[\frac{1}{2} (n+1) [\bar{y}_n] + \bar{z}_n (n - [\bar{y}_n]) \right],$$

где $[y]$ означает целую часть y , и $\bar{y}_{N-1} = \bar{z}_{N-1} = N/2$. Заметим, что состояния, где кандидат принимается

$$Q(n, y) = \frac{N+1}{n+1} y \leq u_n, \quad Q(n, z) = \frac{N+1}{n+1} z \leq v_n,$$

в новых обозначениях принимают вид

$$y \leq \bar{y}_n, \quad z \leq \bar{z}_n,$$

т. е. \bar{y}_n, \bar{z}_n представляют оптимальные пороги для принятия кандидатов с данными относительными рангами.

При $p = 1/2$ значения \bar{y}_n и \bar{z}_n совпадают. Обозначим эти значения x_n , они удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$x_{n-1} = x_n + \frac{[x_n]}{4} - \frac{1}{n+1} \left([x_n] + 1 \right) \left(x_n - [x_n]/4 \right), \quad (7.10)$$

$n = 1, \dots, N-1$. Исследуем их поведение при больших N .

Теорема 7.7. Для $N \geq 10$ имеют место неравенства

$$\frac{n+1}{3} \leq x_n \leq \frac{n}{2} \quad (n = 5, \dots, N-2). \quad (7.11)$$

Доказательство. Из (7.10) следует

$$x_{N-2} = N/2 + \frac{[N/2]}{4} - \frac{1}{N} \left([N/2] + 1 \right) \left(N/2 - [N/2]/4 \right).$$

Нетрудно видеть, что $x_{N-2} \geq (N-1)/3, \forall N$ и для $N \geq 10$ $x_{N-2} \leq (N-2)/2$. Таким образом, (7.11) выполняется для $n = N-2$. Допустим, что эти условия выполняются для $6 \leq n \leq N-2$; докажем, что они выполняются для $n-1$.

Введем в рассмотрение оператор

$$T_x(s) = x + \frac{s}{4} - \frac{1}{n+1} (s+1)(x - s/4).$$

Тогда для $x-1 \leq s \leq x$

$$T'_x(s) = \frac{1}{4(n+1)} (2s - 4x + 2 + n) \geq$$

$$\geq \frac{1}{4(n+1)} \left(2(x-1) - 4x + 2 + n \right) = \frac{1}{4(n+1)} (-2x + n).$$

Так как $x_n \leq n/2$, отсюда следует $T'_{x_n}(s) \geq 0$ для $x_n - 1 \leq s \leq x_n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x_{n-1} = T_{x_n}([x_n]) &\leq T_{x_n}(x_n) = \frac{1}{4}x_n \left(5 - \frac{3}{n+1}(x_n + 1) \right) \leq \\ &\leq \frac{n}{8} \left(5 - \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \right) \leq \frac{n-1}{2}, \quad \text{для } n \geq 6. \end{aligned}$$

Кроме того, поскольку $x_n \geq (n+1)/3$,

$$\begin{aligned} x_{n-1} = T_{x_n}([x_n]) &\geq T_{x_n}(x_n - 1) = \frac{5x_n - 1}{4} - \frac{x_n(3x_n + 1)}{4(n+1)} \geq \\ &\geq \frac{5(n+1) - 3}{12} - \frac{n+2}{12} \geq n/3. \end{aligned}$$

Теперь мы можем оценить x_0 .

Следствие. $0.387 \leq x_0 \leq 0.404$.

Из теоремы 7.2 следует, что $2 \leq x_5 \leq 2.5$. Из (7.10) последовательно находим $1.75 \leq x_4 \leq 2$, $1.4 \leq x_3 \leq 1.6$, $1.075 \leq x_2 \leq 1.175$, $0.775 \leq x_1 \leq 0.808$ и, в конце концов, $0.387 \leq x_0 \leq 0.404$.

Из теории оптимальной остановки известно, что в неигровой постановке (т.е. при $p = 1$) существует предельное значение $U^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$ и оно равно $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + \frac{2}{j})^{\frac{1}{j+1}} \approx 3.8695$. Таким образом, если существует приоритет для одного из игроков, этот игрок гарантирует себе секретаря, средний ранг которого меньше 4. При этом для второго игрока способности выбранного секретаря будут иметь ранг равный 50% среди всех кандидатов.

В случае $p < 1$ такого предельного значения не существует. Например, для справедливого случая $p = 1/2$ мы показали в следствии к теореме 7.7, что $x_0 \geq 0.387$. Отсюда $U^{(N)} = u_0 = x_0(N+1) \geq 0.387(N+1) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. В табл. 7.2 представлены предельные значения $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \{U^{(n)}/n\}$ и $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \{V^{(n)}/n\}$ для различных значений p . Давайте сравним оптимальные выигрыши с другими простыми правилами. Например, если оба игрока принимают первого же кандидата, их выигрыши равны (ожидаемые ранги) $U^N = V^N = \sum_{y=1}^N y = \frac{N+1}{2}$. Если

Таблица 7.2
 Предельные значения $y_0 = U^{(N)}/N$, $z_0 = V^{(N)}/N$
 для различных p

p	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_0	0.390	0.368	0.337	0.305	0.249	0
z_0	0.390	0.407	0.397	0.422	0.438	0.5

же они используют тактику «случайного выбора» т. е. выбирают (A) и (R) с одинаковой вероятностью $1/2$, то из теоремы 7.6 следует

$$u_{n-1} = E \left[\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}(\bar{p}Q(n, y) + pu_n) + \frac{1}{4}(pQ(n, y) + \bar{p}u_n) + \frac{1}{4}Q(n, y) \right] = \frac{1}{2} \left[u_n + EQ(n, y) \right] = \frac{1}{2} \left[u_n + \frac{N+1}{2} \right] \quad (n = 1, 2, \dots, N-1).$$

Тогда из условия $u_{N-1} = \frac{N+1}{2}$ следует $u_0 = \dots = u_{N-1} = \frac{N+1}{2}$. Аналогично $v_0 = \dots = v_{N-1} = \frac{N+1}{2}$. Отсюда, стратегии «первого кандидата» и «случайного выбора» эквивалентны и приводят к выбору кандидата со способностями, равными средним способностям всех кандидатов независимо от приоритета игроков p . При оптимальной же политике, найденной в этом параграфе, выигрыши игроков намного выше.

§ 7.8. ИГРА НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА С РАНГОВЫМ КРИТЕРИЕМ. ГОЛОСОВАНИЕ

Рассмотрим теперь игру наилучшего выбора, в которой участвует m лиц, и для окончательного решения используется голосование. Предположим, что комиссия из m человек (игроков) хочет нанять на работу специалиста. Всего имеется N претендентов на свободное место. Для каждого игрока претенденты упорядочены по определенному качеству (абсолютный ранг), например коммуникабельность, знание иностранного языка, навыки работы на компьютере и т. д. Претендент с наименьшим рангом считается лучшим. Каждый претендент, выступающий перед комиссией, поступает в случайном порядке, так что все $N!$ возможных перестановок равновероятны. При собеседовании с текущим претендентом каждый игрок наблюдает его ранг относительно предыдущих. Относительные ранги для разных игроков являются независимыми. Претендент принимается, если при голосовании не менее

k членов комиссии согласны его принять, и тогда игра заканчивается. В противном случае этот претендент отвергается и рассматривается следующий, при этом к отвергнутому претенденту нельзя будет вернуться в дальнейшем. На шаге N игроки вынуждены принять последнего претендента. Каждый игрок стремится минимизировать абсолютный ранг выбранного претендента. Будем искать вид оптимального правила принятия решения в зависимости от порога голосования k .

7.8.1. Решение для случая трех игроков

Сначала рассмотрим случай трех игроков. Пусть комиссия из трех человек хочет нанять на работу специалиста. Всего имеется N упорядоченных по трем качествам претендентов на свободное место. При собеседовании с текущим претендентом каждый игрок наблюдает его ранг относительно предыдущих. Основываясь на этой информации, он решает принять или отвергнуть текущего претендента. Претендент принимается на место, если большинство игроков (в данном случае два) решили его принять. Если же по крайней мере два отказывают, то этот претендент отвергается и рассматривается следующий, при этом, отвергнув текущего претендента, к нему нельзя будет вернуться в дальнейшем. На шаге N игроки вынуждены принять последнего претендента.

Обозначим относительные ранги претендента на шаге n для игрока I x_n , для игрока II y_n и для игрока III z_n . Тогда последовательность $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=1}^N$ независимых случайных величин распределена по закону $P\{x_n = x, y_n = y, z_n = z\} = \frac{1}{n^3}$, где x, y и z могут принимать значения от 1 до n .

После собеседования с очередным претендентом игроки должны сделать выбор — принять или отвергнуть претендента. Если n -й претендент отвергнут, то они переходят к собеседованию с $n + 1$ претендентом. Если n -й претендент принимается на работу, то игра заканчивается. В этом случае ожидаемый абсолютный ранг для каждого из игроков равен $Q(n, x)$, $Q(n, y)$, $Q(n, z)$. Как мы отметили ранее,

$$Q(n, x) = \frac{N+1}{n+1}x.$$

Если все претенденты, кроме последнего, отвергнуты, то игроки вынуждены принять последнего претендента. Каждый игрок стремится минимизировать свой ожидаемый выигрыш.

Обозначим ожидаемые выигрыши игроков I, II и III соответственно u_n, v_n, w_n , если пропущено n претендентов.

На n -м шаге игра представлена в виде матрицы, где стратегиями игроков являются A — принять и R — отклонить.

		R	A
R	R	u_n, v_n, w_n	u_n, v_n, w_n
	A	u_n, v_n, w_n	$Q(n, x), Q(n, y), Q(n, z)$

		R	A
A	R	u_n, v_n, w_n	$Q(n, x), Q(n, y), Q(n, z)$
	A	$Q(n, x), Q(n, y), Q(n, z)$	$Q(n, x), Q(n, y), Q(n, z)$

Из вида матрицы получаем, что для игроков I, II и III стратегия A доминирует над стратегией R при $Q(n, x) \leq u_n$, $Q(n, y) \leq v_n$ и $Q(n, z) \leq w_n$ соответственно. Таким образом, для игрока I оптимально принять n -го претендента, если $Q(n, x) \leq u_n$, игрок II примет n -го претендента, если $Q(n, y) \leq v_n$, игрок III примет n -го претендента, если $Q(n, z) \leq w_n$. Тогда

$$\begin{aligned}
 u_{n-1} = & \frac{1}{n^3} \sum_{x,y,z=1}^n Q(n, x) \left[I\{Q(n, x) \leq u_n, Q(n, y) \leq v_n, Q(n, z) \leq w_n\} + \right. \\
 & + I\{Q(n, x) \leq u_n, Q(n, y) \leq v_n, Q(n, z) > w_n\} + \\
 & + I\{Q(n, x) \leq u_n, Q(n, y) > v_n, Q(n, z) \leq w_n\} + \\
 & \left. + I\{Q(n, x) > u_n, Q(n, y) \leq v_n, Q(n, z) \leq w_n\} \right] + \\
 & + \frac{1}{n^3} u_n \sum_{x,y,z=1}^n \left[I\{Q(n, x) > u_n, Q(n, y) > v_n, Q(n, z) > w_n\} + \right. \\
 & + I\{Q(n, x) > u_n, Q(n, y) \leq v_n, Q(n, z) > w_n\} + \\
 & + I\{Q(n, x) \leq u_n, Q(n, y) > v_n, Q(n, z) > w_n\} + \\
 & \left. + I\{Q(n, x) > u_n, Q(n, y) > v_n, Q(n, z) \leq w_n\} \right]
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 u_{n-1} = & \frac{1}{n^2} \left[\sum_{x,y=1}^n Q(n,x) I\{Q(n,x) \leq u_n, Q(n,y) \leq v_n\} + \right. \\
 & + \sum_{x,z=1}^n Q(n,x) I\{Q(n,x) \leq u_n, Q(n,z) \leq w_n\} + \\
 & + \sum_{y,z=1}^n \frac{N+1}{2} I\{Q(n,y) \leq v_n, Q(n,z) \leq w_n\} - \\
 & - \frac{2}{n} \sum_{x,y,z=1}^n Q(n,x) I\{Q(n,x) \leq u_n, Q(n,y) \leq v_n, Q(n,z) \leq w_n\} \Big] + \\
 & + \frac{1}{n^2} u_n \left[\sum_{x,y=1}^n I\{Q(n,x) > u_n, Q(n,y) > v_n\} + \right. \\
 & + \sum_{x,z=1}^n I\{Q(n,x) > u_n, Q(n,z) > w_n\} + \\
 & + \sum_{y,z=1}^n I\{Q(n,y) > v_n, Q(n,z) > w_n\} - \\
 & - \frac{2}{n} \sum_{x,y,z=1}^n I\{Q(n,x) > u_n, Q(n,y) > v_n, Q(n,z) > w_n\} \Big],
 \end{aligned}$$

где $n = 1, 2, \dots, N-1$; $u_{N-1} = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N x = \frac{N+1}{2}$.

Здесь $I\{A\}$ — индикатор события A .

В силу симметрии должно выполняться $u_n = v_n = w_n$, тогда оптимальные пороги равны $\bar{x}_n = u_n \frac{n+1}{N+1}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_{n-1} = u_{n-1} \frac{n}{N+1} = \\
 = \frac{1}{n(N+1)} \left[\frac{N+1}{(n+1)} [\bar{x}_n]^2 ([\bar{x}_n] + 1) + \frac{N+1}{2} [\bar{x}_n]^2 - \right. \\
 \left. - \frac{N+1}{n(n+1)} [\bar{x}_n]^3 ([\bar{x}_n] + 1) \right] + \\
 + \frac{\bar{x}_n}{n(n+1)} \left[3(n - [\bar{x}_n])^2 - \frac{2}{n} (n - [\bar{x}_n])^3 \right],
 \end{aligned}$$

где $\bar{x}_{N-1} = \frac{N}{2}$, $[x]$ — целая часть x .

Выполняя преобразования, получим

$$\begin{aligned} \bar{x}_{n-1} = \frac{1}{2n^2(n+1)} & \left[[\bar{x}_n]^2 \left(2([\bar{x}_n] + 1)(n - [\bar{x}_n]) + n(n+1) \right) + \right. \\ & \left. + 2\bar{x}_n(n + 2[\bar{x}_n])(n - [\bar{x}_n])^2 \right]. \end{aligned}$$

Используя эту формулу для $N = 100$, получим значение оптимального ожидаемого ранга, равное 33. Сравните эту величину со значением ожидаемого ранга в задаче с двумя игроками ($p = 1/2$) 39.425 и с оптимальным рангом в неигровой задаче 3.869. Видим, что процедура голосования дает лучший результат, чем равновероятная схема с двумя игроками.

Теорема 7.8. При $N \geq 19$ оптимальный выигрыш в игровой задаче наилучшего выбора с голосованием больше, чем в задаче с арбитром.

Доказательство. Докажем, что при $N \geq 19$ выполняется $\frac{n+2}{4} < \bar{x}_n < \frac{n-1}{2}$ для $14 \leq n \leq N-2$. Доказательство проведем методом обратной индукции.

Для $N \geq 19$ получим $\frac{N}{4} < \bar{x}_{N-2} < \frac{N-3}{2}$. Предположим, что неравенство выполняется для $15 \leq n \leq N-2$. Докажем, что оно выполняется для $n-1$, т. е. $\frac{n+1}{4} < \bar{x}_{n-1} < \frac{n-2}{2}$ для $15 \leq n \leq N-2$. Введем оператор

$$\begin{aligned} T(x, y) = \frac{1}{2n^2(n+1)} & \left[y^2 \left(2(y+1)(n-y) + n(n+1) \right) + \right. \\ & \left. + 2x(n+2y)(n-y)^2 \right], \end{aligned}$$

где $x-1 < y \leq x$.

Для его исследования найдем первую производную

$$\begin{aligned} T'_y(x, y) = \frac{1}{n^2(n+1)} & \left(-4y^3 + 3y^2(n-1+2x) + \right. \\ & \left. + y(n^2+3n-6xn) \right) = \frac{y(n-y)(3+n-6x+4y)}{n^2(n+1)}. \end{aligned}$$

Так как $x - 1 < y \leq x$ и $\frac{n+2}{4} < x < \frac{n-1}{2}$, то $T'_y(x, y) > 0$. Тогда $T(x, y)$ возрастает. Следовательно, так как $\bar{x}_n < \frac{n-1}{2}$,

$$\begin{aligned}\bar{x}_{n-1} &= T(\bar{x}_n, [\bar{x}_n]) < T(\bar{x}_n, \bar{x}_n) = \\ &= \frac{1}{2n^2(n+1)} \left(-2\bar{x}_n^4 + 2\bar{x}_n^3(n-1+2\bar{x}_n) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{x}_n^2(n^2+3n-6\bar{x}_nn) + 2\bar{x}_nn^3 \right) < \\ &< \frac{(7n^2-3)(n-1)}{16n^2} < \frac{n-2}{2} \quad \text{при } n \geq 9.\end{aligned}$$

Аналогично, так как $\bar{x}_n > \frac{n+2}{4}$, получим

$$\begin{aligned}\bar{x}_{n-1} &= T(\bar{x}_n, [\bar{x}_n]) > T(\bar{x}_n, \bar{x}_n - 1) = \\ &= \frac{1}{2n^2(n+1)} \left(2\bar{x}_n^4 - 2\bar{x}_n^3(2n+3) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{x}_n^2(n^2+9n+6) + 2\bar{x}_n(n^3-n^2-3n-1) + n^2+n \right) > \\ &> \frac{65n^4+116n^3+32n^2-16n-16}{256n^2(n+1)} > \frac{n+1}{4} \quad \text{при } n \geq 19.\end{aligned}$$

Учитывая неравенство $\frac{n+2}{4} < \bar{x}_n < \frac{n-1}{2}$ для $14 \leq n \leq N-2$ и $N \geq 19$, получим

$$\begin{aligned}4 < \bar{x}_{14} < 6.5, \quad 3.837 < \bar{x}_{13} < 5.650, \quad 3.580 < \bar{x}_{12} < 4.984, \dots, \\ 1.838 < \bar{x}_5 < 2.029, \quad 1.526 < \bar{x}_4 < 1.736, \quad 1.230 < \bar{x}_3 < 1.372, \\ 0.961 < \bar{x}_2 < 1.040, \quad 0.641 < \bar{x}_1 < 0.763, \quad 0.320 < \bar{x}_0 < 0.382.\end{aligned}$$

В задаче с двумя игроками, как мы видели выше, $0.387 \leq x_0 \leq 0.404$. Таким образом, полученные пороги в случае трех игроков ниже, чем пороги в случае двух игроков. Следовательно, голосование с тремя игроками дает лучший результат, чем справедливая лотерея.

7.8.2. Решение задачи для m игроков

Теперь перейдем к рассмотрению сценария с m игроками. Обозначим относительный ранг претендента на шаге n для j -го игрока x_n^j , $j = 1, \dots, m$. Тогда $\{(x_n^1, \dots, x_n^m)\}_{i=1}^N$ имеет распределение вида $P\{x_n^1 = x^1, \dots, x_n^m = x^m\} = \frac{1}{n^m}$ для $x^l = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, m$.

Текущий претендент принимается, если по крайней мере k членов комиссии согласны его принять, $k = 1, \dots, m$. Если после собеседования

n -й претендент принимается на работу, то игра заканчивается. В этом случае ожидаемый абсолютный ранг для каждого из игроков равен $Q(n, x^j)$:

$$Q(n, x^j) = \frac{N+1}{n+1} x^j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Обозначим u_n^j , $j = 1, \dots, m$ — ожидаемый выигрыш j -го игрока, если пропущено n претендентов. Так же, как и ранее, для j -го игрока оптимально принять n -го претендента, если $Q(n, x^j) \leq u_n^j$. Тогда

$$u_{n-1}^j = \frac{1}{n^m} \left[\sum_{x^1, x^2, \dots, x^m=1}^n Q(n, x^j) [J_m + J_{m-1} + \dots + J_{k+1} + J_k] + u_n^j \sum_{x^1, x^2, \dots, x^m=1}^n [J_{k-1} + J_{k-2} + \dots + J_0] \right],$$

где J_l — число всех событий, когда решение о выборе сделали точно l игроков, $l = 0, 1, \dots, m$.

В силу симметрии $u_n^1 = u_n^2 = \dots = u_n^m = u_n$. Положим $x_n = \frac{n+1}{N+1} u_n$.

Тогда оптимальные пороги равны

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= \frac{1}{2n^{m-1}(n+1)} \sum_{j=0}^{m-k} \left[\binom{m}{j} ([x_n] + 1 + n) - \right. \\ &\quad \left. - \binom{m-1}{j} n [x_n]^{m-j} (n - [x_n])^j \right] + [x_n]^m ([x_n] + 1) + \\ &\quad + \frac{x_n}{n^{m-1}(n+1)} \sum_{j=0}^{k-1} \left[\binom{m}{j} [x_n]^j (n - [x_n])^{m-j} \right] + (n - [x_n])^m; \\ u_n &= x_n \frac{N+1}{n+1}; \quad x_{N-1} = \frac{N}{2}; \end{aligned}$$

где $n = 1, \dots, N-1$, $[x]$ — целая часть x .

В табл. 7.3 приводятся численные результаты для различных m и k , при $N = 100$.

Из таблицы видно, что наилучший результат k^* получается при составе комиссии из трех человек. Интересно отметить тот факт, что при небольшом составе комиссии недостаточно принятия решения большинством голосов.

Таблица 7.3

k	1	2	3	4	5	k^*
$m = 1 \quad u_0$	3.603					1
$m = 3 \quad u_0$	47.815	33.002	19.912			3
$m = 4 \quad u_0$	49.275	44.967	26.335	27.317		3
$m = 5 \quad u_0$	49.919	47.478	40.868	26.076	33.429	4

§ 7.9. ИГРА НАИЛУЧШЕГО ВЗАИМНОГО ВЫБОРА

В предыдущих параграфах выбор осуществлялся только одной стороной. Однако в ряде задач выбор является взаимным. Такие задачи актуальны в биологии и социологии в задачах выбора партнера, в моделировании рыночных отношений, где покупатель и продавец осуществляют взаимный выбор, и других задачах.

Удобно представить такую ситуацию. Есть некая популяция, разбитая на два пола мужских и женских особей. Индивидуумы выбирают друг друга в зависимости от показателя качества. Каждый индивидуум заинтересован максимизировать качество выбранного партнера. Но если один из партнеров согласен принять другого, то второй может и не согласиться. Поэтому правило выбора должно касаться обоих партнеров.

Предположим, что популяции обоих полов имеют одинаковую мощность и их качества равномерно распределены на интервале $[0, 1]$. Будем обозначать качество женщин через x , а мужчин — через y , соответствующие популяции обозначим X и Y . Случайным образом выберем двух индивидуумов разного пола. Данную пару (x, y) назовем состоянием игры. Каждый из игроков имеет некий порог для качества партнера, ниже которого он не желает создавать пары с данным партнером. Если по крайней мере один из партнеров не согласен, пара не создается и возвращается в популяцию. Если оба партнера согласны, пара создается и покидает популяцию.

Рассмотрим многошаговую игру, в которой на каждом шаге моделируются случайные встречи всех индивидуумов из данных популяций. После каждого шага число индивидуумов с высоким качеством становится меньше, поскольку они образуют пары и выбывают. Но тогда и возможностей для нахождения партнера с высоким качеством у игроков становится все меньше и меньше. Следовательно, и запросы

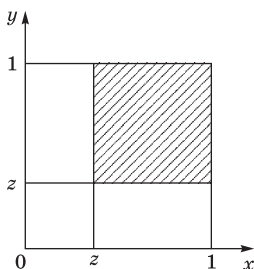


Рис. 7.9

игроков должны с каждым шагом убывать. Рассмотрим вначале игру из двух шагов.

7.9.1. Двухшаговая модель взаимного выбора

Представим такую ситуацию. На первом шаге все игроки из данных популяций встречаются друг с другом, и если они устраивают друг друга, выбывают из игры. На втором шаге оставшиеся игроки опять случайным образом встречаются друг с другом и независимо от критерия выбора обязательным образом создают пару. Найдем оптимальное поведение игроков.

Предположим, что каждый из игроков может получать наблюдения x_1, x_2 (соответственно y_1, y_2) и использует пороговое правило $z : 0 \leq z \leq 1$ (в силу симметрии мы рассматриваем одно и то же правило для обоих полов). Если встретившийся партнер имеет качество меньше, чем z , партнер отвергается, и игроки переходят к следующему шагу. Если качества обоих больше или равны z , создается пара, и игроки покидают игру. Тогда если на первом шаге распределение игроков одного пола по качеству было равномерно на отрезке $[0, 1]$, то после первого шага оно изменится, поскольку игроки с качеством больше z частично покинут популяцию (см. рис. 7.9). Найдем его, например, для x .

В начале игры мощность множества игроков X была равна 1. После первого шага останутся все игроки с качеством из множества $[0, z]$ и доля $(1 - z)z$ игроков с качеством от z до 1, партнеры с качеством выше z (их всего z^2) покинут игру. Таким образом, ко второму шагу перейдет всего $z + (1 - z)z$ игроков каждого пола. Тогда плотность распределения игроков по качеству примет вид (его вид представлен

на рис. 7.10)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{z + (1-z)z}, & x \in [0, z), \\ \frac{1}{z + (1-z)z}, & x \in [z, 1]. \end{cases}$$

Отсюда если кто-либо из игроков не создаст пары на первом шаге, на втором шаге его ожидает среднее качество всех партнеров противоположного пола, т. е.

$$Ex_2 = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^z \frac{x}{z + (1-z)z} dx + \int_z^1 \frac{zx}{z + (1-z)z} dx.$$

Вычислив интеграл, приходим к выражению

$$Ex_2 = \frac{1 + z - z^2}{2(2 - z)}.$$

Вернемся к первому шагу игры. Игрок с качеством y решает выбрать партнера с качеством x (и наоборот), если качество x больше или равно среднему качеству Ex_2 на следующем шаге. Таким образом, оптимальный порог для выбора на первом шаге должен удовлетворять уравнению

$$z = \frac{1 + z - z^2}{2(2 - z)}.$$

Его решение $z = (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0.382$ опять связано с золотым сечением ($z = 1 - z^*$, где z^* — золотое сечение).

7.9.2. Многошаговая модель взаимного выбора

Теперь предположим, что игроки имеют $n + 1$ шагов для создания пары. Предположим, что игрок II использует пороговую стратегию с порогами z_1, \dots, z_n , где $0 < z_n \leq z_{n-1} \leq \dots \leq z_1 \leq z_0 = 1$. Найдем наилучший ответ игрока I и потребуем, чтобы он совпадал с этой пороговой стратегией. Для этого найдем, как будет меняться распределение игроков по качеству после каждого шага.

Вначале распределение качества игроков равномерно. Положим мощность множества игроков $N_0 = 1$. После первого шага игроки с качеством больше z_1 могут создать пару и выбыть из игры. Поэтому после первого шага выбора останется игроков в игре в среднем $N_1 = 1 - z_1 + (1 - z_1)z_1$. Это число можно представить в виде $N_1 = 2z_1 - z_1^2/N_0$. После второго шага игроки с качеством, которое больше z_2 , могут найти пару и тоже выйдут из игры. После второго шага в игре останется ожидаемое число $N_2 = z_2 + (z_1 - z_2)z_2/N_1 + (1 - z_1)z_1z_2/(N_1N_0)$. Его

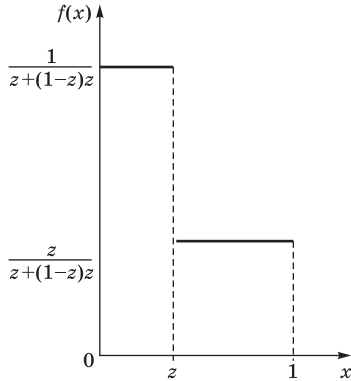


Рис. 7.10

можно представить в виде $N_2 = 2z_2 - z_2^2/N_1$. Продолжая эти рассуждения дальше, мы находим, что после i -го шага в игре останется игроков

$$N_i = z_i + \sum_{j=1}^{i-1} (z_j - z_{j+1}) \prod_{k=j}^{i-1} \frac{z_{k+1}}{N_k}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Удобнее представить это число в рекуррентном виде

$$N_i = 2z_i - \frac{z_i^2}{N_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.1)$$

При этом распределение игроков по качеству после каждого шага будет иметь плотность вида

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/N_1, & 0 \leq x < z_1, \\ z_1/N_1, & z_1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

после первого шага,

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{N_2}, & 0 \leq x < z_2, \\ \frac{z_2}{N_1 N_2}, & z_2 \leq x < z_1, \\ \frac{z_1 z_2}{N_0 N_1 N_2}, & z_1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

после второго шага и, наконец,

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{N_i}, & 0 \leq x < z_i, \\ \prod_{j=k}^{i-1} \frac{z_{j+1}}{N_j} \frac{1}{N_i}, & z_{k+1} \leq x < z_k, \quad k = i-1, \dots, 1 \end{cases}$$

после i -го шага, где $i = 1, \dots, n$.

Теперь мы воспользуемся методом обратной индукции и рассмотрим уравнения оптимальности. Обозначим оптимальный ожидаемый выигрыш игрока после i -го шага $v_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, если он имеет дело с партнером качества x .

Пусть на n -м шаге игрок наблюдает партнера с качеством x . Если он продолжит, его ожидает качество Ex_{n+1} , где x_{n+1} имеет распределение $f_n(x)$. Отсюда

$$v_n(x) = \max\{x, \int_0^1 y f_n(y) dy\}$$

или

$$\begin{aligned} v_n(x) = \max\{x, & \int_0^{z_n} \frac{y}{N_n} dy + \\ & + \int_{z_n}^{z_{n-1}} \frac{z_n y}{N_n N_{n-1}} dy + \dots + \int_{z_1}^1 \frac{z_n \dots z_1 y}{N_n \dots N_1} dy\}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

В уравнении (9.2) под максимумом стоят возрастающая функция и постоянная функция. Они пересекаются в одной точке, которая является оптимальным порогом для принятия претендента на n -м шаге. Потребуем, чтобы это значение совпало с z_n . Это приводит к уравнению

$$z_n = \int_0^{z_n} \frac{y}{N_n} dy + \int_{z_n}^{z_{n-1}} \frac{z_n y}{N_n N_{n-1}} dy + \dots + \int_{z_1}^1 \frac{z_n \dots z_1 y}{N_n \dots N_1} dy,$$

откуда

$$z_n = \frac{z_n^2}{2N_n} + \frac{z_n(z_{n-1}^2 - z_n^2)}{2N_n N_{n-1}} + \dots + \frac{z_n \dots z_1 (1 - z_1^2)}{2N_n \dots N_1}. \quad (9.3)$$

Тогда функция $v_n(x)$ примет вид

$$v_n(x) = \begin{cases} z_n, & 0 \leq x < z_n, \\ x, & z_n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Перейдем к $(n-1)$ -му шагу. Пусть игрок встретил партнера с качеством x . При продолжении его ожидает выигрыш $Ev_n(x_n)$, где функция $v_n(x)$ уже найдена, а математическое ожидание берется по распределению $f_{n-1}(x)$. Уравнение оптимальности на $(n-1)$ -м шаге примет вид

$$v_{n-1}(x) = \max\left\{x, \int_0^{z_n} \frac{z_n}{N_{n-1}} dy + \int_{z_n}^{z_{n-1}} \frac{y}{N_{n-1}} dy + \dots + \int_{z_1}^1 \frac{z_{n-1} \dots z_1 y}{N_{n-1} \dots N_1} dy\right\}.$$

Потребуем, чтобы пороговое значение, определяющее, когда нужно делать выбор на $(n-1)$ -м шаге, совпадало с z_{n-1} . Отсюда

$$\begin{aligned} z_{n-1} = \frac{z_n^2}{N_{n-1}} + \frac{z_{n-1}^2 - z_n^2}{2N_{n-1}} + \frac{z_{n-1}(z_{n-2}^2 - z_{n-1}^2)}{2N_{n-1}N_{n-2}} + \dots \\ \dots + \frac{z_{n-1} \dots z_1 (1 - z_1^2)}{2N_{n-1} \dots N_1}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Продолжая эти рассуждения дальше, приходим к выводу, что уравнение оптимальности на i -м шаге

$$v_i(x) = \max\{x, Ev_{i+1}(x_{i+1})\}$$

приводит к соотношению

$$z_i = \frac{1}{2N_i} \left[z_i^2 + z_{i+1}^2 + \sum_{k=0}^{i-1} (z_k^2 - z_{k+1}^2) \prod_{j=k}^{i-1} \frac{z_{j+1}}{N_j} \right], \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (9.5)$$

Давайте сравним два уравнения для z_{i+1} и z_i . Согласно (9.5)

$$z_{i+1} = \frac{1}{2N_{i+1}} \left[z_{i+1}^2 + z_{i+2}^2 + \sum_{k=0}^i (z_k^2 - z_{k+1}^2) \prod_{j=k}^i \frac{z_{j+1}}{N_j} \right].$$

Перепишем это уравнение в виде

$$z_{i+1} = \frac{1}{2N_{i+1}} \left[z_{i+1}^2 + z_{i+2}^2 + (z_i^2 - z_{i+1}^2) \frac{z_{i+1}}{N_i} + \sum_{k=0}^{i-1} (z_k^2 - z_{k+1}^2) \frac{z_{i+1}}{N_i} \prod_{j=k}^{i-1} \frac{z_{j+1}}{N_j} \right].$$

Умножим его на $2 \prod_{j=1}^{i+1} N_j$:

$$\begin{aligned} 2 \prod_{j=1}^{i+1} N_j z_{i+1} &= (z_{i+1}^2 + z_{i+2}^2) \prod_{j=1}^i N_j + (z_i^2 - z_{i+1}^2) z_{i+1} \prod_{j=1}^{i-1} N_j + \\ &+ \sum_{k=0}^{i-1} (z_k^2 - z_{k+1}^2) \prod_{j=k}^i z_{j+1} \prod_{j=1}^{k-1} N_j. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Но из (9.1) следует

$$2 \prod_{j=1}^{i+1} N_j = 2 \prod_{j=1}^{i-1} N_j (2z_{i+1} N_i - z_{i+1}^2).$$

Подставив это выражение в (9.6), получим

$$\begin{aligned} 4 \prod_{j=1}^i N_j z_{i+1}^2 &= (z_{i+1}^2 + z_{i+2}^2) \prod_{j=1}^i N_j + (z_i^2 + z_{i+1}^2) z_{i+1} \prod_{j=1}^{i-1} N_j + \\ &+ \sum_{k=0}^{i-1} (z_k^2 - z_{k+1}^2) \prod_{j=k}^i z_{j+1} \prod_{j=1}^{k-1} N_j. \end{aligned}$$

Сравнивая с уравнением (9.5), приходим к соотношению

$$4z_{i+1}^2 = z_{i+1}^2 + z_{i+2}^2 + 2z_i z_{i+1}.$$

Отсюда

$$z_i = \frac{3}{2} z_{i+1} - \frac{1}{2} \frac{z_{i+2}^2}{z_{i+1}}, \quad i = n-2, \dots, 1. \quad (9.7)$$

Сравнивая (9.3) и (9.4) с учетом (9.1), получим

$$z_n = \frac{2}{3} z_{n-1}.$$

Тогда из (9.7) следует

$$z_{n-2} = \frac{3}{2}z_{n-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{z_n}{z_{n-1}} \right)^2 z_{n-1} = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{4}{9} \right) z_{n-1},$$

или

$$z_{n-1} = \frac{2}{3 - 4/9} \cdot z_{n-2}.$$

Имеют место рекуррентные соотношения

$$z_i = a_i z_{i-1} \quad i = 2, \dots, n,$$

где коэффициенты a_i удовлетворяют соотношениям

$$a_i = \frac{2}{3 - a_{i+1}^2}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (9.8)$$

и $a_n = 2/3$.

Коэффициенты $a_i, i = 1, \dots, n$ соотношениями (9.8) определяются однозначно. Чтобы однозначно определить $z_i, i = 1, \dots, n$, нужно задать одно из них. Определим z_1 , используя уравнение (9.5). Из него следует

$$z_1 = \frac{1}{2N_1} [z_1^2 + z_2^2 + (1 - z_1^2)z_1].$$

Поскольку $z_2 = a_2 z_1$, отсюда вытекает

$$2(2z_1 - z_1^2)z_1 = z_1^2 + a_2^2 z_1^2 + (1 - z_1^2)z_1.$$

Приходим к квадратному уравнению для z_1 :

$$z_1^2 + z_1(a_2^2 - 3) + 1 = 0.$$

Поскольку из (9.8) следует $a_2^2 - 3 = -2/a_1$, отсюда получаем уравнение

$$z_1^2 - 2\frac{z_1}{a_1} + 1 = 0,$$

откуда

$$z_1 = \frac{1}{a_1} \left(1 - \sqrt{1 - a_1^2} \right).$$

Итак, вначале находятся коэффициенты $a_i, i = n, n-1, \dots, 1$. Затем вычисляется z_1 , и после этого рекуррентно находятся оптимальные пороги z_2, \dots, z_n . Например, для случая $n = 10$ вычисления приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4
Пороги в задаче взаимного выбора

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i	0.940	0.934	0.927	0.918	0.907	0.891	0.870	0.837	0.782	0.666
z_i	0.702	0.656	0.608	0.559	0.507	0.452	0.398	0.329	0.308	0.205

Мы видим, что пороги монотонно убывают, что естественно, поскольку требования к качеству партнера с течением времени должны уменьшаться.

Задачи и упражнения

1. Два игрока наблюдают за частицей, которая выходит из нуля, с вероятностью p перескакивает вправо на единицу и с вероятностью $q = 1 - p$ поглощается в состоянии 0. Игрок, который остановил блуждание в крайней правой точке, выигрывает в игре. Найти оптимальные стратегии.
2. Правила игры такие же, как в задаче 1, но каждый игрок наблюдает за своей случайной последовательностью Бернулли. Предположим, что эти последовательности независимы. Найти оптимальные стратегии игроков.
3. Найти равновесие в игре, где правила, как в задаче 2, но наблюдения являются зависимыми.
4. Игра наилучшего выбора с неполной информацией.

Два игрока наблюдают последовательность претендентов на должность секретаря, которые поступают в случайном порядке. Вначале выбор делает игрок I, а затем II. При этом кандидат может с вероятностью p отказаться от позиции. Найти оптимальные стратегии игроков.

5. Два игрока получают наблюдения, которые представляют независимые случайные блуждания на множестве $\{0, 1, \dots, k\}$ с поглощением на границах. В каждом состоянии блуждание с вероятностью p переходит на единицу вправо и с вероятностью $1 - p$ влево. Выигрывает игрок, который остановил блуждание правее противника.

6. Найти равновесие в игре, описанной в задаче 5, но при условии, что случайные блуждания на границах поглощаются с заданной вероятностью $\beta < 1$.

7. Игра наилучшего выбора с полной информацией.

Два игрока наблюдают последовательность независимых случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_\theta, x_{\theta+1}, \dots, x_n$, где в случайный момент θ меняется распределение случайных величин с $p_0(x)$ на $p_1(x)$. Вначале решение об остановке принимает игрок I, а затем II. Цель игроков — выбрать наблюдение с максимальным значением.

8. Игра имеет такие же условия, что и в задаче 7, но приоритет игроков случайный. С вероятностью p наблюдения показывают игроку I, и с вероятностью $1 - p$ — игроку II. Найти оптимальные стратегии.

9. Игра наилучшего выбора с частичной информацией.

Игроки получают наблюдения, которые представляют независимые одинаково распределенные случайные величины. Игроки не знают точных значений наблюдений, но знают, больше они некоторого порога или меньше. Приоритет у первого игрока. Игроки используют однопороговые стратегии. Выигрывает игрок, который остановился на значении большем, чем у противника. Найти оптимальные стратегии и значение игры.

10. Игра имеет условия, как в задаче 9, но приоритет игроков определяется с помощью случайного механизма. С вероятностью p каждое наблюдение предъявляется игроку I и с вероятностью $1 - p$ — игроку II.

КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

§ 8.1. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

В предыдущих главах мы рассматривали игры, где каждый из игроков играл только за себя. Игроки не могли кооперироваться, чтобы увеличить свой выигрыш. В этой главе мы рассмотрим игры, в которых игроки могут объединяться в коалиции, и основной проблемой здесь является, как разделить полученный выигрыш между членами коалиции. Для множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$, которое будем называть «гранд-коалицией» обозначим множество всех его подмножеств через 2^N , и через $|S|$ будем обозначать число элементов множества S .

Определение 8.1. *Кооперативной игрой n лиц будем называть пару $\Gamma = \langle N, v \rangle$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков, а $v : 2^N \rightarrow R$ — отображение, предписывающее каждой коалиции $S \in 2^N$ некоторое численное значение, такое что $v(\emptyset) = 0$. Функция v называется характеристической функцией кооперативной игры.*

Обычно предполагают, что характеристическая функция является супераддитивной, т.е. для любых двух коалиций S и T , таких что $S \cap T = \emptyset$:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T). \quad (1.1)$$

Это естественное условие, поощряющее участников игры вступать в коалиции. Если в неравенстве (1.1) достигается равенство для всех непересекающихся коалиций S и T , такая характеристическая функция называется аддитивной. Заметим, что для аддитивных характеристических функций выполняется равенство

$$v(N) = \sum_{i \in N} v(i).$$

В этом случае дележ осуществляется естественным образом, каждый из игроков получает величину своего выигрыша $v(i)$. Такие игры называются **несущественными**. Далее будем анализировать только существенные игры, для которых

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(i). \quad (1.2)$$

Приведем некоторые примеры.

Пример 8.1 («джаз-оркестр»). Директор ресторана приглашает играть на вечере музыкантов джаза и обещает заплатить 100 рублей. Джаз-оркестр состоит из трех музыкантов — пианиста (игрок I), певца (игрок II) и барабанщика (игрок III), которые должны решить, каким образом эта сумма будет распределена между ними. При этом аргументом в переговорах должна служить характеристическая функция v , которая определяется значениями гонораров, которые могут получить музыканты, действуя поодиночке (например, $v(1) = 40, v(2) = 30, v(3) = 0$) или играя парами (например, $v(1, 2) = 80, v(1, 3) = 60, v(2, 3) = 50$).

Пример 8.2 («рынок перчаток»). Рассмотрим множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$ перчаток, среди которых есть левые перчатки (множество L) и правые перчатки (множество R). Одна перчатка ничего не стоит, а пара перчаток стоит 1 рубль. Кооперативная игра $\langle N, v \rangle$ здесь может быть определена с помощью характеристической функции вида

$$v(S) = \min\{|S \cap L|, |S \cap R|\}, S \in 2^N,$$

которая представляет число пар перчаток, которые можно составить из множества S .

Пример 8.3 («составление расписания»). Рассмотрим множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$ игроков, каждый из которых имеет станок M_i и некоторую работу J_i , которую он может выполнить на своем станке за время t_{ii} или на другом станке M_j за время t_{ij} , вступив в коалицию с игроком j . Матрица затрат $T = \{t_{ij}\}, i, j = 1, \dots, n$ задана. Тогда для любой коалиции $S \in 2^N$ можно вычислить суммарные затраты, которые представляют собой минимальные затраты по всем перестановкам игроков, входящим в коалицию S , т. е.

$$t(S) = \min_{\sigma} \sum_{i \in S} t_{i\sigma(i)}.$$

Характеристическая функция $v(S)$ в этой игре может быть задана как сэкономленное время, которое получает коалиция по сравнению с ситуацией, когда каждый игрок выполняет работу на своей машине.

Пример 8.4 («строительство дороги»). Предположим, что фермеры договариваются о финансировании строительства дороги, которая свяжет все фермы с городом. Строительство каждого участка дороги несет определенные затраты, поэтому выгодно строить дороги в кооперации. При этом каждая из ферм имеет определенный доход от продажи своей продукции в городе. Как должны быть разнесены затраты по участникам?

Прежде чем перейти к определению решения в кооперативных играх, разобьем множество кооперативных игр на классы эквивалентности.

Определение 8.2. Две кооперативные игры $\Gamma_1 = \langle N, v_1 \rangle$ и $\Gamma_2 = \langle N, v_2 \rangle$ называются эквивалентными, если найдутся такие постоянные величины $\alpha > 0$ и $c_i, i = 1, \dots, n$, что будет иметь место соотношение

$$v_1(S) = \alpha v_2(S) + \sum_{i \in S} c_i$$

для любой коалиции $S \in 2^N$. В этом случае мы будем писать $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$.

Нетрудно проверить, что отношение \sim является отношением эквивалентности.

1) $v \sim v$ (рефлексивность). Это имеет место при $\alpha = 1$ и $c_i = 0, i = 1, \dots, n$.

2) $v \sim v' \Rightarrow v' \sim v$ (симметрия). $v \sim v' \Rightarrow v(S) = \alpha v'(S) + \sum_{i \in S} c_i$.

Полагая $\alpha' = 1/\alpha$ и $c'_i = -c_i/\alpha$, получим $v'(S) = \alpha' v(S) + \sum_{i \in S} c'_i, S \in 2^N$,

т. е. $v' \sim v$.

3) $v \sim v_1, v_1 \sim v_2 \Rightarrow v \sim v_2$ (транзитивность). Действительно, $v(S) = \alpha v_1(S) + \sum_{i \in S} c_i$ и $v_1(S) = \alpha_1 v_2(S) + \sum_{i \in S} c'_i$. Отсюда $v(S) = \alpha \alpha_1 v_2(S) + \sum_{i \in S} (\alpha c'_i + c_i)$.

Итак, \sim — это отношение эквивалентности. Тогда все кооперативные игры разобьются на классы эквивалентности, и достаточно будет найти решение какой-нибудь одной игры из данного класса. Легко видеть, что несущественные игры эквивалентны играм с нулевой характеристической функцией.

Удобно искать решение кооперативной игры в 0–1 редуцированной форме.

Определение 8.3. Кооперативной игрой в 0–1 редуцированной форме будем называть игру $\Gamma = \langle N, v \rangle$, в которой $v(i) = 0, i = 1, \dots, n$ и $v(N) = 1$.

Теорема 8.1. Любая существенная кооперативная игра эквивалентна некоторой игре в 0–1 редуцированной форме.

Доказательство. Для этого достаточно показать, что найдутся такие постоянные $\alpha > 0$ и $c_i, i = 1, \dots, n$, что

$$\alpha v(i) + c_i = 0, i = 1, \dots, n, \alpha v(N) + \sum_{i \in N} c_i = 1. \quad (1.3)$$

Система (1.3) однозначно определяет эти величины:

$$\begin{aligned} \alpha &= [v(N) - \sum_{i \in N} v(i)]^{-1}, \\ c_i &= -v(i)[v(N) - \sum_{i \in N} v(i)]^{-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу (1.2) $\alpha > 0$.

§ 8.2. ДЕЛЕЖИ И С-ЯДРО

Перейдем теперь к определению решения в кооперативной игре. Под решением кооперативной игры понимается дележ всего выигрыша гранд-коалиции $v(N)$.

Определение 8.4. Дележом в кооперативной игре $\Gamma = \langle N, v \rangle$ называется вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$, для которого

$$x_i \geq v(i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N). \quad (2.2)$$

Условие (2.1), которое предписывает каждому игроку давать не меньше, чем он может получить сам, называется свойством индивидуальной рациональности. Условие (2.2) называется свойством коллективной разумности. Оно предполагает, что неразумно делить меньше, чем может получить гранд-коалиция, и нельзя делить больше, чем $v(N)$. Множество всех дележей будем обозначать $D(v)$. Для эквивалентных характеристических функций v и v' , для которых $v(S) = \alpha v'(S) + \sum_{i \in S} c_i, S \in 2^N$, дележи связаны естественным образом,

$x_i = \alpha x'_i + c_i, i \in N$. Заметим, что для кооперативных игр в 0–1 редуцированной форме множество дележей представляет собой симплекс $D(v) = \{x : \sum_{i \in N} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ в R^n .

Существует несколько принципов оптимальности выбора на множестве $D(v)$ точки или множества точек, которые бы давали приемлемое решение задачи распределения выигрыша гранд-коалиции. Начнем их анализ с определения С-ядра. Перед этим введем понятие доминированности дележа.

Определение 8.5. Дележ x доминирует дележ y по коалиции S (будем обозначать это как $x \succ_S y$), если

$$x_i > y_i, \quad \forall i \in S \quad (2.3)$$

и

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S). \quad (2.4)$$

Условие (2.3) означает, что дележ x предпочтительнее дележа y для всех членов коалиции S , а условие (2.4) означает, что дележ x реализуем коалицией S .

Определение 8.6. Будем говорить, что дележ x доминирует дележ y , если найдется такая коалиция $S \in 2^N$, что $x \succ_S y$.

Доминирование $x \succ y$ здесь означает, что найдется такая коалиция, которая поддержит данный дележ x . Теперь мы можем ввести определение С-ядра.

Определение 8.7. Множество недоминируемых дележей называется С-ядром кооперативной игры.

Теорема 8.2. Дележ x принадлежит С-ядру кооперативной игры $\langle N, v \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \forall S \in 2^N. \quad (2.5)$$

Доказательство. Докажем необходимость условия (2.5). Предположим противное, т.е. дележ $x \in C(v)$, но для некоторой коалиции S $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$. Заметим, что $1 < |S| < n$, поскольку иначе это бы

противоречило условиям индивидуальной рациональности (2.1) и коллективной разумности (2.2). Предложим коалиции S новый дележ y , где

$$y_i = x_i + \frac{v(S) - \sum_{i \in S} x_i}{|S|}, \quad i \in S,$$

а в коалиции $N \setminus S$ распределим остаток $v(N) - v(S)$:

$$y_i = \frac{v(N) - v(S)}{|N \setminus S|}, \quad i \in N \setminus S.$$

Очевидно, что y — это дележ, и $y \succ x$. Полученное противоречие доказывает (2.5).

Докажем достаточность. Пусть x удовлетворяет (2.5), но доминируется некоторым другим дележом y для некоторой коалиции S . Тогда из определения (2.3)–(2.4) следует

$$\sum_{i \in S} x_i < \sum_{i \in S} y_i \leq v(S),$$

что противоречит (2.5).

С-ядро для примера «джаз-оркестр»

Построим С-ядро для примера «джаз-оркестр». Здесь музыканты должны договориться, в каком соотношении разделить полученный гонорар в размере 100 рублей. Характеристическая функция имеет вид

$$\begin{aligned} v(1) &= 40, & v(2) &= 30, & v(3) &= 0, & v(1, 2) &= 80, \\ v(1, 3) &= 60, & v(2, 3) &= 50, & v(1, 2, 3) &= 100. \end{aligned}$$

Представим вначале данную характеристическую функцию в 0 – 1 редуцированной форме. Находим $\alpha = 1/[v(N) - v(1) - v(2) - v(3)] = 1/30$ и $c_1 = -4/3, c_2 = -1, c_3 = 0$. Тогда новая характеристическая функция имеет вид

$$\begin{aligned} v'(1) &= 0, & v'(2) &= 0, & v'(3) &= 0, & v'(1, 2, 3) &= 1, \\ v'(1, 2) &= \frac{8}{3} - \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}, & v'(1, 3) &= \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ v'(2, 3) &= \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

С-ядро расположено на симплексе

$$E = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

и определяется согласно (2.5) системой неравенств

$$x_1 + x_2 \geq \frac{1}{3}, \quad x_1 + x_3 \geq \frac{2}{3}, \quad x_2 + x_3 \geq \frac{2}{3}.$$

Поскольку $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, неравенства можно переписать в виде

$$x_3 \leq \frac{2}{3}, \quad x_2 \leq \frac{1}{3}, \quad x_1 \leq \frac{1}{3}.$$

На рис. 8.1 С-ядро представляет собой заштрихованную область. Любой элемент С-ядра не доминируется никаким другим дележом. В качестве возможного решения можно выбрать центр тяжести С-ядра $x = (2/9, 2/9, 5/9)$.

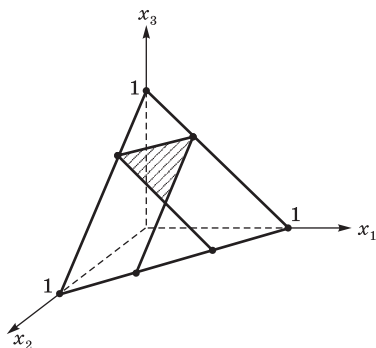


Рис. 8.1
С-ядро в игре «джаз-оркестр»

Возвращаясь к исходной игре, получаем следующий дележ $(140/3, 110/3, 50/3)$, т. е. гонорар пианиста составляет 46.6 руб., певца — 36.6 руб. и барабанщика — 16.6 руб.

С-ядро для игры «рынок перчаток»

Построим С-ядро в задаче про перчатки. Представим множество перчаток в виде $N = \{L, R\}$, где $L = \{l_1, \dots, l_k\}$ — множество левых перчаток и $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ — множество правых перчаток. Пусть для определенности $k \leq m$. Всего можно составить k пар, поэтому $v(N) = k$. Характеристическая функция имеет вид

$$v(l_{i_1}, \dots, l_{i_s}, r_{j_1}, \dots, r_{j_t}) = \min\{s, t\},$$

$$s = 1, \dots, k; \quad t = 1, \dots, m.$$

Согласно теореме С-ядро на множестве дележей

$$D = \{(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) : \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{j=1}^m y_j = k, x \geq 0, y \geq 0\}$$

определяется неравенствами

$$x_{i_1} + \dots + x_{i_s} + y_{j_1} + \dots + y_{j_t} \geq \min\{s, t\}, \quad s = 1, \dots, k; t = 1, \dots, m.$$

Если $k < m$, то из этих неравенств следует

$$x_1 + \dots + x_k + y_{j_1} + \dots + y_{j_k} \geq k$$

для любого набора k правых перчаток $\{j_1, \dots, j_k\}$, и поскольку $\sum_{i=1}^k x_i + \sum_{j=1}^m y_j = k$, то отсюда получим

$$\sum_{j \neq j_1, \dots, j_k} y_j = 0.$$

Следовательно, $y_j = 0$ для всех $j \neq j_1, \dots, j_k$. Но набор правых перчаток был произвольный, отсюда все y_j равны нулю. Таким образом, С-ядро в случае $k < m$ состоит из одной точки ($x_1 = \dots = x_k = 1, y_1, \dots, y_m = 0$).

Если же $k = m$, то несложно видеть, что С-ядро также состоит из единственного дележа, но теперь он имеет вид $x_1 = \dots = x_k = y_1 = \dots = y_k = \frac{1}{2k}$.

С-ядро для игры «составление расписания»

Построим теперь С-ядро в задаче составления расписания для $N = \{1, 2, 3\}$, т.е. у нас есть три работы и три машины, на которых они могут быть выполнены. Предположим, что матрица временных затрат имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствующая кооперативная игра $\langle N, v \rangle$ имеет вид, представленный в табл. 8.1. Затраты времени вычисляются как минимум среди возможных схем выполнения работ для различных коалиций. Например, для $S = \{1, 2\}$ есть два варианта: либо каждая из работ

Таблица 8.1

S	\emptyset	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$t(S)$	0	1	5	11	5	9	15	14
$v(S)$	0	0	0	0	1	3	1	3

выполняется на своей машине, либо они обмениваются заданиями. То есть $t(1, 2) = \min\{1 + 5, 2 + 3\} = 5$. Характеристическая функция $v(S)$ вычисляется как разность $\sum_{i \in S} t_i - t(S)$.

С-ядро для такой характеристической функции определяется неравенствами

$$x_1 + x_2 \geq 1, \quad x_1 + x_3 \geq 3, \quad x_2 + x_3 \geq 1, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$

или $C(v) = \{x : x_1 + x_3 = 3, x_2 = 0\}$. Таким образом, оптимальное решение предписывает вторую работу выполнять на второй машине, а первой и третьей машине обмениваться заданиями.

§ 8.3. СБАЛАНСИРОВАННЫЕ ИГРЫ

Заметим, что С-ядро может быть пусто и тогда данный критерий дележа не подходит. Вопрос о существовании С-ядра связан с понятием сбалансированности игры, введенным Бондаревой (1963) и Шепли (1967).

Определение 8.8. Пусть $N = \{1, 2, \dots, n\}$ и 2^N — множество всех подмножеств N . Отображение $\lambda(S) : 2^N \rightarrow R^+$, определенное для всех коалиций $S \in 2^N$, $\lambda(\emptyset) = 0$, называется сбалансированным, если выполняется равенство

$$\sum_{S \in 2^N} \lambda(S) I(S) = I(N). \quad (3.1)$$

Здесь $I(S)$ — индикатор множества S , т. е. $I_i(S) = 1$, если $i \in S$, и равно нулю в противном случае. Равенство (3.1) должно выполняться для каждого игрока $i \in N$.

Например, для $N = \{1, 2, 3\}$ сбалансированным отображением будет отображение

$$\begin{aligned} \lambda(1) &= \lambda(2) = \lambda(3) = \lambda(1, 2, 3) = 0, \\ \lambda(1, 2) &= \lambda(1, 3) = \lambda(2, 3) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

или отображение

$$\lambda(1) = \lambda(2) = \lambda(3) = \lambda(1, 2) = \lambda(1, 3) = \lambda(2, 3) = \frac{1}{3}, \quad \lambda(1, 2, 3) = 0.$$

Определение 8.9. Кооперативная игра $\langle N, v \rangle$ называется сбалансированной игрой, если для каждого сбалансированного отображения $\lambda(S)$ выполняется условие

$$\sum_{S \in 2^N} \lambda(S) v(S) \leq v(N). \quad (3.2)$$

Теорема 8.3. В кооперативной игре $\langle N, v \rangle$ С-ядро не пусто тогда и только тогда, когда эта игра сбалансирована.

Доказательство основывается на теореме двойственности линейного программирования. Рассмотрим задачу линейного программирования вида

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \forall S \in 2^N. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Если С-ядро не пусто, то согласно теореме 8.2 из параграфа 8.2 решение данной задачи существует и совпадает с $v(N)$. Верно и обратное утверждение, т. е. если существует решение задачи (3.3) и оно равно $v(N)$, то $C(v) \neq \emptyset$.

Рассмотрим двойственную задачу для задачи (3.3)

$$\begin{aligned} \max \sum_{S \in 2^N} \lambda(S) v(S), \\ \sum_{S \in 2^N} \lambda(S) I(S) = I(N), \quad \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ограничения в двойственной задаче (3.4) определяют сбалансированное отображение $\lambda(S)$. Таким образом, в задаче (3.4) ищется максимальное значение функционала $\sum_{S \in 2^N} \lambda(S) v(S)$ среди всех сбалансированных отображений. Для сбалансированного отображения $\lambda(N) = 1, \lambda(S) = 0, \forall S \subset N$ его значение равно $v(N)$. Следовательно, значение задачи (3.4) больше или равно $v(N)$.

Согласно теории двойственности линейного программирования если существуют допустимые решения прямой и двойственной задач, то эти

задачи имеют оптимальные решения и их значения совпадают. Отсюда необходимым и достаточным условием для того, чтобы С-ядро было непусто, является $\sum_{S \in 2^N} \lambda(S)v(S) \leq v(N)$ для любого сбалансированного отображения $\lambda(S)$.

Условие сбалансированности игры трех лиц

Рассмотрим игру трех лиц в 0 – 1 редуцированной форме с характеристической функцией вида

$$\begin{aligned} v(1) = v(2) = v(3) = 0, \quad v(1, 2) = a, \quad v(1, 3) = b, \\ v(2, 3) = c, \quad v(1, 2, 3) = 1. \end{aligned}$$

Для сбалансированного отображения $\lambda(S)$ условие (3.2) принимает вид

$$\sum_{S \in 2^N} \lambda(S)v(S) = \lambda(1, 2)a + \lambda(1, 3)b + \lambda(2, 3)c + \lambda(1, 2, 3) \leq 1,$$

которое эквивалентно условию $a + b + c \leq 2$. Таким образом, в кооперативной игре трех лиц С-ядро не пусто тогда и только тогда, когда $a + b + c \leq 2$.

§ 8.4. τ -РЕШЕНИЕ КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЫ

В предыдущей секции мы определили возможный критерий решения кооперативной игры — С-ядро. Мы видели, что С-ядро может не существовать. Но даже и тогда, когда С-ядро не пусто, возникает неопределенность в выборе дележа из этого множества. Один из возможных принципов определения такого дележа был предложен Тайсом (1981). Это так называемое τ -решение.

Рассмотрим кооперативную игру $< N, v >$ и определим для каждого из игроков максимально и минимально возможные его выигрыши.

Определение 8.10. Утопическим дележом $M(v)$ называется вектор $M(v) = (M_1(v), \dots, M_n(v))$, в котором выигрыш i -го игрока определяется как

$$M_i(v) = v(N) - v(N \setminus i), \quad i = 1, \dots, n.$$

$M_i(v)$ — это максимально возможный для игрока i выигрыш. Если игрок захочет получить больше, гранд-коалиции выгодно исключить его из своего состава.

Определение 8.11. Вектором минимальных прав $m(v) = (m_1(v), \dots, m_n(v))$ называется вектор вида

$$m_i(v) = \max_{S: i \in S} \{v(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(v)\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Вектор минимальных прав дает каждому игроку i право присоединиться к той коалиции, в которой все другие игроки будут довольны иметь в своем составе игрока i , поскольку это дает им максимально возможные (утопические) выигрыши.

Теорема 8.4. Пусть $\langle N, v \rangle$ — кооперативная игра и C -ядро не пусто. Тогда для любого $x \in C(v)$ имеет место

$$m(v) \leq x \leq M(v) \quad (4.1)$$

или

$$m_i(v) \leq x_i \leq M_i(v), \quad \forall i \in N.$$

Доказательство. Действительно, из условия коллективной разумности следует, что для любого игрока $i \in N$:

$$x_i = \sum_{j \in N} x_j - \sum_{j \in N \setminus i} x_j = v(N) - \sum_{j \in N \setminus i} x_j,$$

а поскольку x лежит в ядре, то

$$\sum_{j \in N \setminus i} x_j \geq v(N \setminus i),$$

следовательно,

$$x_i = v(N) - \sum_{j \in N \setminus i} x_j \leq v(N) - v(N \setminus i) = M_i(v).$$

Правая часть неравенств (4.1) доказана.

Так как $x \in C(v)$, то $\sum_{j \in S} x_j \geq v(S)$. Кроме того, в силу уже доказанного вытекает, что для любой коалиции S , содержащей игрока i , имеет место

$$\sum_{j \in S \setminus i} x_j \leq \sum_{j \in S \setminus i} M_j(v).$$

Отсюда

$$x_i = \sum_{j \in S} x_j - \sum_{j \in S \setminus i} x_j \geq v(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(v)$$

для любой коалиции S , содержащей игрока i . Следовательно,

$$x_i \geq \max_{S: i \in S} \{v(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(v)\} = m_i(v).$$

Теорема доказана.

Итак, если С-ядро существует, то если соединить отрезком векторы $m(v)$ и $M(v)$, то найдется точка x , лежащая на этом отрезке и принадлежащая гиперплоскости в R^n , где находится С-ядро, причем данная точка определяется единственным образом.

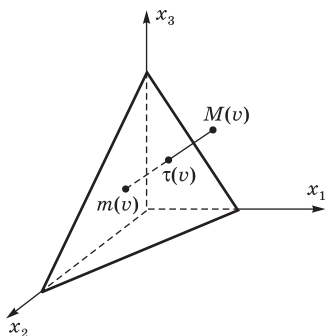


Рис. 8.2

τ -решение в квазисбалансированной игре

Заметим, что даже если С-ядро не существует, а выполняются неравенства

$$m(v) \leq M(v), \quad \sum_{i \in N} m_i(v) \leq v(N) \leq \sum_{i \in N} M_i(v), \quad (4.2)$$

то обязательно на отрезке $[m(v), M(v)]$ найдется точка, которая пересечет гиперплоскость $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, и такая точка будет единственной.

Определение 8.12. Кооперативная игра $\langle N, v \rangle$, в которой выполняются условия (4.2), называется квазисбалансированной.

Определение 8.13. Для квазисбалансированных игр вектор $\tau(v)$, который является пересечением отрезка $[m(v), M(v)]$ с гиперплоскостью $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, называется τ -решением кооперативной игры.

τ -решение в игре «джаз-оркестр»

Найдем τ -решение для примера «джаз-оркестр», рассмотренного ранее. Характеристическая функция здесь имеет вид

$$\begin{aligned} v(1) &= 40, & v(2) &= 30, & v(3) &= 0, & v(1, 2) &= 80, \\ v(1, 3) &= 60, & v(2, 3) &= 50, & v(1, 2, 3) &= 100. \end{aligned}$$

Находим утопический дележ

$$\begin{aligned} M_1(v) &= v(1, 2, 3) - v(2, 3) = 50, & M_2(v) &= v(1, 2, 3) - v(1, 3) = 40, \\ M_3(v) &= v(1, 2, 3) - v(1, 2) = 20, \end{aligned}$$

и вектор равных прав

$$\begin{aligned} m_1(v) &= \max\{v(1), v(1, 2) - M_2(v), v(1, 3) - M_3(v), \\ &\quad v(1, 2, 3) - M_2(v) - M_3(v)\} = 40, \end{aligned}$$

и аналогично $m_2(v) = 30, m_3(v) = 10$.

τ -решение лежит на пересечении отрезка $\lambda M(v) + (1 - \lambda)m(v)$ и гиперплоскости $x_1 + x_2 + x_3 = 100$. Следовательно, должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} \lambda \left(M_1(v) + M_2(v) + M_3(v) \right) + \\ + (1 - \lambda) \left(m_1(v) + m_2(v) + m_3(v) \right) = 100, \end{aligned}$$

откуда находим $\lambda = 2/3$. Таким образом, $\tau(v) = (140/3, 110/3, 50/3)$ является центром тяжести S -ядра данной кооперативной игры.

§ 8.5. n -ЯДРО

n -ядро в качестве решения кооперативных игр было предложено Шмайндлером (1969). Ключевую роль в определении играет понятие лексикографического порядка и эксцесса.

Определение 8.14. *Эксцессом для коалиции S называется величина*

$$e(x, S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i, \quad x \in D(v), \quad S \in 2^N.$$

Эксцесс представляет собой меру сожаления или неудовлетворенности предложенным дележом x для коалиции S . В S -ядре, например,

если оно существует, неудовлетворенных нет, все эксцессы отрицательны.

Сформируем вектор эксцессов для всех непустых $2^n - 1$ коалиций, причем расположим их в порядке убывания

$$e(x) = (e_1(x), e_2(x), \dots, e_m(x)),$$

$$\text{где } e_i(x) = e(x, S_i), \quad i = 1, 2, \dots, m = 2^n - 1.$$

В векторе $e(x)$ $e_1(x) \geq e_2(x) \geq \dots \geq e_m(x)$.

Естественно попытаться найти дележ, при котором максимальная мера сожаления была бы минимальной. Для этого определим лексикографический порядок.

Определение 8.15. Пусть $x, y \in R^m$. Будем говорить, что вектор x лексикографически меньше вектора y и обозначать это $x \prec_e y$, если $e(x) = e(y)$ или существует такое $k : 1 \leq k \leq m$, что $e_i(x) = e_i(y)$ для всех $i = 1, \dots, k - 1$ и $e_k(x) < e_k(y)$.

Например, вектор с эксцессом $(3, 2, 0)$ лексикографически меньше вектора с эксцессом $(3, 3, -10)$.

Определение 8.16. Лексикографический минимум относительно предпочтения \prec_e называется n -ядром кооперативной игры.

Таким образом, n -ядро (далее будет показано, что оно существует и единственно) минимизирует максимальную неудовлетворенность всех коалиций.

Теорема 8.5. Для каждой кооперативной игры $\langle N, v \rangle$ n -ядро существует и единственно.

Доказательство. Нам нужно доказать, что существует лексикографический минимум. Заметим, что компоненты вектора эксцессов можно представить в виде

$$e_1(x) = \max_{i=1, \dots, m} \{e(x, S_i)\},$$

$$e_2(x) = \min_{j=1, \dots, m} \{\max_{i \neq j} \{e(x, S_i)\}\},$$

$$e_3(x) = \min_{j, k=1, \dots, m; j \neq k} \{\max_{i \neq j, k} \{e(x, S_i)\}\},$$

$$\dots$$

$$e_m(x) = \min_{i=1, \dots, m} \{e(x, S_i)\}.$$
(5.1)

Для каждого i функции $e(x, S_i)$ непрерывны. Максимумы и минимумы в (5.1) непрерывных функций также непрерывны. Таким образом, все функции $e_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ непрерывны.

Множество дележей $D(v)$ компактно. Непрерывная функция $e_1(x)$ достигает на этом множестве своего минимального значения m_1 . Если это значение достигается в одной точке x_1 , это и есть минимальный элемент и теорема доказана.

Предположим, что минимальное значение достигается на множестве $X_1 = \{x \in D(v) : e_1(x) = m_1\}$. Так как функция $e_1(x)$ непрерывна, X_1 — компактное множество. Ищем минимум непрерывной функции $e_2(x)$ на компакте X_1 . Он существует, и пусть минимальное значение равно $m_2 \leq m_1$. Если это значение достигается в одной точке, то это лексикографический минимум, иначе это компактное множество $X_2 = \{x \in X_1 : e_2(x) = m_2\}$. Продолжая этот процесс далее, получим, что найдется такая точка или множество, которые дадут лексикографический минимум.

Докажем его единственность. Предположим противное, т.е. существуют два дележа x и y , для которых $e(x) = e(y)$. Заметим, что хотя компоненты эксцессов этих дележей равны, они могут быть записаны для разных коалиций. Рассмотрим вектор $e(x)$. Пусть максимальные компоненты в нем $e_1(x) = \dots = e_k(x)$ и $e_k(x) > e_{k+1}(x)$ и соответственно эксцессы для коалиций S_1, \dots, S_k , т.е. $e_1(x) = e(x, S_1), \dots, e_k(x) = e(x, S_k)$. Тогда для этих же коалиций, но для другого дележа y должно выполняться

$$e(y, S_i) \leq e(x, S_i), \quad \text{или}$$

$$v(S_i) - \sum_{j \in S_i} y_j \leq v(S_i) - \sum_{j \in S_i} x_j, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.2)$$

Предположим, что для $i = 1, \dots, \hat{i} - 1$ в (5.2) стоит равенство, но для некоторой коалиции $S_{\hat{i}}$ здесь достигается строгое неравенство, т.е.

$$v(S_{\hat{i}}) - \sum_{j \in S_{\hat{i}}} y_j < v(S_{\hat{i}}) - \sum_{j \in S_{\hat{i}}} x_j. \quad (5.3)$$

Неравенство (5.3) будет справедливо и для нового дележа $z = \epsilon y + (1 - \epsilon)x$ при любом $\epsilon > 0$

$$v(S_{\hat{i}}) - \sum_{j \in S_{\hat{i}}} z_j < v(S_{\hat{i}}) - \sum_{j \in S_{\hat{i}}} x_j.$$

Поскольку

$$e(x, S_i) > e_j(x), \quad j = k + 1, \dots, m, \quad (5.4)$$

то в силу непрерывности функций $e_j(x)$, при достаточно малом ϵ неравенство (5.4) будет справедливо и для дележа z

$$e(z, S_i) > e_j(z), \quad j = k + 1, \dots, m.$$

Следовательно, для достаточно малого ϵ дележ z лексикографически меньше x . Полученное противоречие доказывает, что в неравенствах (5.2) стоят равенства.

Продолжая рассуждения индуктивно для меньших по величине компонент в векторе эксцессов, придем к тому, что для всех коалиций $S_i, i = 1, \dots, m$ имеет место равенство $e(y, S_i) = e(x, S_i)$ или

$$\sum_{j \in S_i} y_j = \sum_{j \in S_i} x_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

откуда вытекает $x = y$. Теорема доказана.

Теорема 8.6. Пусть в кооперативной игре $\langle N, v \rangle$ C -ядро не пусто. Тогда n -ядро принадлежит $C(v)$.

Доказательство. Обозначим n -ядро как x^* . Рассмотрим произвольный дележ x , принадлежащий C -ядру. Для $x \in C(v)$ эксцессы для всех коалиций не положительны, т.е. $e(x, S_j) \leq 0, j = 1, \dots, m$. Но $x^* \prec_e x$, следовательно, это выполняется и для x^* , т.е. $e(x^*, S_j) \leq 0, j = 1, \dots, m$. Отсюда

$$\sum_{i \in S_j} x_i^* \geq v(S_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

и тогда x^* принадлежит C -ядру.

n -ядро в игре «строительство дороги»

Представим трех фермеров, которые договариваются о финансировании строительства дороги, которая свяжет фермы с городом. Строительство каждого участка дороги несет определенные затраты, и каждая из ферм имеет определенный доход от продажи своей продукции в городе. Инфраструктура дорог, цены строительства каждого участка дороги и доходы участников представлены на рис. 8.3.

Вычислим характеристическую функцию для каждой коалиции. Видно, что каждому из игроков невыгодно строить дорогу самостоятельно,

$$v(1) = 20 - 21 = -1, \quad v(2) = 15 - 16 = -1, \quad v(3) = 10 - 12 = -2.$$

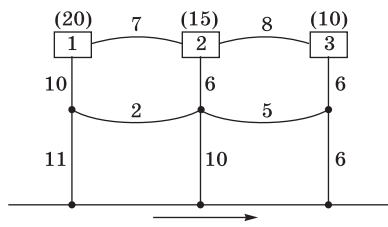


Рис. 8.3
Строительство дороги

В кооперации же их доходы равны

$$\begin{aligned} v(1, 2) &= 35 - 23 = 12, & v(2, 3) &= 25 - 20 = 5, \\ v(1, 3) &= 30 - 27 = 3, & v(1, 2, 3) &= 45 - 27 = 18. \end{aligned}$$

Этапы вычисления n -ядра представлены в табл. 8.2. Начнем с произвольного дележа, например $x = (8, 6, 4)$. Вычисляем эксцессы $e(x, S)$ для всех коалиций. Наибольший эксцесс для коалиции $S = \{1, 2\}$. Так как $e(x, S) = x_3 - 6$, его можно уменьшить, уменьшая x_3 . Будем уменьшать x_3 , при этом увеличивая x_2 , до тех пор, пока этот эксцесс не сравняется с $e(x, \{3\}) = -2 - x_3$, т.е. до $x_3 = 2$. Приходим к дележу $(7, 9, 2)$. Теперь мы не можем изменять x_3 без увеличения либо эксцесса $e(x, \{3\})$, либо $e(x, \{1, 2\})$. Таким образом, эти два эксцесса достигли своего минимального значения. Следующий по убыванию эксцесс $e(x, \{1, 3\}) = x_2 - 13$. Будем уменьшать его, уменьшая x_2 и соответственно увеличивая x_1 , до тех пор, пока этот эксцесс не сравняется со следующим по величине эксцессом $e(x, \{2, 3\}) = x_1 - 15$. Это произойдет при $x_2 = 7, x_3 = 9$. Теперь ни один из эксцессов нельзя уменьшить. Таким образом, n -ядро здесь — это дележ $(9, 7, 2)$.

Теперь мы можем разнести затраты на строительство удобной для всех фермеров дороги, которая свяжет их с городом. Сама дорога изображена на рисунке жирной линией. Затраты на нее равны 27 и доли затрат игроков на ее строительство имеют вид $c_1 = 20 - 9 = 11$, $c_2 = 15 - 7 = 8$, $c_3 = 10 - 2 = 8$.

§ 8.6. ИГРА «БАНКРОТСТВО»

В 1985 году Машлер рассмотрел игру на основе одного из текстов, представленных в Талмуде. Итак, есть три кредитора, которые требуют вернуть соответственно долги в 300, 200 и 100 единиц, обозначим

Таблица 8.2
Вычисление n -ядра

S	v	$e(x, S)$	(8, 6, 4)	(7, 9, 2)	(9, 7, 2)
{1}	-1	$-1 - x_1$	-9	-8	-10
{2}	-1	$-1 - x_2$	-7	-10	-8
{3}	-2	$-2 - x_3$	-6	-4	-4
{1, 2}	12	$12 - x_1 - x_2 = x_3 - 6$	-2	-4	-4
{1, 3}	5	$5 - x_1 - x_3 = x_2 - 13$	-7	-4	-6
{2, 3}	3	$3 - x_2 - x_3 = x_1 - 15$	-7	-8	-6

Таблица 8.3
Дележи в игре «банкротство»

	Долги		
	Игрок 1	Игрок 2	Игрок 3
	$d_1 = 300$	$d_2 = 200$	$d_3 = 100$
100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
E 200	75	75	50
300	150	100	50

их соответственно d_1, d_2, d_3 . В зависимости от состояния банкрота E предлагаются разные варианты расчета с кредиторами. Они представлены в табл. 8.3.

Мы видим, что когда состояние мало $E = 100$, рекомендуется делить все долги поровну. Когда $E = 300$ долги распределяются пропорционально. Для среднего варианта $E = 200$ предложение вообще трудно объяснить. Чтобы найти принцип распределения воспользуемся методами кооперативной теории игр.

Сформируем кооперативную игру, связанную с данной задачей. Определим характеристическую функцию в данной игре для каждой коалиции S как

$$v(S) = (E - \sum_{i \in N \setminus S} d_i)^+, \quad (6.1)$$

где $a^+ = \max(a, 0)$. Ограничимся рассмотрением случая трех игроков.

Теорема 8.7. В игре трех лиц $< N = \{1, 2, 3\}, v > 0$ -1 редуцированной форме, где $v(1, 2) = c_3$, $v(1, 3) = c_2$, $v(2, 3) = c_1$ и $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq 1$, n -ядро имеет вид

$$NC = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), & \text{если } c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \frac{1}{3}, \\ \left(\frac{1+c_3}{4}, \frac{1+c_3}{4}, \frac{1-c_3}{2} \right), & \text{если } c_3 > \frac{1}{3}, c_2 \leq \frac{1-c_3}{2}, \\ \left(\frac{c_2+c_3}{2}, \frac{1-c_2}{2}, \frac{1-c_3}{2} \right), & \\ \text{если } c_3 > \frac{1}{3}, c_2 > \frac{1-c_3}{2}, c_1 \leq \frac{1-c_3}{2}, \\ \left(\frac{1-2c_1+2c_2+c_3}{4}, \frac{1+2c_1-2c_2+c_3}{4}, \frac{1-c_3}{2} \right), & \\ \text{если } c_3 > \frac{1}{3}, c_1 > \frac{1-c_3}{2}, c_1+c_2 \leq \frac{1+c_3}{2}, \\ \left(\frac{1-2c_1+c_2+c_3}{3}, \frac{1+c_1-2c_2+c_3}{3}, \frac{1+c_1+c_2-2c_3}{3} \right), & \\ \text{если } c_3 > \frac{1}{3}, c_1 > \frac{1-c_3}{2}, c_1+c_2 > \frac{1+c_3}{2}. \end{cases}$$

Доказательство. Условие $c_1 \leq c_2 \leq c_3$ не ограничивает общности, иначе изменим порядок игроков. Удобно представить этапы доказательства теоремы в виде диаграммы, изображенной на рис. 8.4.

Начнем рассмотрение со случая $c_3 \leq 1/3$. Вычислим эксцессы для всех коалиций $S_1 = \{1\}, S_2 = \{2\}, S_3 = \{3\}, S_4 = \{1, 2\}, S_5 = \{1, 3\}, S_6 = \{2, 3\}$ для дележа $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Они представлены в табл. 8.4. Мы видим, эксцессы для коалиций S_1, S_2, S_3 равны $e(x, S_1) = e(x, S_2) = e(x, S_3) = 1/3$ и в условиях $c_3 \leq 1/3$ имеет место $-1/3 \geq c_3 - 2/3$, откуда $-1/3 \geq e(x, S_4)$. Итак, если $c_3 \leq 1/3$, то порядок эксцессов следующий:

$$e(x, S_1) = e(x, S_2) = e(x, S_3) \geq e(x, S_4) \geq e(x, S_5) \geq e(x, S_6).$$

Изменение любой компоненты дележа приводит к увеличению максимального эксцесса. Таким образом, $(1/3, 1/3, 1/3)$ является n -ядром.

Таблица 8.4
 n -ядро в игре трех лиц

S	v	$e(x, S)$	$(1/3, 1/3, 1/3)$	$(\frac{1+c_3}{4}, \frac{1+c_3}{4}, \frac{1-c_3}{2})$	$(\frac{c_2+c_3}{2}, \frac{1-c_2}{2}, \frac{1-c_3}{2})$
$\{1\}$	0	$-x_1$	$-1/3$	$-\frac{1+c_3}{4}$	$-\frac{c_2+c_3}{2}$
$\{2\}$	0	$-x_2$	$-1/3$	$-\frac{1+c_3}{4}$	$-\frac{1-c_2}{2}$
$\{3\}$	0	$-x_3$	$-1/3$	$-\frac{1-c_3}{2}$	$-\frac{1-c_3}{2}$
$\{1, 2\}$	c_3	$c_3 - 1 + x_3$	$c_3 - 2/3$	$-\frac{1-c_3}{2}$	$-\frac{1-c_3}{2}$
$\{1, 3\}$	c_2	$c_2 - 1 + x_2$	$c_2 - 2/3$	$\frac{1+c_3}{4} - 1 + c_2$	$-\frac{1-c_2}{2}$
$\{2, 3\}$	c_1	$c_1 - 1 + x_1$	$c_1 - 2/3$	$\frac{1+c_3}{4} - 1 + c_1$	$\frac{c_2+c_3}{2} - 1 + c_1$

S	$(\frac{1-2c_1+2c_2+c_3}{4}, \frac{1+2c_1-2c_2+c_3}{4}, \frac{1-c_3}{2})$	$(\frac{1-2c_1+c_2+c_3}{3}, \frac{1+c_1-2c_2+c_3}{3}, \frac{1+c_1+c_2-2c_3}{3})$
$\{1\}$	$-\frac{1-2c_1+2c_2+c_3}{4}$	$-\frac{1-2c_1+c_2+c_3}{3}$
$\{2\}$	$-\frac{1+2c_1-2c_2+c_3}{4}$	$-\frac{1+c_1-2c_2+c_3}{3}$
$\{3\}$	$-\frac{1-c_3}{2}$	$-\frac{1+c_1+c_2-2c_3}{3}$
$\{1, 2\}$	$-\frac{1-c_3}{2}$	$-\frac{-2+c_1+c_2+c_3}{3}$
$\{1, 3\}$	$-\frac{-3+2c_1+2c_2+c_3}{4}$	$-\frac{-2+c_1+c_2+c_3}{3}$
$\{2, 3\}$	$-\frac{-3+2c_1+2c_2+c_3}{4}$	$-\frac{-2+c_1+c_2+c_3}{3}$

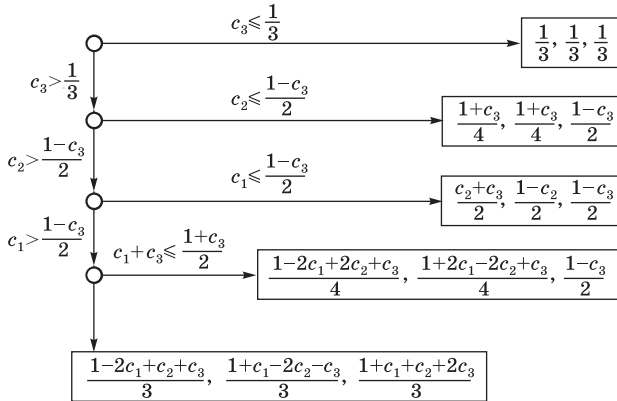


Рис. 8.4
n-ядро в игре трех лиц

Предположим теперь $c_3 > 1/3$. Предположим также

$$c_2 \leq \frac{1-c_3}{2} \quad (6.2)$$

и рассмотрим дележ $x_1 = x_2 = \frac{1+c_3}{4}$, $x_3 = \frac{1-c_3}{2}$. В табл. 8.4 приведены выражения соответствующих эксцессов. Максимальные эксцессы теперь у коалиций S_3 и S_4 :

$$e(x, S_3) = e(x, S_4) = -\frac{1-c_3}{2}.$$

Действительно,

$$e(x, S_3) = -\frac{1-c_3}{2} > -\frac{1+c_3}{4} = e(x, S_1) = e(x, S_2),$$

так как $c_3 > 1/3$, и из предположения (6.2)

$$e(x, S_1) = -\frac{1+c_3}{4} \geq \frac{1+c_3}{4} - 1 + c_2 = e(x, S_5).$$

Таким образом, эксцессы в этом случае располагаются в следующем порядке:

$$e(x, S_3) = e(x, S_4) > e(x, S_1) = e(x, S_2) \geq e(x, S_5) \geq e(x, S_6).$$

Максимальные эксцессы $e(x, S_3), e(x, S_4)$ включают x_3 с противоположными знаками, следовательно, изменение x_3 приведет к увеличению максимального эксцесса. Зафиксируем x_3 . Вторые по порядку эксцессы $e(x, S_1), e(x, S_2)$ равны. Любое изменение x_1, x_2 приведет к увеличению второго по величине эксцесса. Отсюда дележ $x_1 = x_2 = \frac{1+c_3}{4}, x_3 = \frac{1-c_3}{2}$ образует n -ядро.

Пусть теперь $c_2 > \frac{1-c_3}{2}$ и предположим

$$c_1 \leq \frac{1-c_3}{2}. \quad (6.3)$$

Рассмотрим дележ $x_1 = \frac{c_2+c_3}{2}, x_2 = \frac{1-c_2}{2}, x_3 = \frac{1-c_3}{2}$. В табл. 8.4 находим соответствующие эксцессы. Максимальные эксцессы, как и выше, $e(x, S_3) = e(x, S_4) = -\frac{1-c_3}{2}$, так как

$$-\frac{1-c_3}{2} \geq -\frac{1-c_2}{2} = e(x, S_2) = e(x, S_5),$$

и из условия $c_2 > \frac{1-c_3}{2}$ вытекает

$$e(x, S_2) = -\frac{1-c_2}{2} > -\frac{c_2+c_3}{2} = e(x, S_1).$$

С другой стороны, в силу (6.3)

$$e(x, S_2) = -\frac{1-c_2}{2} \geq \frac{c_1+c_2}{2} - 1 + c_1 = e(x, S_6).$$

Таким образом,

$$e(x, S_3) = e(x, S_4) \geq e(x, S_2) = e(x, S_5) \geq \max\{e(x, S_1), e(x, S_6)\}.$$

В силу равенства максимальных эксцессов $e(x, S_3), e(x, S_4)$, куда входит x_3 с противоположными знаками, нельзя изменять x_3 , а из равенства вторых по порядку эксцессов $e(x, S_2), e(x, S_5)$ нельзя изменять x_2 , не увеличивая второй по порядку эксцесс. Следовательно, $x_1 = \frac{c_2+c_3}{2}, x_2 = \frac{1-c_2}{2}, x_3 = \frac{1-c_3}{2}$ — n -ядро.

Пусть теперь $c_1 > \frac{1-c_3}{2}$, заметим, что тогда $c_2 > \frac{1-c_3}{2}$. Предположим, что имеет место неравенство

$$c_1 + c_2 \leq \frac{1+c_3}{2}. \quad (6.4)$$

Покажем, что дележ $x_1 = \frac{1-2c_1+2c_2+c_3}{4}, x_2 = \frac{1+2c_1-2c_2+c_3}{4}, x_3 = \frac{1-c_3}{2}$ является в этих условиях n -ядром. Очевидно, что все $x_i \in [0, 1], i = 1, 2, 3$. В табл. 8.4 представлены соответствующие эксцессы. Так же,

как и выше, устанавливаем порядок эксцессов. В данном случае выполняется

$$e(x, S_3) = e(x, S_4) \geq e(x, S_5) = e(x, S_6) > e(x, S_2) \geq e(x, S_1).$$

Первое неравенство

$$-\frac{1-c_3}{2} \geq \frac{-3+2c_1+2c_2+c_3}{4}$$

эквивалентно (6.4), а второе эквивалентно условию $c_2 > \frac{1-c_3}{2}$. Из первого равенства $e(x, S_3) = e(x, S_4)$ следует, что нельзя изменить x_3 без увеличения максимального эксцесса, а из второго $e(x, S_5) = e(x, S_6)$, что нельзя изменить x_2 и x_3 , не увеличивая второй по величине эксцесс.

Наконец, предположим, что $c_2 > \frac{1-c_3}{2}$ и

$$c_1 + c_2 > \frac{1+c_3}{2}, \quad (6.5)$$

и покажем, что дележ $x_1 = \frac{1-2c_1+c_2+c_3}{3}$, $x_2 = \frac{1+c_1-2c_2+c_3}{3}$, $x_3 = \frac{1+c_1+c_2-2c_3}{3}$ является n -ядром. В табл. 8.4 представлены все эксцессы. Они располагаются в следующем порядке:

$$e(x, S_4) = e(x, S_5) = e(x, S_6) > e(x, S_3) \geq e(x, S_2) \geq e(x, S_1).$$

Первое неравенство эквивалентно (6.5), остальные очевидны. Из равенств $e(x, S_4) = e(x, S_5) = e(x, S_6)$ следует, что если изменить любую компоненту дележа, максимальный эксцесс увеличится. Теорема доказана.

Вернемся теперь к задаче о банкротстве, сформулированной в начале параграфа. Характеристическая функция (6.1) принимает вид $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(1, 2, 3) = E$ и

$$v(1, 2) = (E - d_3)^+ = (E - 100)^+, \quad v(1, 3) = (E - d_2)^+ = (E - 200)^+,$$

$$v(2, 3) = (E - d_1)^+ = (E - 300)^+.$$

Когда $E = 100$, то

$$v(1, 2) = 0, \quad v(1, 3) = 0, \quad v(2, 3) = 0.$$

Это соответствует случаю, когда все значения характеристической функции не превосходят трети всего выигрыша. Согласно теореме n -ядро предписывает делить все поровну.

Когда $E = 200$,

$$v(1, 2) = 100, \quad v(1, 3) = 0, \quad v(2, 3) = 0,$$

и это соответствует второму условию теоремы, когда $v(1, 2)$ больше трети всего выигрыша E , но $v(1, 3)$ не превосходит половины остатка $E - v(1, 2)$. Тогда n -ядро предписывает отдать игроку III эту половину $(E - v(1, 2))/2 = (200 - 100)/2 = 50$, а остальные доли распределить поровну между игроками I и II, т. е. по 75 единиц.

Наконец, для $E = 300$

$$v(1, 2) = 200, \quad v(1, 3) = 100, \quad v(2, 3) = 0.$$

Это соответствует третьему случаю, когда $v(1, 3)$ больше половины $E - v(1, 2)$, а $v(2, 3)$ не превосходит этой половины. Тогда n -ядро распределяет долг пропорционально, т. е. игроку I — 150 единиц, игроку II — 100 единиц, и игроку III — 50 единиц.

Мы видим, что вариант, описанный в табл. 8.3, в точности соответствует n -ядру кооперативной игры с характеристической функцией (6.1).

Для $E = 400$ характеристическая функция примет вид $v(1, 2) = 300$, $v(1, 3) = 200$, $v(2, 3) = 100$, это будет соответствовать четвертому случаю теоремы. Вычисляя n -ядро, получим дележ $(225, 125, 50)$. Если же $E = 500$, то это пятый случай теоремы — n -ядро равно $(266.66, 166.66, 66.66)$.

§ 8.7. ВЕКТОР ШЕПЛИ

Одним из наиболее популярных решений в теории кооперативных игр является вектор Шепли (1953). Рассмотрим кооперативную игру $\langle N, v \rangle$. Будем обозначать через $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ произвольную перестановку игроков $1, \dots, n$. Представим такую ситуацию. Игроки в случайном порядке собираются в некоторой комнате, чтобы сформировать коалицию. Все перестановки σ считаются равновероятными. Тогда вероятность каждой из таких перестановок равна $1/n!$.

Рассмотрим какого-то из игроков i . Будем считать, что с его приходом формирование коалиции завершается. Обозначим множество его предшественников в перестановке σ через $P_\sigma(i) = \{j \in N : \sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)\}$. Вычислим вклад игрока i в данной коалиции как

$$m_i(\sigma) = v(P_\sigma(i) \cup \{i\}) - v(P_\sigma(i)).$$

Определение 8.17. Вектором Шепли называется среднее значение вкладов для каждого игрока по всем возможным перестановкам, т. е.

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} m_i(\sigma) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} [v(P_{\sigma}(i) \cup \{i\}) - v(P_{\sigma}(i))], \quad (7.1)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Вектор Шепли в игре «строительство дороги»

Построим вектор Шепли в игре «строительство дороги», рассмотренной в предыдущем разделе. Напомним, что характеристическая функция здесь имеет вид

$$\begin{aligned} v(1) &= -1, \quad v(2) = -1, \quad v(3) = -2, \quad v(1, 2) = 12, \\ v(2, 3) &= 5, \quad v(1, 3) = 3, \quad v(1, 2, 3) = 18. \end{aligned}$$

Вычисления вектора Шепли представлены в табл. 8.5. В левой колонке представлены всевозможные перестановки, для каждой из которых вычислены вклады всех игроков в соответствии с данной характеристической функцией. Так для первой перестановки $(1, 2, 3)$ вклад первого игрока составляет $v(1) - v(\emptyset) = -1$, второго игрока $-v(1, 2) - v(1) = 12 - (-1) = 13$ и третьего игрока $-v(1, 2, 3) - v(1, 2) = 18 - 12 = 6$. В результате вычислений получаем, что вектор Шепли для этой задачи имеет вид $\phi = (7, 8, 3)$. Заметим, что это решение отличается от n -ядра, найденного ранее $x^* = (9, 7, 2)$. Соответственно изменятся и затраты каждого на строительство общей для всех дороги. Теперь доли затрат игроков на ее строительство имеют вид: $c_1 = 20 - 7 = 13$, $c_2 = 15 - 8 = 7$, $c_3 = 10 - 3 = 7$.

Найдем более удобное выражение для вычисления вектора Шепли. В квадратных скобках в (7.1) стоит выражение вида $v(S) - v(S \setminus \{i\})$, где игрок i принадлежит коалиции S . Поэтому суммирование в (7.1) можно провести по всем коалициям S , содержащим игрока i . В каждой коалиции S игрок i стоит на последнем месте, а игроки, предшествующие ему, могут прийти в коалицию $(|S| - 1)!$ способами. Игроки же из коалиции $N \setminus S$ могут прийти после игрока i $(n - |S|)!$ способами. Таким образом, число перестановок в сумме (7.1), которые соответствуют одной и той же коалиции S , содержащей игрока i , равно $(|S| - 1)!(n - |S|)!$. Следовательно, (7.1) можно представить в виде

$$\phi_i(v) = \sum_{S: i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})], \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.2)$$

Таблица 8.5
Вычисление вектора Шепли

σ	Игрок I	Игрок II	Игрок III	Сумма вкладов
(1, 2, 3)	-1	13	6	18
(1, 3, 2)	-1	15	4	18
(2, 1, 3)	13	-1	6	18
(2, 3, 1)	13	-1	6	18
(3, 1, 2)	5	15	-2	18
(3, 2, 1)	13	7	-2	18
Среднее	7	8	3	18

Величины $\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$ представляют собой вероятности, с которыми игрок i формирует коалицию S . Соответственно

$$\sum_{S:i \in S} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} = 1, \quad \forall i. \quad (7.3)$$

Покажем, что введенный нами вектор действительно представляет собой дележ.

Лемма 8.1. Для вектора ϕ выполняются свойства индивидуальной рациональности и коллективной разумности, т. е. $\phi_i(v) \geq v(i)$, $\forall i$ и $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$.

Доказательство. В силу супераддитивности функции v имеет место неравенство $v(S) - v(S \setminus \{i\}) \geq v(i)$ для любой коалиции S . Тогда из (7.2) и (7.3) следует

$$\phi_i(v) \geq v(i) \sum_{S:i \in S} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} = v(i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Докажем теперь равенство $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$. Воспользуемся определением (7.1) и рассмотрим сумму

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \sum_{i \in N} [v(P_{\sigma}(i) \cup \{i\}) - v(P_{\sigma}(i))]. \quad (7.4)$$

В сумме (7.4) для каждой перестановки σ последовательно складываются вклады всех игроков, находящихся в этой перестановке, т. е.

$$v(\sigma(1)) + [v(\sigma(1), \sigma(2)) - v(\sigma(1))] + [v(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) - v(\sigma(1), \sigma(2))] + \dots \\ \dots + [v(\sigma(1), \dots, \sigma(n)) - v(\sigma(1), \dots, \sigma(n-1))] = v(\sigma(1), \dots, \sigma(n)) = v(N).$$

Отсюда

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} v(N) = v(N).$$

Лемма доказана.

Выше мы уже ввели в рассмотрение некоторые критерии, которым должно удовлетворять решение кооперативной игры. Для S -ядра это должно быть недоминируемое предложение. Для n -ядра решение минимизирует максимальное недовольство от других решений. Шепли сформулировал некоторые особые желаемые свойства, которым должен удовлетворять дележ кооперативной игры.

Аксиомы Шепли для вектора $\varphi_i(v)$.

1. **Эффективность.** $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$.
2. **Симметрия.** Если для игроков i и j имеет место $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ для любой коалиции S , не содержащей игроков i и j , то $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$.
3. **Свойство болванов.** Для игрока i такого, что $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ для любой коалиции S , не содержащей игрока i , $\varphi_i(v) = 0$.
4. **Аддитивность.** Если v_1 и v_2 две характеристические функции, то $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$.

Аксиома 1 отражает тот факт, что весь выигрыш должен быть распределен между участниками. Свойство симметрии заключается в том, что если характеристическая функция симметрична для игроков i и j , то они должны получить равные доли. Игрок, который не дает любой коалиции никакой дополнительной полезности, называется **болваном**. Естественно, что его доля должна быть равна нулю. Последняя аксиома отражает тот факт, что если играется серия игр, то доля каждого игрока в серии должна быть равна сумме долей в каждой из игр.

Теорема 8.8. *Существует единственный вектор $\varphi(v)$, удовлетворяющий аксиомам 1–4.*

Доказательство. Введем в рассмотрение простейшие характеристические функции.

Определение 8.18. Пусть $S \subset N$. Простейшей характеристической функцией называется функция вида

$$v_S(T) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \subset T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, в кооперативной игре с такой характеристической функцией коалиция T выигрывает, если она содержит некую минимальную выигрывающую коалицию S . Найдем вектор $\varphi(v_S)$, удовлетворяющий аксиомам Шепли. Заметим, что любой игрок, не входящий в минимальную выигрывающую коалицию, является болваном. Из аксиомы 2 $\varphi_i(v_S) = 0$, если $i \notin S$. Из аксиомы симметрии следует, что $\varphi_i(v_S) = \varphi_j(v_S)$ для всех игроков i, j , входящих в коалицию S . Вместе с аксиомой эффективности это дает $\sum_{i \in N} \varphi_i(v_S) = v_S(N) = 1$. Отсюда $\varphi_i(v_S) = 1/|S|$ для всех игроков, входящих в коалицию S . Аналогичные рассуждения верны для характеристической функции cv_S , где c некоторый постоянный множитель. Тогда

$$\varphi_i(cv_S) = \begin{cases} \frac{c}{|S|}, & \text{если } i \in S, \\ 0, & \text{если } i \notin S. \end{cases}$$

Лемма 8.2. Простейшие характеристические функции образуют базис на множестве всех характеристических функций.

Доказательство. Докажем, что любую характеристическую функцию можно представить в виде линейной комбинации простейших функций, т. е. найдутся такие постоянные величины c_S , что

$$v = \sum_{S \in 2^N} c_S v_S. \quad (7.5)$$

Положим $c_\emptyset = 0$. Докажем существование постоянных c_S по индукции по числу элементов в множестве S . Положим

$$c_T = v(T) - \sum_{S \subset T, S \neq T} c_S,$$

т. е. значение c_T определяется через величины c_S , где число элементов в множестве S меньше, чем в T .

Поскольку $v_S(T)$ отлично от нуля только для коалиций $S \subset T$, то для таким образом определенных постоянных c_S справедливо равенство

$$\sum_{S \in 2^N} c_S v_S(T) = \sum_{S \subset T} c_S = c_T + \sum_{S \subset T, S \neq T} c_S = v(T),$$

что доказывает (7.5).

Покажем по индукции единственность представления (7.5). Предположим, что возможны два представления

$$v = \sum_{S \in 2^N} c_S v_S = \sum_{S \in 2^N} c'_S v_S,$$

или, в другой записи,

$$v(T) = \sum_{S \subset T} c_S = \sum_{S \subset T} c'_S$$

для любой коалиции $T \subset N$. Тогда для $T = \{i\}$ отсюда следует $c_{\{i\}} = c'_{\{i\}}$, $i = 1, \dots, n$. Пусть уже доказано, что $c_S = c'_S$ для всех S , таких что $|S| = k \geq 1$. Рассмотрим коалицию T , в которой $|T| = k + 1$. Из равенства

$$v(T) = c_T + \sum_{S \subset T, S \neq T} c_S = c'_T + \sum_{S \subset T, S \neq T} c'_S$$

немедленно следует $c_T = c'_T$. Единственность доказана.

Итак, любая характеристическая функция представляется единственным образом как сумма простейших характеристических функций $c_S v_S$. По аксиоме аддитивности вектор $\varphi(v)$ определяется также однозначно

$$\varphi_i(v) = \sum_{i \in S \in 2^N} \frac{c_S}{|S|}.$$

Теорема доказана.

Теперь заметим, что вектор Шепли, определенный формулой (7.2), удовлетворяет всем аксиомам 1–4. Его эффективность была доказана в лемме 8.1.

Симметрия следует из того, что если для игроков i и j имеет место $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ для любой коалиции S , не содержащей игроков i и j , то вклады игроков в сумму в формуле (7.2) будут одинаковы и, следовательно, $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.

Если игрок i болван, то все его вклады в квадратных скобках в (7.2) равны нулю и тогда $\phi_i(v) = 0$, т. е. свойство болванов выполнено.

Наконец, аддитивность следует из аддитивной формы выражения в (7.2).

Соответствие аксиомам Шепли и доказанной в теореме 8.8 единственности дележа, удовлетворяющего этим аксиомам, приводят к следующему утверждению.

Теорема 8.9. *Единственным дележом, удовлетворяющим аксиомам 1–4, является вектор Шепли $\phi(v) = (\phi_1(v), \dots, \phi_n(v))$, где*

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N: i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})], \quad i = 1, \dots, n.$$

Замечание 8.1. Если в формуле (7.2) суммирование проводить по коалициям, которые не содержат игрока i , то формула для вектора Шепли примет вид

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N: i \notin S} \frac{(|S|)!(n - |S| - 1)!}{n!} [v(S \cup i) - v(S)], \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.6)$$

§ 8.8. ИГРЫ ГОЛОСОВАНИЯ. ИНДЕКС ШЕПЛИ–ШУБИКА И ИНДЕКС БАНЦАФА

Важной областью применения кооперативных игр является политология, особенно ее разделы, связанные с принятием политических решений. Как правило, решение принимается каким-то органом, например парламентом страны, путем голосования. Тогда важным моментом является определение силы структур, входящих в состав данного органа. Это могут быть партии, имеющие в своем активе некий набор голосов, или другие политические объединения. Важными работами в определении политической силы коалиций были работы Шепли–Шубика (1954) и Банцафа (1965), в которых значение силы или влияния каждой участвующей в голосовании стороны предлагалось вычислять с помощью методов теории кооперативных игр.

Определение 8.19. *Игрой голосования называется кооперативная игра $\langle N, v \rangle$, в которой характеристическая функция принимает всего два значения: 0 и 1, $v(N) = 1$. Коалиция S , для которой $v(S) = 1$, называется выигрывающей коалицией, а множество выигрывающих коалиций обозначим W .*

В играх голосования вклад каждого игрока в любую коалицию равен либо нулю, либо единице. Поэтому вектор Шепли можно модифицировать специально для таких игр.

Определение 8.20. Вектором Шепли–Шубика для игры голосования $\langle N, v \rangle$ будем называть вектор $\phi(v) = (\phi_1(v), \dots, \phi_n(v))$, где индекс i -го игрока имеет вид

$$\phi_i(v) = \sum_{S \not\subseteq W, S \cup \{i\} \in W} \frac{(|S|)!(n - |S| - 1)!}{n!}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Согласно определению 8.20 влияние игрока i определяется как среднее число коалиций, в которых его участие обеспечивает победу, а без него коалиция проигрывает.

Существует и другое определение силы игроков — индекс Банцафа. Будем называть **переключением** для игрока i пару коалиций $(S \cup i, S)$, когда коалиция $(S \cup i)$ является выигрывающей, а коалиция S — нет. Игрока i в этом случае будем называть **ключевым игроком** в коалиции S . Для каждого игрока $i \in N$ вычислим число всех переключений в игре $\langle N, v \rangle$, обозначим его $\eta_i(v)$. Общее число переключений равно $\eta(v) = \sum_{i \in N} \eta_i(v)$.

Определение 8.21. Вектором Банцафа в игре голосования $\langle N, v \rangle$ называется вектор $\beta(v) = (\beta_1(v), \dots, \beta_n(v))$, где индекс игрока i :

$$\beta_i(v) = \frac{\eta_i(v)}{\sum_{i \in N} \eta_i(v)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теперь перейдем непосредственно к играм голосования. Будем считать, что каждый игрок i в такой игре представлен некоторым числом голосов w_i , $i = 1, \dots, n$. Кроме того, задан некоторый порог для положительного решения, это необходимое число голосов обозначим q .

Определение 8.22. Игрой взвешенного голосования называется кооперативная игра $\langle q; w_1, \dots, w_n \rangle$, в которой характеристическая функция имеет вид

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } w(S) \geq q, \\ 0, & \text{если } w(S) < q, \end{cases}$$

где $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$ — сумма голосов игроков, входящих в коалицию S .

Для вычисления индексов влияния удобно использовать производящие функции. Напомним, что **производящей функцией** последовательности $\{a_n, n \geq 0\}$ называется функция

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n,$$

и для последовательности $\{a(n_1, \dots, n_k), n_i \geq 0, i = 1, \dots, k\}$:

$$G(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n_1 \geq 0} \dots \sum_{n_k \geq 0} a(n_1, \dots, n_k) x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}.$$

Производящая функция для вычисления индекса Шепли–Шубика была найдена Кантором (1962), а для индекса Банцафа — в работе Брамса и Аффузо (1976).

Теорема 8.10. Пусть $\langle q; w_1, \dots, w_n \rangle$ — игра взвешенного голосования. Тогда индекс Шепли–Шубика можно представить как

$$\phi_i(v) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left(\sum_{k=q-w_i}^{q-1} A^i(k, s) \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.1)$$

где $A^i(k, s)$ — число коалиций S , включающих ровно s игроков и $i \notin S$, сила которых равна $w(S) = k$, для которого производящая функция имеет вид

$$G_i(x, z) = \prod_{j \neq i} (1 + zx^{w_j}). \quad (8.2)$$

Доказательство. Рассмотрим произведение $(1 + zx^{w_1}) \dots (1 + zx^{w_n})$. Если мы раскроем все скобки, то при одинаковых степенях z^k будет стоять x в степени $w_{i_1} + \dots + w_{i_k}$ для всевозможных комбинаций (i_1, \dots, i_k) , т. е.

$$(1 + zx^{w_1}) \dots (1 + zx^{w_n}) = \sum_{S \subset N} z^{|S|} x^{\sum_{i \in S} w_i}. \quad (8.3)$$

Если теперь в этой сумме выделить слагаемые также с одинаковыми степенями при x , которые соответствуют коалициям с одинаковой силой $w(S)$, получим

$$(1 + zx^{w_1}) \dots (1 + zx^{w_n}) = \sum_{k \geq 0} \sum_{s \geq 0} A(k, s) x^k z^s,$$

где множитель $A(k, s)$ равен числу всех коалиций с числом участников s , для которых сила влияния равна k . Если теперь в произведении (8.3)

исключить множитель $(1 + zx^{w_i})$, мы получим производящую функцию для $A_i(k, s)$.

Формула (8.1) следует из того, что коалициями, где игрок i является ключевым, являются коалиции S с силой влияния $w(S) \in \{q - w_i, q - w_i + 1, \dots, q - 1\}$, так как в этом случае $w(S \cup i) = w(S) + w_i \geq q$. Теорема доказана.

Теорема 8.11. Пусть $\langle q; w_1, \dots, w_n \rangle$ — игра взвешенного голосования. Тогда число переключений $\eta_i(v)$ в индексе Банцафа можно представить как

$$\eta_i(v) = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} b^i(k), \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.4)$$

где $b^i(k)$ — число коалиций $S : i \notin S$, сила которых равна $w(S) = k$, с производящей функцией вида

$$G_i(x) = \prod_{j \neq i} (1 + x^{w_j}). \quad (8.5)$$

Доказательство. Как и в теореме 8.10, рассмотрим произведение $(1 + x^{w_1}) \dots (1 + x^{w_n})$. Раскроем скобки

$$G(x) = (1 + x^{w_1}) \dots (1 + x^{w_n}) = \sum_{S \subset N} \prod_{i \in S} x^{w_i} = \sum_{S \subset N} x^{\sum_{i \in S} w_i}. \quad (8.6)$$

Выделим теперь в последней сумме слагаемые с одинаковыми степенями при x , которые соответствуют коалициям с одинаковой силой $w(S)$, получим

$$G(x) = \sum_{k \geq 0} b(k) x^k,$$

где множитель $b(k)$ равен числу всех коалиций, для которых сила влияния равна k . Если теперь в произведении (8.6) исключить множитель $(1 + x^{w_i})$, мы получим производящую функцию вида (8.5) для $b_i(k)$. Формула (8.4) следует из того, что коалициями, где игрок i является ключевым, являются коалиции S с силой влияния $w(S) \in \{q - w_i, q - w_i + 1, \dots, q - 1\}$. Теорема доказана.

Теоремы 8.10 и 8.11 дают простой способ вычисления индексов влияния. Продемонстрируем это на примере парламента Германии 1998 года и Государственной Думы Российской Федерации 3-го созыва (2000–2003).

Индекс Шепли–Шубика для определения силы влияния в парламенте Германии

В парламент Германии 1998 года, который состоял из 669 членов, вошли представители 6 партий:

- Социал-демократическая партия Германии (SDP), 298 голосов;
- Союз христианских демократов (CDU), 245 голосов;
- «Партия зеленых» (GRUNE), 47 голосов;
- Партия свободных демократов (FDP), 43 голоса;
- Партия демократического социализма (PDS), 36 голосов.

Квота q для принятия законопроекта должна составлять больше половины голосов, т.е. 335 голосов. Для определения силы влияния каждой из партий воспользуемся индексами Шепли–Шубика. Для этого вычислим производящую функцию (8.2).

Для партии SDP находим

$$\begin{aligned} G_1(x, z) &= (1 + zx^{245})(1 + zx^{47})(1 + zx^{43})(1 + zx^{36}) = \\ &= 1 + z(x^{36} + x^{43} + x^{47} + x^{245}) + \\ &+ z^2(x^{79} + x^{83} + x^{90} + x^{281} + x^{288} + x^{292}) + \\ &+ z^3(x^{126} + x^{324} + x^{328} + x^{335}) + z^4x^{371}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Теперь мы можем определить число коалиций, в которых партия SDP будет ключевой. Для этого нужно, чтобы сила коалиции до вхождения в нее SDP была в пределах от $q - w_1 = 335 - 298 = 37$ до $q - 1 = 334$. Первая скобка показывает, что для $s = 1$ число таких коалиций равно 3. Из второй скобки находим, что для $s = 2$ есть 6 таких коалиций и для $s = 3$ есть три такие коалиции. Во всех других случаях SDP не является ключевой коалицией. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{k=q-w_1}^{q-1} A^1(k, 0) &= 0, \quad \sum_{k=q-w_1}^{q-1} A^1(k, 1) = 3, \quad \sum_{k=q-w_1}^{q-1} A^1(k, 2) = 6, \\ \sum_{k=q-w_1}^{q-1} A^1(k, 3) &= 3, \quad \sum_{k=q-w_1}^{q-1} A^1(k, 4) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда индекс Шепли–Шубика равен

$$\phi_1(v) = \frac{1!3!}{5!}3 + \frac{2!2!}{5!}6 + \frac{3!1!}{5!}3 = 0.5.$$

Аналогичные выкладки проводим для других партий. Партия CDU будет ключевой, если сила коалиции до ее вхождения лежит в пределах

$q - w_2 = 90, q - 1 = 334$. Для партии CDU производящая функция

$$\begin{aligned} G_2(x, z) &= (1 + zx^{298})(1 + zx^{47})(1 + zx^{43})(1 + zx^{36}) = \\ &= 1 + z(x^{36} + x^{43} + x^{47} + x^{298}) + \\ &+ z^2(x^{79} + x^{83} + x^{90} + x^{334} + x^{341} + x^{345}) + \\ &+ z^3(x^{126} + x^{377} + x^{381} + x^{388}) + z^4x^{424}, \end{aligned}$$

откуда $\sum_{k=q-w_2}^{q-1} A^2(k, 0) = 0, \sum_{k=q-w_2}^{q-1} A^2(k, 1) = 1, \sum_{k=q-w_2}^{q-1} A^2(k, 2) = 2,$
 $\sum_{k=q-w_2}^{q-1} A^2(k, 3) = 1, \sum_{k=q-w_2}^{q-1} A^2(k, 4) = 0$. Индекс Шепли-Шубика для CDU равен

$$\phi_2(v) = \frac{1!3!}{5!}1 + \frac{2!2!}{5!}2 + \frac{3!1!}{5!}1 = \frac{1}{6} \approx 0.1667.$$

Для партии GRUNE

$$\begin{aligned} G_3(x, z) &= (1 + zx^{298})(1 + zx^{245})(1 + zx^{47})(1 + zx^{36}) = \\ &= 1 + z(x^{36} + x^{47} + x^{245} + x^{298}) + \\ &+ z^2(x^{83} + x^{281} + x^{292} + x^{334} + x^{345} + x^{543}) + \\ &+ z^3(x^{328} + x^{381} + x^{579} + x^{590}) + z^4x^{626}. \end{aligned}$$

Партия GRUNE будет ключевой для коалиций с силой от $q - w_3 = 292$ до $q - 1 = 334$. Находим, что число коалиций, для которых GRUNE будет ключевой, совпадает со значениями для партии CDU, следовательно, индексы влияния для них одинаковы. То же самое верно и для партии FDP.

Для партии PDS

$$\begin{aligned} G_5(x, z) &= (1 + zx^{298})(1 + zx^{245})(1 + zx^{47})(1 + zx^{43}) = \\ &= 1 + z(x^{43} + x^{47} + x^{245} + x^{298}) + \\ &+ z^2(x^{90} + x^{288} + x^{292} + x^{341} + x^{345} + x^{543}) + \\ &+ z^3(x^{335} + x^{388} + x^{586} + x^{590}) + z^4x^{633}. \end{aligned}$$

Партия PDS будет ключевой для коалиций с силой влияний в пределах $[q - w_5 = 299, 334]$. Но из вида производящей функции следует, что таких коалиций нет. Следовательно, $\phi_5(v) = 0$.

Окончательно

$$\phi_1(v) = \frac{1}{2}, \quad \phi_2(v) = \phi_3(v) = \phi_4(v) = \frac{1}{6}, \quad \phi_5(v) = 0.$$

Таким образом, наибольшей силой влияния в парламенте Германии 1998 года обладала партия социал-демократов, хотя различие между числом мест у нее и Союзом христианских демократов было невелико (соответственно 298 и 245), в то время как индексы влияния у последней и у «Партии зеленых» и Партии свободных демократов одинаковы при значительной разнице в голосах (соответственно 245, 47 и 43). Партия же демократического социализма вообще не имела никакого влияния, поскольку не была ключевой ни в одной из коалиций.

Индекс Банцафа для определения силы влияния в Государственной Думе РФ 3-го созыва (2000–2003)

В Государственной Думе Российской Федерации 3-го созыва были представлены следующие партии и депутатские группы:

- Агропромышленная группа (АПГ), 39 мест;
- «Единство» (ЕД), 82 места;
- Коммунистическая партия (КПРФ), 92 места;
- Либерально-демократическая партия (ЛДПР), 17 мест;
- «Народный депутат» (НД), 57 мест;
- «Отечество — вся Россия» (ОВР), 46 мест;
- «Регионы России» (РР), 41 место;
- Союз правых сил (СПС), 32 места;
- «Яблоко» (ЯБЛ), 21;
- независимые депутаты (НЕЗ), 23 места.

Всего 250 мест, порог голосования — простое большинство в 226 голосов.

Для вычисления силы влияния каждой партии и объединения воспользуемся индексами Банцафа. Для вычисления производящей функции $G_i(x) = \prod_{j \neq i} (1 + x^{w_j})$, $i = 1, \dots, 10$ для каждого игрока нужно раскрыть скобки в произведении (8.5). Это можно легко сделать с помощью какого-нибудь пакета программ для символьных вычислений, например **Mathematica**. В Mathematica раскрытие скобок осуществляет программа **Expand**. Для каждого игрока $i = 1, \dots, 10$ раскрываем скобки и подсчитываем число слагаемых вида x^k , где k меняется от $q - w_i$ до $q - 1$. Это соответствует числу коалиций, где игроки являются ключевыми. Так, для игрока АПГ эти пороги равны $q - w_1 = 225 - 39 = 187$

Таблица 8.6
Вычисление индексов Банцафа для Государственной Думы РФ

Партии	АПГ	ЕД	КПРФ	ЛДПР	НД
Пороги переключений	187–225	144–225	134–225	209–225	169–225
Число переключений	96	210	254	42	144
Индекс Банцафа	0.084	0.185	0.224	0.037	0.127

Партии	ОВР	РР	СПС	ЯБЛ	НЕЗ
Пороги переключений	180–225	185–225	194–225	205–225	203–225
Число переключений	110	100	78	50	52
Индекс Банцафа	0.097	0.088	0.068	0.044	0.046

и 225. В табл. 8.6 приведены пороги для определения числа переключений для каждого из игроков и представлены результаты расчетов для определения индексов Банцафа.

Кроме индексов Шепли–Шубика и Банцафа для определения силы влияния иногда используются индексы Дигана–Пакела (1978) и индексы Холлера (1982), которые определяются через минимальные выигрывающие коалиции.

Определение 8.23. Минимальной выигрывающей коалицией называется коалиция, в которой каждый из игроков является ключевым.

Определение 8.24. Вектором Дигана–Пакела в игре взвешенного голосования $\langle N, v \rangle$ называется вектор $dp(v) = (dp_1(v), \dots, dp_n(v))$, где индекс игрока i :

$$dp_i(v) = \frac{1}{m} \sum_{S \in M: i \in S} \frac{1}{s}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где M — множество всех минимальных выигрывающих коалиций, m — общее число минимальных выигрывающих коалиций и s — число членов коалиции S .

Определение 8.25. Вектором Холлера в игре взвешенного голосования $\langle N, v \rangle$ называется вектор $h(v) = (h_1(v), \dots, h_n(v))$, где индекс

игрока i :

$$h_i(v) = \frac{m_i(v)}{\sum_{i \in N} m_i(v)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где m_i — число минимальных выигрывающих коалиций, содержащих i -го игрока, $i = 1, \dots, n$.

Вычислим их значения для определения силы влияния политических партий в парламенте Японии.

Индексы Холлера и Дигана–Пакела для определения силы влияния в парламенте Японии после выборов 1998 года

Парламент Японии состоит из двух палат, палаты представителей и палаты советников. Ограничимся рассмотрением только палаты советников. Она состоит из 252 мест и по выборам 1998 года большинство мест в парламенте занимали 6 партий:

- Либерально-демократическая партия (LDP), 105 мест;
- Демократическая партия Японии (DPJ), 47 мест;
- Коммунистическая партия Японии (JCP), 23 места;
- Партия «Комеи» (Komei), 22 голоса;
- Социал-демократическая партия (SDP), 13 мест;
- Либеральная партия (LP), 12 мест;
- остальные партии (OP), 30 мест.

Порог голосования — 127 голосов. Нетрудно видеть, что минимальными выигрывающими коалициями являются: (LDP, DPJ), (LDP, JCP), (LDP, Komei), (LDP, OP), (LDP, SDP, LP), (DPJ, JCP, Komei, SDP, OP), (DPJ, JCP, Komei, LP, OP). Таким образом, партия LDP принадлежит 5 минимальным выигрывающим коалициям, партии DPJ, JCP, Komei, OP — 3 коалициям и партии SDP и LP — 2 минимальным выигрывающим коалициям. Таким образом, индексы Холлера равны $h_1(v) = 5/21 \approx 0.238$, $h_2(v) = h_3(v) = h_4(v) = h_7(v) = 3/21 \approx 0.144$, $h_5(v) = h_6(v) = 2/21 \approx 0.095$.

Вычислим теперь индексы Дигана–Пакела.

$$dp_1(v) = \frac{1}{7}(4\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 1/3 \approx 0.333,$$

$$dp_2(v) = dp_3(v) = dp_4(v) = dp_7(v) = \frac{1}{7}(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{5}) \approx 0.128,$$

$$dp_5(v) = dp_6(v) = \frac{1}{7}(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}) \approx 0.076.$$

Видно, что сила влияния Либерально-демократической партии более чем в два раза превосходит силу влияния любой партии японского парламента, и все остальные партии разбиваются на две группы примерно равных игроков.

§ 8.9. ВЛИЯНИЕ ИГРОКОВ ДРУГ НА ДРУГА. ИНДЕКС ХЕДЕ–БАККЕРА

В предыдущих моделях голосования не учитывалось влияние участвующих сторон друг на друга. Однако в реальных ситуациях при принятии решений имеет место ситуация, когда один из игроков или сразу несколько могут изменить свое первоначальное решение под воздействием других игроков.

Рассмотрим игру голосования $\langle N, v \rangle$, в которой характеристическая функция, которая принимает два значения 0 и 1, определяется следующим образом.

Представим, что игроки $N = \{1, 2, \dots, n\}$ должны выбрать некий законопроект. Веса игроков представлены вектором $w = (w_1, \dots, w_n)$. Их первоначальные предпочтения представлены бинарным вектором $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, где π_i равно единице, если i -й игрок относится положительно к законопроекту, и нулю в противном случае. На первом этапе игроки проводят консультации, и вектор π преобразуется в новый вектор решений $b = B\pi$, который также является бинарным. Оператор B может быть определен, например, с помощью графа влияния игроков друг на друга. На втором этапе подсчитываются голоса в пользу законопроекта и выносится положительное решение, если их число не меньше некоторого заданного порога q , $1 \leq q \leq n$. Таким образом, коллективное решение определяется характеристической функцией v , которая имеет вид

$$v(b) = v(B\pi) = I\left\{\sum_{i=1}^n b_i w_i \geq q\right\}. \quad (9.1)$$

Здесь $I\{A\}$ — индикатор множества A . Предположим, что функция v удовлетворяет двум аксиомам. На самом деле это требования к оператору B .

A1. Обозначим $\bar{\pi}$ вектор дополнений, в котором $\bar{\pi}_i = 1 - \pi_i$. Тогда для любого вектора предпочтений π выполняется

$$v(B\bar{\pi}) = 1 - v(B\pi).$$

A2. Для векторов π и π' определим порядок $\pi \leq \pi'$, если $\{i \in N : \pi_i = 1\} \subset \{i \in N : \pi'_i = 1\}$. Тогда для любых векторов предпочтений π, π' , таких что $\pi \leq \pi'$, должно выполняться $v(B\pi) \leq v(B\pi')$.

Первая аксиома означает, что правило принятия решений должно быть таким, что если все игроки изменили свое первоначальное мнение на противоположное, то коллективное решение также должно быть противоположным. Согласно второй аксиоме, если к игрокам с первоначальным положительным предпочтением добавятся еще какие-то игроки, то окончательное коллективное решение останется либо прежним, либо, если оно было отрицательным, может стать положительным.

Определение 8.26. Индексом Хеде–Баккера i -го игрока называется величина

$$HB_i(v(B)) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{\pi: \pi_i=1 \\ i=1, \dots, n}} v(B\pi), \quad (9.2)$$

В выражении (9.2) суммирование проводится по всем бинарным векторам предпочтений π , в которых мнение i -го игрока положительно. Индекс Хеде–Баккера отражает силу влияния игрока i на проведение законопроекта при равновероятных предпочтениях других игроков, которые могут в свою очередь влиять друг на друга.

Рассмотрим пример условного парламента, состоящего из четырех партий A, B, C, D , с числом мест соответственно 10, 20, 30 и 40. Предположим, что для проведения законопроекта достаточно 50 голосов и что партия A имеет влияние на партию B .

Вначале вычислим индексы Банцафа. Они равны соответственно

$$\beta_1(v) = \frac{1}{12}, \quad \beta_2(v) = \beta_3(v) = \frac{3}{12}, \quad \beta_4(v) = \frac{5}{12}.$$

Видно, что сила влияния партии A минимальна, однако здесь не учитывается влияние партии A на партию B .

Вычислим индексы Хеде–Баккера. Вычисления приведены в табл. 8.7. Находим

$$HB_1(v) = HB_3(v) = HB_4(v) = \frac{3}{4}, \quad HB_2(v) = \frac{1}{2}.$$

Теперь сила влияния партии A выросла и стала такой же, как у партий C и D .

Таблица 8.7
Вычисление индекса Хеде-Баккера

π	0,0,0,0	0,0,0,1	0,0,1,0	0,1,0,0	1,0,0,0	0,0,1,1	0,1,0,1	0,1,1,0
$B\pi$	0,0,0,0	0,0,0,1	0,0,1,0	0,0,0,0	1,1,0,0	0,0,1,1	0,0,0,1	0,0,1,0
$v(B\pi)$	0	0	0	0	0	1	0	0
π	1,0,0,1	1,0,1,0	1,1,0,0	0,1,1,1	1,0,1,1	1,1,0,1	1,1,1,0	1,1,1,1
$B\pi$	1,1,0,1	1,1,1,0	1,1,0,0	0,0,1,1	1,1,1,1	1,1,0,1	1,1,1,0	1,1,1,1
$v(B\pi)$	1	1	0	1	1	1	1	1

Задачи и упражнения

- Игра «джаз-оркестр» для 4 игроков. Директор ресторана приглашает играть на вечере музыкантов джаза и обещает заплатить 100 единиц стоимости. Джаз-оркестр состоит из четырех музыкантов — пианиста (игрок I), певца (игрок II), барабанщика (игрок III) и гитариста (игрок IV), которые должны решить, каким образом эта сумма будет распределена между ними. При этом аргументом в переговорах должна служить характеристическая функция v , которая определяется значениями гонораров, которые могут получить музыканты действуя поодиночке, играя парами и тройками. Характеристическая функция имеет вид

$$\begin{aligned}
 v(1) &= 40, \quad v(2) = 30, \quad v(3) = 20, \quad v(4) = 0, \\
 v(1, 2) &= 80, \quad v(1, 3) = 70, \quad v(1, 4) = 50, \quad v(2, 3) = 60, \\
 v(2, 4) &= 35, \quad v(3, 4) = 25, \\
 v(1, 2, 3) &= 95, \quad v(1, 2, 4) = 85, \quad v(1, 3, 4) = 75, \quad v(2, 3, 4) = 65.
 \end{aligned}$$

Построить С-ядро и τ -равновесие.

- Найти вектор Шепли в задаче 1.
- Игра «строительство дорог» для 4 фирм. В игре участвуют четыре фирмы, которые договариваются о финансировании строительства дороги, которая свяжет фирмы с городом. Строительство каждого участка дороги несет определенные затраты, и каждая из фирм имеет определенный доход от продажи своей продукции в городе. Инфраструктура дорог, цены строительства каждого участка дороги и доходы участников представлены на рис. 8.5. Построить n -ядро в данной задаче.

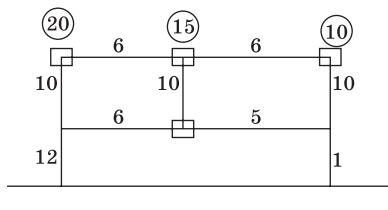


Рис. 8.5

4. Построить S -ядро и τ -равновесие в задаче 2.

5. Игра «ботинки».

В игре участвуют четыре продавца. Первые два имеют правые ботинки, а третий и четвертый — левые. Цена одного ботинка равна 0, а пары — 10 долларов. Продавцы хотят получить доход от продажи ботинок. Построить S -ядро и τ -ядро в данной игре.

6. В игре, описанной в задаче 5, построить вектор Шепли.

7. Привести пример кооперативной игры, которая не является квазисбалансированной.

8. Привести пример кооперативной игры, которая является квазисбалансированной, но не является сбалансированной.

9. В парламент маленькой страны, состоящей из 40 членов, вошли представители 3 партий:

- Партия 1, 20 голосов;
- Партия 2, 15 голосов;
- Партия 3, 5 голосов.

Квота q для принятия законопроекта должна составлять большую половину голосов, т. е. 21 голос. Найти индекс влияния Шепли–Шубрика.

10. В парламенте, описанном в задаче 9, найти индекс Банцафа.

СЕТЕВЫЕ ИГРЫ

Игры в информационных сетях представляют современное направление в теории игр. Они получили свое развитие в связи с распространением всемирной информационной сети Интернет, а также организацией параллельных вычислений на суперкомпьютерах. Основной парадигмой здесь является некооперативное поведение большого числа игроков, которые действуют независимо друг от друга, но выигрыш которых зависит от поведения остальных участников. Каждый из игроков заинтересован передать или получить максимальный объем информации за минимальное время. Таким образом, функция выигрыша игроков здесь определяется либо как время выполнения задания, либо как время прохождения пакета по сети, тогда это затраты ресурсов и их нужно минимизировать, либо как переданный объем информации или пропускная способность канала, тогда ищется максимум выигрыша.

Важным моментом здесь является сравнение выигрышей в случае централизованного (кооперативного) поведения игроков и выигрышей игроков в равновесии при некооперативном поведении. Это сравнение показывает, следует ли организовывать менеджмент в системе и нести некоторые затраты или это неэффективно, и система должна самоорганизовываться.

Также здесь возникают интересные эффекты, связанные со свойством равновесия, где не обязательно давать каждому из игроков максимальные выигрыши. Самый яркий результат — парадокс Браесса, когда при расширении сети выигрыши игроков в равновесии уменьшаются.

Существуют два подхода при исследовании игр в сетях. В одном из них игрок решает, по какому маршруту послать свой пакет, который рассматривается как некая неделимая величина. Важные результаты для таких моделей были получены в работах Коутсопиуса—Пападимитроу. Такие модели мы будем называть КР-модели. Во втором подходе сам пакет может быть разбит на сегменты и передан по

различным маршрутам. Во втором случае используется принцип равновесия, предложенный Вардропом.

§ 9.1. КР-МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ С НЕДЕЛИМЫМ ТРАФИКОМ. ЦЕНА АНАРХИИ

Начнем рассмотрение данных игр с простейшей информационной сети, которая представляет собой m параллельных каналов (рис. 9.1).

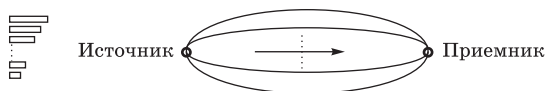


Рис. 9.1

Сеть параллельных каналов

Рассмотрим систему из n пользователей (игроков), каждый из которых собирается отправить трафик объемом w_i по одному из каналов, $i = 1, \dots, n$. Для каждого канала $l = 1, \dots, m$ задана пропускная способность c_l . При отправке трафика объемом w по каналу с пропускной способностью c задержка на канале определяется как w/c .

Каждый пользователь действует в собственных интересах и стремится занять тот канал, на котором задержка его трафика будет наименьшей. Чистой стратегией для пользователя i является выбор канала l , по которому он собирается отправить свой трафик. Тогда вектор $L = (l_1, \dots, l_n)$ представляет собой профиль чистых стратегий пользователей, где l_i — номер канала, выбранного пользователем i . Смешанной стратегией для него является вероятностное распределение $p_i = (p_i^1, \dots, p_i^m)$, где p_i^l — вероятность, с которой пользователь i выбирает l . Матрица P , образованная векторами p_i , представляет профиль смешанных стратегий пользователей.

В случае чистых стратегий для пользователя i задержка трафика на используемом им канале l_i определяется как $\lambda_i = \frac{\sum_{k: l_k = l_i} w_k}{c_{l_i}}$.

Определение 9.1. Профиль чистых стратегий (l_1, \dots, l_n) называется равновесием по Нэшу, если для каждого пользователя i $\lambda_i =$

$$= \min_{j=1, \dots, m} \frac{w_i + \sum_{k \neq i: l_k = j} w_k}{c_j}.$$

Для смешанных стратегий определяется ожидаемая задержка трафика пользователя i в случае использования им канала l , равная

$\lambda_i^l = \frac{w_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n p_k^l w_k}{c_l}$. Минимальная ожидаемая задержка пользователя i равна $\lambda_i = \min_{l=1, \dots, m} \lambda_i^l$.

Определение 9.2. Профиль P называется равновесием по Нэшу, если для каждого пользователя i для любого из используемых им каналов справедливо: $\lambda_i^l = \lambda_i$, если $p_i^l > 0$, и $\lambda_i^l > \lambda_i$, если $p_i^l = 0$.

Определение 9.3. Смешанное равновесие P называется полностью смешанным равновесием, если каждый пользователь выбирает каждый канал с положительной вероятностью, то есть для любого $i = 1, \dots, n$ и для любого $l = 1, \dots, m$ $p_i^l > 0$.

λ_i определяет минимальные возможные индивидуальные затраты каждого пользователя i от пересылки своего трафика, который, действуя в своих личных интересах, выбирает стратегии, обеспечивающие ему такое значение ожидаемой задержки. Затраты системы (social costs) характеризуют общие затраты, которые несет система в целом в результате эксплуатации каналов. В качестве функции затрат системы $SC(w, c, L)$ для чистого профиля могут быть рассмотрены следующие варианты:

1. линейные затраты $LSC(w, c, L) = \sum_{l=1}^m \frac{\sum_{k:l_k=l} w_k}{c_l}$;
2. квадратичные затраты $QSC(w, c, L) = \sum_{l=1}^m \frac{\left(\sum_{k:l_k=l} w_k \right)^2}{c_l}$;
3. максимальные затраты $MSC(w, c, L) = \max_{l=1, \dots, m} \frac{\sum_{k:l_k=l} w_k}{c_l}$.

Определение 9.4. Затратами системы для профиля смешанных стратегий P называется математическое ожидание затрат системы $SC(w, c, L)$ для случайного профиля чистых стратегий L

$$SC(w, c, P) = E(SC(w, c, L)) = \sum_{L=(l_1, \dots, l_n)} \left(\prod_{k=1}^n p_k^{l_k} \cdot SC(w, c, L) \right).$$

Оптимальные затраты системы обозначим как $opt = \min_P SC(w, P)$. Глобальный оптимум в данной модели определяется как решение задачи минимизации затрат системы. В общем случае глобальный оптимум находится путем перебора всех возможных чистых профилей, но в ряде случаев он может быть результатом решения непрерывной задачи условной минимизации затрат системы, где в качестве переменных рассматривается профиль смешанных стратегий пользователей P .

Определение 9.5. *Ценой анархии называется отношение затрат системы в наихудшем равновесии по Нэшу к оптимальным затратам системы*

$$PA = \sup_{P\text{-равновесие}} \frac{SC(w, P)}{opt}.$$

При этом, если \sup берется по равновесным профилям лишь чистых стратегий, мы будем говорить о чистой цене анархии, если же по профилям смешанных стратегий, то о смешанной цене анархии. Цена анархии определяет насколько отличаются затраты системы в случае централизованного управления ею от затрат, когда каждый из игроков действует в соответствии со своими личными интересами. Очевидно, что $PA \geq 1$ и именно отличие ее от единицы определяет, насколько эффективно централизованное управление.

§ 9.2. РАВНОВЕСИЕ В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ. ПАРАДОКС БРАЕССА

Рассмотрим несколько примеров систем, ограничивая поведение пользователей профилями чистых стратегий. В качестве затрат системы будем использовать функцию максимальных затрат системы. Будем использовать обозначение $(w_{i_1}, \dots, w_{i_k}) \rightarrow c_l$ для ситуации, когда порции пользовательского трафика объемом w_{i_1}, \dots, w_{i_k} , принадлежащие пользователям $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, отправляются по каналу с пропускной способностью c_l .

Пример 9.1. Данный пример иллюстрирует проявление парадокса Браесса при удалении одного из каналов. Рассмотрим следующий набор пользователей и каналов: $n = 5$, $m = 3$, $w = (20, 10, 10, 10, 5)$, $c = (20, 10, 8)$ (рис. 9.2). В этом случае существует несколько равновесий по Нэшу. Одним из равновесий является профиль

$$\{(10, 10, 10) \rightarrow 20, 5 \rightarrow 10, 20 \rightarrow 8\} = 2.5\}.$$

Нетрудно проверить, что любое отклонение одного из игроков увеличивает его задержку. Однако в этом равновесии затраты всей системы

максимальны

$$MSC(w; c; (10, 10, 10) \rightarrow 20, 5 \rightarrow 10, 20 \rightarrow 8) = 2.5) = 2.5.$$

Будем называть это равновесие **наихудшим**.

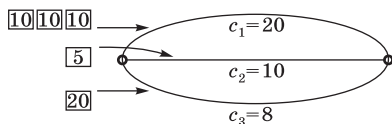


Рис. 9.2

Наихудшее равновесие по Нэшу,
задержка равна 2.5

Заметим, что глобальный оптимум затрат всей системы достигается в ситуации $(20, 10) \rightarrow 20, (10, 5) \rightarrow 10, 10 \rightarrow 8$ и равен 1.5. Он же является наилучшим чистым равновесием по Нэшу. Если удалить канал 8 (рис. 9.3), то в худшем случае затраты системы становятся равны

$$MSC(w; c; (20, 10, 10) \rightarrow 20, (10, 5) \rightarrow 10) = 2.$$

Эта же ситуация является и наилучшим чистым равновесием и глобально оптимальной.

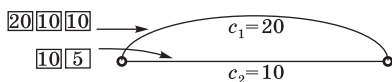


Рис. 9.3

Уменьшение задержки
при удалении канала

Пример 9.2. $n = 4$, $m = 3$, $w = (15, 5, 4, 3)$, $c = (15, 10, 8)$. Затраты системы для худшего случая равновесия равны

$$MSC(w; c; (5, 4) \rightarrow 15, 15 \rightarrow 10, 3 \rightarrow 8) = 1.5.$$

В наилучшем равновесии в ситуации $15 \rightarrow 15, (5, 3) \rightarrow 10, 4 \rightarrow 8$ достигается значение глобального оптимума 1. Глобально оптимальной является также и неравновесная ситуация $15 \rightarrow 15, (5, 4) \rightarrow 10, 3 \rightarrow 8$. При

удалении канала 10 худшим случаем равновесия становится $(15, 5) \rightarrow 15, (4, 3) \rightarrow 8$ с затратами системы, равными 1.333. Глобальный оптимум и наилучшее равновесие достигаются при $(15, 3) \rightarrow 15, (5, 4) \rightarrow 8$, и затраты в этом случае равны 1.2.

Пример 9.3. $n = 4, m = 3, w = (15, 8, 4, 3), c = (15, 8, 3)$. Затраты системы для худшего случая равновесия равны

$$MSC(w; c; (8, 4, 3) \rightarrow 15, 15 \rightarrow 8) = 1.875.$$

В наилучшем равновесии в ситуации $(15, 4) \rightarrow 15, 8 \rightarrow 8, 4 \rightarrow 3$ достигается значение глобального оптимума 1.2666. При удалении канала 8 худшим случаем равновесия становится $(15, 8, 4) \rightarrow 15, 3 \rightarrow 3$ с затратами системы, равными 1.8. Глобальный оптимум и наилучшее равновесие достигаются при $(15, 8, 3) \rightarrow 15, 4 \rightarrow 3$, и затраты в этом случае равны 1.733.

Пример 9.4. Парадокс Браесса. Эта модель была предложена Браессом в 1968 году. Рассмотрим дорожную сеть, представленную на рис. 9.4. Предположим, что 60 автомобилей движутся из пункта A в пункт B . При этом задержка на сегментах (C, B) и (A, D) не зависит от числа автомобилей и равна 1 часу, а на сегментах (A, C) и (D, B) она пропорциональна числу движущихся автомобилей (в минутах). Нетрудно видеть, что равновесием здесь будет одинаковое распределение автомобилей по обеим веткам (A, C, B) и (A, D, B) , т. е. по 30 автомобилей по каждой ветке. При этом каждый из автомобилей затратит на дорогу 1,5 часа.

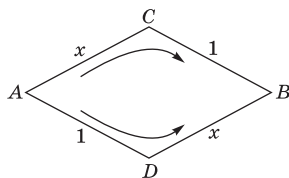


Рис. 9.4

В равновесии игроки распределяются равномерно по обоим путям

Представим теперь, что мы соединили пункты C и D скоростной дорогой, на которой каждый автомобиль имеет задержку равную 0 (см. рис. 9.5). Тогда автомобилям, которые ранее ехали по пути (A, D, B) , выгоднее будет ехать по пути (A, C, D, B) . Это же касается автомобилей, ехавших по пути (A, C, B) , которым теперь выгоднее ехать по

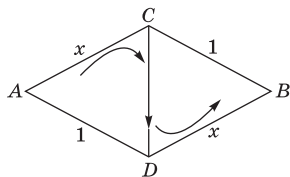


Рис. 9.5

В равновесии все игроки следуют по пути ACDB

пути (A, C, D, B) . Таким образом, единственным равновесием по Нэшу будет ситуация, в которой все автомобили едут по пути (A, C, D, B) . Но при этом каждый из автомобилей затратит на дорогу 2 часа.

Таким образом, получилась парадоксальная ситуация: мы построили новую скоростную дорогу, а затраты каждого из участников увеличились. Это и есть парадокс Браесса.

§ 9.3. ПОЛНОСТЬЮ СМЕШАННОЕ РАВНОВЕСИЕ В ЗАДАЧЕ С РАЗЛИЧНЫМИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯМИ И ОДИНАКОВЫМИ КАНАЛАМИ

Рассмотрим систему, в которой каналы не различаются по пропускной способности. Будем считать, что для любого канала l его пропускная способность $c_l = 1$. В качестве затрат системы будем рассматривать линейные затраты системы.

Лемма 9.1. *Для системы n пользователей и m параллельных каналов, в которой каналы имеют одинаковую пропускную способность, существует единственное полностью смешанное равновесие по Нэшу, такое что для любого пользователя i и канала l равновесные вероятности $p_i^l = 1/m$.*

Доказательство. По определению равновесия для любого игрока i его задержка на всех каналах одинакова, т. е.

$$\sum_{k \neq i} p_k^j w_k = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

Сложим вначале все эти уравнения для $j = 1, \dots, m$.

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k \neq i} p_k^j w_k = \sum_{k \neq i} w_k = m\lambda_i,$$

откуда находим

$$\lambda_i = \frac{1}{m} \sum_{k \neq i} w_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теперь сложим эти уравнения по $i = 1, \dots, n$. Находим

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i} p_k^j w_k = (n-1) \sum_{k=1}^n p_k^j w_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Отсюда вытекает

$$\sum_{k=1}^n p_k^j w_k = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(n-1)W}{m} = \frac{W}{m},$$

где $W = w_1 + \dots + w_n$. Теперь из системы, определяющей равновесие, находим

$$p_i^j w_i = \sum_{k=1}^n p_k^j w_k - \sum_{k \neq i} p_k^j w_k = \frac{W}{m} - \frac{1}{m} \sum_{k \neq i} w_k = \frac{w_i}{m},$$

откуда

$$p_i^j = \frac{1}{m}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

Найдем для данной модели затраты системы для полностью смешанного равновесия, которое обозначим F .

$$\begin{aligned} LSC(w, F) &= E \left(\sum_{l=1}^m \sum_{\substack{k: l_k=l \\ m \\ n}} w_k \right) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n E(w_k \cdot I_{l_k=l}) = \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n w_k p_l^k = \sum_{k=1}^n w_k. \end{aligned}$$

§ 9.4. ПОЛНОСТЬЮ СМЕШАННОЕ РАВНОВЕСИЕ В ЗАДАЧЕ С ОДИНАКОВЫМИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯМИ И РАЗЛИЧНЫМИ КАНАЛАМИ

Рассмотрим систему, в которой отправляемый трафик пользователей не различается по объему. Будем считать, что для любого пользователя i его трафик $w_i = 1$. Определим общую пропускную способность системы каналов $C = \sum_{l=1}^m c_l$. В качестве затрат системы будем рассматривать функции линейных и квадратичных затрат системы. Не умаляя общности, упорядочим каналы по возрастанию пропускной способности: $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_m$.

Лемма 9.2. В модели с n одинаковыми пользователями и m параллельными каналами единственное полностью смешанное равновесие по Нэшу существует тогда и только тогда, когда $c_1(m+n-1) > C$. При этом для каждого канала $l = 1, \dots, m$ для любого пользователя $i = 1, \dots, n$ равновесные вероятности $p_i^l = p^l = \frac{c_l(m+n-1)-C}{C(n-1)}$, а индивидуальные равновесные задержки для всех пользователей одинаковы и равны $\frac{m+n-1}{C}$.

Доказательство. Пусть полностью смешанное равновесие существует. Тогда для каждого пользователя i ожидаемая задержка его трафика на любом канале должна быть одинаковой.

$$\frac{1 + \sum_{k \neq i} p_k^l}{c_l} = \frac{1 + \sum_{k \neq i} p_k^j}{c_j} \quad \text{для } i = 1, \dots, n \text{ и } l, j = 1, \dots, m.$$

Умножим обе части каждого из тождеств на c_l и просуммируем по l каждую из групп тождеств с одинаковыми номерами i и j . Учитывая, что $\sum_{l=1}^m p_k^l = 1$ для $k = 1, \dots, n$, получим

$$m + (n-1) = C \frac{1 + \sum_{k \neq i} p_k^j}{c_j} \quad \text{для } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m,$$

$$\frac{m+n-1}{C} = \frac{1 + \sum_{k \neq i} p_k^j}{c_j} = \lambda_i^j \quad \text{для } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

Так как значение левой части тождества одинаково для любого отсутствующего слагаемого $\frac{p_i^j}{c_j}$, следовательно, все $p_i^j = p^j$ для любого i . Тогда тождество может быть преобразовано к виду

$$\frac{m+n-1}{C} = \frac{1 + (n-1)p^j}{c_j} \quad \text{для } j = 1, \dots, m,$$

$$\text{откуда } p^j = \frac{c_j(m+n-1) - C}{C(n-1)} \quad \text{для } j = 1, \dots, m.$$

Легко проверить, что сумма равновесных вероятностей по всем каналам равна 1. Тогда необходимым и достаточным условием допустимости полученного решения является для всех $l = 1, \dots, m$ $p^l > 0$, т. е. должно выполняться $c_1(m+n-1) > C$.

Для нахождения затрат системы в полностью смешанном равновесии понадобятся следующие тождества.

Лемма 9.3. Для любого $x \in [0, 1]$ и целого n выполняются соотношения:

$$\sum_{k=1}^n C_n^k k x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

Доказательство. Воспользуемся свойствами биномиального распределения. Пусть каждая из независимых случайных величин ξ_i , где $i = 1, \dots, n$, принимает значения 0, 1 и $E\xi_i = x$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n C_n^k k x^k (1-x)^{n-k} = E \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) = \sum_{i=1}^n E\xi_i = nx.$$

Найдем теперь значение затрат системы для полностью смешанного равновесия

$$\begin{aligned} LSC(c, F) &= E \left(\sum_{l=1}^m \frac{\text{к-во пользователей на } l}{c_l} \right) = \\ &= \sum_{l=1}^m \frac{1}{c_l} \sum_{k=1}^n C_n^k k (1-p^l)^{n-k} (p^l)^k = n \sum_{l=1}^m \frac{p^l}{c_l} = \\ &= \frac{mn(m+n-1)}{C(n-1)} - \frac{n}{n-1} \sum_{l=1}^m \frac{1}{c_l}. \end{aligned}$$

Исследуем возможность проявления парадокса Браесса в данной модели, т.е. возможность возникновения такой ситуации, когда добавление в систему дополнительного канала ухудшает полностью смешанное равновесие, т.е. увеличивает затраты системы для полностью смешанного равновесия. Будем считать, что в исходной системе полностью смешанное равновесие существует, т.е. выполнено $c_1(m+n-1) > C$. Добавление нового канала не должно нарушать существование полностью смешанного равновесия, т.е. будем рассматривать добавление такого канала c_0 , что выполнено $c_0(m+n) > C + c_0$ и $c_1(m+n) > C + c_0$.

Теорема 9.1. В модели с n одинаковыми пользователями и m различными параллельными каналами линейные затраты системы в полностью смешанном равновесии увеличиваются при добавлении нового канала с пропускной способностью $\frac{C}{m+n-1} < c_0 < \frac{C}{m}$, такого что выполнено $c_0(m+n) > C + c_0$ и $c_1(m+n) > C + c_0$.

Доказательство. Пусть F — ситуация полностью смешанного равновесия в модели с n одинаковыми пользователями и m различными

параллельными каналами. Пусть добавили канал с пропускной способностью c_0 , и пусть F_0 — полностью смешанное равновесие в полученной системе.

Тогда для линейной функции изменение затрат системы:

$$\begin{aligned} LSC(w, F_0) - LSC(w, F) &= -\frac{n}{(n-1)c_0} + \\ &+ \frac{(m+1)n(m+n)}{(C+c_0)(n-1)} - \frac{mn(m+n-1)}{C(n-1)} = \\ &= \frac{n}{(n-1)C c_0 (C+c_0)} (C c_0 (2m+n-1) - C^2 - m c_0^2 (m+n-1)). \end{aligned}$$

Данная разность положительна, если $C c_0 (2m+n-1) - C^2 - m c_0^2 (m+n-1) > 0$. Левая часть данного неравенства представляет собой параболическую функцию по c_0 с отрицательным коэффициентом при c_0^2 , поэтому положительные значения значения данной функции будут находиться между ее двумя корнями $\frac{C}{m+n-1}$ и $\frac{C}{m}$. Тогда при добавлении канала с пропускной способностью $\frac{C}{m+n-1} < c_0 < \frac{C}{m}$ линейные затраты системы увеличатся.

Пример 9.5. Рассмотрим систему с 4 пользователями и 2 параллельными каналами с пропускной способностью 1. Полностью смешанное равновесие — ситуация, в которой все равновесные вероятности равны 0.5. Равновесные линейные затраты системы равны 4. При добавлении канала с пропускной способностью $\frac{2}{5} < c_0 < 1$ полностью смешанное равновесие существует и равновесные вероятности равны $\frac{5c_0-2}{3(c_0+2)}$ для нового канала и $\frac{4-c_0}{3(c_0+2)}$ для двух прежних каналов. Равновесные линейные затраты системы в новой системе равны $\frac{52c_0-8c_0^2-8}{3c_0(c_0+2)}$, что больше 4.

§ 9.5. ПОЛНОСТЬЮ СМЕШАННОЕ РАВНОВЕСИЕ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим общий случай модели, в которой пользователи могут отправлять трафик различного объема по каналам с различной пропускной способностью. В качестве затрат системы будем рассматривать функции линейных затрат системы. Пусть $W = \sum_{i=1}^n w_i$ — общий объем пользовательского трафика, $C = \sum_{l=1}^m c_l$ — суммарная пропускная способность системы каналов.

Для этого случая справедлива следующая теорема, дающая условие существования полностью смешанного равновесия и значения равновесных вероятностей.

Теорема 9.2. *Полностью смешанное равновесие существует и единственно тогда и только тогда, когда для всех пользователей $i = 1, \dots, n$ и всех каналов $l = 1, \dots, m$ справедливо*

$$\left(1 - \frac{mc_l}{C}\right) \left(1 - \frac{W}{(n-1)w_i}\right) + \frac{c_l}{C} \in (0, 1).$$

Тогда соответствующие равновесные вероятности равны

$$p_i^l = \left(1 - \frac{mc_l}{C}\right) \left(1 - \frac{W}{(n-1)w_i}\right) + \frac{c_l}{C}.$$

Легко проверить, что для любого пользователя сумма его равновесных вероятностей по всем каналам равна 1. Поэтому в условии существования равновесия в теореме достаточно проверять выполнение неравенства только с одной стороны: для всех пользователей $i = 1, \dots, n$ и всех каналов $l = 1, \dots, m$ справедливо

$$\left(1 - \frac{mc_l}{C}\right) \left(1 - \frac{W}{(n-1)w_i}\right) + \frac{c_l}{C} > 0. \quad (5.1)$$

Найдем линейные затраты системы для полностью смешанного равновесия F .

$$\begin{aligned} LSC(w, c, F) &= E \left(\sum_{l=1}^m \frac{\sum_{k: I_k=l} w_k}{c_l} \right) = \sum_{l=1}^m \frac{\sum_{k=1}^n E(w_k \cdot I_{I_k=l})}{c_l} = \\ &= \sum_{l=1}^m \frac{\sum_{k=1}^n w_k p_l^k}{c_l} = \frac{mW(n+m-1)}{C(n-1)} - \frac{W}{n-1} \sum_{l=1}^m \frac{1}{c_l}. \end{aligned}$$

Исследуем возможность проявления парадокса Браесса в данной модели. Будем считать, что в исходной системе полностью смешанное равновесие существует, то есть выполнено условие (5.1). Добавление нового канала не должно нарушать существование полностью смешанного равновесия, т. е. будем рассматривать добавление такого канала c_0 , что выполнено условие, аналогичное условию (5.1), для новой системы $m+1$ каналов.

Теорема 9.3. В модели с n различными пользователями и m различными параллельными каналами линейные затраты системы в полностью смешанном равновесии увеличиваются при добавлении нового канала с пропускной способностью $\frac{C}{m+n-1} < c_0 < \frac{C}{m}$, такого что для всех пользователей $i = 1, \dots, n$ и всех каналов $l = 0, \dots, m$ справедливо

$$\left(1 - \frac{(m+1)c_l}{C + c_0}\right) \left(1 - \frac{W}{(n-1)w_i}\right) + \frac{c_l}{C + c_0} > 0.$$

Доказательство. Пусть F — ситуация полностью смешанного равновесия в модели с n различными пользователями и m различными параллельными каналами. Пусть добавили канал с пропускной способностью c_0 и F_0 — полностью смешанное равновесие в полученной системе.

Тогда для линейной функции изменение затрат системы:

$$\begin{aligned} LSC(w, c, F_0) - LSC(w, c, F) &= -\frac{W}{(n-1)c_0} + \\ &+ \frac{(m+1)W(m+n)}{(C+c_0)(n-1)} - \frac{mW(m+n-1)}{C(n-1)} = \\ &= \frac{W}{(n-1)C c_0 (C+c_0)} (C c_0 (2m+n-1) - C^2 - m c_0^2 (m+n-1)). \end{aligned}$$

Оставшаяся часть доказательства полностью совпадает с последней частью доказательства теоремы 9.2 для системы с различными каналами и одинаковыми пользователями.

Пример 9.6. Рассмотрим систему с 2 пользователями, отправляющими трафик объемом $w_1 = 1$ и $w_2 = 3$, и 2 параллельными каналами с пропускной способностью $c_1 = c_2 = 1$. Полностью смешанное равновесие — ситуация, в которой все равновесные вероятности равны 0.5. Равновесные линейные затраты системы равны 4. При добавлении канала с пропускной способностью $\frac{6}{7} < c_0 < 1$ полностью смешанное равновесие существует и равновесные вероятности равны

$$\begin{aligned} p_1^0 &= \frac{7c_0 - 6}{2 + c_0}; & p_2^0 &= \frac{5c_0 - 2}{3(2 + c_0)}; \\ p_1^1 &= p_1^2 = \frac{4 - 3c_0}{2 + c_0}; & p_2^1 &= p_2^2 = \frac{4 - c_0}{3(2 + c_0)}. \end{aligned}$$

Равновесные линейные затраты системы в новой системе равны $\frac{28c_0 - 8c_0^2 - 8}{c_0(c_0 + 2)} > 4$.

§ 9.6. ЦЕНА АНАРХИИ В МОДЕЛИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ КАНАЛАМИ И НЕДЕЛИМЫМ ТРАФИКОМ

Здесь мы опять рассмотрим систему из m идентичных параллельных каналов и n игроков и в качестве затрат системы рассмотрим максимальные затраты $MSC(w, c, L)$. Без ограничения общности будем считать пропускную способность каналов c равной единице и предположим, что $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$. Пусть P — какое-то равновесие по Нэшу. Обозначим p_i^j вероятность того, что игрок i выбрал канал j . Пусть M^j — ожидаемый трафик на канале j , $j = 1, \dots, m$. Тогда

$$M_j = \sum_{i=1}^n p_i^j w_i. \quad (6.1)$$

В равновесии по Нэшу P игрок i использует в оптимальной стратегии только те каналы j , где его задержка $\lambda_i^j = w_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n p_k^j w_k$ принимает минимальное значение, т. е. $\lambda_i^j = \lambda_i$, если $p_i^j > 0$, и $\lambda_i^j > \lambda_i$, если $p_i^j = 0$. Представим

$$\lambda_i^j = w_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n p_k^j w_k = M_j + (1 - p_i^j) w_i. \quad (6.2)$$

Обозначим носитель стратегии игрока i через S_i , т. е. $S_i = \{j : p_i^j > 0\}$ и будем писать $S_i^j = 1$, если $p_i^j > 0$, иначе $S_i^j = 0$. Если носители стратегий S_1, \dots, S_n всех игроков в равновесии известны, то сами стратегии определяются соотношениями

$$M^j + (1 - p_i^j) w_i = \lambda_i, \quad S_i^j > 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

Отсюда

$$p_i^j = \frac{M^j + w_i - \lambda_i}{w_i}, \quad (6.3)$$

где согласно (6.1) для всех $j = 1, \dots, m$

$$M^j = \sum_{i=1}^n S_i^j (M^j + w_i - \lambda_i),$$

а также, поскольку для всех игроков i выполняется $\sum_{j=1}^m p_i^j = 1$, то

$$\sum_{j=1}^m S_i^j (M^j + w_i - \lambda_i) = w_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Затраты системы в данном случае представим как ожидаемый максимальный трафик по всем каналам

$$SC(w, P) = \sum_{j_1=1}^m \dots \sum_{j_n=1}^m \prod_{i=1}^n p_i^{j_i} \max_{l=1, \dots, m} \sum_{k: l_k=l} w_k. \quad (6.4)$$

Оптимальные затраты системы обозначим как $opt = \min_P SC(w, P)$.

Перейдем теперь к вычислению цены анархии в данной модели. Мы определили ее выше как отношение затрат системы в наихудшем равновесии по Нэшу к оптимальным затратам системы

$$PA = \sup_{P-\text{равновесие}} \frac{SC(w, P)}{opt}.$$

Пусть P — некий профиль смешанных стратегий игроков. Обозначим вероятность того, что i -й игрок выберет канал с максимальной задержкой, через q_i . Тогда

$$SC(w, P) = \sum_{i=1}^m w_i q_i.$$

Введем в рассмотрение также вероятность того, что игроки i и k выберут один и тот же канал, через t_{ik} . Тогда из неравенства $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$ следует

$$q_i + q_k \leq 1 + t_{ik}.$$

Лемма 9.4. В равновесии по Нэшу P имеет место соотношение

$$\sum_{k \neq i} t_{ik} w_k = \lambda_i - w_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Заметим вначале, что $t_{ik} = \sum_{j=1}^m p_i^j p_k^j$. Отсюда и из (6.1) следует

$$\sum_{k \neq i} t_{ik} w_k = \sum_{j=1}^m p_i^j \sum_{k \neq i} p_k^j w_k = \sum_{j=1}^m p_i^j (M^j - p_i^j w_i).$$

Так как, согласно (6.3), если $p_i^j > 0$, то $M^j - p_i^j w_i = \lambda_i - w_i$, мы можем переписать последнее выражение в виде

$$\sum_{k \neq i} t_{ik} w_k = \sum_{j=1}^m p_i^j (\lambda_i - w_i) = \lambda_i - w_i.$$

Лемма 9.5. *Справедлива оценка*

$$\lambda_i \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n w_i + \frac{m-1}{m} w_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство следует из соотношений

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \min_j \{M^j + (1 - p_i^j w_i)\} \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \{M^j + (1 - p_i^j w_i)\} = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m M^j + \frac{m-1}{m} w_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n w_i + \frac{m-1}{m} w_i. \end{aligned}$$

Теперь мы можем найти цену анархии для двухканальной сети (см. рис. 9.6).

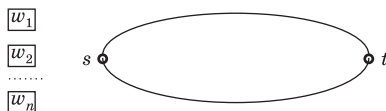


Рис. 9.6
Двухканальная сеть

Теорема 9.4. *В модели с n различными пользователями и двумя идентичными параллельными каналами цена анархии равна $3/2$.*

Доказательство. Оценим затраты системы $SC(w, P)$ сверху. Представим их в виде

$$\begin{aligned} SC(w, P) &= \sum_{k=1}^m q_k w_k = \sum_{k \neq i} q_k w_k + q_i w_i = \\ &= \sum_{k \neq i} (q_i + q_k) w_k - \sum_{k \neq i} q_i w_k + q_i w_i. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Так как $q_i + q_k \leq 1 + t_{ik}$, следовательно,

$$\sum_{k \neq i} (q_i + q_k) w_k \leq \sum_{k \neq i} (1 + t_{ik}) w_k.$$

Из лемм 9.4 и 9.5 следует при $m = 2$

$$\sum_{k \neq i} t_{ik} w_k = c_i - w_i \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n w_k - \frac{1}{2} w_i = \frac{1}{2} \sum_{k \neq i} w_k.$$

Отсюда

$$\sum_{k \neq i} (q_i + q_k) w_k \leq \frac{3}{2} \sum_{k \neq i} w_k,$$

и оценка для (6.5) имеет вид

$$SC(w, P) \leq \left(\frac{3}{2} - q_i\right) \sum_{k=1}^m w_k + \left(2q_i - \frac{3}{2}\right) w_i.$$

Заметим, что

$$opt \geq \max\{w_1, \frac{1}{2} \sum_k w_k\}.$$

Действительно, если $w_1 \geq \frac{1}{2} \sum_k w_k$, и $w_1 \geq w_2 + \dots + w_n$, то оптимально послать пакет w_1 по одному каналу, а все остальные по другому, тогда задержка равна w_1 . Если же $w_1 < \frac{1}{2} \sum_k w_k$, то оптимально распределить каждый пакет с одинаковой вероятностью на каждый из каналов, тогда задержка равна $\frac{1}{2} \sum_k w_k$.

Но тогда, если для какого-то игрока i имеет место $q_i \geq 3/4$, то

$$SC(w, P) \leq \left(\frac{3}{2} - q_i\right) 2opt + \left(2q_i - \frac{3}{2}\right) opt = \frac{3}{2} opt.$$

Если же для всех игроков i $q_i < 3/4$, то

$$SC(w, P) = \sum_{k=1}^m q_k w_k \leq \frac{3}{4} \sum_k w_k \leq \frac{3}{2} opt.$$

Итак, мы показали, что для всех равновесий по Нэшу P имеет место неравенство $SC(w, P) \leq \frac{3}{2} opt$, следовательно,

$$PA = \sup_P \frac{SC(w, P)}{opt} \leq \frac{3}{2}.$$

Для оценки снизу рассмотрим систему из двух идентичных каналов и двух игроков, где $w_1 = w_2 = 1$. Очевидно, что наихудшее равновесие здесь $p_i^j = 1/2$, для $i = 1, 2; j = 1, 2$. Ожидаемая максимальная

нагрузка равна $1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/2 = 3/2$, а $opt = 1$ достигается, когда по каждому каналу посылается один пакет. Таким образом, мы нашли точную оценку для цены анархии системы из двух идентичных каналов.

§ 9.7. ЦЕНА АНАРХИИ В МОДЕЛИ С ЛИНЕЙНЫМИ ЗАТРАТАМИ СИСТЕМЫ И НЕДЕЛИМЫМ ТРАФИКОМ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЕТИ

Выше мы рассматривали сети с параллельными каналами. Теперь перейдем к анализу игр в сетях с произвольной топологией.

Рассмотрим задачу оптимальной маршрутизации трафика как бескоалиционную игру $\Gamma = \langle N, G, Z, f \rangle$, в которой пользователи (игроки) $N = (1, 2, \dots, n)$ отправляют трафик по каналам сети $G = (V, E)$, где G — неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E (рис. 9.7). Для каждого пользователя i существует Z_i — набор маршрутов из s_i в t_i по каналам G . Здесь мы предположим, что объем отправляемого игроками трафика равен единице. Рассмотрим здесь два типа сетевых игр: симметричные (когда множества стратегий Z_i для всех игроков совпадают) и несимметричные (когда множества стратегий разные).

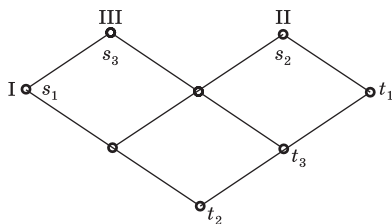


Рис. 9.7

Пример несимметричной игры
с 10 каналами

Для каждого из каналов $e \in E$ определена пропускная способность $c_e > 0$. Пользователи действуют в собственных интересах, выбирая маршруты для отправки трафика таким образом, чтобы минимизировалась максимальная задержка при пересылке их трафика из s в t . Каждый пользователь определяет для себя стратегию $R_i \in Z_i$ — это маршрут, по которому пользователь i отправляет свой трафик. Тогда $R = (R_1, \dots, R_n)$ — профиль чистых стратегий пользователей. Для

профиля стратегий R , как и раньше, будем использовать обозначение $(R_{-i}, R'_i) = (R_1, \dots, R_{i-1}, R'_i, R_{i+1}, \dots, R_n)$, которое означает, что пользователь i изменил свою стратегию с R_i на R'_i , а остальные пользователи сохранили свои стратегии неизменными.

Для каждого из каналов определяется его загрузка $n_e(R)$, равная числу игроков, использующих канал e в профиле стратегий R . Задержка при пересылке трафика по данному маршруту зависит от загрузки каналов, составляющих маршрут. Рассмотрим здесь в качестве функции задержки трафика линейную функцию $f_e(k) = a_e k + b_e$, где a_e и b_e — неотрицательные константы. Для упрощения выкладок мы рассмотрим здесь случай $f_e(k) = k$, но все результаты легко переносятся на общий случай.

Величина, которую каждый пользователь i стремится минимизировать, — суммарная по всем каналам его маршрута задержка трафика, которая составляет персональные затраты данного пользователя

$$c_i(R) = \sum_{e \in R_i} f_e(n_e(R)) = \sum_{e \in R_i} n_e(R).$$

Равновесие по Нэшу определяется как ситуация, в которой ни для одного из игроков нет разумных оснований для изменения своей стратегии при условии, что все остальные игроки собираются придерживаться своих стратегий.

Определение 9.6. Профиль стратегий R называется равновесием по Нэшу, если для каждого пользователя $i \in N$ выполняется $c_i(R) \leq c_i(R_{-i}, R'_i)$.

Отметим сразу, что данная игра является частным случаем игры заполнения, рассмотренной в параграфе 3.4, в которой игроки выбирают некоторые объекты (каналы) из своих допустимых множеств $Z_i, i \in N$ и где функция выигрыша игрока зависит от числа других игроков, также выбравших данный объект. Отсюда следует, что в данной игре всегда существует равновесие в чистых стратегиях. Поэтому далее мы ограничимся рассмотрением лишь чистых стратегий.

В качестве затрат системы рассмотрим здесь линейные (суммарные) затраты всех игроков, а именно

$$SC(R) = \sum_{i=1}^n c_i(R) = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in R_i} n_e(R) = \sum_{e \in E} n_e^2(R).$$

Минимальные затраты системы обозначим opt . Перейдем теперь к нахождению отношения затрат системы в наихудшем равновесии по Нэ-

шу к оптимальным затратам, или к цене анархии

$$PA = \sup_{R\text{-равновесие}} \frac{SC(R)}{opt}.$$

Теорема 9.5. *Цена анархии в несимметричной модели с неделимым трафиком и линейными задержками равна $5/2$.*

Доказательство. Получим вначале оценку сверху. Пусть R^* — равновесие по Нэшу и R — произвольный профиль стратегий (в том числе и оптимальный). Чтобы построить оценку для цены анархии, сравним затраты системы для этих профилей. В равновесии по Нэшу R^* затраты игрока i при его переключении на стратегию R_i разве лишь увеличатся, т. е.

$$c_i(R^*) = \sum_{e \in R_i^*} n_e(R^*) \leq \sum_{e \in R_i} n_e(R_{-i}^*, R_i).$$

При переключении игрока i число игроков на каждом из каналов может увеличиться лишь на единицу, поэтому

$$c_i(R^*) \leq \sum_{e \in R_i} (n_e(R^*) + 1).$$

Суммируя эти неравенства по всем i , получаем

$$\begin{aligned} SC(R^*) &= \sum_{i=1}^n c_i(R^*) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{e \in R_i} (n_e(R^*) + 1) = \\ &= \sum_{e \in E} n_e(R^*) (n_e(R^*) + 1). \end{aligned}$$

Нам понадобится следующий технический результат.

Лемма 9.6. *Для любых неотрицательных целых чисел α, β справедливо неравенство*

$$\beta(\alpha + 1) \leq \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{5}{3}\beta^2.$$

Доказательство. Зафиксируем β и рассмотрим функцию $f(\alpha) = \alpha^2 + 5\beta^2 - 3\beta(\alpha + 1)$. Это парабола, вершина которой находится в точке $\alpha = 3/2\beta$. Минимальное значение равно

$$f\left(\frac{3}{2}\beta\right) = \frac{1}{4}\beta(11\beta - 12).$$

При $\beta \geq 2$ это значение положительно и, следовательно, для $\beta \geq 2$ лемма справедлива. При значениях $\beta = 0, 1$ неравенство проверяется непосредственно.

Воспользовавшись леммой, получаем оценку сверху

$$SC(R^*) \leq \frac{1}{3} \sum_{e \in E} n_e^2(R^*) + \frac{5}{3} \sum_{e \in E} n_e^2(R) = \frac{1}{3} SC(R^*) + \frac{5}{3} SC(R),$$

откуда

$$SC(R^*) \leq \frac{5}{2} SC(R)$$

для любых профилей R . Отсюда немедленно получаем $PA \leq 5/2$.

Чтобы доказать, что $PA \geq 5/2$, мы приведем пример сети, где цена анархии будет равна $5/2$. Рассмотрим сеть с топологией, изображенной на рис. 9.8. Три игрока, находящиеся в точке 0, посылают свой трафик по каналам этой сети, $\{h_1, h_2, h_3, g_1, g_2, g_3\}$. У каждого из игроков есть только две чистые стратегии. У первого игрока это маршруты: (h_1, g_1) или (h_2, h_3, g_2) , у второго — (h_2, g_2) или (h_1, h_3, g_3) , у третьего — маршруты (h_3, g_3) или (h_1, h_2, g_1) . Очевидно, что оптимальное распределение игроков — это выбор первых стратегий (h_1, g_1) , (h_2, g_2) и (h_3, g_3) . Затраты системы при этом равны 2. Наихудшее равновесие по Нэшу здесь получается при выборе игроками вторых стратегий (h_2, h_3, g_2) , (h_1, h_3, g_3) , (h_1, h_2, g_1) . Действительно, если, к примеру, первый игрок, затраты которого в равновесии были равны 5, переключится на первую стратегию (h_1, g_1) , его затраты также будут равны 5.

Таким образом, цена анархии в такой сети равна $5/2$. Теорема доказана.

В симметричной модели, где множество стратегий у всех игроков совпадает, цена анархии меньше.

Теорема 9.6. *Цена анархии в симметричной модели n лиц с неделимым трафиком и линейными задержками равна $(5n - 2)/(2n + 1)$.*

Доказательство. Пусть R^* — равновесие по Нэшу, а R — оптимальный профиль стратегий игроков, при котором затраты системы минимальны. Оценим затраты игрока i в равновесии $c_i(R^*)$. При его отклонении от равновесия на другую стратегию R_j (это возможно, так как множества стратегий игроков совпадают) затраты возрастают

$$c_i(R^*) = \sum_{e \in R_i^*} n_e(R^*) \leq \sum_{e \in R_j} n_e(R_{-i}^*, R_j).$$

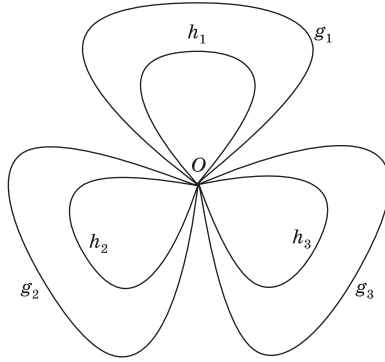


Рис. 9.8

Сеть с тремя игроками и каналами
($h_1, h_2, h_3, g_1, g_2, g_3$)

При этом $n_e(R_{-i}^*, R_j)$ отличается от $n_e(R^*)$ на единицу на тех каналах, где $e \in R_j - R_i^*$. Отсюда

$$c_i(R^*) \leq \sum_{e \in R_j} n_e(R^*) + |R_j - R_i^*|,$$

где $|R|$ — число элементов R . Так как $A - B = A - A \cap B$, то

$$c_i(R^*) \leq \sum_{e \in R_j} n_e(R^*) + |R_j| - |R_j \cap R_i^*|.$$

Суммируя по всем $j \in N$, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} nc_i(R^*) &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{e \in R_j} n_e(R^*) + \sum_{j=1}^n (|R_j| - |R_j \cap R_i^*|) \leq \\ &\leq \sum_{e \in E} n_e(R) n_e(R^*) + \sum_{e \in E} n_e(R) - \sum_{e \in R_i^*} n_e(R). \end{aligned}$$

Теперь, суммируя по всем $i \in N$, получим

$$\begin{aligned} nSC(R^*) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} n_e(R) n_e(R^*) + \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} n_e(R) - \sum_{i=1}^n \sum_{e \in R_i^*} n_e(R) = \\ &= n \sum_{e \in E} n_e(R) n_e(R^*) + n \sum_{e \in E} n_e(R) - \sum_{e \in E} n_e(R) n_e(R^*) = \\ &= (n-1) \sum_{e \in E} n_e(R) n_e(R^*) + n \sum_{e \in E} n_e(R). \end{aligned}$$

Представим данное неравенство в виде

$$SC(R^*) \leq \frac{n-1}{n} \sum_{e \in E} (n_e(R)n_e(R^*) + n_e(R)) + \frac{1}{n} \sum_{e \in E} n_e(R),$$

и воспользуемся леммой 9.6

$$\begin{aligned} SC(R^*) &\leq \frac{n-1}{3n} \sum_{e \in E} n_e^2(R^*) + \frac{5(n-1)}{3n} \sum_{e \in E} n_e^2(R) + \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{e \in E} n_e^2(R) = \frac{n-1}{3n} SC(R^*) + \frac{5n-2}{3n} SC(R). \end{aligned}$$

Отсюда немедленно вытекает

$$SC(R^*) \leq \frac{5n-2}{2n+1} SC(R),$$

и оценка для цены анархии $PA \leq (5n-2)/(2n+1)$.

Для оценки снизу достаточно привести пример сети с ценой анархии, которая в точности равна $(5n-1)/(2n+1)$. Оставляем это в качестве упражнения.

Из теоремы следует, что в симметричной модели цена анархии меньше, чем в несимметричной, однако с ростом n она становится равной $5/2$.

§ 9.8. СМЕШАННАЯ ЦЕНА АНАРХИИ В МОДЕЛИ С ЛИНЕЙНЫМИ ЗАТРАТАМИ СИСТЕМЫ И НЕДЕЛИМЫМ ТРАФИКОМ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЕТИ

Выше мы нашли оценку для цены анархии, рассматривая равновесие лишь среди чистых стратегий. Найдем теперь смешанную цену анархии для произвольных сетей, где задержка имеет линейный вид. При этом допустим, что игроки могут посылать по каналам сети $G = (V, E)$ трафик различного объема.

Итак, рассматривается несимметричная игра оптимальной маршрутизации $\Gamma = \langle N, G, Z, w, f \rangle$, в которой игроки $N = (1, 2, \dots, n)$ отправляют трафик соответствующих объемов $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Для каждого пользователя i задано множество чистых стратегий Z_i — набор маршрутов из s_i в t_i по каналам G . Задержка при пересылке трафика по

данному маршруту зависит от загрузки каналов, составляющих маршрут. Под загрузкой канала в данном случае мы будем понимать суммарный трафик, проходящий по данному каналу. Рассмотрим здесь в качестве функции задержки трафика на канале e линейную функцию $f_e(k) = a_e k + b_e$, где k — загрузка канала и a_e и b_e — неотрицательные константы. Тогда задержка на всем маршруте будет равна сумме задержек на каждом из каналов маршрута.

Пользователи действуют в собственных интересах, выбирая маршруты для отправки трафика таким образом, чтобы минимизировалась задержка при пересылке их трафика из s в t . При этом каждый пользователь $i \in N$ использует смешанную стратегию P_i , т.е. игрок i отправляет свой трафик w_i по маршруту $R_i \in Z_i$ с вероятностью $p_i(R_i)$, $i = 1, \dots, n$:

$$\sum_{R_i \in Z_i} p_i(R_i) = 1.$$

Набор смешанных стратегий образует профиль $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ в данной игре.

Величина, которую каждый пользователь i стремится минимизировать, — ожидаемая задержка его трафика на всех используемых маршрутах, составляющая персональные затраты данного пользователя,

$$\begin{aligned} c_i(P) &= \sum_{R \in Z} \prod_{j=1}^n p_j(R_j) \sum_{e \in R_i} f_e(n_e(R)) = \\ &= \sum_{R \in Z} \prod_{j=1}^n p_j(R_j) \sum_{e \in R_i} (a_e n_e(R) + b_e), \end{aligned}$$

где $n_e(R)$ загрузка канала e для данного профиля R . Величина же

$$SC(P) = \sum_{i=1}^n w_i c_i(P) = \sum_{R \in Z} \prod_{j=1}^n p_j(R_j) \sum_{e \in E} n_e(R) f_e(n_e(R))$$

представляет собой затраты системы.

Пусть P^* — равновесие по Нэшу. Заметим, что равновесие всегда существует в силу конечности множества стратегий. Обозначим R^* оптимальный профиль, дающий минимальные социальные затраты системы. Очевидно, что он состоит из чистых стратегий игроков, т.е. $R^* = (R_1^*, \dots, R_n^*)$. Тогда для каждого пользователя $i \in N$ выполняется

$$c_i(P^*) \leq c_i(P_{-i}^*, R_i^*),$$

где (P_{-i}^*, R_i^*) означает, что игрок i в ситуации P^* вместо смешанной стратегии P^*i использует чистую стратегию R_i^* . Тогда в равновесии

$$c_i(P^*) \leq c_i(P_{-i}^*, R_i^*) = \sum_{R \in Z} \prod_{j=1}^n p_j(R_j) \sum_{e \in R_i^*} f_e(n_e(R_{-i}, R_i^*)),$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Заметим, что в любой ситуации (R_{-i}, R_i^*) отклоняется лишь игрок i , поэтому загрузка любого канала маршрута R_i^* может вырасти не более чем на w_i , т. е. $f_e(n_e(R_{-i}, R_i^*)) \leq f_e(n_e(R) + w_i)$. Отсюда

$$c_i(P^*) \leq \sum_{R \in Z} \prod_{j=1}^n p_j(R_j) \sum_{e \in R_i^*} f_e(n_e(R) + w_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Умножая эти неравенства на w_i и складывая от 1 до n , получим

$$SC(P^*) = \sum_{i=1}^n w_i c_i(P^*) \leq \sum_{R \in Z} \prod_{j=1}^n p_j(R_j) \sum_{i=1}^n \sum_{e \in R_i^*} w_i f_e(n_e(R) + w_i).$$

Воспользовавшись линейностью функции задержек, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} SC(P^*) &\leq \sum_{R \in Z} \prod_{j=1}^n p_j(R_j) \sum_{i=1}^n \sum_{e \in R_i^*} w_i (a_e(n_e(R) + w_i) + b_e) = \\ &= \sum_{R \in Z} \prod_{j=1}^n p_j(R_j) \sum_{i=1}^n \left(\sum_{e \in R_i^*} a_e n_e(R) w_i + a_e w_i^2 \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{e \in R_i^*} b_e w_i \leq \\ &\leq \sum_{R \in Z} \prod_{j=1}^n p_j(R_j) \sum_{e \in E} a_e (n_e(R) n_e(R^*) + n_e(R^*)^2) + \\ &\quad + \sum_{e \in E} b_e n_e(R^*). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Теперь нам понадобится оценка, полученная в лемме 9.7.

Лемма 9.7. Для любых неотрицательных чисел α, β справедливо неравенство

$$\alpha\beta + \beta^2 \leq \frac{z}{2}\alpha^2 + \frac{z+3}{2}\beta^2, \quad (8.2)$$

где $z = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618$ — золотое сечение интервала $[0, 1]$.

Доказательство. Зафиксируем β и рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \frac{z}{2}\alpha^2 + \frac{z+3}{2}\beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 = \frac{z}{2}\alpha^2 + \frac{z+1}{2}\beta^2 - \alpha\beta.$$

Это парабола, вершина которой находится в точке $\alpha = \beta/z$. Минимальное значение этой параболы равно

$$f\left(\frac{\beta}{z}\right) = \beta^2\left(z + 1 - \frac{1}{z}\right).$$

Выражение в скобках при значении z , равном золотому сечению, равно нулю. Отсюда немедленно вытекает неравенство (9.2).

Воспользовавшись неравенством (9.2), из (9.1) получим

$$\begin{aligned} SC(P^*) &\leq \sum_{R \in Z} \prod_{j=1}^n p_j(R_j) \sum_{e \in E} a_e \left(\frac{z}{2} n_e(R)^2 + \frac{z+3}{2} n_e(R^*)^2 \right) + \\ &+ \sum_{e \in E} b_e n_e(R^*) \leq \frac{z}{2} \sum_{R \in Z} \prod_{j=1}^n p_j(R_j) \sum_{e \in E} (a_e n_e(R)^2 + b_e n_e(R)) + \\ &+ \frac{z+3}{2} (a_e n_e(R^*)^2 + b_e n_e(R^*)) = \frac{z}{2} SC(P^*) + \frac{z+3}{2} SC(R^*). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Теперь мы можем оценить цену анархии для равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Теорема 9.7. *Смешанная цена анархии в несимметричной модели с неделимым трафиком и линейными задержками не превосходит $z + 2 = (\sqrt{5} + 3)/2 \approx 2.618$.*

Доказательство. Из (9.3) следует неравенство

$$SC(P^*) \leq \frac{z+3}{2-z} SC(R^*).$$

Из свойств золотого сечения — $\frac{z+3}{2-z} = z + 2$. Отсюда немедленно вытекает, что отношение затрат системы в равновесии по Нэшу к оптимальным затратам

$$PA = \frac{SC(P^*)}{SC(R^*)}$$

не превосходит $z + 2 \approx 2.618$. Теорема доказана.

Замечание 9.1. Мы получили ранее оценку для цены анархии в чистых стратегиях. Она была равна $5/2 = 2.5$. Переход к смешанным стратегиям немного увеличивает цену анархии до 2.618, что естественно, поскольку теперь наихудшее равновесие по Нэшу может достигаться в смешанных стратегиях.

§ 9.9. ЦЕНА АНАРХИИ В МОДЕЛИ С МАКСИМАЛЬНЫМИ ЗАТРАТАМИ СИСТЕМЫ И НЕДЕЛИМЫМ ТРАФИКОМ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЕТИ

Выше мы показали, что для линейных затрат системы цена анархии принимает конечные значения. Однако, если в качестве затрат системы рассмотреть максимальные затраты одного из игроков, можно показать, что цена анархии может принимать сколь угодно большие значения. Покажем это на следующем примере. Рассмотрим сеть вида, изображенного на рис. 9.9.

Сеть состоит из основных вершин $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$. Вершины v_i, v_{i+1} соединены k маршрутами, один из которых (лежащий на оси абсцисс) имеет длину, равную единице, а остальные длину, равную k . Игрок I, который здесь имеет максимальные затраты, посылает свой трафик из вершины v_0 в v_k , причем он может использовать только маршруты на оси абсцисс. В каждой вершине $v_i, i = 0, \dots, k-1$ есть $k-1$ игроков, которые посылают свой трафик из v_i в v_{i+1} . Очевидно, что оптимальные затраты системы, равные k , достигаются, если первый игрок посылает трафик по пути v_0, v_1, \dots, v_k , а все $k-1$ игроков в вершине v_i распределяются по оставшимся маршрутам, каждый по своему маршруту.

Нетрудно видеть, что наихудшее равновесие по Нэшу здесь, когда все $n = (k-1)k + 1$ игроков посылают свой трафик по маршрутам, лежащим на оси абсцисс. Но тогда затраты первого игрока и, значит, максимальные затраты системы равны $(k-1)k + 1$. Следовательно, цена анархии в данной модели равна

$$PA = \frac{k^2 - k + 1}{k} = \sqrt{n} + O(1).$$

Получим теперь оценку сверху для цены анархии для произвольной сети с неразделяемым трафиком. Предположим, что R^* — равновесие

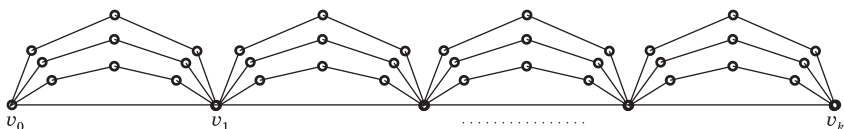


Рис. 9.9

Сеть с $k^2 - k + 1$ игроками. Игрок I следует по маршруту (v_0, v_1, \dots, v_k) . В вершине v_i есть $k-1$ игроков, которые следуют по маршруту (v_i, v_{i+1}) , при этом задержка на главном канале равна 1, а на остальных — k . Цена анархии равна k .

по Нэшу и R — оптимальный профиль стратегий, дающий минимальные затраты системы. Затраты системы в данном случае представлены максимальными затратами игроков. Допустим, без ограничения общности, что в равновесии максимальные затраты достигаются для первого игрока, т. е. $SC(R^*) = c_1(R^*)$. Чтобы получить оценку для цены анархии, точно так же, как при доказательстве теоремы 9.6, сравним максимальные затраты в равновесии $SC(R^*)$ и максимальные затраты для профиля R , $SC(R) = \max_{i \in N} c_i(R)$.

Так как R^* — равновесие по Нэшу, то

$$c_1(R^*) \leq \sum_{e \in R_1} (n_e(R^*) + 1) \leq \sum_{e \in R_1} n_e(R^*) + |R_1| \leq \sum_{e \in R_1} n_e(R^*) + c_1(R),$$

где последнее неравенство следует из того, что, если первый игрок использует каналы из R_1 , то его задержка заведомо больше или равна числу каналов в R_1 .

Оценим теперь $\sum_{e \in R_1} n_e(R^*)$. Воспользовавшись неравенством $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2$, получаем

$$\left(\sum_{e \in R_1} n_e(R^*) \right)^2 \leq |R_1| \sum_{e \in R_1} n_e^2(R^*) \leq |R_1| \sum_{e \in E} n_e^2(R^*) = \sum_{i=1}^n c_i(R^*).$$

В теореме 9.5 было доказано, что

$$\sum_{i=1}^n c_i(R^*) \leq \frac{5}{2} \sum_{i=1}^n c_i(R).$$

Тогда

$$\left(\sum_{e \in R_1} n_e(R^*) \right)^2 \leq |R_1| \frac{5}{2} \sum_{i=1}^n c_i(R),$$

следовательно,

$$c_1(R^*) \leq c_1(R) + \sqrt{|R_1| \frac{5}{2} \sum_{i=1}^n c_i(R)}.$$

Так как $|R_1| \leq c_1(R)$ и $c_i(R) \leq SC(R)$, приходим к неравенству

$$c_1(R^*) \leq SC(R) \left(1 + \sqrt{\frac{5}{2}n} \right),$$

откуда немедленно вытекает, что цена анархии ограничена сверху выражением $1 + \sqrt{5/2n}$. Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 9.8. *Цена анархии в несимметричной модели n лиц с неделимым трафиком, где затраты системы имеют вид максимальных затрат игроков, равна $O(\sqrt{n})$.*

Из теоремы следует, что цена анархии может достигать сколь угодно больших значений.

§ 9.10. МОДЕЛЬ ВАРДРОПА ОПТИМАЛЬНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ С РАЗДЕЛЯЕМЫМ ТРАФИКОМ

Рассматриваемая в данном параграфе модель маршрутизации основана на модели Вардропа (Wardrop, 1952) с разделяемым трафиком. Критерием оптимальности является минимизация задержки пересылаемого трафика.

Задача оптимальной маршрутизации трафика рассматривается как игра $\Gamma = \langle n, G, w, Z, f \rangle$, в которой n пользователей отправляют трафик по каналам сети с топологией, представленной графом $G = (V, E)$. Для каждого пользователя i существует Z_i — набор маршрутов из s_i в t_i по каналам G , и определен объем отправляемого трафика w_i . Для каждого из каналов $e \in E$ определена пропускная способность $c_e > 0$. Пользователи действуют в собственных интересах, выбирая маршруты для отправки трафика таким образом, чтобы минимизировалась максимальная задержка при пересылке их трафика из s в t . Каждый пользователь определяет для себя стратегию $x_i = \{x_{iR_i} \geq 0\}_{R_i \in Z_i}$. При этом x_{iR_i} — количество трафика, которое пользователь i отправляет по маршруту R_i , и $\sum_{R_i \in Z_i} x_{iR_i} = w_i$. Тогда $x = (x_1, \dots, x_n)$ — профиль стратегий пользователей. Для профиля стратегий x будем использовать обозначение $(x_{-i}, x'_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, которое означает, что пользователь i изменил свою стратегию с x_i на x'_i , а остальные пользователи сохранили свои стратегии неизменными.

Для каждого из каналов $e \in E$ определяется его загрузка (весь следующий по нему трафик)

$$\delta_e(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i: e \in R_i} x_{iR_i}.$$

Задержка при пересылке трафика по данному маршруту зависит от загрузки каналов, составляющих маршрут. Непрерывная функция задержки трафика $f_{iR_i}(x) = f_{iR_i}(\{\delta_e(x)\}_{e \in R_i})$ определяется для каждого пользователя i и используемого им маршрута R_i и является неубывающей по величинам загрузки каналов, составляющих маршрут, и, следовательно, по x_{iR_i} .

Величина, которую каждый пользователь i стремится минимизировать — максимальная по всем используемым им маршрутам задержка его трафика, которая составляет персональные затраты данного пользователя

$$PC_i(x) = \max_{R_i \in Z_i: x_{iR_i} > 0} f_{iR_i}(x).$$

Равновесие по Нэшу в данном случае определяется как ситуация, в которой ни для одного из игроков нет разумных оснований для изменения своей стратегии при условии, что все остальные игроки собираются придерживаться своих стратегий. То есть в терминах данной модели это ситуация, в которой ни для одного из пользователей нет возможности уменьшить свои персональные затраты путем изменения собственной стратегии.

Определение 9.7. Профиль стратегий x называется равновесием по Нэшу, если для каждого пользователя i и любого профиля $x' = (x_{-i}, x'_i)$ выполняется $PC_i(x) \leq PC_i(x')$.

В сетевых моделях важным также является определение равновесия по Вардропу.

Определение 9.8. Профиль x называется равновесием по Вардропу, если для каждого i и любых $R_i, \rho_i \in Z_i$ из $x_{iR_i} > 0$ следует $f_{iR_i}(x) \leq f_{i\rho_i}(x)$.

Данное определение можно переформулировать в виде, аналогичном определению равновесия по Нэшу.

Определение 9.9. Профиль x называется равновесием по Вардропу, если для каждого i справедливо: из $x_{iR_i} > 0$ следует $f_{iR_i}(x) = \min_{\rho_i \in Z_i} f_{i\rho_i}(x) = \lambda_i$ и из $x_{iR_i} = 0$ следует $f_{iR_i}(x) \geq \lambda_i$.

Такое определение в явном виде дает систему уравнений и неравенств для нахождения ситуаций равновесия по Вардропу. Строго говоря, определения равновесия по Нэшу и Вардропу не всегда равносильны. Равносильность зависит от выбранного в модели вида функций задержки трафика на канале.

Теорема 9.9. Если профиль x является равновесием по Вардропу, то x — равновесие по Нэшу.

Доказательство. Пусть x — профиль, для которого для всех i справедливо: из $x_{iR_i} > 0$ следует $f_{iR_i}(x) = \min_{\rho_i \in Z_i} f_{i\rho_i}(x) = \lambda_i$ и из

$x_{iR_i} = 0$ следует $f_{iR_i}(x) \geq \lambda_i$. Тогда для всех i и R_i справедливо

$$\max_{\rho_i \in Z_i: x_{i\rho_i} > 0} f_{i\rho_i}(x) \leq f_{iR_i}(x).$$

Предположим, что один из пользователей с номером i меняет свою стратегию с x_i на x'_i . Пусть тогда $x' = (x_{-i}, x'_i)$ — профиль стратегий, такой что для пользователя i на всех его маршрутах $R_i \in Z_i$ стратегии меняются на $x'_{iR_i} = x_{iR_i} + \Delta_{R_i}$, таким образом, что $\sum_{R_i \in Z_i} \Delta_{R_i} = 0$. Для остальных пользователей $k \neq i$ стратегии не меняются, т.е. $x'_k = x_k$.

Если все $\Delta_{R_i} = 0$, то $PC_i(x) = PC_i(x')$. Пусть $x \neq x'$, т.е. существует маршрут R_i , для которого $\Delta_{R_i} > 0$. Тогда для такого маршрута $f_{iR_i}(x) \leq f_{iR_i}(x')$, так как $f_{iR_i}(x)$ — неубывающая по x_{iR_i} . Так как $x'_{iR_i} > 0$, то

$$f_{iR_i}(x') \leq \max_{\rho_i \in Z_i: x_{i\rho_i} > 0} f_{i\rho_i}(x').$$

В итоге получаем, что

$$\max_{\rho_i \in Z_i: x_{i\rho_i} > 0} f_{i\rho_i}(x) \leq \max_{\rho_i \in Z_i: x_{i\rho_i} > 0} f_{i\rho_i}(x'),$$

или $PC_i(x) \leq PC_i(x')$. Следовательно, в силу произвольности выбора i и x'_i профиль x является равновесием по Нэшу.

Для того, чтобы любое равновесие по Нэшу в рассматриваемой модели являлось также равновесием Вардропы, достаточно, чтобы все функции задержки трафика в данной модели обладали следующим свойством: всегда возможно перераспределить небольшое количество трафика пользователя с любого из используемых им маршрутов системы на другие менее загруженные для данного пользователя маршруты, чтобы строго уменьшить задержку трафика данного пользователя на данном маршруте.

Пример 9.7. Рассмотрим простой пример, демонстрирующий разницу в определениях равновесия по Нэшу и Вардропу. Пусть в системе один пользователь, отправляющий трафик объемом 1 из точки s в t по двум маршрутам сети на рис. 9.10.

Пусть функции задержки на маршруте 1, включающем каналы (1,2,4), и на маршруте 2, включающем каналы (1,3,4), соответственно равны $f_1(x) = \max\{1, x, 1\} = 1$ и $f_2(y) = \min\{1, y, 1\} = y$, причем $x = 1 - y$. Обе функции непрерывные, неубывающие по x и y соответственно. $f_1(x) > f_2(y)$ для всех допустимых профилей (x, y) , таких что $x + y = 1$, но при любом уменьшении x — объема трафика, посылаемого по первому маршруту, $f_1(x)$ не меняется. Для такой модели

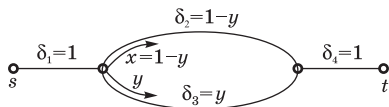


Рис. 9.10

*Равновесие по Нэшу не совпадает
с равновесием по Вардропу*

равновесием по Нэшу будет любой профиль $(x, 1 - x)$, где $0 \leq x \leq 1$, но при этом равенство задержек для используемых каналов имеет место только для профиля $(0, 1)$.

Определение 9.10. Пусть x — некоторый профиль стратегий. Назовем затратами системы величину суммарной задержки всех игроков при использовании данного профиля

$$SC(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i} x_{iR_i} f_{iR_i}(x).$$

Заметим, что если x — равновесие по Вардропу, то по определению для каждого игрока i задержки на всех используемых маршрутах R_i равны $\lambda_i(x)$, поэтому затраты системы в равновесии можно представить в виде

$$SC(x) = \sum_{i=1}^n w_i \lambda_i(x).$$

Минимальное значение затрат системы обозначим $opt = \min_x SC(x)$.

Определение 9.11. Максимальное значение отношения $SC(x)/opt$, где затраты системы вычисляются только в точках равновесия по Вардропу, будем называть ценой анархии.

§ 9.11. МОДЕЛЬ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ КАНАЛАМИ. МОДЕЛЬ ПИГУ. ПАРАДОКС БРЕССА

Рассмотрим модель Вардропы на примере сети с параллельными каналами.

Пример 9.8. Модель Пигу (Pigou, 1920). Рассмотрим простую сеть с двумя параллельными каналами (см. рис. 9.11), где один из каналов имеет фиксированную пропускную способность, равную единице,

а у второго пропускная способность пропорциональна размеру трафика. Предположим, что есть большое количество пользователей, посылающих свой трафик из вершины s в t , в сумме создающих нагрузку, равную единице. Каждый из пользователей заинтересован минимизировать свои затраты. Тогда равновесием по Нэшу будет для каждого пользователя использовать нижний канал, поскольку если на верхнем канале есть какое-то количество игроков, то на нижнем канале задержка будет всегда меньше, чем на верхнем. Итак, в равновесии затраты каждого из игроков равны единице. При этом затраты системы также равны единице.

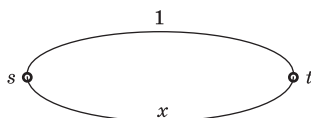


Рис. 9.11
Модель Пигу

Теперь представим, что какая-то часть пользователей x использует верхний канал, а остальные $1 - x$ — нижний канал. Тогда затраты системы станут равны $x \cdot 1 + (1 - x) \cdot (1 - x) = x^2 - x + 1$. Минимум затрат достигается при $x = 1/2$ и равен $3/4$. Мы видим, что цена анархии данной системы равна $PA = 4/3$.

Пример 9.9. Рассмотрим ту же сеть с двумя каналами, но пусть задержка на нижнем канале теперь равна x^p , где p некоторый параметр. Равновесием по Нэшу также является трафик всех пользователей по нижнему каналу с затратами системы, равными единице. Направим теперь трафик ϵ по верхнему каналу. Затраты системы $\epsilon \cdot 1 + (1 - \epsilon)^{p+1}$ будут принимать сколь угодно малые значения при $\epsilon \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$. Соответственно цена анархии может принимать сколь угодно большие значения.

Пример 9.10 (парадокс Браесса). В случае с неделимым трафиком мы уже рассматривали парадокс Браесса. Он также возникает и в моделях с разделяемым трафиком. Рассмотрим сеть из 4 вершин, представленную на рис. 9.4. Существуют два пути из s в t , задержки игроков на которых одинаковы и равны $1 + x$. Пусть общий трафик всех пользователей составляет единицу. В силу симметрии сети все пользователи разобьются на две равные группы и их затраты будут одинаковы и равны $3/2$. Это и есть равновесие по Нэшу.

Теперь представим, что мы построили новый сверхскоростной канал (CD) с задержкой, равной нулю. Тогда маршрут $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ для любого из пользователей всегда не хуже, чем маршрут $A \rightarrow C \rightarrow B$ или $A \rightarrow D \rightarrow B$. Но в новом равновесии затраты всех игроков увеличатся и станут равны 2. Этот пример показывает, что добавление нового канала может увеличить затраты и игроков, и системы.

§ 9.12. ПОТЕНЦИАЛ В МОДЕЛИ С РАЗДЕЛЯЕМЫМ ТРАФИКОМ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЕТИ

Пусть $\Gamma = \langle n, G, w, Z, f \rangle$ — модель Вардропы, в которой n пользователей отправляют трафик по каналам сети с топологией, представленной графом $G = (V, E)$. $W = \sum_{i=1}^n w_i$ — общий объем пакетов всех игроков. Пусть x_{iR_i} — стратегия игрока i , это часть трафика, передаваемая по маршруту R_i : $\sum_{R_i \in Z_i} x_{iR_i} = w_i, x_{iR_i} \geq 0$. Для каждого ребра e задана непрерывная строго возрастающая принимающая неотрицательные значения функция $f_e(\delta(x))$ на $[0, W]$, характеризующая задержку на этом ребре. Предположим, что задержка игрока i на маршруте R_i имеет аддитивный вид

$$f_{iR_i}(\delta(x)) = \sum_{e \in R_i} f_e(\delta_e(x)),$$

т. е. равна сумме задержек на всех каналах маршрута.

Рассмотрим игру с функциями выигрыша вида

$$PC_i(x) = \max_{R_i \in Z_i: x_{iR_i} > 0} f_{iR_i}(x) = \max_{R_i \in Z_i: x_{iR_i} > 0} \sum_{e \in R_i} f_e(\delta_e(x)).$$

Введем в рассмотрение потенциал

$$P(x) = \sum_{e \in E} \int_0^{\delta_e(x)} f_e(t) dt.$$

Так как $\int_0^{\delta} f_e(t) dt$ — дифференцируемая функция с неубывающей производной, то эта функция выпукла.

Теорема 9.10. Профиль x образует равновесие по Вардропу (и, следовательно, по Нэшу) тогда и только тогда, когда $P(x) = \min_y P(y)$.

Доказательство. Пусть x — равновесие по Вардропу и y — произвольный профиль стратегий. Из выпуклости функции $P(x)$ следует

$$P(y) - P(x) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i} \frac{\partial P(x)}{\partial x_{iR_i}} (y_{iR_i} - x_{iR_i}). \quad (12.1)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_{iR_i}} = \sum_{e \in R_i} f_e(\delta_e(x)).$$

Из условия равновесия по Вардропу следует, что для любого игрока i

$$\lambda_i(x) = \sum_{e \in R_i} f_e(\delta_e(x)), \quad x_{iR_i} > 0,$$

$$\lambda_i(x) \leq \sum_{e \in R_i} f_e(\delta_e(x)), \quad x_{iR_i} = 0.$$

Разобьем вторую сумму в неравенстве (12.1) на две. Там, где $y_{iR_i} - x_{iR_i} \geq 0$, воспользуемся неравенством $\frac{\partial P(x)}{\partial x_{iR_i}} \geq \lambda_i(x)$. Во второй сумме $y_{iR_i} - x_{iR_i} < 0$, значит, $x_{iR_i} > 0$, тогда из условия равновесия $\frac{\partial P(x)}{\partial x_{iR_i}} = \lambda_i(x)$.

Это приводит к неравенству

$$P(y) - P(x) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i} \lambda_i(x) (y_{iR_i} - x_{iR_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \sum_{R_i \in Z_i} (y_{iR_i} - x_{iR_i}).$$

Но для любого игрока i и любого профиля имеет место $\sum_{R_i \in Z_i} y_{iR_i} = \sum_{R_i \in Z_i} x_{iR_i} = w_i$. Отсюда

$$P(y) \geq P(x), \quad \forall y,$$

следовательно, x доставляет минимум потенциалу $P(y)$.

Пусть теперь профиль x является точкой минимума функции $P(y)$. Предположим, что x не является равновесием по Вардропу. Тогда найдется игрок i и два маршрута R_i и $\rho_i \in Z_i$, такие что $x_{R_i} > 0$ и

$$\sum_{e \in R_i} f_e(\delta_e(x)) > \sum_{e \in \rho_i} f_e(\delta_e(x)). \quad (12.2)$$

Допустим, мы заменим в профиле x только трафик на маршрутах R_i и ρ_i таким образом, что $y_{R_i} = x_{R_i} - \epsilon$ и $y_{\rho_i} = x_{R_i} + \epsilon$. Это всегда

можно сделать для достаточно малого ϵ , поскольку $x_{R_i} > 0$. Тогда будет выполняться неравенство

$$P(x) - P(y) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i} \frac{\partial P(y)}{\partial x_{iR_i}} (y_{iR_i} - x_{iR_i}) = \\ = \epsilon \left(\sum_{e \in R_i} f_e(\delta_e(y)) - \sum_{e \in \rho_i} f_e(\delta_e(y)) \right) > 0,$$

при достаточно малом ϵ в силу неравенства (12.2) и непрерывности функции $f_e(\delta_e(y))$. Это противоречит тому, что $P(x)$ — минимальное значение потенциала. Теорема доказана.

Заметим, что потенциал является непрерывной функцией, определенной на компактном множестве всех допустимых профилей x , следовательно, всегда существует минимум данной функции, а вместе с ним и равновесие по Нэшу.

В качестве модельных функций задержки, как правило, используют линейные функции $f_e(\delta) = a_e \delta + b_e$, либо функции вида $f_e(\delta) = 1/(c_e - \delta)$, или $f_e(\delta) = \delta/(c_e - \delta)$, где c_e — это пропускная способность канала e .

§ 9.13. ЗАТРАТЫ СИСТЕМЫ В МОДЕЛИ С РАЗДЕЛЯЕМЫМ ТРАФИКОМ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДЕРЖКИ

Рассмотрим сеть с произвольной топологией, где задержки $f_e(\delta)$ являются дифференцируемыми возрастающими выпуклыми функциями. Тогда затраты системы имеют вид

$$SC(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i} x_{iR_i} \sum_{e \in R_i} f_e(\delta_e(x)) = \sum_{e \in E} \delta_e(x) f_e(\delta_e(x))$$

и также являются выпуклой функцией. Заметим, что

$$\frac{\partial SC(x)}{\partial x_{iR_i}} = \sum_{e \in R_i} (f_e(\delta_e(x)) + \delta_e(x) f'_e(\delta_e(x))) = \sum_{e \in R_i} f_e^*(\delta_e(x)).$$

Выражение $f_e^*(\delta_e(x))$ будем называть маргинальными затратами на канале e .

Повторяя рассуждения в теореме 9.10, только не для потенциала, а для функции $SC(x)$, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 9.11. *Профиль x доставляет минимум затратам системы $SC(x) = \min_y SC(y)$, тогда и только тогда, когда для любого i*

и любых маршрутов $R_i, \rho_i \in Z_i$, где $x_{iR_i} > 0$, имеет место

$$\sum_{e \in R_i} f_e^*(\delta_e(x)) \leq \sum_{e \in \rho_i} f_e^*(\delta_e(x)).$$

Например, для линейных функций задержки $f_e(\delta) = a_e \delta + b_e$ маргинальные затраты имеют вид $f_e^*(\delta) = 2a_e \delta + b_e$, и тогда условие минимума затрат системы для профиля x примет вид: для любого игрока i и любых маршрутов $R_i, \rho_i \in Z_i$, где $x_{iR_i} > 0$, имеет место

$$\sum_{e \in R_i} (2a_e \delta_e(x) + b_e) \leq \sum_{e \in \rho_i} (2a_e \delta_e(x) + b_e).$$

Последнее условие можно также представить в виде: для любого игрока i из условия $x_{iR_i} > 0$ следует $\sum_{e \in R_i} (2a_e \delta_e(x) + b_e) = \lambda_i^*(x)$ и из условия $x_{iR_i} = 0$ следует $\sum_{e \in R_i} (2a_e \delta_e(x) + b_e) \geq \lambda_i^*(x)$.

Сравнивая это с условиями на то, чтобы профиль x являлся равновесием по Вардропу, приходим к следующему утверждению.

Следствие. Если профиль x образует равновесие по Вардропу в модели $\langle n, G, w, Z, f \rangle$ с линейной функцией задержки, то профиль $x/2$ дает минимум затратам системы в модели $\langle n, G, w/2, Z, f \rangle$, где трафик всех игроков уменьшен в два раза.

§ 9.14. ЦЕНА АНАРХИИ В МОДЕЛИ С РАЗДЕЛЯЕМЫМ ТРАФИКОМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДЕРЖКИ

Рассмотрим игру $\langle n, G, w, Z, f \rangle$ с линейными функциями задержки $f_e(\delta) = a_e \delta + b_e$, где $a_e > 0, e \in E$. Пусть x^* — профиль, дающий оптимальные затраты системы $SC(x^*) = \min_y SC(y)$.

Лемма 9.8. Затраты системы в модели Вардропы с удвоенным трафиком

$$\langle n, G, 2w, Z, f \rangle$$

вырастут по меньшей мере до величины

$$SC(x^*) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^*(x^*) w_i.$$

Доказательство. Пусть x — произвольный профиль в модели с удвоенным трафиком. Нетрудно проверить неравенство

$$\begin{aligned} (a_e \delta_e(x) + b_e) \delta_e(x) &\geq (a_e \delta_e(x^*) + b_e) \delta_e(x^*) + \\ &+ (\delta_e(x) - \delta_e(x^*)) (2a_e \delta_e(x^*) + b_e). \end{aligned}$$

Оно эквивалентно неравенству $(\delta(x) - \delta(x^*))^2 \geq 0$. В наших обозначениях неравенство принимает вид

$$f_e(\delta_e(x))\delta_e(x) \geq f_e(\delta_e(x^*))\delta_e(x^*) + (\delta_e(x) - \delta_e(x^*))f_e^*(\delta_e(x^*)).$$

Суммируя по всем $e \in E$, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} SC(x) = \sum_{e \in E} f_e(\delta_e(x))\delta_e(x) &\geq \sum_{e \in E} f_e(\delta_e(x^*))\delta_e(x^*) + \\ &+ \sum_{e \in E} (\delta_e(x) - \delta_e(x^*))f_e^*(\delta_e(x^*)), \end{aligned}$$

откуда

$$SC(x) \geq SC(x^*) + \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i} (x_{iR_i} - x_{iR_i}^*) \sum_{e \in R_i} f_e^*(\delta_e(x^*)).$$

Так как x^* есть точка минимума $SC(x)$, то согласно теореме 9.10 $\sum_{e \in R_i} f_e^*(\delta_e(x^*)) = \lambda_i^*(x^*)$ при $x_{iR_i}^* > 0$ и $\sum_{e \in R_i} f_e^*(\delta_e(x^*)) \geq \lambda_i^*(x^*)$ при $x_{iR_i}^* = 0$. Отсюда следует

$$SC(x) \geq SC(x^*) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^*(x^*) \sum_{R_i \in Z_i} (x_{iR_i} - x_{iR_i}^*).$$

По предположению $\sum_{R_i \in Z_i} (x_{iR_i} - x_{iR_i}^*) = 2w_i - w_i = w_i$, следовательно,

$$SC(x) \geq SC(x^*) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^*(x^*) w_i.$$

Лемма доказана.

Теорема 9.12. *Цена анархии в модели Вардропы с линейными функциями задержки равна $PA = 4/3$.*

Доказательство. Предположим, что x — равновесие по Вардропу в модели

$$\langle n, G, w, Z, f \rangle.$$

Тогда из следствия к теореме 9.11 профиль $x/2$ дает минимальные затраты системы в модели

$$\langle n, G, w/2, Z, f \rangle.$$

Из леммы 9.8 следует, что если теперь в этой модели мы увеличим трафик в два раза (т. е. вернемся к начальному трафику w), то затраты системы для любого профиля y можно оценить следующим образом:

$$SC(y) \geq SC(x/2) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^*(x/2) \frac{w_i}{2} = SC(x/2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) w_i.$$

Так как x — равновесие по Вардропу, то $\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) w_i = SC(x)$. Отсюда

$$SC(y) \geq SC(x/2) + \frac{1}{2} SC(x).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} SC(x/2) &= \sum_{e \in E} \delta_e(x/2) f_e(\delta_e(x/2)) = \\ &= \sum_{e \in E} \frac{1}{2} \delta_e(x) \left(\frac{1}{2} a_e \delta_e(x) + b_e \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{4} \sum_{e \in E} (a_e \delta_e^2(x) + b_e \delta_e(x)) = \frac{1}{4} SC(x). \end{aligned}$$

Из этих двух неравенств вытекает $SC(y) \geq \frac{3}{4} SC(x)$ для любого профиля y и, в частности, для профиля, дающего минимальные затраты системы. Отсюда вытекает оценка сверху для цены анархии

$$PA = \sup_{x\text{-равновесие}} \frac{SC(x)}{opt} \leq \frac{4}{3}.$$

Оценка снизу была уже получена в модели Пигу в параграфе 9.11. Теорема доказана.

§ 9.15. ПОТЕНЦИАЛ В МОДЕЛИ ВАРДРОПА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ КАНАЛАМИ ДЛЯ ПЕРСОНИФИЦИРОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДЕРЖКИ

Везде выше мы рассматривали модели, в которых функция задержки на каждом канале для всех игроков была одинакова и зависела лишь от загрузки канала. Однако в реальных играх задержка на канале может иметь разную цену для разных игроков. В этом случае мы

говорим о сетевых играх с персонифицированными задержками. Рассмотрим здесь модель Вардропа $\langle n, G, w, Z, f \rangle$ с параллельными каналами (рис. 9.12) и линейными функциями задержки вида $f_{ie}(\delta) = a_{ie}\delta$, где коэффициенты a_{ie} различные для разных игроков $i \in N$ и каналов $e \in E$.

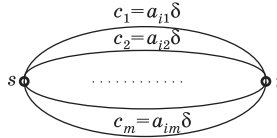


Рис. 9.12

Модель Вардропа с параллельными каналами и линейными задержками

Пусть $x = \{x_{ie}, i \in N, e \in E\}$ — некоторый профиль стратегий, $\sum_{e \in E} x_{ie} = w_i, i = 1, \dots, n$. Введем в рассмотрение функцию

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} x_{ie} \ln a_{ie} + \sum_{e \in E} \delta_e(x) \ln \delta_e(x).$$

Теорема 9.13. Профиль x является равновесием по Вардропу тогда и только тогда, когда $P(x) = \min_y P(y)$.

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть x — равновесие по Вардропу. Найдем производную функции P :

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_{ie}} = 1 + \ln a_{ie} + \ln \left(\sum_{k=1}^n x_{ke} \right) = 1 + \ln \left(a_{ie} \sum_{k=1}^n x_{ke} \right).$$

Из условий равновесия следует, что для всех $i \in N$ и $e, l \in E$:

$$x_{ie} > 0 \Rightarrow a_{ie} \sum_{k=1}^n x_{ke} \leq a_{il} \sum_{k=1}^n x_{kl}.$$

В силу монотонности функции $\ln x$ отсюда следует

$$x_{ie} > 0 \Rightarrow \frac{\partial P(x)}{\partial x_{ie}} \leq \frac{\partial P(x)}{\partial x_{il}}, \quad \forall i, e, l.$$

Далее рассуждения аналогичны доказательству в теореме 9.10. Функции $x \ln x$ и линейная выпуклы, сумма выпуклых функций также выпукла. Следовательно, $P(x)$ — выпуклая функция. Эта функция является непрерывно дифференцируемой. Из выпуклости $P(x)$ следует

$$P(y) - P(x) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} \frac{\partial P(x)}{\partial x_{ie}}(x)(y_{ie} - x_{ie}).$$

Из условий равновесия

$$x_{ie} > 0 \Rightarrow \frac{\partial P(x)}{\partial x_{ie}} = \lambda_i, \quad \forall e \in E,$$

$$x_{ie} = 0 \Rightarrow \frac{\partial P(x)}{\partial x_{ie}} \geq \lambda_i, \quad \forall e \in E.$$

Если выполняется второе условие $x_{ie} = 0$, то $y_{ie} - x_{ie} \geq 0$, и тогда $\frac{\partial P(x)}{\partial x_{ie}}(x)(y_{ie} - x_{ie}) \geq \lambda_i(y_{ie} - x_{ie})$. Это приводит к соотношениям

$$P(y) - P(x) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} \lambda_i(y_{ie} - x_{ie}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{e \in E} (y_{ie} - x_{ie}) = 0.$$

Отсюда $P(y) \geq P(x)$ для всех y , следовательно, x — точка минимума функции $P(x)$.

Теперь докажем достаточность условий теоремы. Пусть x — точка минимума функции $P(y)$. Предположим противное, т.е. x не есть равновесие по Вардропу. Тогда для некоторого игрока k найдутся два канала p и q , такие что имеет место $x_{kp} > 0$ и $a_{kp}\delta_p(x) > a_{kq}\delta_q(x)$. Тогда найдется такое число $z : 0 < z < x_{kp}$, что будет выполняться

$$a_{kp}(\delta_p(x) - z) \geq a_{kq}(\delta_q(x) + z).$$

Определим новый профиль y такой, что все стратегии игроков $i \neq k$ останутся прежними, а для игрока k стратегия примет вид

$$y_{ke} = \begin{cases} x_{kp} - z, & \text{если } e = p, \\ x_{kq} + z, & \text{если } e = q, \\ x_{ke}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} P(x) - P(y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} (x_{ie} - y_{ie}) \ln a_{ie} + \\ &+ \sum_{e \in E} (\delta_e(x) \ln \delta_e(x) - \delta_e(y) \ln \delta_e(y)). \end{aligned} \quad (15.1)$$

В обеих суммах в (15.1) отличны от нуля будут лишь слагаемые, соответствующие игроку k и каналам p и q ,

$$\begin{aligned} P(x) - P(y) &= z(\ln a_{kp} - \ln a_{kq}) + \delta_p(x) \ln \delta_p(x) + \delta_q(x) \ln \delta_q(x) - \\ &\quad - (\delta_p(x) - z) \ln(\delta_p(x) - z) - (\delta_q(y) + z) \ln(\delta_q(x) + z) = \\ &= \ln \left(a_{kp}^z \cdot \delta_p(x)^{\delta_p(x)} \cdot \delta_q(x)^{\delta_q(x)} \right) - \\ &\quad - \ln \left(a_{kq}^z \cdot (\delta_p(x) - z)^{\delta_p(x) - z} \cdot (\delta_q(x) + z)^{\delta_q(x) + z} \right). \end{aligned}$$

Ниже мы докажем лемму 9.9, согласно которой последнее выражение строго положительно. Но тогда $P(x) > P(y)$, что противоречит условию, что x — точка минимума функции $P(y)$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Лемма 9.9. Пусть a, b, u, v, z неотрицательны и $u \geq z$. Если $a(u - z) \geq b(v + z)$, то

$$a^z \cdot u^u \cdot v^v > b^z \cdot (u - z)^{u-z} \cdot (v + z)^{v+z}.$$

Доказательство. Вначале установим неравенство

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^\alpha > e > \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)^\beta, \quad \alpha > 1, \quad \beta > 0. \quad (15.2)$$

Для этого достаточно заметить, что функция

$$f(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1} \right)^\alpha = \exp \left(\alpha \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1} \right) \right),$$

монотонно убывая, стремится к e при $\alpha \rightarrow \infty$. Монотонность следует из отрицательности производной

$$f'(\alpha) = f(\alpha) \left(\ln \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1} \right) - \frac{1}{\alpha - 1} \right) < 0 \quad \text{для всех } \alpha > 1.$$

Аналогично устанавливается правое неравенство.

Положим теперь $\alpha = u/z$ и $\beta = v/z$. Тогда из условия $a(u - z) \geq b(v + z)$ следует $a(\alpha z - z) \geq b(\beta z + z)$, откуда $a(\alpha - 1) \geq b(\beta + 1)$. Из неравенства (15.2) следует

$$a\alpha^\alpha \beta^\beta > a(\alpha - 1)^\alpha (\beta + 1)^\beta \geq b(\alpha - 1)^{\alpha-1} (\beta + 1)^{\beta+1}.$$

Умножая последнее неравенство на $z^{\alpha+\beta}$,

$$a(z\alpha)^\alpha(z\beta)^\beta > b(z\alpha - z)^{\alpha-1}(z\beta + z)^{\beta+1},$$

и возводя в степень z , приходим к неравенству

$$a^z(z\alpha)^{z\alpha}(z\beta)^{z\beta} > b^z(z\alpha - z)^{z\alpha-z}(z\beta + z)^{z\beta+z},$$

откуда и следует справедливость леммы.

§ 9.16. ЦЕНА АНАРХИИ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЕТИ ДЛЯ ПЕРСОНИФИЦИРОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДЕРЖКИ

Рассмотрим здесь модель Вардропы $\langle n, G, w, Z, f \rangle$ для сети произвольного вида с разделяемым трафиком и линейными функциями задержки вида $f_{ie}(\delta) = a_{ie}\delta$, где коэффициенты a_{ie} , различные для разных игроков $i \in N$ и каналов $e \in E$. Важной характеристикой здесь является

$$\Delta = \max_{i, k \in N, e \in E} \left\{ \frac{a_{ie}}{a_{ke}} \right\},$$

максимальное отношение задержек по всем игрокам и каналам. Выше мы показали, что цена анархии в произвольной сети с линейными задержками, которые для всех игроков одинаковы, равна $4/3$. Если задержки персонифицированы, то цена анархии может значительно возрасти. Тем не менее, она оказывается ограничена величиной Δ .

Для доказательства нам понадобится следующее неравенство.

Лемма 9.10. Для любых $u, v \geq 0$ и $\Delta > 0$ справедливо неравенство

$$uv \leq \frac{1}{2\Delta}u^2 + \frac{\Delta}{2}v^2.$$

Доказательство следует из представления

$$\frac{1}{2\Delta}u^2 + \frac{\Delta}{2}v^2 - uv = \frac{\Delta}{2} \left(\frac{u}{\Delta} - v \right)^2 \geq 0.$$

Теорема 9.14. Цена анархии в модели Вардропы с персонифицированными линейными задержками не превышает Δ .

Доказательство. Пусть x — равновесие по Вардропу и x^* — профиль, дающий минимальные затраты системы. Рассмотрим затраты системы в равновесии

$$SC(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i} x_{iR_i} \sum_{e \in R_i} a_{ie} \delta_e(x).$$

По определению равновесия по Вардропу задержки на всех используемых каналах одинаковы, т. е. $\sum_{e \in R_i} a_{ie} \delta_e(x) = \lambda_i$, если $x_{iR_i} > 0$. Отсюда вытекает

$$SC(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i} x_{iR_i} \sum_{e \in R_i} a_{ie} \delta_e(x) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i} x_{iR_i}^* \sum_{e \in R_i} a_{ie} \delta_e(x).$$

Представим последнее выражение в виде

$$\sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i} x_{iR_i}^* \sum_{e \in R_i} \frac{a_{ie}}{\delta_e(x^*)} \delta_e(x^*) \delta_e(x)$$

и воспользуемся леммой 9.10.

$$\begin{aligned} SC(x) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i} x_{iR_i}^* \sum_{e \in R_i} \frac{a_{ie}}{\delta_e(x^*)} \left(\frac{\Delta}{2} \delta_e^2(x^*) + \frac{1}{2\Delta} \delta_e^2(x) \right) = \\ &= \frac{\Delta}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i} x_{iR_i}^* \sum_{e \in R_i} a_{ie} \delta_e(x^*) + \\ &+ \frac{1}{2\Delta} \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i: e \in R_i} \frac{x_{iR_i}^*}{\delta_e(x^*)} a_{ie} \delta_e^2(x) = \\ &= \frac{\Delta}{2} SC(x^*) + \frac{1}{2\Delta} \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i: e \in R_i} \frac{x_{iR_i}^*}{\delta_e(x^*)} \cdot a_{ie} \delta_e^2(x). \end{aligned}$$

Чтобы оценить второе слагаемое в последнем выражении, заметим, что если выполняются равенства с неотрицательными слагаемыми

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1,$$

то справедлива оценка

$$\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n} \leq \frac{\max\{a_i\}}{\min\{a_i\}}, \quad a_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Но в последнем выражении для любого $e \in E$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i: e \in R_i} \frac{x_{iR_i}^*}{\delta_e(x^*)} = \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i: e \in R_i} \frac{x_{iR_i}}{\delta_e(x)} = 1.$$

Следовательно,

$$SC(x) \leq \frac{\Delta}{2} SC(x^*) + \frac{1}{2\Delta} \Delta \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i: e \in R_i} \frac{x_{iR_i}}{\delta_e(x)} \cdot a_{ie} \delta_e^2(x).$$

Упрощая, получим

$$\begin{aligned} SC(x) &\leq \frac{\Delta}{2} SC(x^*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{R_i \in Z_i} x_{iR_i} \sum_{e \in R_i} a_{ie} \delta_e(x) = \\ &= \frac{\Delta}{2} SC(x^*) + \frac{1}{2} SC(x). \end{aligned}$$

Отсюда для любого равновесия имеет место оценка

$$\frac{SC(x)}{SC(x^*)} \leq \Delta,$$

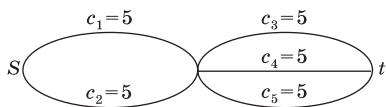
что и доказывает теорему.

Таким образом, для произвольной сети с линейными задержками, где пользователи имеют разные задержки, цена анархии конечна и зависит от отношения коэффициентов функций задержки игроков.

Задачи и упражнения

1. По трем идентичным параллельным каналам высылаются четыре пакета $w_1 = 2$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3$, $w_4 = 4$. Задержка имеет вид $f(w) = \frac{w}{c}$. Найти равновесие по Нэшу в чистых стратегиях и вполне смешанное равновесие.
2. По трем параллельным каналам с пропускными способностями $c_1 = 1.5$, $c_2 = 2$ и $c_3 = 2.5$ высылаются четыре одинаковых пакета. Найти равновесие по Нэшу в чистых стратегиях и вполне смешанное равновесие, если задержки имеют линейный вид.
3. По двум параллельным каналам с пропускными способностями $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$ посылаются пять пакетов $w_1 = 2$, $w_2 = 2$, $w_3 = 2$, $w_4 = 4$, $w_5 = 5$. Найти равновесие по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях. Найти затраты системы (в линейном, квадратичном и максиминном виде).
4. По трем параллельным каналам с пропускными способностями $c_1 = 2$, $c_2 = 2.5$, $c_3 = 4$ посылаются четыре пакета $w_1 = 5$, $w_2 = 7$, $w_3 = 10$, $w_4 = 12$. Задержки имеют линейный вид. Найти наихудшее равновесие по Нэшу. Вычислить затраты системы. Найти цену анархии.

5. По двум каналам с пропускными способностями $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$ посылаются четыре пакета $w_1 = 3$, $w_2 = 4$, $w_3 = 6$, $w_4 = 8$. Задержки имеют линейный вид. К сети добавляется еще один канал. При какой его пропускной способности затраты системы станут больше?
6. Рассматривается сеть с параллельными каналами. Затраты системы имеют квадратичный вид. К сети добавляется еще один канал. Возможно ли, что при этом затраты системы возрастут?
7. Рассматривается сеть Вардропа вида



- Из s в t посылаются четыре пакета $w_1 = 1$, $w_2 = 1$, $w_3 = 2$, $w_4 = 3$. Функция задержки имеет вид $f(w) = \frac{1}{c-w}$. Найти равновесие по Вардропу. Вычислить линейные и максимальные затраты системы.
8. По трем параллельным каналам сети Вардропа с пропускными способностями $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$ посылаются четыре пакета $w_1 = 1$, $w_2 = 1$, $w_3 = 2$, $w_4 = 3$. Задержка на канале имеет вид $f(w) = \frac{1}{c-w}$. Найти равновесие по Вардропу. Вычислить линейные затраты системы. Найти цену анархии.
 9. Рассматривается модель Вардропа. В сети общего вида задержка на канале e имеет вид $f_e(w) = \frac{1}{c_e - w}$. Найти вид потенциала в этой сети.
 10. Рассматривается персонифицированная модель Вардропа. Сеть состоит из параллельных каналов. Задержка на канале e для игрока i имеет вид $f_{ie}(w) = a_e w + b_{ie}$. Найти потенциал такой сети.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ИГРЫ

В динамических играх игра развивается во времени. При этом игроки управляют некоторым объектом или системой, динамика которой описывается системой разностных или дифференциальных уравнений. Если это движущиеся в пространстве объекты, тогда это игры преследования и игроки заинтересованы приблизиться к объекту противника за минимальное время или максимизировать вероятность найти объект противника. Также это могут быть экономические или экологические системы, тогда в этих играх игроки заинтересованы получить максимальный доход и нанести минимальный ущерб окружающей среде.

Определение 10.1. *Динамической игрой будем называть игру $\Gamma = \langle N, x, \{U_i\}_{i=1}^n, \{H_i\}_{i=1}^n \rangle$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков,*

$$x'(t) = f(x, u_1, \dots, u_n, t), \quad x(0) = x_0,$$

$$x = (x_1, \dots, x_m), \quad 0 \leq t \leq T,$$

управляемая система в пространстве R^m , U_1, \dots, U_n — множества стратегий игроков $1, \dots, n$ и $H_i(u_1, \dots, u_n)$ — выигрыш игрока $i \in N$.

Управляемая система рассматривается на интервале времени $[0, T]$, который может быть как конечным, так и бесконечным. Стратегии игроков представляют собой функции $u_i = u_i(t)$, $i = 1, \dots, n$. В зависимости от выбранных стратегий каждый из игроков получает выигрыш

$$H_i(u_1, \dots, u_n) = \int_0^T g_i(x(t), u_1(t), \dots, u_n(t), t) dt + G_i(x(T), T),$$

$$i = 1, \dots, n,$$

который состоит из **интегральной** и **терминальной** составляющих и где $g_i, G_i, i = 1, \dots, n$ — заданные функции.

Существуют кооперативные и некооперативные динамические игры. В некооперативных играх под решением понимается равновесие по Нэшу.

Определение 10.2. *Равновесием по Нэшу в игре Γ называется набор стратегий (u_1^*, \dots, u_n^*) , для которого выполняются следующие условия*

$$H_i(u_{-i}^*, u_i) \leq H_i(u^*)$$

для произвольных стратегий $u_i, i = 1, \dots, n$.

Начнем рассмотрение данного класса с игр с дискретным временем.

§ 10.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Представим себе некоторую динамическую систему, которая описывается системой разностных уравнений

$$x_{t+1} = (x_t)^\alpha, \quad t = 0, 1, \dots,$$

где $0 < \alpha \leq 1$. Например, можно представлять себе некую рыбную популяцию, которая развивается по этому закону. Задано начальное состояние системы x_0 . Заметим, что у данной системы существует стационарное состояние $x = 1$. Если $x_0 > 1$, то популяция убывает, неограниченно приближаясь к $x = 1$, если же $x_0 < 1$, то возрастает с такой же асимптотой.

Предположим, что две страны (игроки) ловят рыбу и заинтересованы максимизировать свой доход на некотором интервале времени. Функция полезности каждого игрока зависит от добытой им рыбы u и имеет вид $\ln(u)$. Задан коэффициент дисконтирования β_1 для одного игрока и β_2 для другого, $0 < \beta_i < 1, i = 1, 2$. Найдём вначале равновесие по Нэшу в данной игре.

10.1.1. Равновесие по Нэшу в динамической игре

Рассмотрим эту задачу вначале на конечном интервале времени. Начнем с одношаговой модели. Предположим, что игроки решили выловить в начальный момент времени соответственно u_1 и u_2 (естественно $u_1 + u_2 \leq x_0$). В следующий момент времени $t = 1$ размер популяции станет равным $x_1 = (x_0 - u_1 - u_2)^\alpha$. Игра заканчивается, условимся, что игроки делят оставшееся количество рыбы пополам. Тогда, выигрыш первого игрока составит величину

$$\begin{aligned} H_1(u_1, u_2) &= \ln u_1 + \beta_1 \ln \left(\frac{1}{2} (x - u_1 - u_2)^\alpha \right) = \\ &= \ln u_1 + \alpha \beta_1 \ln (x - u_1 - u_2) - \beta_1 \ln 2, \quad x = x_0. \end{aligned}$$

Здесь множитель β_1 означает уменьшение выигрыша в силу дисконтирования. Аналогично для второго игрока выигрыш составит

$$H_2(u_1, u_2) = \ln u_2 + \alpha\beta_2 \ln(x - u_1 - u_2) - \beta_2 \ln 2, \quad x = x_0.$$

Функции $H_1(u_1, u_2)$ и $H_2(u_1, u_2)$ выпуклы, поэтому существует равновесие по Нэшу. Чтобы найти его, найдем решение системы уравнений $\partial H_1 / \partial u_1 = 0$, $\partial H_2 / \partial u_2 = 0$, или

$$\frac{1}{u_1} - \frac{\alpha\beta_1}{x - u_1 - u_2} = 0, \quad \frac{1}{u_2} - \frac{\alpha\beta_2}{x - u_1 - u_2} = 0.$$

Отсюда находим равновесие

$$u_1^1 = \frac{\alpha\beta_2}{(1 + \alpha\beta_1)(1 + \alpha\beta_2) - 1} \cdot x, \quad u_2^1 = \frac{\alpha\beta_1}{(1 + \alpha\beta_1)(1 + \alpha\beta_2) - 1} \cdot x,$$

при этом размер популяции после вылова станет равным

$$x - u_1^1 - u_2^1 = \frac{\alpha^2\beta_1\beta_2}{(1 + \alpha\beta_1)(1 + \alpha\beta_2) - 1} \cdot x$$

и выигрыши игроков в равновесии станут равными

$$H_1(u_1^1, u_2^1) = (1 + \alpha\beta_1) \ln x + a_1, \quad H_2(u_1^1, u_2^1) = (1 + \alpha\beta_2) \ln x + a_2,$$

где постоянные a_1, a_2 определяются соотношениями

$$a_i = \ln \left(\frac{\alpha\beta_j (\alpha^2\beta_1\beta_2)^{\alpha\beta_i}}{[(1 + \alpha\beta_1)(1 + \alpha\beta_2) - 1]^{1 + \alpha\beta_i}} \right) - \beta_i \ln 2, \\ i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Теперь предположим, что продолжительность игры — два периода, и игроки имеют возможность сделать вылов два раза. Оптимальное поведение и выигрыши игроков на последнем шаге мы уже знаем, правда уже с другим начальным условием. Следовательно, равновесие в двухшаговой модели сводится к задаче максимизации выигрышей игроков вида

$$H_1^2(u_1, u_2) = \ln u_1 + \alpha\beta_1(1 + \alpha\beta_1) \ln(x - u_1 - u_2) + \beta_1 a_1, \quad x = x_0,$$

$$H_2^2(u_1, u_2) = \ln u_2 + \alpha\beta_2(1 + \alpha\beta_2) \ln(x - u_1 - u_2) + \beta_2 a_2, \quad x = x_0.$$

Функции выигрыша сохранили выпуклость. Находим равновесие по Нэшу из системы уравнений

$$\frac{1}{u_1} - \frac{\alpha\beta_1(1 + \alpha\beta_1)}{x - u_1 - u_2} = 0, \quad \frac{1}{u_2} - \frac{\alpha\beta_2(1 + \alpha\beta_2)}{x - u_1 - u_2} = 0.$$

Оно опять принимает линейный вид

$$u_1^2 = \frac{\alpha\beta_2(1 + \alpha\beta_2)}{(1 + \alpha\beta_1)(1 + \alpha\beta_2) - 1} \cdot x, \quad u_2^2 = \frac{\alpha\beta_1(1 + \alpha\beta_1)}{(1 + \alpha\beta_1)(1 + \alpha\beta_2) - 1} \cdot x.$$

Продолжая эти построения дальше, приходим к выводу, что в n -шаговой игре оптимальные стратегии имеют вид

$$\begin{aligned} u_1^n &= \frac{\alpha\beta_2 \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha\beta_2)^j}{\sum_{j=0}^n (\alpha\beta_1)^j \sum_{j=1}^n (\alpha\beta_2)^j - 1} \cdot x, \\ u_2^n &= \frac{\alpha\beta_1 \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha\beta_1)^j}{\sum_{j=0}^n (\alpha\beta_1)^j \sum_{j=1}^n (\alpha\beta_2)^j - 1} \cdot x. \end{aligned} \quad (1.1)$$

При этом после данного вылова размер популяции становится равным

$$x - u_1^n - u_2^n = \frac{\alpha^2\beta_1\beta_2 \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha\beta_1)^j \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha\beta_2)^j}{\sum_{j=0}^n (\alpha\beta_1)^j \sum_{j=1}^n (\alpha\beta_2)^j - 1} \cdot x. \quad (1.2)$$

При $n \rightarrow \infty$ выражения (1.1), (1.2) имеют предел

$$\begin{aligned} u_1^* &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_1^n = \frac{\alpha\beta_2(1 - \alpha\beta_1)x}{1 - (1 - \alpha\beta_1)(1 - \alpha\beta_2)}, \\ u_2^* &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_2^n = \frac{\alpha\beta_1(1 - \alpha\beta_2)x}{1 - (1 - \alpha\beta_1)(1 - \alpha\beta_2)}. \end{aligned}$$

Соответственно

$$x - u_1^* - u_2^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x - u_1^n - u_2^n = kx,$$

где

$$k = \frac{\alpha^2\beta_1\beta_2x}{1 - (1 - \alpha\beta_1)(1 - \alpha\beta_2)}.$$

Теперь вернемся к задаче с бесконечным временным горизонтом и предположим, что на каждом шаге игроки используют стратегии u_1^*, u_2^* .

Тогда, стартуя из начального состояния x_0 , система будет развиваться по закону

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (x_t - u_1^*(x_t) - u_2^*(x_t))^\alpha = k^\alpha x_{t-1}^\alpha = k^\alpha (k x_{t-1}^\alpha)^\alpha = \\ &= k^{\alpha+\alpha^2} x_{t-1}^{\alpha^2} = \dots = k^{\sum_{j=1}^t \alpha^j} \cdot x_0^{\alpha^t}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

При больших t система будет приближаться к стационарному состоянию

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha\beta_1} + \frac{1}{\alpha\beta_2} - 1} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (1.3)$$

При $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ стационарное состояние имеет вид $\bar{x} = \left(\frac{\alpha\beta}{2-\alpha\beta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.

Представляет интерес специальный линейный случай. В этом случае динамика популяции имеет вид

$$x_{t+1} = r(x_t - u_1 - u_2), \quad r > 1.$$

Повторяя рассуждения, проделанные выше, получим оптимальные стратегии игроков в равновесии по Нэшу в многошаговой игре с конечным горизонтом

$$u_1^n = \frac{\beta_2 \sum_{j=0}^{n-1} (\beta_2)^j}{\sum_{j=0}^n (\beta_1)^j \sum_{j=1}^n (\beta_2)^j - 1} \cdot x, \quad u_2^n = \frac{\beta_1 \sum_{j=0}^{n-1} (\beta_1)^j}{\sum_{j=0}^n (\beta_1)^j \sum_{j=1}^n (\beta_2)^j - 1} \cdot x,$$

которые в пределе при $n \rightarrow \infty$ приводят к стратегиям вида

$$u_1^* = \frac{\beta_2(1-\beta_1)x}{1-(1-\beta_1)(1-\beta_2)}, \quad u_2^* = \frac{\beta_1(1-\beta_2)x}{1-(1-\beta_1)(1-\beta_2)}.$$

Так как

$$x - u_1^* - u_2^* = \frac{x}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} - 1},$$

динамика популяции при использовании игроками оптимальных стратегий примет вид

$$x_t = \frac{r}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} - 1} \cdot x_{t-1} = \left(\frac{r}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} - 1} \right)^t x_0, \quad t = 0, 1, \dots$$

Мы видим, что динамика популяции в равновесии существенно зависит от значения коэффициента $r/(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} - 1)$. Если он меньше единицы, популяция вырождается, если больше единицы — неограниченно возрастает, если он равен единице, то размер популяции поддерживается на стабильном уровне. В случае равных факторов дисконтирования $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ развитие или исчезновение популяции определяется знаком выражения $\beta(r + 1) - 2$.

10.1.2. Кооперативное равновесие в динамической игре

Вернемся к начальной модели $x_t = x_{t-1}^\alpha$ с $\alpha < 1$ и предположим, что игроки договорились осуществлять совместные действия. Будем считать, что $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Общее управление обозначим $u = u_1 + u_2$. Такие же рассуждения, как и выше, дают оптимальную стратегию в n -шаговой игре

$$u^n = \frac{1 - \alpha\beta}{1 - (\alpha\beta)^{n+1}} \cdot x,$$

с предельной стратегией $u^* = (1 - \alpha\beta)x$. Тогда динамика популяции в кооперативном равновесии имеет вид

$$x_t = (\alpha\beta x_{t-1})^\alpha = (\alpha\beta)^{\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^t} \cdot x_0^{\alpha^t}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

приближаясь при больших t к стационарному состоянию

$$\hat{x} = (\alpha\beta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (1.4)$$

Сравнивая стационарные состояния (1.3) и (1.4) в кооперативном равновесии и равновесии по Нэшу, мы видим, что

$$\hat{x} = (\alpha\beta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \geq \bar{x} = \left(\frac{\alpha\beta}{2 - \alpha\beta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

т. е. кооперативные действия дают более высокий размер популяции. Сравним выигрыши игроков в этих равновесиях. В кооперативном равновесии игроки на каждом шаге получают суммарный выигрыш

$$u_c = (1 - \alpha\beta)\hat{x} = (1 - \alpha\beta)(\alpha\beta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (1.5)$$

При некооперативной игре сумма их выигрышей составит величину (при $\beta_1 = \beta_2$)

$$u_n = u_1^* + u_2^* = \frac{2\alpha\beta(1 - \alpha\beta)}{1 - (1 - \alpha\beta)^2} \cdot \bar{x} = \frac{2(1 - \alpha\beta)}{2 - \alpha\beta} \left(\frac{\alpha\beta}{2 - \alpha\beta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (1.6)$$

Нетрудно показать, что

$$2 < (2 - \alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1,$$

и значит, $u_c > u_n$. Таким образом, кооперативное поведение не только приводит к благоприятному сценарию для популяции, но также и дает игрокам больший выигрыш, нежели они будут действовать каждый сам по себе.

Особенно эффектно это различие проявляется в линейном случае $x_{t+1} = rx_t, t = 0, 1, \dots$. В этом случае при кооперативном поведении $u = (1 - \beta)x$ динамика популяции имеет вид

$$x_t = r\beta x_{t-1} = \dots = (r\beta)^t x_0 \quad t = 0, 1, \dots$$

и ее стационарное состояние зависит от значения $r\beta$. При значении этого выражения больше единицы, популяция неограниченно возрастает, при значении меньше единицы — вырождается, а при $\beta = 1/r$ остается на постоянном уровне. В силу того, что $r\beta/(2 - \beta) \leq r\beta$, возможна такая ситуация, когда $r\beta > 1$ и $r\beta/(2 - \beta) < 1$. Это означает, что при кооперативном поведении игроков популяция будет неограниченно увеличиваться во времени, в то время как при эгоистическом поведении, когда каждый из игроков действует, руководствуясь только своими интересами, популяция вырождается.

§ 10.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ИГРОКА

10.2.1. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

Принцип оптимальности Беллмана был введен в 1960 году Ричардом Беллманом в следующей формулировке:

Оптимальное поведение обладает тем свойством, что, каковы бы ни были первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первого решения.

Рассмотрим дискретную задачу управления для одного игрока. Пусть управляемая система развивается согласно следующему закону:

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t),$$

при этом на управление наложены некоторые ограничения $u \in U$, где U — некоторая область в пространстве R^m .

Игрок хочет минимизировать следующий функционал:

$$J(u) = G(x_N) + \sum_{t=0}^{N-1} g_t(x_t, u_t),$$

где $u_t = u_t(x_t)$.

Введем функцию Беллмана

$$B_k(x_k) = \min_{u_k, \dots, u_{N-1} \in U} \sum_{i=k}^{N-1} g_i(x_i, u_i) + G(x_N).$$

Будем следовать методике Беллмана. Пусть мы находимся в точке x_{N-1} , осталось сделать один шаг — выбор u_{N-1} . Тогда выигрыш на этом шаге равен

$$\begin{aligned} J_{N-1} &= g_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + G(x_N) = \\ &= g_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + G(f_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1})). \end{aligned}$$

Получили, что функционал на последнем шаге является функцией двух переменных x_{N-1} , u_{N-1} . Минимум этого функционала по u_{N-1} есть функция Беллмана

$$\min_{u_{N-1} \in U} J_{N-1} = B_{N-1}(x_{N-1}).$$

Рассмотрим два последних шага.

$$J_{N-2} = g_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}) + g_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + G(x_N).$$

Получим

$$\begin{aligned} B_{N-2}(x_{N-2}) &= \min_{u_{N-2}, u_{N-1}} J_{N-2} = \\ &= \min_{u_{N-2}} g_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}) + \min_{u_{N-1}} \{g_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + G(x_N)\} = \\ &= \min_{u_{N-2}} g_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}) + B_{N-1}(x_{N-1}) = \\ &= \min_{u_{N-2}} \{g_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}) + B_{N-1}(f_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}))\}. \end{aligned}$$

Действуя далее аналогично, мы получим рекуррентное соотношение, называемое уравнением Беллмана:

$$\begin{aligned} B_{N-k}(x_{N-k}) &= \min_{u_{N-k} \in U} \{g_{N-k}(x_{N-k}, u_{N-k}) + \\ &+ B_{N-k+1}(f_{N-k}(x_{N-k}, u_{N-k}))\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Таким образом, для нахождения оптимального управления, будем искать B_k начиная с конца, и на любом шаге, реализуя минимум функции Беллмана, мы получим оптимальное управление на этом шаге – $u_k^*(x_k)$.

Перейдем к непрерывной постановке задачи оптимального управления

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad u \in U,$$

$$J(u) = \int_0^T g(t, x(t), u(t))dt + G(x(T)) \rightarrow \min.$$

Введем функцию Беллмана

$$V(x, t) = \min_{u(s), t \leq s \leq T} \left[\int_t^T g(s, x(s), u(s))ds + G(x(T)) \right],$$

удовлетворяющую начальному условию

$$V(x, T) = G(x(T)).$$

Используя принцип Беллмана, запишем функцию в следующем виде:

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \min_{u(s), t \leq s \leq T} \left[\int_t^{t+\Delta t} g(s, x(s), u(s))ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t+\Delta t}^T g(s, x(s), u(s))ds + G(x(T)) \right] = \\ &= \min_{u(s), t \leq s \leq t+\Delta t} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g(s, x(s), u(s))ds + \right. \\ &\quad \left. + \min_{u(s), t+\Delta t \leq s \leq T} \left[\int_{t+\Delta t}^T g(s, x(s), u(s))ds + G(x(T)) \right] \right\} = \\ &= \min_{u(s), t \leq s \leq t+\Delta t} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g(s, x(s), u(s))ds + V(x(t+\Delta t), t+\Delta t) \right\}. \end{aligned}$$

Далее предполагая, что функция $V(x, t)$ непрерывно дифференцируема, и применяя формулу Тейлора для интеграла, получим

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \min_{u(s), t \leq s \leq t+\Delta t} \{ g(t, x(t), u(t))\Delta t + V(x(t), t) + \\ &\quad + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(t, x(t), u(t))\Delta t + o(\Delta t) \}. \end{aligned}$$

Откуда при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$-\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} = \min_{u(t) \in U} \left[\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x} f(t, x(t), u(t)) + g(t, x(t), u(t)) \right] \quad (2.2)$$

с начальным условием $V(x, T) = G(x(T))$.

Теорема 10.1. Пусть существует единственное непрерывно дифференцируемое решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (2.2) $V_0(x, t)$ и существует допустимое управление $u_0(x, t)$, такое что

$$\min_{u \in U} \left[\frac{\partial V_0(x, t)}{\partial x} f(t, x, u) + g(t, x, u) \right] = \frac{\partial V_0(x, t)}{\partial x} f(t, x, u_0) + g(t, x, u_0).$$

Тогда $u_0(x, t)$ является оптимальным управлением, а соответствующая ему функция Беллмана — $V_0(x, t)$.

Доказательство. Запишем выражение для полной производной с учетом уравнения (2.2)

$$V'_0(x, t) = \frac{\partial V_0(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V_0(x, t)}{\partial x} f(t, x, u_0) = -g(t, x, u_0).$$

Подставив в это равенство $x = x_0(t)$, соответствующее управлению $u_0(t)$, получим

$$V'_0(x_0(t), t) = -g(t, x_0(t), u_0(x_0(t), t)).$$

Проинтегрировав по t от 0 до T , получим

$$V_0(x_0, 0) = V(T, x(T)) + \int_0^T g(t, x_0(t), u_0(x_0(t), t)) dt = J(u_0).$$

Пусть теперь $u(x, t)$ — любое допустимое управление, а $x(t)$ — соответствующая ему траектория процесса. Из уравнения (2.2) получим

$$V'_0(x(t), t) \geq -g(t, x(t), u(x(t), t)).$$

Проинтегрировав от 0 до T , получим

$$J(u) \geq V_0(x_0, 0),$$

а значит,

$$J(u_0) = V_0(x_0, 0) \leq J(u),$$

что и доказывает оптимальность u_0 .

Предположим, что функция $V(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема. Пусть существует единственное непрерывное решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана $V(t, x)$ и существует допустимое управление $u_0(x, t)$, удовлетворяющее условиям теоремы 10.1 с траекторией процесса $x_0(t)$.

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\psi(t) = -\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x},$$

$$H(t, x, u, \psi) = \psi(t)f(t, x, u) - g(t, x, u).$$

Используя теорему 10.1, получим

$$\begin{aligned} H(t, x_0, u_0, \psi) &= -\frac{\partial V(x_0, t)}{\partial x} f(t, x_0, u_0) - g(t, x_0, u_0) = \\ &= \max_{u \in U} \left[-\frac{\partial V(x_0, t)}{\partial x} f(t, x_0, u) - g(t, x_0, u) \right] = \max_{u \in U} H(t, x_0, u, \psi), \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = H(t, x, u_0, \psi).$$

Продифференцировав по x и положив $x = x_0$, получим

$$\frac{\partial^2 V(x_0, t)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial H(t, x_0, u_0, \psi)}{\partial x} = -\psi'(t).$$

Аналогично, дифференцируя начальные условия, получим

$$\frac{\partial V(x_0(T), T)}{\partial x} = -\psi(T) = G'_x(x_0(T)).$$

Таким образом, мы получили принцип максимума для задачи с закрепленным временем. Сформулируем принцип максимума в более общей ситуации.

10.2.2. Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим непрерывную задачу оптимального управления

$$J(u) = \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt + G(x(T)) \rightarrow \min,$$

$$x'(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x^0, \quad u \in U,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_r)$, $f(x, u) = (f_1(x, u), \dots, f_n(x, u))$.

Введем в рассмотрение функцию Гамильтона

$$H(x, u, \psi) = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x, u), \quad (2.3)$$

где $\psi = (\psi_0, \dots, \psi_n)$ — вектор сопряженных переменных.

Теорема 10.2 (принцип максимума). Пусть функции $f_i(x, u)$ и $G(x)$ имеют частные производные и непрерывны вместе с этими производными по совокупности своих аргументов при $x \in R^n$, $u \in U$, $t \in [0, T]$. Для оптимальности управления $u^*(t)$ и траектории $x^*(t)$ необходимо существование ненулевой вектор-функции $\psi(t)$, такой что:

1. выполнено условие максимума

$$H(x^*(t), u^*(t), \psi(t)) = \max_{u \in U} H(x^*(t), u, \psi(t));$$

2. сопряженные переменные удовлетворяют сопряженной системе

$$\psi'(t) = -\frac{\partial H(x^*, u^*, \psi)}{\partial x}; \quad (2.4)$$

3. выполнено условие трансверсальности на правом конце

$$\psi(T) = -G'_x(x^*(T)); \quad (2.5)$$

4. выполнено условие нормировки

$$\psi_0(t) = -1.$$

Доказательство принципа максимума в общей формулировке достаточно сложно, поэтому мы не будем приводить его здесь. Ограничимся доказательством принципа максимума для задачи с закрепленным временем T и свободным концом траектории.

Рассмотрим управляемую систему, описываемую дифференциальными уравнениями,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x(0) = x^0 \quad (2.6)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_r)$, $f(x, u) = (f_1(x, u), \dots, f_n(x, u))$.

Необходимо найти такое допустимое управление $u(t)$, которое доставляет минимум функционалу

$$Q = \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt,$$

где T фиксированная величина.

Введем дополнительную переменную $x_0(t)$, определяемую уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x, u), \quad x_0(0) = 0. \quad (2.7)$$

Тогда получим задачу

$$Q = x_0(T) \rightarrow \min. \quad (2.8)$$

Теорема 10.3. Для того чтобы допустимое управление $u(t)$ и соответствующая ему траектория $x(t)$ давали решение задачи (2.6), (2.8) необходимо существование ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, удовлетворяющей сопряженной системе (2.4), такой что:

1. $H(x^*(t), u^*(t), \psi(t)) = \max_{u \in U} H(x^*(t), u, \psi(t))$;
2. $\psi(T) = (-1, 0, \dots, 0)$.

Доказательство. Пусть $u^*(t)$ — оптимальное управление, а $x^*(t)$ — соответствующая оптимальная траектория системы. Применим метод игольчатых вариаций, который используется и для доказательства принципа максимума в общем виде. Рассмотрим бесконечно малый промежуток времени $\tau - \varepsilon < t < \tau$, $\tau \in (0, T)$, ε — бесконечно малая величина.

Дадим управлению $u^*(t)$ вариацию, заменив на этом бесконечно малом интервале его другим управлением u .

Найдем изменение траектории системы. В соответствии с (2.6) и (2.7) имеем

$$\begin{aligned} x_j(\tau) - x_j^*(\tau) &= \left[\left(\frac{dx_j}{dt} \right)_{t=\tau} - \left(\frac{dx_j^*}{dt} \right)_{t=\tau} \right] \varepsilon + o(\varepsilon) = \\ &= [f_j(x(\tau), u(\tau)) - f_j(x^*(\tau), u^*(\tau))] \varepsilon + o(\varepsilon), \quad j = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Согласно этому величина $x_j(\tau) - x_j^*(\tau)$ будет величиной того же порядка малости, что и ε . Отсюда следует, что $f_j(x(\tau), u(\tau)) - f_j(x^*(\tau), u^*(\tau))$

также будет величиной того же порядка малости, что и ε . Таким образом,

$$x_j(\tau) - x_j^*(\tau) = [f_j(x^*(\tau), u(\tau)) - f_j(x^*(\tau), u^*(\tau))]\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (2.9)$$

$$j = 0, \dots, n.$$

Введем вариации координат

$$x_j(t) = x_j^*(t) + \delta x_j(t), \quad j = 0, \dots, n.$$

Согласно (2.9) значения вариаций в момент $t = \tau$ есть

$$\delta x_j(\tau) = [f_j(x^*(\tau), u(\tau)) - f_j(x^*(\tau), u^*(\tau))]\varepsilon.$$

Подставив вариации координат $x_j(t)$ в уравнения системы (2.6) и (2.7), получим

$$\frac{dx_j^*}{dt} + \frac{d(\delta x_j)}{dt} = f_j(x^* + \delta x, u^*), \quad j = 0, \dots, n.$$

Разложив в ряд Тейлора в окрестности $x^*(t)$, получим

$$\frac{dx_j^*}{dt} + \frac{d(\delta x_j)}{dt} = f_j(x^*, u^*) + \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_j(x^*, u^*)}{\partial x_i} \delta x_i + o(\delta x_0, \dots, \delta x_n).$$

Так как $x^*(t)$ удовлетворяет уравнению (2.6) при $u^*(t)$, то, сократив, получим систему

$$\frac{d(\delta x_j)}{dt} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_j(x^*, u^*)}{\partial x_i} \delta x_i, \quad (2.10)$$

которая называется уравнениями в вариациях.

Введем сопряженные переменные $\psi = (\psi_0, \dots, \psi_n)$, такие что

$$\frac{d\psi_k}{dt} = - \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_i(x^*, u^*)}{\partial x_k} \psi_i.$$

Найдем производную по времени от $\sum_{i=0}^n \psi_i \delta x_i$, используя (2.10):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^n \psi_i \delta x_i &= \sum_{i=0}^n \frac{d\psi_i}{dt} \delta x_i + \sum_{i=0}^n \frac{d(\delta x_i)}{dt} \psi_i = \\ &= - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j(x^*, u^*)}{\partial x_i} \psi_j \delta x_i + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j(x^*, u^*)}{\partial x_i} \psi_j \delta x_i = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=0}^n \psi_i \delta x_i = \text{const}, \quad \tau \leq t \leq T. \quad (2.11)$$

Пусть δQ — приращение функционала при вариации u . Тогда согласно (2.8) и тому, что u^* доставляет минимум функционалу Q , получим

$$\delta Q = \delta x_0(T) \geq 0.$$

Введем начальные условия для сопряженных переменных

$$\psi_0(T) = -1, \quad \psi_1(T) = 0, \dots, \psi_n(T) = 0.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^n \psi_i(T) \delta x_i(T) = -\delta x_0(T) = -\delta Q \leq 0.$$

По (2.11) мы можем переписать это неравенство как

$$-\delta Q = \sum_{i=0}^n \psi_i(\tau) \delta x_i(\tau).$$

Подставим известное нам $\delta x_i(\tau)$, получим

$$\sum_{i=0}^n \psi_i(\tau) [f_j(x^*(\tau), u(\tau)) - f_j(x^*(\tau), u^*(\tau))] \varepsilon \leq 0.$$

Так как $\varepsilon > 0$ и в качестве τ можно выбрать любой момент времени t , то

$$\sum_{i=0}^n \psi_i(\tau) f_j(x^*(\tau), u(\tau)) \leq \sum_{i=0}^n \psi_i(\tau) f_j(x^*(\tau), u^*(\tau)).$$

Окончательно мы получили

$$H(x^*, u, \psi) \leq H(x^*, u^*, \psi),$$

что доказывает выполнения условий максимума.

Теперь рассмотрим дискретную задачу оптимального управления и сформулируем для нее дискретный аналог принципа максимума.

$$I(u) = \sum_{t=0}^N f^0(x_t, u_t) + G(x_N) \rightarrow \min,$$

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad x_0 = x^0, \quad u \in U, \quad (2.12)$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$, $u = (u^1, \dots, u^r)$, $f(x, u) = (f^1(x, u), \dots, f^n(x, u))$.

Введем в рассмотрение функцию Гамильтона

$$H(\psi_{t+1}, x_t, u_t) = \sum_{i=0}^n \psi_{t+1}^i f^i(x_t, u_t), \quad t = 0, \dots, N-1, \quad (2.13)$$

где $\psi = (\psi^0, \dots, \psi^n)$ — вектор сопряженных переменных.

Теорема 10.4 (принцип максимума для дискретной задачи). Для оптимальности управления u_t^* и траектории x_t^* необходимо существование набора ненулевых функций $\psi_t^1, \dots, \psi_t^n$, такого что:

1. выполнено условие максимума

$$H(\psi_{t+1}, x_t^*, u_t^*) = \max_{u_t \in U} H(\psi_{t+1}, x_t^*, u_t), \quad t = 0, \dots, N-1;$$

2. сопряженные переменные удовлетворяют сопряженной системе

$$\psi_t = -\frac{\partial H(\psi_{t+1}, x_t^*, u_t^*)}{\partial x_t}; \quad (2.14)$$

3. выполнено условие трансверсальности на правом конце

$$\psi_N = -\frac{\partial G(x_N)}{\partial x_N}; \quad (2.15)$$

4. выполнено условие нормировки

$$\psi_t^0 = -1.$$

Приведем доказательство дискретного принципа максимума для задачи оптимизации конечного состояния, т. е. функционал принимает вид

$$I = G(x_N) \rightarrow \max. \quad (2.16)$$

Как мы видели, в непрерывном случае задачу с суммарным показателем качества, т. е. с функционалом вида

$$I = \sum_{t=0}^N f^0(x_t, u_t) dt,$$

несложно привести к задаче (2.16).

Для задачи (2.16) функция Гамильтона имеет вид

$$H(\psi_{t+1}, x_t, u_t) = \sum_{i=1}^n \psi_{t+1}^i f^i(x_t, u_t), \quad t = 0, \dots, N-1.$$

Рассмотрим для каждого $u \in U$ конус допустимых вариаций

$$K(u) = \{\delta u \mid u + \varepsilon \delta u \in U\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Будем предполагать, что конус $K(u)$ выпуклый и содержит внутренние точки.

Обозначим через $\delta_u H(\psi, x, u)$ допустимый дифференциал функции Гамильтона, т. е.

$$\delta_u H(\psi, x, u) = \left(\frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial u}, \delta u \right) = \sum_{i=0}^r \frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial u^i} \delta u^i,$$

где $\delta u \in K(u)$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 10.1. Пусть $u^* = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$ — оптимальное управление для начального состояния $x_0 = x^0$ в задаче (2.16). Имеет место неравенство

$$\delta_u H(\psi_{t+1}^*, x_t^*, u_t^*) \leq 0$$

для любых $\delta u_t^* \in K(u_t^*)$, где оптимальные значения x^* находятся из системы (2.12), а оптимальные значения ψ^* — из сопряженной системы (2.14) с граничным условием (2.15).

Причем если u_t^* — внутренняя точка множества U , то $\delta H(u_t^*) = 0$ для любых допустимых вариаций в этой точке, если же $\delta H(u_t^*) < 0$, то точка u_t^* является граничной точкой множества U .

Доказательство. Фиксируем оптимальный процесс $\{u^*, x^*\}$ и рассмотрим уравнение в вариациях на этом процессе

$$\delta x_{t+1}^* = \frac{\partial f(x_t^*, u_t^*)}{\partial x_t} \delta x_t^* + \frac{\partial f(x_t^*, u_t^*)}{\partial u_t} \delta u_t^*, \quad t = 0, \dots, N-1.$$

Пусть векторы ψ_t^* определены из сопряженной системы. Рассмотрим скалярное произведение

$$(\psi_{t+1}^*, \delta x_{t+1}^*) = (\psi_t^*, \delta x_t^*) + (\psi_{t+1}^*, \frac{\partial f(x_t^*, u_t^*)}{\partial u_t} \delta u_t^*). \quad (2.17)$$

Суммируя (2.17) по $t = 0, \dots, N-1$ и учитывая равенства $\delta x^*(0) = 0$ и (2.15), получим

$$\delta G(x_N^*) = \sum_{t=0}^{N-1} \delta u H(\psi_{t+1}^*, x_t^*, u_t^*),$$

где

$$\delta G(x_N^*) = \left(\frac{\partial G(x_N^*)}{\partial x_N}, \delta x_N^* \right). \quad (2.18)$$

Так как x_N^* — оптимальное состояние, то $\delta G(x_N^*) \leq 0$ для любых $\delta u_t^* \in K(u_t^*)$, что нетрудно проверить.

Предположим, что существует вариация δx_N^* , такая что $(\frac{\partial G(x_N^*)}{\partial x_N}, \delta x_N^*) > 0$.

По определению конуса $K(x^*)$ найдется такое $\varepsilon_1 > 0$, что $x_N^* + \varepsilon \delta x_N^* \in R$ для любых $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Рассмотрим разложение

$$G(x + \varepsilon \delta x) - G(x) = \varepsilon \delta G(x) + o(\varepsilon) = \varepsilon \left(\frac{\partial G(x)}{\partial x}, \delta x \right) + o(\varepsilon) > 0,$$

которое выполняется для допустимых вариаций, обеспечивающих возрастание функции $G(x)$.

Из этого разложения и нашего предположения следует, что можно выбрать такое ε , что $G(x^* + \varepsilon \delta x^*) > G(x^*)$, что противоречит оптимальности.

Итак, мы показали $\delta G(x_N^*) \leq 0$ для любых $\delta u_t^* \in K(u_t^*)$.

Полагая $\delta u_j^* = 0$, $j \neq t$, $\delta u_t^* \neq 0$, из (2.18) получим $\delta u H(\psi_{t+1}^*, x_t^*, u_t^*) \leq 0$ для любых $\delta u_t^* \in K(u_t^*)$.

Пусть теперь при каком-то t u_t^* — внутренняя точка множества U , тогда конусом $K(u_t^*)$ является все пространство вариаций. Поэтому если $\delta u_t^* \in K(u_t^*)$, то и $-\delta u_t^* \in K(u_t^*)$. Отсюда следует, что в данном случае

$$\frac{\partial H(\psi_{t+1}^*, x_t^*, u_t^*)}{\partial u_t} = 0.$$

Если же $\delta u H(\psi_{t+1}^*, x_t^*, u_t^*) < 0$ в какой-то точке $u_t^* \in U$, то, очевидно, она не может быть внутренней точкой множества U . Лемма доказана.

Мы показали, что допустимый дифференциал функции Гамильтона на оптимальном управлении не положителен.

Таким образом, на оптимальном управлении выполнены необходимые условия максимума функции $H(u_t)$ на множестве U .

Если u_t^* — внутренняя точка множества U , то

$$\frac{\partial H(u_t^*)}{\partial u_k} = 0,$$

т. е. приходим к обычным необходимым условиям экстремума функции многих переменных.

Заметим, что если $\delta H(u_t^*) < 0$, т. е. если градиент функции Гамильтона не равен 0 и не ортогонален всем допустимым вариациям в точке u_t^* , то при некотором предположении регулярности точка u_t^* доставляет функции $H(u_t)$ локальный максимум. Это легко видеть из разложения

$$H(u_t) - H(u_t^*) = \varepsilon \delta u H(u_t^*) + o(\varepsilon).$$

§ 10.3. ПРИНЦИП МАКСИМУМА И УРАВНЕНИЕ БЕЛЛМАНА В ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ИГРАХ N ЛИЦ

Рассмотрим динамическую игру N лиц в дискретном времени. Пусть динамика описывается уравнением

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t^1, \dots, u_t^N), \quad t = 1, \dots, n,$$

x_1 задано. Функции выигрыша каждого игрока имеют вид

$$J^i(u^1, \dots, u^N) = \sum_{j=1}^n g_j^i(u_j^1, \dots, u_j^N, x_j) \rightarrow \min.$$

Теорема 10.5. Пусть f_t, g_t^i — непрерывно дифференцируемы. Тогда если (u^{1*}, \dots, u^{N*}) равновесие по Нэшу в данной игре и x_t^* — соответствующая ему траектория процесса, то существует конечный набор n -мерных векторов $\psi_2^i, \dots, \psi_{n+1}^i$ для каждого $i \in N$, такой что выполнены следующие условия:

$$x_{t+1}^* = f_t(x_t^*, u_t^{1*}, \dots, u_t^{N*}), \quad x_1^* = x_1,$$

$$u_t^{i*} = \operatorname{argmin}_{u_t^i \in U_t^i} H_t^i(\psi_{t+1}^i, u_t^{1*}, \dots, u_t^{i-1*}, u_t^i, u_t^{i+1*}, \dots, u_t^{N*}, x_t^*),$$

$$\psi_t^i = \frac{\partial f_t(x_t^*, u_t^{1*}, \dots, u_t^{N*})}{\partial x_t} \psi_{t+1}^i + \frac{\partial g_t^i(u_t^{1*}, \dots, u_t^{N*}, x_t^*)}{\partial x_t}, \quad \psi_{n+1}^i = 0,$$

где

$$H_t^i(\psi_{t+1}^i, u_t^{1*}, \dots, u_t^{N*}, x_t) = g_t^i(u_t^{1*}, \dots, u_t^{N*}, x_t) + \psi_{t+1}^i f_t(x_t, u_t^{1*}, \dots, u_t^{N*}).$$

Доказательство. Для каждого игрока i условие равновесия по Нэшу имеет вид

$$\begin{aligned} J^{i*}(u^{1*}, \dots, u^{i-1*}, u^{i*}, u^{i+1*}, \dots, u^{N*}) &\leq \\ &\leq J^i(u^{1*}, \dots, u^{i-1*}, u^i, u^{i+1*}, \dots, u^{N*}), \end{aligned}$$

а это выполняется, когда минимум J^i достигается на u^{i*} при динамике

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u^{1*}, \dots, u^{i-1*}, u^{i*}, u^{i+1*}, \dots, u^{N*}).$$

Что является задачей оптимального управления для одного игрока, и из теоремы 10.4 следует данное утверждение.

Теорема 10.6. Для бесконечной динамической игры N лиц с дискретным временем стратегии $(u_t^{i*}(x_t))$ образуют равновесие по Нэшу тогда и только тогда, когда существуют функции $V^i(t, x)$, такие что выполнены условия

$$\begin{aligned} V^i(t, x) &= \min_{u_t^i \in U_t^i} [g_t^i(\bar{u}_t^i, x) + V^i(t+1, f_t(x, \bar{u}_t^i))] = \\ &= g_t^i(u_t^{1*}(x), \dots, u_t^{N*}(x), x) + \\ &+ V^i(t+1, f_t(x, u_t^{1*}(x), \dots, u_t^{N*}(x))), \quad V^i(n+1, x) = 0, \end{aligned}$$

где $\bar{u}_t^i = (u_t^{1*}(x), \dots, u_t^{i-1*}(x), u_t^i, u_t^{i+1*}(x), \dots, u_t^{N*}(x))$.

Доказательство. Для каждого игрока i условие равновесия по Нэшу имеет вид

$$\begin{aligned} J^{i*}(u^{1*}, \dots, u^{i-1*}, u^{i*}, u^{i+1*}, \dots, u^{N*}) &\leq \\ &\leq J^i(u^{1*}, \dots, u^{i-1*}, u^i, u^{i+1*}, \dots, u^{N*}), \end{aligned}$$

а это выполняется, когда максимум J^i достигается на u^{i*} при динамике

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u^{1*}, \dots, u^{i-1*}, u^{i*}, u^{i+1*}, \dots, u^{N*}).$$

Что является задачей оптимального управления для одного игрока, и из уравнения Беллмана (2.1) следует данное утверждение.

Рассмотрим также игру двух лиц, где один из игроков является лидером. Пусть динамика описывается уравнением:

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t^1, u_t^2), \quad t = 1, \dots, n.$$

Функции выигрыша каждого игрока имеют вид

$$J^i(u^1, u^2) = \sum_{j=1}^n g_j^i(u_j^1, u_j^2, x_j) \rightarrow \min,$$

где $u^i \in U^i$ — компакт в R^m .

Теорема 10.7. Пусть f_t , g_t^i непрерывно дифференцируемы, f_t и g_t^2 дважды непрерывно дифференцируемы. А также минимум $H_t^2(\psi_{t+1}, u_t^1, u_t^2, x_t)$ по u_t^2 достигается во внутренней точке при любом $u_t^1 \in U^1$. Тогда если (u^{1*}, u^{2*}) — равновесие по Штакельбергу в данной игре (первый игрок лидер) и x_t^* — соответствующая ему траектория процесса, то существуют три конечных набора n -мерных векторов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, μ_1, \dots, μ_n , ν_1, \dots, ν_n , такие что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} x_{t+1}^* &= f_t(x_t^*, u_t^{1*}, u_t^{2*}), \quad x_1^* = x_1, \\ \nabla_{u_t^1} H_t^1(\lambda_t, \mu_2, \nu_2, \psi_{t+1}^*, u_t^{1*}, u_t^{2*}, x_t^*) &= 0, \\ \nabla_{u_t^2} H_t^1(\lambda_t, \mu_2, \nu_2, \psi_{t+1}^*, u_t^{1*}, u_t^{2*}, x_t^*) &= 0, \\ \lambda_{t-1} &= \frac{\partial H_t^1(\lambda_t, \mu_2, \nu_2, \psi_{t+1}^*, u_t^{1*}, u_t^{2*}, x_t^*)}{\partial x_t}, \quad \lambda_n = 0, \\ \mu_{t+1} &= \frac{\partial H_t^1(\lambda_t, \mu_2, \nu_2, \psi_{t+1}^*, u_t^{1*}, u_t^{2*}, x_t^*)}{\partial \psi_{t+1}}, \quad \mu_1 = 0, \\ \nabla_{u_t^2} H_t^2(\psi_{t+1}^*, u_t^{1*}, u_t^{2*}, x_t^*) &= 0, \\ \psi_t^* &= F_t(x_t^*, \psi_{t+1}^*, u_t^{1*}, u_t^{2*}), \quad \psi_{n+1} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H_t^1 &= g_t^1(u_t^1, u_t^2, x_t) + \lambda_t f_t(x_t, u_t^1, u_t^2) + \mu_t F_t(x_t, u_t^1, u_t^2, \psi_{t+1}) + \\ &\quad + \nu_t \nabla_{u_t^2} H_t^2(\psi_{t+1}, u_t^1, u_t^2, x_t), \\ F_t &= \frac{\partial f_t(x_t, u_t^1, u_t^2)}{\partial x_t} \psi_{t+1} + \frac{\partial g_t^2(u_t^1, u_t^2, x_t)}{\partial x_t}, \\ H_t^2(\psi_{t+1}, u_t^1, u_t^2, x_t) &= g_t^2(u_t^1, u_t^2, x_t) + \psi_{t+1} f_t(x_t, u_t^1, u_t^2). \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала предположим, что известно управление лидера u_1 . Тогда оптимальный ответ игрока 2 — \bar{u}_2 получается из теоремы 10.5, а именно

$$\begin{aligned}\bar{x}_{t+1} &= f_t(\bar{x}_t, u_t^1, \bar{u}_t^2), \quad \bar{x}_1 = x_1, \\ \bar{u}_t^2 &= \operatorname{argmin}_{u_t^2 \in U_t^2} H_t^2(\psi_{t+1}, u_t^1, u_t^2, \bar{x}_t), \\ \psi_t &= \frac{\partial f_t(\bar{x}_t, u_t^1, \bar{u}_t^2)}{\partial x_t} \psi_{t+1} + \frac{\partial g_t^2(u_t^1, \bar{u}_t^2, \bar{x}_t)}{\partial x_t}, \quad \psi_{n+1} = 0,\end{aligned}$$

где

$$H_t^2(\psi_{t+1}, u_t^1, u_t^2, x_t) = g_t^2(u_t^1, u_t^2, x_t) + \psi_{t+1} f_t(x_t, u_t^1, u_t^2 N),$$

а $\psi_1, \dots, \psi_{n+1}$ — последовательность n -мерных сопряженных векторов для этой задачи.

Предположительно минимум функции Гамильтона достигается во внутренней точке, поэтому условие максимума можно переписать как

$$\nabla_{u_t^2} H_t^2(\psi_{t+1}, u_t^1, \bar{u}_t^2, \bar{x}_t) = 0.$$

Теперь, чтобы получить управление лидера, нам необходимо решить следующую задачу:

$$\min_{u^1 \in U^1} J^1(u^1, u^2)$$

при условиях

$$\begin{aligned}\bar{x}_{t+1} &= f_t(\bar{x}_t, u_t^1, u_t^2), \\ \psi_t &= F_t(x_t, \psi_{t+1}, u_t^1, u_t^2), \quad \psi_{n+1} = 0, \\ \nabla_{u_t^2} H_t^2(\psi_{t+1}, u_t^1, u_t^2, x_t) &= 0,\end{aligned}$$

где

$$F_t = \frac{\partial f_t(x_t, u_t^1, u_t^2)}{\partial x_t} \psi_{t+1} + \frac{\partial g_t^2(u_t^1, u_t^2, x_t)}{\partial x_t}.$$

Применим принцип Лагранжа. Составим функцию Лагранжа для нашей задачи

$$\begin{aligned}L = \sum_t g_t^1(u_t^1, u_t^2, x_t) + \lambda_t [f_t(x_t, u_t^1, u_t^2) - x_{t+1}] + \\ + \mu_t [F_t(x_t, \psi_{t+1}, u_t^1, u_t^2) - \psi_t] + \nu \frac{\partial H_t^2(\psi_{t+1}, u_t^1, u_t^2, x_t)}{\partial u_t^2},\end{aligned}$$

где λ_t , μ_t , ν_t — соответствующие множители Лагранжа. Тогда, для того чтобы u_t^{1*} было решением задачи, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\nabla_{u_t^1} L = 0, \quad \nabla_{u_t^2} L = 0, \quad \nabla_{x_t} L = 0, \quad \nabla_{\psi_{t+1}} L = 0,$$

откуда и следуют условия теоремы.

Перейдем к рассмотрению непрерывных игр. Пусть динамика описывается уравнением

$$x'(t) = f(t, x(t), u^1(t), \dots, u^N(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = x_0, \quad u^i \in U^i.$$

Функции выигрыша каждого игрока имеют вид

$$J^i(u^1, \dots, u^N) = \int_0^T g^i(t, x(t), u^1(t), \dots, u^N(t)) dt + \\ + G^i(x(T)) \rightarrow \min.$$

Теорема 10.8. Пусть f , g^i непрерывно дифференцируемы. Тогда если $(u^{1*}(t), \dots, u^{N*}(t))$ — равновесие по Нэшу в данной игре и $x^*(t)$ — соответствующая ему траектория процесса, то существует N функций $\psi^i(\cdot) : [0, T] \in R^n$ для каждого $i \in N$, такие что выполнены следующие условия:

$$x^{*'}(t) = f(t, x^*(t), u^{1*}(t), \dots, u^{N*}(t)), \quad x^*(0) = x_0, \\ u^{i*}(t) = \operatorname{argmin}_{u^i \in U^i} H^i(t, \psi^i(t), x^*(t), u^{1*}(t), \dots, \\ \dots, u^{i-1*}(t), u^i, u^{i+1*}(t), \dots, u^{N*}(t)), \\ \psi^{i'}(t) = - \frac{\partial H^i(t, \psi^i(t), x^*, u^{1*}(t), \dots, u^{N*}(t))}{\partial x}, \\ \psi(T) = \frac{\partial G^i(x^*(T))}{\partial x},$$

где

$$H^i(t, \psi^i, x, u^1, \dots, u^N) = g^i(t, x, u^1, \dots, u^N) + \psi^i f(t, x, u^1, \dots, u^N).$$

Доказательство следует из принципа максимума для непрерывных игр (теорема 10.2).

Теорема 10.9. Для динамической игры N лиц с непрерывным временем стратегии $(u^{i*}(t, x))$ образуют равновесие по Нэшу тогда и только тогда, когда существуют функции $V^i : [0, T]R^n \in R$, такие что выполнены условия:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V^i(t, x)}{\partial t} &= \min_{u^i \in S^i} \left[\frac{\partial V^i(t, x)}{\partial x} f(t, x, u^{1*}(t, x), \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, u^{i-1*}(t, x), u^i, u^{i+1*}(t, x), \dots, u^{N*}(t, x)) + \right. \\ &\quad \left. + g^i(t, x, u^{1*}(t, x), \dots, u^{i-1*}(t, x), u^i, u^{i+1*}(t, x), \dots, u^{N*}(t, x)) \right] = \\ &= \frac{\partial V^i(t, x)}{\partial x} f(t, x, u^{1*}(t, x), \dots, u^{N*}(t, x)) + \\ &\quad + g^i(t, x, u^{1*}(t, x), \dots, u^{N*}(t, x)), \quad V^i(T, x) = G^i(x). \end{aligned}$$

Доказательство следует из уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (2.2).

Рассмотрим также игру двух лиц, где один из игроков является лидером. Пусть динамика описывается уравнением

$$x'(t) = f(t, x(t), u^1(t), u^2(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Функции выигрыша каждого игрока имеют вид

$$J^i(u^1, u^2) = \int_0^T g^i(t, x(t), u^1(t), u^2(t)) dt + G^i(x(T)) \rightarrow \min,$$

где $u^i \in U^i$ — компакт в R^m .

Теорема 10.10. Пусть f, g^2 непрерывно дифференцируемы в R^n , f, g^2, g^1, G^1, G^2 дважды непрерывно дифференцируемы в R^n , а также $H^2(t, \psi, u^1, u^2)$ непрерывно дифференцируема и строго выпукла на U^2 . Тогда если $(u^{1*}(t), u^{2*}(t))$ — равновесие по Штакельбергу в данной игре и $x^*(t)$ — соответствующая ему траектория процесса, то существуют непрерывно дифференцируемые функции $\psi(\cdot), \lambda_1(\cdot), \lambda_2(\cdot) : [0, T] \in R^n$ и непрерывная функция $\lambda_3(\cdot) : [0, T] \in R^m$, такие что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} x^{*'}(t) &= f(t, x^*(t), u^{1*}(t), u^{2*}(t)), \quad x^*(0) = x_0, \\ \psi'(t) &= -\frac{\partial H^2(t, \psi, x^*, u^{1*}, u^{2*})}{\partial x}, \quad \psi(T) = \frac{\partial G^2(x^*(T))}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda'_1(t) &= -\frac{\partial H^1(t, \psi, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x^*, u^{1*}, u^{2*})}{\partial x}, \\
\lambda_1(T) &= \frac{\partial G^1(x^*(T))}{\partial x} - \frac{\partial^2 G^2(x^*(T))}{\partial x^2} \lambda_2(T), \\
\lambda'_2(t) &= -\frac{\partial H^1(t, \psi, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x^*, u^{1*}, u^{2*})}{\partial x}, \quad \lambda_2(0) = 0, \\
\nabla_{u^1} H^1(t, \psi, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x^*, u^{1*}, u^{2*}) &= 0, \\
\nabla_{u^2} H^1(t, \psi, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x^*, u^{1*}, u^{2*}) &= \nabla_{u^2} H^2(t, \psi, x^*, u^{1*}, u^{2*}) = 0, \\
\text{где} \quad H^2(t, \psi, u^1, u^2) &= g^2(t, x, u^1, u^2) + \psi f(t, x, u^1, u^2), \\
H^1 &= g^1(t, x, u^1, u^2) + \lambda_1 f(t, x, u^1, u^2) - \lambda_2 \frac{\partial H^2}{\partial x} + \lambda_3 \nabla_{u^2} H^2.
\end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство аналогично дискретному случаю. Сначала предположим, что известно управление лидера u_1 . Тогда оптимальный ответ игрока 2 — \bar{u}_2 получается из теоремы 10.8, а именно

$$\begin{aligned}
x'(t) &= f(t, x(t), u^1(t), \bar{u}^2(t)), \quad x(0) = x_0, \\
\bar{u}^2(t) &= \operatorname{argmin}_{u^2 \in U^2} H^2(t, \psi(t), x, u^1(t), u^2(t)), \\
\psi'(t) &= -\frac{\partial H^2(t, \psi(t), x, u^1(t), \bar{u}^2(t))}{\partial x}, \quad \psi(T) = \frac{\partial G^2(x(T))}{\partial x},
\end{aligned}$$

где

$$H^2(t, \psi, x, u^1, u^2) = g^2(t, x, u^1, u^2) + \psi f(t, x, u^1, u^2),$$

а $\psi(t)$ — сопряженная переменная для этой задачи.

Предположительно минимум функции Гамильтона достигается во внутренней точке, поэтому условие максимума можно переписать как

$$\nabla_{u^2} H^2(t, \psi, x, u^1, \bar{u}^2) = 0.$$

Теперь, чтобы получить управление лидера, нам необходимо решить следующую задачу:

$$\min_{u^1 \in U^1} J^1(u^1, u^2)$$

при условиях

$$\begin{aligned}
x'(t) &= f(t, x(t), u^1(t), u^2(t)), \quad x(0) = x_0, \\
\psi'(t) &= -\frac{\partial H^2(t, \psi, x, u^1, u^2)}{\partial x}, \quad \psi(T) = \frac{\partial G^2(x(T))}{\partial x},
\end{aligned}$$

$$\nabla_{u^2} H^2(t, \psi, x, u^1, \bar{u}^2) = 0.$$

Снова воспользуемся теоремой 10.8. Составим гамильтониан для этой задачи

$$H^1 = g^1(t, x, u^1, u^2) + \lambda_1 f(t, x, u^1, u^2) - \lambda_2 \frac{\partial H^2}{\partial x} + \lambda_3 \nabla_{u^2} H^2,$$

при этом сопряженные переменные этой задачи должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \lambda'_1(t) &= -\frac{\partial H^1(t, \psi, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x^*, u^{1*}, u^{2*})}{\partial x}, \\ \lambda_1(T) &= \frac{\partial G^1(x^*(T))}{\partial x} - \frac{\partial^2 G^2(x^*(T))}{\partial x^2} \lambda_2(T), \\ \lambda'_2(t) &= -\frac{\partial H^1(t, \psi, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x^*, u^{1*}, u^{2*})}{\partial x}, \quad \lambda_2(0) = 0, \end{aligned}$$

и должны быть выполнены условия максимума во внутренних точках

$$\nabla_{u^1} H^1 = 0, \quad \nabla_{u^2} H^2 = 0,$$

что и доказывает теорему.

§ 10.4. ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА НА КОНЕЧНОМ И БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу управления биоресурсами. Пусть динамика развития популяции имеет вид

$$x'(t) = \varepsilon x(t) - u_1(t) - u_2(t), \quad (4.1)$$

где $x(t) \geq 0$ — размер популяции в период t , $u_1(t)$, $u_2(t)$ — управления первого и второго игрока соответственно.

Игроки хотят максимизировать свою прибыль на промежутке времени $[0, T]$. Используем следующие функционалы выигрышей игроков:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^T e^{-\rho t} [p_1 u_1(t) - c_1 u_1^2(t)] dt + G_1(x(T)), \\ J_2 &= \int_0^T e^{-\rho t} [p_2 u_2(t) - c_2 u_2^2(t)] dt + G_2(x(T)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где c_1, c_2 — затраты игроков на вылов, p_1, p_2 — цена единицы выловленной рыбы.

Обозначим

$$c_{i\rho} = c_i e^{-\rho t}, \quad p_{i\rho} = p_i e^{-\rho t}, \quad i = 1, 2.$$

Найдем равновесие по Нэшу в данной задаче, используя принцип максимума Понтрягина.

Составим гамильтониан для первого игрока:

$$H_1 = p_{1\rho} u_1 - c_{1\rho} u_1^2 + \lambda_1(\varepsilon x - u_1 - u_2).$$

Откуда

$$u_1(t) = \frac{p_{1\rho} - \lambda_1(t)}{2c_{1\rho}},$$

и уравнение для сопряженной переменной имеет вид

$$\lambda'_1(t) = -\frac{\partial H_1}{\partial x} = -\varepsilon \lambda_1(t), \quad \lambda_1(T) = G'_1(x(T)).$$

Решив это уравнение и вернувшись к старым переменным, получим оптимальное управление первого игрока

$$u_1^*(t) = \frac{p_1 - G'_1(x(T))e^{(\rho-\varepsilon)t}e^{\varepsilon T}}{2c_1}.$$

Аналогично для второго игрока получаем гамильтониан:

$$H_2 = p_{2\rho} u_2 - c_{2\rho} u_2^2 + \lambda_2(\varepsilon x - u_1 - u_2).$$

Откуда

$$u_2(t) = \frac{p_{2\rho} - \lambda_2(t)}{2c_{2\rho}},$$

и уравнение для сопряженной переменной имеет вид

$$\lambda'_2(t) = -\frac{\partial H_2}{\partial x} = -\varepsilon \lambda_2(t), \quad \lambda_2(T) = G'_2(x(T)).$$

Окончательно получим оптимальное управление второго игрока

$$u_2^*(t) = \frac{p_2 - G'_2(x(T))e^{(\rho-\varepsilon)t}e^{\varepsilon T}}{2c_2}.$$

Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Теорема 10.11. *Управления*

$$u_1^*(t) = \frac{p_1 - G_1'(x(T))e^{(\rho-\varepsilon)t}e^{\varepsilon T}}{2c_1},$$

$$u_2^*(t) = \frac{p_2 - G_2'(x(T))e^{(\rho-\varepsilon)t}e^{\varepsilon T}}{2c_2}$$

являются оптимальным по Нэшу решением задачи (4.1)–(4.2).

Доказательство. Хотя принцип максимума и является только необходимым условием оптимальности, но для линейно-квадратичной задачи он является и достаточным. Покажем достаточность для нашей модели.

Зафиксируем $u_2^*(t)$ и рассмотрим задачу для первого игрока. Пусть динамика, соответствующая оптимальному поведению обоих игроков — $x^*(t)$. Рассмотрим возмущение полученного решения $x^*(t) + \Delta x$, $u_1^*(t) + \Delta u_1$. Причем $x^*(t)$, $u_1^*(t)$ удовлетворяют уравнению (4.1), а Δx удовлетворяет уравнению $\Delta x' = \varepsilon \Delta x - \Delta u_1$ (так как $(x^*)' + \Delta x' = \varepsilon x^* - u_1^* - u_2^* + \varepsilon \Delta x - \Delta u_1$).

Выигрыш при оптимальном поведении равен

$$J_1^* = \int_0^T [p_1 u_1^*(t) - c_1 \rho (u_1^*(t))^2] dt + G_1(x^*(T)).$$

Возмущенный выигрыш равен

$$J_1 = \int_0^T [p_1 u_1^*(t) + p_1 \rho \Delta u_1(t) - c_1 \rho (u_1^*(t) + \Delta u_1(t))^2] dt +$$

$$+ G_1(x^*(T) + \Delta x(T)).$$

Рассмотрим разницу выигрышей

$$J_1^* - J_1 = \int_0^T c_1 \rho \Delta u_1^2 - \lambda_1(t) \Delta u_1 dt + G_1(x^*(T)) -$$

$$- G_1(x^*(T) + \Delta x(T)) = \int_0^T c_1 \rho \Delta u_1^2 dt - G_1'(x^*(T)) \Delta x(T) -$$

$$- \int_0^T \lambda_1 \Delta u_1 dt = \int_0^T c_1 \rho \Delta u_1^2 dt - G_1'(x^*(T)) \Delta x(T) -$$

$$- \int_0^T \lambda_1 (\varepsilon \Delta x - (\Delta x)') dt = \int_0^T c_1 \rho \Delta u_1^2 dt -$$

$$- G_1'(x^*(T)) \Delta x(T) + \Delta x \lambda_1|_0^T = \int_0^T c_1 \rho \Delta u_1^2 dt > 0,$$

что доказывает, что $u_1^*(t)$ является оптимальным для первого игрока.

Аналогично доказывается, что $u_2^*(t)$ оптимально для второго игрока.

Теперь рассмотрим данную задачу с бесконечным временем. Пусть динамика развития популяции имеет вид (4.1). Игроки хотят минимизировать свои затраты на бесконечном промежутке времени. Используем следующие функционалы затрат игроков:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [c_1 u_1^2(t) - p_1 u_1(t)] dt, \\ J_2 &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [c_2 u_2^2(t) - p_2 u_2(t)] dt, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где c_1, c_2 — затраты игроков на вылов, p_1, p_2 — цена единицы выловленной рыбы.

Найдем равновесие по Нэшу в данной задаче, используя принцип Беллмана.

Зафиксируем управление второго игрока и рассмотрим задачу для определения оптимального управления первого игрока. Определим функцию $V(x)$ для нашей задачи

$$V(x) = \min_{u_1} \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho t} [c_1 u_1^2(t) - p_1 u_1(t)] dt \right\}.$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана примет вид

$$\rho V(x) = \min_{u_1} \{ c_1 u_1^2 - p_1 u_1 + \frac{\partial V}{\partial x} (\varepsilon x - u_1 - u_2) \}.$$

Найдем минимум по u_1

$$u_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial x} + p_1 \right) / 2c_1.$$

Подставив в уравнение, получим

$$\rho V(x) = - \frac{(\frac{\partial V}{\partial x} + p_1)^2}{4c_1} + \frac{\partial V}{\partial x} (\varepsilon x - u_2).$$

Заметим, что квадратичная форма удовлетворяет этому уравнению. Пусть $V(x) = a_1 x^2 + b_1 x + d_1$.

Тогда управление равно

$$u_1(x) = \frac{2a_1 x + b_1 + p_1}{2c_1},$$

где коэффициенты удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \rho a_1 = 2a_1\varepsilon - \frac{a_1^2}{c_1}, \\ \rho b_1 = \varepsilon b_1 - 2a_1u_2 - \frac{a_1(p_1 + b_1)}{c_1}, \\ \rho d_1 = -b_1u_2 - \frac{(p_1 + b_1)^2}{4c_1}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Аналогично для второго игрока

$$u_2(x) = \frac{2a_2x + b_2 + p_2}{2c_2},$$

где коэффициенты удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \rho a_2 = 2a_2\varepsilon - \frac{a_2^2}{c_2}, \\ \rho b_2 = \varepsilon b_2 - 2a_2u_1 - \frac{a_2(p_2 + b_2)}{c_2}, \\ \rho d_2 = -b_2u_1 - \frac{(p_2 + b_2)^2}{4c_2}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Итак, доказана теорема.

Теорема 10.12. *Управления*

$$u_1^*(x) = \frac{2c_1c_2\varepsilon x(2\varepsilon - \rho) - c_1p_2(2\varepsilon - \rho) + \varepsilon c_2p_1}{2c_1c_2(3\varepsilon - \rho)},$$

$$u_2^*(x) = \frac{2c_1c_2\varepsilon x(2\varepsilon - \rho) - c_2p_1(2\varepsilon - \rho) + \varepsilon c_1p_2}{2c_1c_2(3\varepsilon - \rho)}$$

являются равновесием по Нэшу в задаче (4.1)–(4.3).

Доказательство. Вид управлений получается из систем (4.4) и (4.5), при этом принцип Беллмана дает нам необходимые и достаточные условия.

§ 10.5. ДИНАМИЧЕСКИЕ ИГРЫ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ БИОРЕСУРСАМИ. КОНЕЧНЫЙ ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ

Разделим акваторию водоема S на две части: S_1 и S_2 , где вылов запрещен и разрешен соответственно. Пусть x_1 и x_2 — рыбные запасы на площадях S_1 и S_2 . Между закрытой и открытой частями водоема

существует миграционный обмен рыбы с коэффициентами обмена γ_i . На S_2 две рыболовецкие артели производят промысел на протяжении T периодов времени.

Тогда динамика развития популяции с учетом вылова описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x'_1(t) = \varepsilon x_1(t) + \gamma_1(x_2(t) - x_1(t)), \\ x'_2(t) = \varepsilon x_2(t) + \gamma_2(x_1(t) - x_2(t)) - u(t) - v(t), \quad x_i(0) = x_i^0, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $x_1(t) \geq 0$ — количество рыбы на закрытой территории в период t , $x_2(t) \geq 0$ — численность рыбы в момент времени t на открытой территории, ε — коэффициент естественного роста популяции, γ_i — коэффициенты миграции, $u(t)$, $v(t)$ — управления первого и второго игроков соответственно.

Используем следующие функционалы выигрышей игроков:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^T e^{-rt} [m_1((x_1(t) - \bar{x}_1)^2 + (x_2(t) - \bar{x}_2)^2) + \\ &\quad + c_1 u^2(t) - p_1 u(t)] dt, \\ J_2 &= \int_0^T e^{-rt} [m_2((x_1(t) - \bar{x}_1)^2 + (x_2(t) - \bar{x}_2)^2) + \\ &\quad + c_2 v^2(t) - p_2 v(t)] dt, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где \bar{x}_i , $i = 1, 2$ — размер популяции, оптимальный для воспроизводства, c_1, c_2 — затраты игроков на вылов, p_1, p_2 — цена единицы выловленной рыбы.

Обозначим

$$c_{ir} = c_i e^{-rt}, \quad m_{ir} = m_i e^{-rt}, \quad p_{ir} = p_i e^{-rt}, \quad i = 1, 2.$$

Исследуем задачу (5.1)–(5.2), применяя различные принципы оптимальности.

10.5.1. Решение оптимальное по Нэшу

Для нахождения оптимальных управлений воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Составим гамильтониан для первого игрока:

$$\begin{aligned} H_1 &= m_{1r}((x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2) + c_{1r} u^2 - p_{1r} u + \\ &\quad + \lambda_{11}(\varepsilon x_1 + \gamma_1(x_2 - x_1)) + \lambda_{12}(\varepsilon x_2 + \gamma_2(x_1 - x_2) - u - v). \end{aligned}$$

Откуда

$$u(t) = \frac{\lambda_{12}(t) + p_{1r}}{2c_{1r}},$$

и уравнения для сопряженных переменных имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda'_{11}(t) &= -\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = -2m_{1r}(x_1(t) - \bar{x}_1) - \lambda_{11}(t)(\varepsilon - \gamma_1) - \lambda_{12}(t)\gamma_2, \\ \lambda'_{12}(t) &= -\frac{\partial H_1}{\partial x_2} = -2m_{1r}(x_2(t) - \bar{x}_2) - \lambda_{12}(t)(\varepsilon - \gamma_2) - \lambda_{11}(t)\gamma_1,\end{aligned}$$

с условиями трансверсальности $\lambda_{1i}(T) = 0$, $i = 1, 2$.

Аналогично для второго игрока получаем

$$\begin{aligned}H_2 &= m_{2r}((x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2) + c_{2r}v^2 - p_{2r}v + \\ &+ \lambda_{21}(\varepsilon x_1 + \gamma_1(x_2 - x_1)) + \lambda_{22}(\varepsilon x_2 + \gamma_2(x_1 - x_2) - u - v).\end{aligned}$$

Откуда

$$v(t) = \frac{\lambda_{22}(t) + p_{2r}}{2c_{2r}},$$

и уравнения для сопряженных переменных имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda'_{21}(t) &= -\frac{\partial H_2}{\partial x_1} = -2m_{2r}(x_1(t) - \bar{x}_1) - \lambda_{21}(t)(\varepsilon - \gamma_1) - \lambda_{22}(t)\gamma_2, \\ \lambda'_{22}(t) &= -\frac{\partial H_2}{\partial x_2} = -2m_{2r}(x_2(t) - \bar{x}_2) - \lambda_{22}(t)(\varepsilon - \gamma_2) - \lambda_{21}(t)\gamma_1,\end{aligned}$$

с условиями трансверсальности $\lambda_{2i}(T) = 0$, $i = 1, 2$.

Окончательно, используя новые переменные $\bar{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij}e^{rt}$, система дифференциальных уравнений для нахождения оптимальных управлений имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} x'_1(t) &= \varepsilon x_1(t) + \gamma_1(x_2(t) - x_1(t)), & x_1(0) &= x_1^0, \\ x'_2(t) &= \varepsilon x_2(t) + \gamma_2(x_1(t) - x_2(t)) - \\ &\quad - \frac{\bar{\lambda}_{12}(t) + p_1}{2c_1} - \frac{\bar{\lambda}_{22}(t) + p_2}{2c_2}, & x_2(0) &= x_2^0, \\ \bar{\lambda}'_{11}(t) &= -2m_1(x_1(t) - \bar{x}_1) - \\ &\quad - \bar{\lambda}_{11}(t)(\varepsilon - \gamma_1 - r) - \bar{\lambda}_{12}(t)\gamma_2, & \bar{\lambda}_{11}(T) &= 0, \\ \bar{\lambda}'_{12}(t) &= -2m_1(x_2(t) - \bar{x}_2) - \\ &\quad - \bar{\lambda}_{12}(t)(\varepsilon - \gamma_2 - r) - \bar{\lambda}_{11}(t)\gamma_1, & \bar{\lambda}_{12}(T) &= 0, \\ \bar{\lambda}'_{21}(t) &= -2m_2(x_1(t) - \bar{x}_1) - \\ &\quad - \bar{\lambda}_{21}(t)(\varepsilon - \gamma_1 - r) - \bar{\lambda}_{22}(t)\gamma_2, & \bar{\lambda}_{21}(T) &= 0, \\ \bar{\lambda}'_{22}(t) &= -2m_2(x_2(t) - \bar{x}_2) - \\ &\quad - \bar{\lambda}_{22}(t)(\varepsilon - \gamma_2 - r) - \bar{\lambda}_{21}(t)\gamma_1, & \bar{\lambda}_{22}(T) &= 0. \end{aligned} \right. \quad (5.3)$$

Теорема 10.13. *Управления*

$$u^*(t) = \frac{\bar{\lambda}_{12}(t) + p_1}{2c_1}, \quad v^*(t) = \frac{\bar{\lambda}_{22}(t) + p_2}{2c_2},$$

где сопряженные переменные определяются из (5.3), являются оптимальным по Нэшу решением задачи (5.1)–(5.2).

Доказательство. Докажем оптимальность такого управления. Зафиксируем $v^*(t)$ и рассмотрим задачу для первого игрока. Пусть решение системы (5.3) $\{x_1^*(t), x_2^*(t), u^*(t)\}$. Рассмотрим возмущение полученного решения $x_1^*(t) + \Delta x_1$, $x_2^*(t) + \Delta x_2$, $u^*(t) + \Delta u$. Причем $x_1^*(t)$, Δx_1 , $x_2^*(t)$ удовлетворяют системе (5.1), а Δx_2 удовлетворяет уравнению $\Delta x_2' = \varepsilon \Delta x_2 + \gamma_2(\Delta x_1 - \Delta x_2) - \Delta u$ (так как $(x_2^*)' + \Delta x_2' = \varepsilon x_2^* + \gamma_2(x_1^* - x_2^*) - u^* - v^* + \varepsilon \Delta x_2 + \gamma_2(\Delta x_1 - \Delta x_2) - \Delta u$).

Выигрыш при оптимальном поведении равен

$$J_1^* = \int_0^T [m_{1r}((x_1^*(t) - \bar{x}_1)^2 + (x_2^*(t) - \bar{x}_2)^2) + c_{1r}(u^*(t))^2 - p_{1r}u^*(t)] dt.$$

Возмущенный выигрыш равен

$$J_1 = \int_0^T [m_{1r}((x_1^*(t) + \Delta x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2^*(t) + \Delta x_2 - \bar{x}_2)^2) + c_{1r}(u^*(t) + \Delta u)^2 - p_{1r}u^*(t) - p_{1r}\Delta u] dt.$$

Рассмотрим разницу выигрышей

$$\begin{aligned} J_1 - J_1^* &= \int_0^T m_{1r}\Delta x_1^2 + m_{1r}\Delta x_2^2 + \\ &\quad + \Delta x_1(-\lambda'_{11} - \lambda_{11}(\varepsilon - \gamma_1) - \lambda_{12}\gamma_2) + \\ &\quad + c_{1r}\Delta u^2 + \Delta x_2(-\lambda'_{12} - \lambda_{12}(\varepsilon - \gamma_2) - \lambda_{11}\gamma_1) + \lambda_{12}\Delta u dt = \\ &= \int_0^T m_{1r}\Delta x_1^2 + m_{1r}\Delta x_2^2 + c_{1r}\Delta u^2 - \lambda'_{11}\Delta x_1 - \lambda'_{12}\Delta x_2 - \\ &\quad - \lambda_{11}\Delta x_1' - \lambda_{12}\Delta x_2' dt = \int_0^T m_{1r}\Delta x_1^2 + m_{1r}\Delta x_2^2 + c_{1r}\Delta u^2 dt > 0, \end{aligned}$$

что доказывает, что $u^*(t)$ является оптимальным для первого игрока.

Аналогично доказывается, что $v^*(t)$ оптимально для второго игрока.

10.5.2. Решение оптимальное по Штакельбергу

Для нахождения оптимальных управлений воспользуемся принципом максимума Понтрягина, модифицированным для двухшаговых игр. Составим гамильтониан для второго игрока:

$$H_2 = m_{2r}((x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2) + c_{2r}v^2 - p_{2r}v + \lambda_{21}(\varepsilon x_1 + \gamma_1(x_2 - x_1)) + \lambda_{22}(\varepsilon x_2 + \gamma_2(x_1 - x_2) - u - v).$$

Откуда

$$v(t) = \frac{\lambda_{22}(t) + p_{2r}}{2c_{2r}},$$

и уравнения для сопряженных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda'_{21}(t) &= -\frac{\partial H_2}{\partial x_1} = -2m_{2r}(x_1(t) - \bar{x}_1) - \lambda_{21}(t)(\varepsilon - \gamma_1) - \lambda_{22}(t)\gamma_2, \\ \lambda'_{22}(t) &= -\frac{\partial H_2}{\partial x_2} = -2m_{2r}(x_2(t) - \bar{x}_2) - \lambda_{22}(t)(\varepsilon - \gamma_2) - \lambda_{21}(t)\gamma_1, \end{aligned}$$

с условиями трансверсальности $\lambda_{2i}(T) = 0$, $i = 1, 2$.

Подставляя найденное управление для второго игрока, получим систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{aligned} x'_1(t) &= \varepsilon x_1(t) + \gamma_1(x_2(t) - x_1(t)), & x_1(0) &= x_1^0, \\ x'_2(t) &= \varepsilon x_2(t) + \gamma_2(x_1(t) - x_2(t)) - \\ &\quad - u(t) - \frac{\lambda_{22}(t) + p_{2r}}{2c_{2r}}, & x_2(0) &= x_2^0, \end{aligned} \\ \begin{aligned} \lambda'_{21}(t) &= -2m_{2r}(x_1(t) - \bar{x}_1) - \\ &\quad - \lambda_{21}(t)(\varepsilon - \gamma_1) - \lambda_{22}(t)\gamma_2, & \lambda_{21}(T) &= 0, \\ \lambda'_{22}(t) &= -2m_{2r}(x_2(t) - \bar{x}_2) - \\ &\quad - \lambda_{22}(t)(\varepsilon - \gamma_2) - \lambda_{21}(t)\gamma_1, & \lambda_{22}(T) &= 0. \end{aligned} \end{array} \right.$$

Снова применим принцип максимума Понтрягина для нахождения управления первого игрока.

$$\begin{aligned} H_1 &= m_{1r}((x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2) + \\ &\quad + c_{1r}u^2 - p_{1r}u + \lambda_{11}(\varepsilon x_1 + \gamma_1(x_2 - x_1)) + \\ &\quad + \lambda_{12}(\varepsilon x_2 + \gamma_2(x_1 - x_2) - u - \frac{\lambda_{22} + p_{2r}}{2c_{2r}}) + \\ &\quad + \mu_1(-2m_{2r}(x_1 - \bar{x}_1) - \lambda_{21}(\varepsilon - \gamma_1) - \lambda_{22}\gamma_2) + \\ &\quad + \mu_2(-2m_{2r}(x_2 - \bar{x}_2) - \lambda_{22}(\varepsilon - \gamma_2) - \lambda_{21}\gamma_1). \end{aligned}$$

Откуда

$$u(t) = \frac{\lambda_{12}(t) + p_{1r}}{2c_{1r}},$$

и уравнения для сопряженных переменных имеют вид

$$\begin{cases} \lambda'_{11}(t) = -2m_{1r}(x_1(t) - \bar{x}_1) - \lambda_{11}(t)(\varepsilon - \gamma_1) - \lambda_{12}(t)\gamma_2 + 2m_{2r}\mu_1(t), \\ \lambda'_{12}(t) = -2m_{1r}(x_2(t) - \bar{x}_2) - \lambda_{12}(t)(\varepsilon - \gamma_2) - \lambda_{11}(t)\gamma_1 + 2m_{2r}\mu_2(t), \\ \mu'_1(t) = -\frac{\partial H_1}{\partial \lambda_{21}} = \mu_1(t)(\varepsilon - \gamma_1) + \mu_2(t)\gamma_1, \\ \mu'_2(t) = -\frac{\partial H_1}{\partial \lambda_{22}} = \frac{\lambda_{12}(t)}{2c_{2r}} + \mu_2(t)(\varepsilon - \gamma_2) + \mu_1(t)\gamma_2, \end{cases}$$

с условиями трансверсальности $\lambda_{2i}(T) = 0$, $\mu_i(0) = 0$.

Окончательно, используя новые переменные $\bar{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij}e^{rt}$, система дифференциальных уравнений для нахождения оптимальных управлений имеет вид

$$\begin{cases} x'_1(t) = \varepsilon x_1(t) + \gamma_1(x_2(t) - x_1(t)), \\ x'_2(t) = \varepsilon x_2(t) + \gamma_2(x_1(t) - x_2(t)) - u - \frac{\bar{\lambda}_{22}(t) + p_2}{2c_2}, \\ \bar{\lambda}'_{11}(t) = -2m_1(x_1(t) - \bar{x}_1) - \\ \quad - \bar{\lambda}_{11}(t)(\varepsilon - \gamma_1 - r) - \bar{\lambda}_{12}(t)\gamma_2 + 2m_2\mu_1(t), \\ \bar{\lambda}'_{12}(t) = -2m_1(x_2(t) - \bar{x}_2) - \bar{\lambda}_{12}(t)(\varepsilon - \gamma_2 - r) - \\ \quad - \bar{\lambda}_{11}(t)\gamma_1 + 2m_2\mu_2(t), \\ \bar{\lambda}'_{21}(t) = -2m_2(x_1(t) - \bar{x}_1) - \\ \quad - \bar{\lambda}_{21}(t)(\varepsilon - \gamma_1 - r) - \bar{\lambda}_{22}(t)\gamma_2, \\ \bar{\lambda}'_{22}(t) = -2m_2(x_2(t) - \bar{x}_2) - \\ \quad - \bar{\lambda}_{22}(t)(\varepsilon - \gamma_2 - r) - \bar{\lambda}_{21}(t)\gamma_1, \\ \mu'_1(t) = \mu_1(t)(\varepsilon - \gamma_1) + \mu_2(t)\gamma_1, \\ \mu'_2(t) = \frac{\bar{\lambda}_{12}(t)}{2c_2} + \mu_2(t)(\varepsilon - \gamma_2) + \mu_1(t)\gamma_2, \\ \bar{\lambda}_{i1}(T) = \bar{\lambda}_{i2}(T) = 0, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \mu_i(0) = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 10.14. Для того чтобы управления

$$u^*(t) = \frac{\bar{\lambda}_{12}(t) + p_1}{2c_1}, \quad v^*(t) = \frac{\bar{\lambda}_{22}(t) + p_2}{2c_2}$$

являлись оптимальным по Штакельбергу решением задачи (5.1)–(5.2), необходимо, чтобы сопряженные переменные определялись из (5.4).

§ 10.6. ДИНАМИЧЕСКИЕ ИГРЫ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ БИОРЕСУРСАМИ. БЕСКОНЕЧНЫЙ ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ

Динамика развития популяции с учетом вылова, как и ранее, описывается уравнениями

$$\begin{cases} x'_1(t) = \varepsilon x_1(t) + \gamma_1(x_2(t) - x_1(t)), \\ x'_2(t) = \varepsilon x_2(t) + \gamma_2(x_1(t) - x_2(t)) - u(t) - v(t), \quad x_i(0) = x_i^0, \end{cases} \quad (6.1)$$

где параметры определены в предыдущем разделе.

Используем следующие функционалы выигрышей игроков:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\infty e^{-rt} [m_1((x_1(t) - \bar{x}_1)^2 + (x_2(t) - \bar{x}_2)^2) + \\ &\quad + c_1 u^2(t) - p_1 u(t)] dt, \\ J_2 &= \int_0^\infty e^{-rt} [m_2((x_1(t) - \bar{x}_1)^2 + (x_2(t) - \bar{x}_2)^2) + \\ &\quad + c_2 v^2(t) - p_2 v(t)] dt, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где \bar{x}_i , $i = 1, 2$ — размер популяции, оптимальный для воспроизводства, c_1, c_2 — затраты игроков на вылов, p_1, p_2 — цена единицы выловленной рыбы.

Исследуем задачу (6.1)–(6.2), применяя различные принципы оптимальности.

10.6.1. Решение оптимальное по Нэшу

Зафиксируем управление для второго игрока и рассмотрим задачу для определения оптимального управления первого. Определим функцию $V(x)$ для нашей задачи

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) = \min_u \{ &\int_0^\infty e^{-rt} [m_1((x_1(t) - \bar{x}_1)^2 + \\ &+ (x_2(t) - \bar{x}_2)^2) + c_1 u^2(t) - p_1 u(t)] dt \}. \end{aligned}$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана примет вид

$$rV(x_1, x_2) = \min_u \{m_1((x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2) + c_1 u^2 - p_1 u + \\ + \frac{\partial V}{\partial x_1}(\varepsilon x_1 + \gamma_1(x_2 - x_1)) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(\varepsilon x_2 + \gamma_2(x_1 - x_2) - u - v)\}.$$

Найдем минимум по u :

$$u = \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} + p_1 \right) / 2c_1.$$

Подставив в уравнение, получим

$$rV(x_1, x_2) = m_1((x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2) - \frac{(\frac{\partial V}{\partial x_2} + p_1)^2}{4c_1} + \\ + \frac{\partial V}{\partial x_1}(\varepsilon x_1 + \gamma_1(x_2 - x_1)) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(\varepsilon x_2 + \gamma_2(x_1 - x_2) - v).$$

Заметим, что квадратичная форма удовлетворяет этому уравнению.

Пусть $V(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + k x_1 x_2 + l$. Тогда управление равно

$$u(x) = \frac{2a_2 x_2 + b_2 + k x_1 + p_1}{2c_1},$$

где коэффициенты удовлетворяют системе

$$\left\{ \begin{array}{l} r a_1 = m_1 - \frac{k^2}{4c_1} + 2a_1(\varepsilon - \gamma_1) + k\gamma_2, \\ r b_1 = -2m_1 \bar{x}_1 - \frac{k b_2}{2c_1} - \frac{k p_1}{2c_1} + b_1(\varepsilon - \gamma_1) + b_2 \gamma_2 - k v, \\ r a_2 = m_1 - \frac{a_2^2}{c_1} + 2a_2(\varepsilon - \gamma_2) + k\gamma_1, \\ r b_2 = -2m_1 \bar{x}_2 - \frac{a_2 b_2}{c_1} - \frac{a_2 p_1}{c_1} + b_2(\varepsilon - \gamma_2) + b_1 \gamma_1 - 2a_2 v, \\ r k = -\frac{a_2 k}{c_1} + k(\varepsilon - \gamma_1) + 2a_1 \gamma_1 + 2a_2 \gamma_2 + k(\varepsilon - \gamma_2), \\ r l = m_1 \bar{x}_1^2 + m_1 \bar{x}_2^2 - \frac{b_2^2}{4c_1} - \frac{b_2 p_1}{2c_1} - \frac{p_1^2}{4c_1} - b_2 v. \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Аналогично для второго игрока

$$v(x) = \frac{2a_2 x_2 + \beta_2 + k_2 x_1 + p_2}{2c_2},$$

где коэффициенты удовлетворяют системе

$$\left\{ \begin{array}{l} r\alpha_1 = m_2 - \frac{k_2^2}{4c_1} + 2\alpha_1(\varepsilon - \gamma_1) + k_2\gamma_2, \\ r\beta_1 = -2m_2\bar{x}_1 - \frac{k_2\beta_2}{2c_1} - \frac{k_2p_1}{2c_1} + \beta_1(\varepsilon - \gamma_1) + \beta_2\gamma_2 - k_2u, \\ r\alpha_2 = m_2 - \frac{\alpha_2^2}{c_1} + 2\alpha_2(\varepsilon - \gamma_2) + k_2\gamma_1, \\ r\beta_2 = -2m_2\bar{x}_2 - \frac{\alpha_2\beta_2}{c_1} - \frac{\alpha_2p_1}{c_1} + \beta_2(\varepsilon - \gamma_2) + \beta_1\gamma_1 - 2\alpha_2u, \\ rk_2 = -\frac{\alpha_2k_2}{c_1} + k_2(\varepsilon - \gamma_1) + 2\alpha_1\gamma_1 + 2\alpha_2\gamma_2 + k_2(\varepsilon - \gamma_2), \\ rl_2 = m_2\bar{x}_1^2 + m_2\bar{x}_2^2 - \frac{\beta_2^2}{4c_1} - \frac{\beta_2p_1}{2c_1} - \frac{p_1^2}{4c_1} - \beta_2u. \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Итак, доказана теорема.

Теорема 10.15. Управления

$$u^*(x) = \frac{2a_2x_2 + b_2 + kx_1 + p_1}{2c_1}, \quad v^*(x) = \frac{2\alpha_2x_2 + \beta_2 + k_2x_1 + p_2}{2c_2},$$

где коэффициенты определяются из (6.3) и (6.4), являются оптимальным по Нэшу решением задачи (6.1)–(6.2).

10.6.2. Решение оптимальное по Штакельбергу

Пользуясь уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана, для второго игрока получим

$$v(x) = \frac{2\alpha_2x_2 + \beta_2 + k_2x_1 + p_2 + \sigma u}{2c_2},$$

где коэффициенты удовлетворяют системе (6.4).

Определим функцию $V(x)$ для задачи нахождения управления первого игрока

$$V(x_1, x_2) = \min_u \left\{ \int_0^\infty e^{-rt} [m_1((x_1(t) - \bar{x}_1)^2 + (x_2(t) - \bar{x}_2)^2) + c_1u^2(t) - p_1u(t)] dt \right\}.$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана примет вид

$$\begin{aligned} rV(x_1, x_2) = \min_u \{ & m_1((x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2) + c_1u^2 - \\ & - p_1u + \frac{\partial V}{\partial x_1}(\varepsilon x_1 + \gamma_1(x_2 - x_1)) + \\ & + \frac{\partial V}{\partial x_2}(\varepsilon x_2 + \gamma_2(x_1 - x_2) - u - \frac{2\alpha_2x_2 + \beta_2 + k_2x_1 + p_2 + \sigma u}{2c_2}) \}. \end{aligned}$$

Найдем минимум по u :

$$u = \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} (2c_2 + \sigma) + 2p_1 c_2 \right) / 4c_1 c_2.$$

Подставив в уравнение, получим

$$\begin{aligned} rV(x_1, x_2) = & m_1((x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2) + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} \right)^2 \frac{(2c_2 + \sigma)^2}{8c_1 c_2^2} + \frac{p_1^2}{2c_1} + \\ & + \frac{\partial V}{\partial x_1} (\varepsilon x_1 + \gamma_1 (x_2 - x_1)) + \frac{\partial V}{\partial x_2} \left(x_1 \left(\gamma_2 - \frac{k_2}{2c_2} \right) + \right. \\ & \left. + x_2 \left(\varepsilon - \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{c_2} \right) + \frac{2c_2 + \sigma}{2c_1 c_2} - \frac{\beta_2 + p_2}{2c_2} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что квадратичная форма удовлетворяет этому уравнению.

Пусть $V(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + g x_1 x_2 + l$.

Тогда управление равно

$$u(x) = ((2a_2 x_2 + b_2 + g x_1)(2c_2 + \sigma) + 2p_1 c_2) / 4c_1 c_2,$$

где коэффициенты удовлетворяют системе

$$\left\{ \begin{aligned} ra_1 &= m_1 + g^2 \frac{(2c_2 + \sigma)^2}{8c_1 c_2^2} + 2a_1(\varepsilon - \gamma_1) + g\left(\gamma_2 - \frac{k_2}{2c_2}\right), \\ rb_1 &= -2m_1 \bar{x}_1 + 2b_2 g \frac{(2c_2 + \sigma)^2}{8c_1 c_2^2} + \\ &+ g \frac{(2c_2 + \sigma)}{2c_1 c_2} b_1(\varepsilon - \gamma_1) + b_2\left(\gamma_2 - \frac{k_2}{2c_2}\right) - \frac{g(\beta_2 + p_2)}{2c_2}, \\ ra_2 &= m_1 + a_2 \frac{(2c_2 + \sigma)^2}{2c_1 c_2^2} + g\gamma_1 + 2a_2\left(\varepsilon - \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{c_2}\right), \\ rb_2 &= -2m_1 \bar{x}_2 + a_2 b_2 \frac{(2c_2 + \sigma)^2}{2c_1 c_2^2} + \\ &+ a_2 \frac{(2c_2 + \sigma)}{c_1 c_2} + b_2\left(\varepsilon - \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{c_2}\right) + b_1 \gamma_1 - a_2 \frac{\beta_2 + p_2}{c_2}, \\ rg &= a_2 g \frac{(2c_2 + \sigma)^2}{2c_1 c_2^2} + g(\varepsilon - \gamma_1) + \\ &+ 2a_1 \gamma_1 + 2a_2\left(\gamma_2 - \frac{k_2}{2c_2}\right) + g\left(\varepsilon - \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{c_2}\right), \\ rl &= m_1 \bar{x}_1^2 + m_1 \bar{x}_2^2 + b_2^2 \frac{(2c_2 + \sigma)^2}{8c_1 c_2^2} + b_2 \frac{(2c_2 + \sigma)}{2c_1 c_2} + \\ &+ \frac{p_1^2}{2c_1} - \frac{b_2(\beta_2 + p_2)}{2c_2}. \end{aligned} \right. \quad (6.5)$$

Итак, доказана теорема.

Теорема 10.16. *Управления*

$$\begin{aligned} u^*(x) &= \frac{(2a_2x_2 + b_2 + gx_1)(2c_2 + \sigma) + 2p_1c_2}{4c_1c_2}, \\ v^*(x) &= \frac{\sigma(2a_2x_2 + b_2 + gx_1)(2c_2 + \sigma)}{8c_1c_2^2} + \\ &+ \frac{2c_1(2\alpha_2x_2 + \beta_2 + k_2x_1) + (\sigma p_1 + 2c_1p_2)}{8c_1c_2}, \end{aligned}$$

где коэффициенты определяются из (6.4) и (6.5), являются оптимальным по Штакельбергу решением задачи (6.1)–(6.2).

Приведем примеры моделирования для следующих параметров:

$$\begin{aligned} q = 0.2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 2q, \quad \varepsilon = 0.08, \quad m_1 = m_2 = 0.09, \\ c_1 = c_2 = 10, \quad p_1 = 100, \quad p_2 = 100, \quad T = 200, \quad r = 0.1. \end{aligned}$$

Пусть размеры популяций, оптимальных для воспроизводства, равны $\bar{x}_1 = 100$ и $\bar{x}_2 = 100$. Начальные размеры популяций равны $x_1(0) = 50$ и $x_2(0) = 50$.

Для случая равновесия по Нэшу на рис. 10.1 представлен график развития популяции на территории, где вылов не ведется (S_1), а на рис. 10.2 — на открытой для лова территории (S_2). На рис. 10.3 можно увидеть управление игрока (у обоих игроков одинаково).

Сравним полученные прибыли, а точнее затраты, обоих игроков при применении разных принципов равновесия.

В случае равновесия по Нэшу оба игрока находятся в одинаковых условиях, следовательно, их управления и выигрыши равны (в примере $J_1 = J_2 = 93.99514185$).

В случае равновесия по Штакельбергу первый игрок является лидером и, как показал пример, это равновесие выгоднее для первого ($J_1 = -62.73035267$), но хуже для второго ($J_2 = 659.9387578$). Такое равновесие даже дает первому игроку прибыль, в то время как второй игрок несет все затраты по поддержанию приемлемого размера популяции.

Для случая равновесия по Штакельбергу и при тех же параметрах на рис. 10.4 представлен график развития популяции на территории S_1 , а на рис. 10.5 — на территории S_2 . На рис. 10.6 можно увидеть управление первого игрока, а на рис. 10.7 — второго.

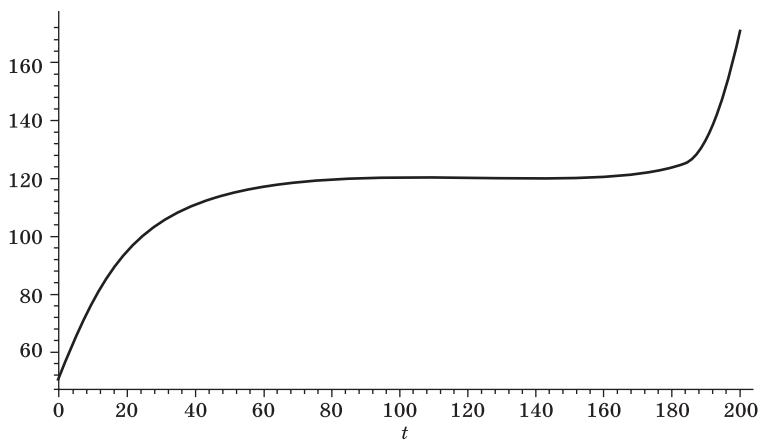


Рис. 10.1
Значения $x_1^*(t)$

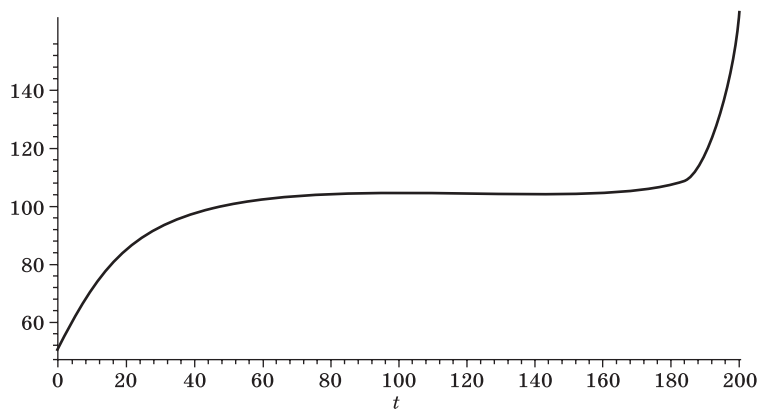


Рис. 10.2
Значения $x_2^*(t)$

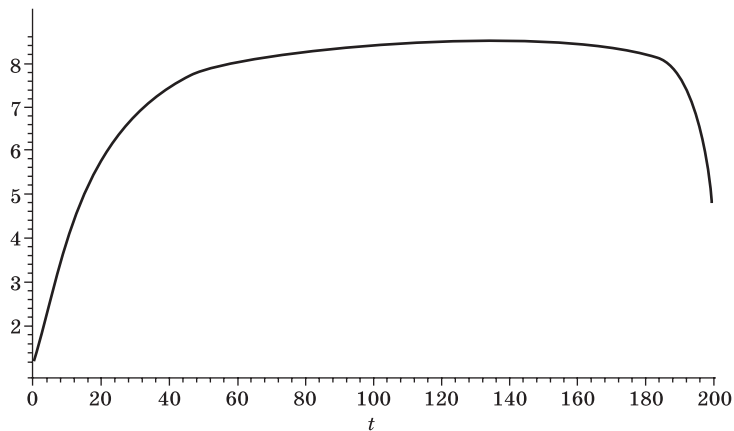


Рис. 10.3
Значения $u^*(t)$

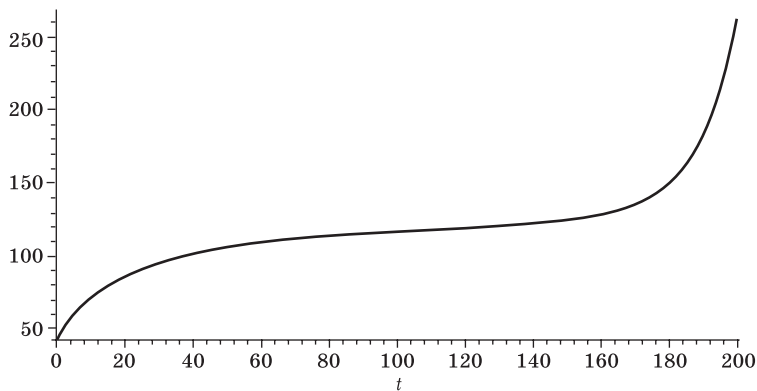


Рис. 10.4
Значения $x_1^*(t)$

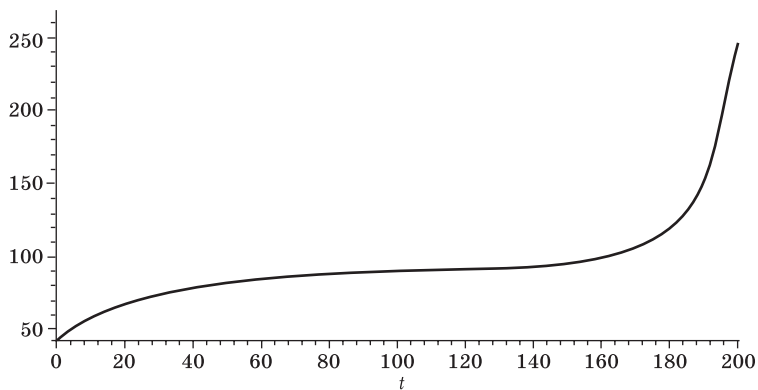


Рис. 10.5
Значения $x_2^*(t)$

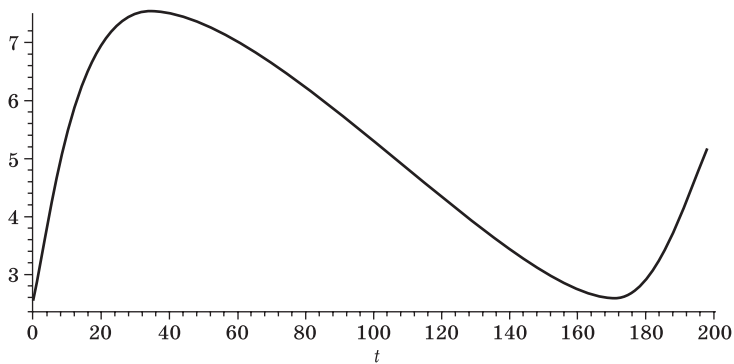


Рис. 10.6
Значения $u^*(t)$

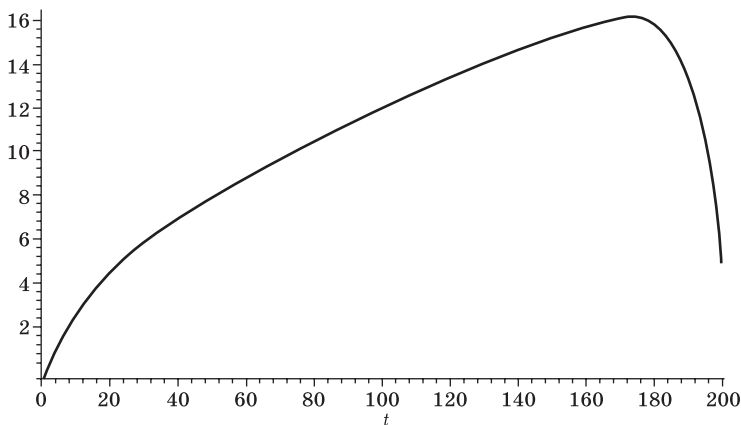


Рис. 10.7
Значения $v^*(t)$

Задачи и упражнения

1. Противоборство корабля и самолета.

В каждый момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$ корабль K может перемещаться по целочисленной решетке вправо или влево на единицу. Бомбардировщик B , имеющий только одну бомбу, имеет точную информацию о местоположении корабля, а корабль не имеет информации. Бомбардировщик желает сбросить бомбу на корабль, он может сделать это в момент перемещения корабля. Существует запаздывание в две единицы в момент сброса бомбы. Найти оптимальные стратегии в данной игре.

2. Игра двух лиц описывается уравнением

$$x'(t) = u_1(t) + u_2(t), \quad x(0) = 0, \quad u_1, u_2 \in [0, 1].$$

Функционалы выигрышей игроков имеют вид

$$J_i(u_1, u_2) = x(1) - \int_0^1 u_i^2(t) dt, \quad i = 1, 2.$$

Найти равновесие по Нэшу и Штакельбергу, предполагая, что первый игрок является лидером.

3. Две фирмы эксплуатируют один природный ресурс с интенсивностями $u_1(t)$, $u_2(t)$. Динамика развития ресурса описывается уравнением

$$x'(t) = rx(t)(1 - x(t)/K) - u_1(t) - u_2(t), \quad x(0) = x_0.$$

Функционалы выигрышей игроков имеют вид

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T c_i u_i(t) - u_i^2(t) dt, \quad i = 1, 2.$$

Найти равновесие по Нэшу в данной игре.

4. Найти равновесие по Нэшу в задаче 3 при условии, что игроки используют ресурс на бесконечном промежутке времени.
5. Найти кооперативное равновесие в задаче 3 при условии, что игроки максимизируют взвешенную сумму своих выигрышей, т. е.

$$\mu_1 J_1(u_1, u_2) + \mu_2 J_2(u_1, u_2), \quad \mu_i > 0, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1.$$

6. Рассматривается динамическая игра двух лиц, описываемая уравнением

$$x'(t) = \varepsilon + u_1(t) + u_2(t), \quad x(0) = x_0.$$

Функционалы выигрышей игроков имеют вид

$$J_1(u_1, u_2) = a_1 x^2(T) - \int_0^T [b_1 u_1^2(t) - c_1 u_2^2(t)] dt,$$

$$J_2(u_1, u_2) = a_2 x^2(T) - \int_0^T [b_2 u_1^2(t) - c_2 u_2^2(t)] dt.$$

Найти равновесие по Нэшу в данной игре.

7. Найти равновесие по Штакельбергу в задаче 6 при условии, что первый игрок является лидером.
8. Найти равновесия по Нэшу и Штакельбергу в задаче 6 при условии, что игра длится бесконечное время.
9. Записать в общем виде систему для нахождения оптимальных по Нэшу стратегий в линейно-квадратичной задаче.
10. Найти вид оптимальных по Штакельбергу стратегий в линейно-квадратичной задаче.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

а) учебники

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967.
2. Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики. — М.: МаксПресс, 2005.
3. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов кибернетиков. — М.: Наука, 1985.
4. Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г. Введение в прикладную теорию игр. — М.: Наука, 1981.
5. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1964.
6. Мулен Э. Теория игр. С примерами из математической экономики. — М.: Мир, 1985.
7. Оуэн Г. Теория игр. — М.: Мир, 1971.
8. Партхасаратхи Т., Рагхаван Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. — М.: Наука, 1974.
9. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр. — М.: Высшая школа, 1998.
10. Basar T., Olsder G. J. Dynamic noncooperative game theory. — New York: Academic Press, 1982.
11. Gibbons R. A. Primer in Game Theory. — Prentice Hall, 1992.
12. Roughgarden T. Selfish Routing and the Price of Anarchy. — MIT Press, 2005.

б) сборники задач

13. *Благодатский А. И., Петров Н. Н.* Сборник задач и упражнений по теории игр. — Ижевск, 2006.
14. *Вильямс Д. Д.* Совершенный стратег, или Букварь по теории стратегических игр. — М.: Советское радио, 1960.
15. *Коваленко А. А.* Сборник задач по теории игр. — Львов: Вища школа, 1974.
16. *Морозов В. В., Сухарев А. Г., Федоров В. В.* Исследование операций в задачах и упражнениях. — М.: Высшая школа, 1986.

Дополнительная

1. *Algaba E., Bilbao J. M., Fernandez Garcia J. R., Lopez J. J.* Computing power indices in weighted multiple majority games // *Math. Social Sciences* **46**. — no. 1. 2003. — P. 63–80.
2. *Altman E., Shimkin N.* Individually optimal dynamic routing in a processor sharing system // *Operation Research*. 1998. — P. 776–784.
3. *d'Aspremont C., Gabszewicz and Thisse J. F.* On Hotelling's stability in competition // *Econometrica* **47**. 1979. — P. 1245–1150.
4. *Awerbuch B., Azar Y., Epstein A.* The price of routing unsplittable flow // *Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2005)*. — P. 331–337.
5. *Banzaf J. F. III* Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis // *Rutgers Law Review* **19**. 1965. — P. 317–343.
6. *Bester H., De Palma A., Leininger W., Thomas J. and Von Tadden E. L.* A non-cooperative analysis of Hotelling's location game // *Games and Economics Behavior* **12**. 1996. — P. 165–186.
7. *Braess D.* Über ein Paradoxon der Verkehrsplanung // *Unternehmensforschung* **12**. 1968. — P. 258–268.
8. *Brams S. F., Affuso P. J.* Power and size: A new paradox // *Theory and Decisions* **7**. 1976. — P. 29–56.

9. *Chatterjee K.* Comparison of arbitration procedures: Models with complete and incomplete information // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics **smc-11**, no. **2**. 1981. — P. 101–109.
10. *Christodoulou G., Koutsoupias E.* The price of anarchy of finite congestion games // Proc. of 37th annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2005). — P. 67–73.
11. *Christodoulou G., Koutsoupias E.* On the price of anarchy and stability of correlated equilibria of linear congestion games // Lecture Notes in Comp. Sci. **3669**. 2005. — P. 59–70.
12. *Clark C. W.* Bioeconomic modelling and fisheries management. Wiley, N. Y., 1985.
13. *Cournot A. A.* Recherches sur les pricipes mathematic de la theorie des riches. P., 1838.
14. *Cowan R.* The allocation of offensive and defensive resources in a territorial game // Journal of Appl. Probab. **29**. 1992. — P. 190–195.
15. *Dresner Z.* Competitive location strategies for two facilities // Regional Science and Urban Economics **12**. 1982. — P. 485–493.
16. *Epstein R. A.* The theory of gambling and statistical logic. N. Y.: Academic Press, 1977.
17. *Farber H.* An analysis of final-offer arbitration // Journal of conflict resolution **35**. 1980. — P. 683–705.
18. *Feldmann R., Gairing M., Lucking T., Monien B., Rode M.* Selfish routing in non-cooperative networks: a survey // Proc. of the 28th International Symp. on Math. Foundation of Computer Sci., Lecture Notes in Computer Sci. **2747**. 2003. — P. 21–45.
19. *Ferguson C., Ferguson T., Gawargy C.* Uniform (0,1) two-person poker models // Game Theory and Appl. **12**. 2007. — P. 17–38.
20. *Fudenberg D., Tirole J.* Game Theory. Cambridge: MIT Press, 1996.
21. *Gairing M., Monien B., Tiemann K.* Routing (un-) splittable flow in games with player-specific linear latency functions // Proc. of the 33rd International Colloquium on Automata Languages and Programming (ICALP 2006). P. 501–512.

22. *Hakimi S. L.* On locating new facilities in a competitive environment // *European Journal of Operational Research* **12**. 1983. — P. 29–35.
23. *Harsanyi J. C., Selten R. A.* General Theory of Equilibrium Selection in Games. Cambridge: MIT Press, 1989.
24. *Hoede C., Bakker R. R.* A theory of decisional power // *Journal of Mathematical Sociology* **8**. 1982. — P. 309–322.
25. *Hotelling H.* Stability in competition // *Economic Journal* **39**. 1929. — P. 41–57.
26. *Kats A.* Location-price equilibria in a spatial model of discriminatory pricing // *Economic Letters* **25**. 1987. — P. 105–109.
27. *Kilgour D. M.* Game-theoretic properties of final-offer arbitration // *Group Decision and Negot.* **3**. 1994. — P. 285–301.
28. *Korillis Y. A., Lazar A. A., Orda A.* Avoiding the Braess's paradox for traffic networks // *J. Appl. Probability* **36**. 1999. — P. 211–222.
29. *Lemke C. E., Howson J. J.* Equilibrium points of bimatrix games // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **47**. 1961. — P. 1657–1662.
30. *Lin H., Roughgarden T., Tardos E.* On Braess's paradox // *Proceedings of the 15th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA04)*. 2004. — P. 333–334.
31. *Lucas W. F.* Measuring Power in Weighted Voting Systems // *Political and Related Models* / Ed. by S. J. Brams, W. F. Lucas, Straffin: Springer, 1975. — P. 183–238.
32. *Mavronicolas M., Spirakis P.* The price of selfish routing // *Proceedings of the 33th Annual ACM STOC*. 2001. — P. 510–519.
33. *Mazalov V. V.* Game-theoretic model of preference // *Game theory and applications* **1**. N. Y.: Nova Science Publ., 1996. — P. 129 – 137.
34. *Mazalov V. V., Mentcher A. E., Tokareva J. S.* On a discrete arbitration procedure in three points // *Game Theory and Applications* **11**. 2005. N. Y.: Nova Science Publishers. — P. 87–91.
35. *Mazalov V. V., Panova S. V., Piskuric M.* Two-person bilateral many-rounds poker // *Math. Methods of Operations Research* **50**. — no. **1**. 1999.

36. Mazalov V. V., Rettieva A. N. A fishery game model with migration: reserved territory approach // *Game Theory and Appl.* **10**. 2004. — P. 97–108.
37. Mazalov V. V., Sakaguchi M. Location game on the plane // *International Game Theory Review* **5**. 2003. — no. 1. — P. 13–25.
38. Mazalov V. V., Sakaguchi M., Zabelin A. A. Multistage arbitration game with random offers // *Game Theory and Applications* **8**. 2002. — N. Y.: Nova Science Publishers. — P. 95–106.
39. Mazalov V. V., Zabelin A. A. Equilibrium in an arbitration procedure // *Advances in Dynamic Games* **7**. 2004. — Birkhauser — P. 151–162.
40. Milchtaich I. Congestion games with player-specific payoff functions // *Games and Economic Behavior* **13**. 1996. — P. 111–124.
41. Monderer D., Shapley L. Potential games // *Games and Economic Behavior* **14**. 1996. — P. 124–143.
42. Nash J. The bargaining problem // *Econometrica* **18**. — no. 2. 1950. — P. 155–162.
43. Osborne M. J., Rubinstein A. A course in game theory. N. Y.: MIT Press Academic Press, 1977.
44. Papadimitriou C. H., Koutsoupias E. Worst-Case Equilibria // *Lecture Notes in Comp. Sci.* **1563**. 1999. — P. 404–413.
45. Papadimitriou C. H. Algorithms, games, and the Internet // *Proceedings of the 33th Annual ACM STOC*. 2001. — P. 749–753.
46. Roughgarden T., Tardos E. How Bad is Selfish Routing? // *JACM*. 2002.
47. Rosenthal R. W. A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria // *Int. Journal of Game Theory* **2**. 1973. — P. 65–67.
48. Sakaguchi M. A time-sequential game related to an arbitration procedure // *Math. Japonica* **29**. — no. 3. 1984. — P. 491–502.
49. Sakaguchi M. Solutions to a class of two-person Hi-Lo poker // *Math. Japonica* **30**. 1985. — P. 471–483.

50. *Sakaguchi M.* Pure strategy equilibrium in a location game with discriminatory pricing // *Game Theory and Applications* **6**. 2001. — P. 132–140.
51. *Sakaguchi M., Mazalov V. V.* Two-person Hi-Lo poker–stud and draw, I // *Math. Japonica* **44**. — no. **1**. 1996. — P. 39–53.
52. *Sakaguchi M., Sakai S.* Solutions to a class of two-person Hi-Lo poker // *Math. Japonica* **27**. — no. **6**. 1982. — P. 701–714.
53. *Sakaguchi M., Szajowski K.* Competitive prediction of a random variable // *Math. Japonica* **34**. — no. **3**. 1996. — P. 461–472.
54. *Schmeidler D.* The nucleolus of a characteristic function game // *SIAM Journal Appl. Math.* **17**. — no. **6**. 1959. — P. 1163–1170.
55. *Shapley L. S., Shubik M.* A method for evaluation the distribution of power in a Committee System // *American Political Sci. Review* **48**. 1954. — P. 787–792.
56. *Zhang Y., Teraoka Y.* A location game of spatial competition // *Math. Japonica* **48**. 1998. — P. 187–190.
57. *Walras L.* Elements d'economie politique pure. Lausanne, 1874.
58. *Wardrop J. G.* Some theoretical aspects of road traffic research // *Proceedings of the Inst. Civil Engineers*. 1952. — P. 325–378.
59. *Yeung D. W. K., Petrosjan L. A.* Cooperative Stochastic Differential Games. Springer, 2006.
60. *Беллман Р.* Некоторые вопросы математической теории процессов управления. / Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. — М.: Ин. литература, 1962.
61. Бесконечные антагонистические игры: сб. статей / под ред. Н. Н. Воробьева. — М.: Физматгиз, 1963.
62. *Бондарева О. Н.* О теоретико-игровых моделях в экономике. — Л.: ЛГУ, 1974.
63. *Васин А. А.* Модели процессов с несколькими участниками. — М.,: Изд-во МГУ, 1983.
64. *Васин А. А.* Модели динамики коллективного поведения. — М., Изд-во МГУ, 1989.

65. *Гермейер Ю. Б.* Игры с противоположными интересами. — М.: Наука, 1976.
66. *Давыдов Э. Г.* Исследование операций. — М.: Высшая школа, 1990.
67. *Дрешер М.* Стратегические игры. Теория и приложения. — М.: Сов. радио, 1964.
68. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. — М.: Наука, 1985.
69. *Кукушкин Н. С.* Теория неантагонистических игр / Н. С. Кукушкин, В. В. Морозов. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
70. *Кун Г. У.* Позиционные игры и проблема информации // Позиционные игры. — М.: Наука, 1967. — С. 13–40.
71. *Мазалов В. В.* Моменты остановки и управляемые случайные блуждания / В. В. Мазалов, С. В. Винниченко. Н.: Наука, 1992.
72. *Мазалов В. В., Реттиева А. Н.* Методы динамических игр в задаче определения оптимальной заповедной зоны // Обоз. прикл. и пром. мат. **12 (3)**. 2005.— С. 610–625.
73. *Мазалов В. В., Реттиева А. Н.* Равновесие по Нэшу в задачах охраны окружающей среды // Матем. моделир. **18 (5)**. 2006. — С. 73–90.
74. *Мак-Кинси Док.* Введение в теорию игр. — М.: Физматгиз, 1960.
75. Матричные игры: сб. статей / под ред. Н. Н. Воробьева. М.: Физматгиз, 1961.
76. *Нейманн Дж. фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейманн, О. Моргенштерн. М.: Наука, 1970.
77. *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
78. *Петросян Л. А.* Игры поиска / Л. А. Петросян, А. Ю. Гарнаев. СПб: СПбГУ, 1992.
79. *Петросян Л. А.* Игры в развернутой форме: Оптимальность и устойчивость / Л. А. Петросян, Д. В. Кузютин. СПб: СПбГУ, 2000.

80. Позиционные игры : сб. статей / под ред. Н. Н. Воробьева. — М. : Наука, 1967.
81. *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко. 3-е изд. — М. : Наука, 1976.
82. *Сайон М., Вулф Ф.* Об игре не обладающей значением // Позиционные игры. — М. : Наука, 1967. — С. 290–299.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

τ -ядро 309

n -ядро 312

А

Аксиома

аддитивности 324

индивидуальной рациональности
199

линейности 200

независимости от посторонних
альтернатив 199

реализуемости 199

свойство болванов 324

симметрии 200, 324

эффективности 324

Арбитраж

по последнему предложению 61

с наказанием 65

согласительный 64

Арбитражная процедура 60

Арбитражное решение Нэша 198

Аукцион

по второму предложению (Ви-
кри) 106

по первому предложению 104

В

Ведомый в дуополии Штакельберга 16

Вектор

Банцафа 328

Дигана–Пакела 334

Хеде–Баккера 337

Холера 334

Шепли 321

Шепли–Шубика 328

заполнения 99

минимальных прав 308

Выигрывающая коалиция 327

Выигрыш

интегральный 386

терминальный 386

Д

Дележ 300

утопический 307

Дерево игры 125

Доминирование дележей 301

Дополняющая нежесткость 23

Дуополия

Бертрана 10

Курно 8

Хотеллинга 12

Штакельберга 16

Дузэли 111

З

Задача

линейно-квадратичная 411

о зарплате 61

управления биоресурсами 411,
415

Затраты системы 342

квадратичные 342

линейные 342

максимальные 342

Значение игры 46

верхнее 44

нижнее 44

Золотое сечение 242

И

Игра

2×2 25

$2 \times n$ и $m \times 2$ 28

n лиц 86
антагонистическая 43
банкротство 314
бескоалиционная 86
биматричная 20
в 0-1 редуцированной форме 300
в нормальной форме 7
в развернутой форме 125
в стратегической форме 7
выбор дороги 29
выпуклая 17, 56
выпукло-вогнутая 54
голосования 327
 взвешенного 328
двадцать одно 184
джаз-оркестр 298, 302, 310, 338
дилемма заключенного 20, 27
динамическая 386
заполнения 97
 персонифицированная 99
заторы на дорогах 92
камень-ножницы-бумага 21
кооперативная 297
линейно-выпуклая 54
матричная 47
на истощение 108
наилучшего взаимного выбора 287
наилучшего выбора 262
оборона города 55
перекресток 41
покер 144
полиматричная 88
полковника Блотто 50
потенциальная 92
предсказания 115
преферанс 165
рынок перчаток 298, 303
с неполной информацией 132, 145
с нулевой суммой 43
с оптимальной остановкой 239
с полной информацией 125

с полной памятью 137
с постоянной суммой 44
семейный спор 20, 27
сетевая 341
составление расписания 298, 304
строительство дороги 299, 313, 322, 338
фуражирование животных 93
футбол 187
ястреб-голубь 21

Игроки 7
Интервал времени
 бесконечный 421
 конечный 415
Информационное множество 132

К

КР-модель 340
Ключевой игрок 328
Коалиция 297

Л

Лексикографический
 минимум 311
 порядок 311
Лидер в дуополии Штакельберга 16

М

Максимальная огибающая 28
Максимин 44
Метод обратной индукции 128, 240
Минимакс 44
Минимальная выигрывающая коалиция 334
Множество
 личных позиций 125
 позиций 125
Модель
 Вардропа 368
 Пигу 371
Момент остановки 239

Н

Наилучший ответ 9

Начальное состояние игры 125

О

Олигополия 87, 95

Оптимальная маршрутизация 341

Оптимальное управление 392

Оптимальность по Парето 199

П

Парадокс Браесса 343, 372

Партия в игре 126

Переговорное множество 199

Переговоры

последовательные 202

с голосованием 222, 226

с лотереей 212

со случайными предложениями
206

Переключение 328

Поддереву игры 127

Подыгра 127

Порог голосования 328

Последовательность

наилучших ответов 9

улучшений 100

Потенциал 92

Правило большинства 221

Принцип максимума Понтрягина 397
для дискретной задачи 401

Профиль стратегий 86

Процедура последовательных улучше-
ний 9

Р

Равновесие

абсолютное 127

в игре 126

в подыгре 126

индифферентное 130

кооперативное 391

по Вардропу 369

по Нэшу 7, 43, 86, 342, 369, 387
наихудшее 344

по Штакельбергу 16

полностью смешанное 342

Раздел пирога 196

Ранговый критерий 273

Рандомизация 22

С

С-ядро 301

Свойство

индивидуальной рациональности
300

коллективной разумности 300

конечности

улучшений (FIP) 100

последовательности наилуч-
ших ответов (FBRP) 102

Сеть параллельных каналов 341

Сила влияния 328

Ситуация равновесия 8

вполне смешанная 25

Сопряженная система 397

Сопряженные переменные 397

Спектр стратегии 22, 253

Стратегия

оптимальная 8, 87

поведения 137, 144, 222

пороговая 241, 243

смешанная 22, 47

уравняющая 24

чистая 20

Т

Тип игрока 130

Точка статус-кво 199

Трафик

неделимый 341

разделяемый 368

Труэли 111

У

Уравнение Гамильтона–Якоби–Белл-
мана 395

Условие трансверсальности 397

Ф

Финальные вершины 125

Функция

Беллмана 393

Гамильтона 397

производящая 328

простейшая 326

супераддитивная 297

характеристическая 297

Функция задержки

линейная 376

персонифицированная 378

Ц

Цена анархии 343, 355, 359, 360

смешанная 362

чистая 358

Э

Эквивалентность кооперативных игр
299

Эксцесс 310

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i>	3
<i>Введение</i>	4
<i>Глава 1. Игры двух лиц в стратегической форме</i>	7
§ 1.1. Дуополия Курно	8
§ 1.2. Процедура последовательных улучшений	9
§ 1.3. Дуополия Бертрана	10
§ 1.4. Дуополия Хотеллинга	12
§ 1.5. Дуополия Хотеллинга на плоскости	13
§ 1.6. Дуополия Штакельберга	16
§ 1.7. Выпуклые игры	17
§ 1.8. Биматричные игры. Примеры	20
§ 1.9. Рандомизация	22
§ 1.10. Игры 2×2	25
§ 1.11. Игры $2 \times n$ и $2 \times m$	28
§ 1.12. Задача о размещении	31
1.12.1. Дуополия Хотеллинга на плоскости с неравно- мерным распределением покупателей	32
1.12.2. Задача о равновесном расположении фирм на плоскости	36
1.12.3. Еще одна задача о расположении фирм	38
<i>Глава 2. Игры с нулевой суммой</i>	43
§ 2.1. Минимакс и максимин	44
§ 2.2. Рандомизация	47
§ 2.3. Игры с разрывной функцией выигрыша	50
§ 2.4. Выпукло-вогнутые и линейно-выпуклые игры	54
§ 2.5. Выпуклые игры	56
§ 2.6. Арбитражные процедуры	60
§ 2.7. Дискретные арбитражные процедуры в двух точках	68
§ 2.8. Дискретные арбитражные процедуры в трех точках с ин- тервальным ограничением	73
§ 2.9. Дискретные арбитражные процедуры. Общий случай	77
<i>Глава 3. Бескоалиционные игры n лиц в стратегической форме</i>	86
§ 3.1. Выпуклые игры. Олигополия Курно	87
§ 3.2. Полиматричные игры	88
§ 3.3. Потенциальные игры	92
§ 3.4. Игры заполнения	97
§ 3.5. Персонифицированные игры заполнения	99

§ 3.6. Аукционы	104
§ 3.7. Игра на истощение	108
§ 3.8. Дуэли, труэли и другие соревнования на меткость	111
§ 3.9. Игра предсказания	115
<i>Глава 4. Игры n лиц в развернутой форме</i>	<i>125</i>
§ 4.1. Равновесие в играх с полной информацией	126
§ 4.2. Индифферентное равновесие	130
§ 4.3. Игры с неполной информацией	132
§ 4.4. Игры с полной памятью	137
<i>Глава 5. Салонные и спортивные игры</i>	<i>144</i>
§ 5.1. Покер. Теоретико-игровая модель	145
5.1.1. Оптимальные стратегии	146
5.1.2. Особенности оптимального поведения в покере	149
§ 5.2. Модель покера с переменной ставкой	152
5.2.1. Модель покера с двумя ставками	153
5.2.2. Модель покера с n ставками	156
5.2.3. Асимптотические свойства стратегий в модели покера с переменной ставкой	162
§ 5.3. Преферанс. Теоретико-игровая модель	165
5.3.1. Стратегии и функция выигрыша	166
5.3.2. Равновесие в случае $\frac{B-A}{B+C} \leq \frac{3A-B}{2(A+C)}$	169
5.3.3. Равновесие в случае $\frac{3A-B}{2(A+C)} < \frac{B-A}{B+C}$	171
5.3.4. Особенности оптимального поведения в преферансе	173
§ 5.4. Модель преферанса с розыгрышем карт	173
5.4.1. Модель преферанса с одновременными ходами	174
5.4.2. Модель преферанса, где игроки ходят по очереди	177
§ 5.5. Двадцать одно. Теоретико-игровая модель	184
5.5.1. Стратегии и функция выигрыша	185
§ 5.6. Футбол. Теоретико-игровая модель распределения ресурсов	187
<i>Глава 6. Модели переговоров</i>	<i>196</i>
§ 6.1. Раздел пирога	196
§ 6.2. Арбитражное решение Нэша	198
§ 6.3. Последовательные переговоры	202
§ 6.4. Переговоры со случайными предложениями	206
§ 6.5. Продолжительность переговоров	209
§ 6.6. Переговоры со случайными предложениями и лотереей	212
§ 6.7. Переговоры в задаче о зарплате	216
§ 6.8. Переговоры трех лиц. Правило большинства	221
§ 6.9. Голосование в переговорах n лиц	226
§ 6.10. Оптимальные стратегии в переговорах при большом числе игроков	231

<i>Глава 7. Игры с оптимальной остановкой</i>	239
§ 7.1. Игра с оптимальной остановкой для двух наблюдений . . .	241
§ 7.2. Игра с оптимальной остановкой для независимых наблюдений	243
§ 7.3. Игра $\Gamma_N(G)$ для $N \geq 3$	247
§ 7.4. Игра с оптимальной остановкой на случайных блужданиях	252
7.4.1. Свойства спектров стратегий	255
7.4.2. Построение равновесия	257
§ 7.5. Игры наилучшего выбора	262
§ 7.6. Игра наилучшего выбора, где нужно остановиться раньше противника	267
§ 7.7. Игра наилучшего выбора с ранговым критерием. Лотерея	273
§ 7.8. Игра наилучшего выбора с ранговым критерием. Голосование	280
7.8.1. Решение для случая трех игроков	281
7.8.2. Решение задачи для m игроков	285
§ 7.9. Игра наилучшего взаимного выбора	287
7.9.1. Двухшаговая модель взаимного выбора	288
7.9.2. Многошаговая модель взаимного выбора	289
<i>Глава 8. Кооперативные игры</i>	297
§ 8.1. Эквивалентность кооперативных игр	297
§ 8.2. Дележи и С-ядро	300
§ 8.3. Сбалансированные игры	305
§ 8.4. τ -решение кооперативной игры	307
§ 8.5. n -ядро	310
§ 8.6. Игра «банкротство»	314
§ 8.7. Вектор Шепли	321
§ 8.8. Игры голосования. Индекс Шепли–Шубика и индекс Банцафа	327
§ 8.9. Влияние игроков друг на друга. Индекс Хеде–Баккера . . .	336
<i>Глава 9. Сетевые игры</i>	340
§ 9.1. КР-модель оптимальной маршрутизации с неделимым трафиком. Цена анархии	341
§ 9.2. Равновесие в чистых стратегиях. Парадокс Браесса	343
§ 9.3. Полностью смешанное равновесие в задаче с различными пользователями и одинаковыми каналами	346
§ 9.4. Полностью смешанное равновесие в задаче с одинаковыми пользователями и различными каналами	347
§ 9.5. Полностью смешанное равновесие в общем случае	350
§ 9.6. Цена анархии в модели с параллельными каналами и неделимым трафиком	353
§ 9.7. Цена анархии в модели с линейными затратами системы и неделимым трафиком для произвольной сети	357

§ 9.8. Смешанная цена анархии в модели с линейными затратами системы и неделимым трафиком для произвольной сети	362
§ 9.9. Цена анархии в модели с максимальными затратами системы и неделимым трафиком для произвольной сети . . .	366
§ 9.10. Модель Вардропы оптимальной маршрутизации с разделяемым трафиком	368
§ 9.11. Модель с параллельными каналами. Модель Пигу. Парадокс Браесса	371
§ 9.12. Потенциал в модели с разделяемым трафиком для произвольной сети	373
§ 9.13. Затраты системы в модели с разделяемым трафиком для выпуклых функций задержки	375
§ 9.14. Цена анархии в модели с разделяемым трафиком для линейных функций задержки	376
§ 9.15. Потенциал в модели Вардропы с параллельными каналами для персонифицированных линейных функций задержки	378
§ 9.16. Цена анархии в произвольной сети для персонифицированных линейных функций задержки	382
<i>Глава 10. Динамические игры</i>	386
§ 10.1. Динамические игры с дискретным временем	387
10.1.1. Равновесие по Нэшу в динамической игре	387
10.1.2. Кооперативное равновесие в динамической игре . . .	391
§ 10.2. Методы решения задач оптимального управления для одного игрока	392
10.2.1. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана	392
10.2.2. Принцип максимума Понтрягина	396
§ 10.3. Принцип максимума и уравнение Беллмана в дискретных и непрерывных играх N лиц	404
§ 10.4. Линейно-квадратичная задача на конечном и бесконечном интервале времени	411
§ 10.5. Динамические игры в задачах управления биоресурсами. Конечный интервал времени	415
10.5.1. Решение оптимальное по Нэшу	416
10.5.2. Решение оптимальное по Штакельбергу	419
§ 10.6. Динамические игры в задачах управления биоресурсами. Бесконечный интервал времени	421
10.6.1. Решение оптимальное по Нэшу	421
10.6.2. Решение оптимальное по Штакельбергу	423
<i>Литература</i>	431
<i>Предметный указатель</i>	439

Владимир Викторович МАЗАЛОВ
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ПРИЛОЖЕНИЯ**
Учебное пособие
Издание третье, стереотипное

Зав. редакцией естественнонаучной
литературы *М. В. Рудкевич*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб
Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 17.10.16.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 60×90 ¹/₁₆.
Печать офсетная. Усл. п. л. 28,00. Тираж 100 экз.

Заказ № 307-16.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ПАО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.