

目 录

第九章 数项级数	1
§1 数项级数的收敛性	1
§2 上极限与下极限	3
§3 正项级数	6
§4 任意项级数	13
§5 无穷乘积	21
第十章 函数项级数	27
§1 函数项级数的一致收敛性	27
§2 一致收敛级数的判别与性质	34
§3 幂级数	44
§4 函数的幂级数展开	54
§5 用多项式逼近连续函数	61
第十一章 Euclid 空间上的极限和连续	64
§1 Euclid 空间上的基本定理	64
§2 多元连续函数	67
§3 连续函数的性质	75
第十二章 多元函数的微分学	81
§1 偏导数与全微分	81
§2 多元复合函数的求导法则	92
§3 中值定理和 Taylor 公式	101
§4 隐函数	104
§5 偏导数在几何中的应用	116
§6 无条件极值	121
§7 条件极值问题与 Lagrange 乘数法	134
第十三章 重积分	146
§1 有界闭区域上的重积分	146
§2 重积分的性质与计算	148
§3 重积分的变量代换	158
§4 反常重积分	169

II | 目 录

§ 5 微分形式	173
第十四章 曲线积分、曲面积分与场论	176
§ 1 第一类曲线积分与第一类曲面积分	176
§ 2 第二类曲线积分与第二类曲面积分	186
§ 3 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式	193
§ 4 微分形式的外微分	208
§ 5 场论初步	209
第十五章 含参变量积分	220
§ 1 含参变量的常义积分	220
§ 2 含参变量的反常积分	228
§ 3 Euler 积分	237
第十六章 Fourier 级数	245
§ 1 函数的 Fourier 级数展开	245
§ 2 Fourier 级数的收敛判别法	254
§ 3 Fourier 级数的性质	260
§ 4 Fourier 变换和 Fourier 积分	264
§ 5 快速 Fourier 变换	266

第九章 数项级数

§ 1

数项级数的收敛性

1. 讨论下列级数的敛散性。收敛的话, 试求出级数之和。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right);$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1} + 4^{n+1}}{3^{2n}};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}); \quad (8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n};$$

$$(9) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\theta (|q| < 1).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \quad S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right), \end{aligned}$$

所以

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{4}.$$

(2) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3} \neq 0$, 所以级数发散。

$$\begin{aligned} (3) \quad S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right), \end{aligned}$$

所以

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

$$(4) \quad S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^k} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \frac{1}{3}}, \text{ 所以}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

(5) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \neq 0$, 所以级数发散。

$$(6) S_n = \sum_{k=1}^n \frac{5^{k-1} + 4^{k+1}}{3^{2k}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n}{1 - \frac{5}{9}} + \frac{16}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}}, \text{ 所以}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3 \frac{9}{20}.$$

$$(7) S_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{2} + 1, \text{ 所以}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\sqrt{2} + 1.$$

$$(8) \text{ 设 } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{3^k}, \text{ 则 } 3S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{3^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{3^k}, \text{ 两式相减, 得到}$$

$$2S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3^k} - \frac{2n-1}{3^n} = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{2n-1}{3^n},$$

所以

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

$$(9) \sum_{k=0}^n q^k e^{ik\theta} = \frac{1 - (qe^{i\theta})^{n+1}}{1 - qe^{i\theta}}, \text{ 由 } |q| < 1, \text{ 得到}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{in\theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k e^{ik\theta} = \frac{1}{1 - qe^{i\theta}}.$$

利用 Euler 公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, 对上式两边取实部, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\theta = \frac{1 - q \cos \theta}{1 - 2q \cos \theta + q^2}.$$

2. 确定 x 的范围, 使下列级数收敛:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x)^n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} e^{nx};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x).$$

解 (1) 由 $-1 < \frac{1}{1-x} < 1$ 解得 $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ 。

(2) 由 $e^x < 1$ 解得 $x \in (-\infty, 0)$ 。

(3) 当 $x = 1$ 时, 显然级数收敛; 当 $x \neq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x) = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} x^n$, 收敛范围是 $x \in (-1, 1)$; 所以当 $x \in (-1, 1]$ 时, 级数收敛。

3. 求八进制无限循环小数 $(36.073\ 607\ 360\ 7\cdots)_8$ 的值。

解 $(36.073\ 607\ 360\ 7\cdots)_8$

$$= 3 \times 8 + 6 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[7 \left(\frac{1}{8} \right)^{4n+2} + 3 \left(\frac{1}{8} \right)^{4n+3} + 6 \left(\frac{1}{8} \right)^{4n+4} \right] = 30 \frac{478}{4095}.$$

4. 设 $x_n = \int_0^1 x^2 (1-x)^n dx$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的和。

$$\text{解 } x_n = \int_0^1 x^2 (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^2 dx = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3},$$

于是

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{6}.$$

5. 设抛物线 $l_n: y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 和 $l'_n: y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$ 的交点的横坐标的绝对值为 a_n ($n = 1, 2, \dots$)。

(1) 求抛物线 l_n 与 l'_n 所围成的平面图形的面积 S_n ;

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{a_n}$ 的和。

解 (1) 容易求出抛物线 $l_n: y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 和 $l'_n: y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$ 的交点的横坐标的绝对值为 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, 于是

$$S_n = 2 \int_0^{a_n} \left[\left(nx^2 + \frac{1}{n} \right) - \left((n+1)x^2 + \frac{1}{n+1} \right) \right] dx = \frac{4}{3} a_n^3;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{a_n} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{4}{3}.$$

§ 2 上极限与下极限

1. 求下列数列的上极限与下极限:

$$(1) x_n = \frac{n}{2n+1} \cos \frac{2n\pi}{5}; \quad (2) x_n = n + (-1)^n \frac{n^2+1}{n};$$

$$(3) x_n = -n[(-1)^n + 2]; \quad (4) x_n = \sqrt[n+1]{n+1} + \sin \frac{n\pi}{3};$$

$$(5) x_n = 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

解 (1) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{5}$ 。

(2) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 。

(3) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ 。

(4) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(5) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 5$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -5$ 。

2. 证明:

(1) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$; (2) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = \begin{cases} c \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, & c > 0, \\ c \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, & c < 0. \end{cases}$

证 仅对 $\{x_n\}$ 是有界数列给出证明。

(1) 设 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \eta$, 则对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $x_n > \eta - \epsilon$ 对一切 $n > N$ 成立, 且 $\{x_n\}$ 中有无穷多项, 满足 $x_n < \eta + \epsilon$; 于是 $-x_n < -\eta + \epsilon$ 对一切 $n > N$ 成立, 且 $\{-x_n\}$ 中有无穷多项, 满足 $-x_n > -\eta - \epsilon$; 于是

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\eta = -\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

(2) 设 $c > 0$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, 则对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $x_n < \xi + \frac{\epsilon}{c}$ 对一切 $n > N$ 成立, 且 $\{x_n\}$ 中有无穷多项, 满足 $x_n > \xi - \frac{\epsilon}{c}$; 于是 $cx_n < c\xi + \epsilon$ 对一切 $n > N$ 成立, 且 $\{cx_n\}$ 中有无穷多项, 满足 $cx_n > c\xi - \epsilon$; 所以

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c\xi = c \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

设 $c < 0$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \eta$, 则对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $x_n > \eta + \frac{\epsilon}{c}$ 对一切 $n > N$ 成立, 且 $\{x_n\}$ 中有无穷多项, 满足 $x_n < \eta - \frac{\epsilon}{c}$; 于是 $cx_n < c\eta + \epsilon$ 对一切 $n > N$ 成立, 且 $\{cx_n\}$ 中有无穷多项, 满足 $cx_n > c\eta - \epsilon$; 所以

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c\eta = c \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

3. 证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$;

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

证 (1) 记 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = h_1$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = h_2$, 则对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 对一切 $n > N$, 成立 $x_n > h_1 - \frac{\epsilon}{2}$, $y_n > h_2 - \frac{\epsilon}{2}$, 即

$$x_n + y_n > h_1 + h_2 - \varepsilon,$$

于是

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq h_1 + h_2 - \varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 即得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq h_1 + h_2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则由(1),

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

且

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n &= \limsup_{n \rightarrow \infty} [(x_n + y_n) - x_n] \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} (-x_n) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) - \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n, \end{aligned}$$

两式结合即得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

4. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $-\infty < x < 0$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

证 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $-\infty < x < 0$, 可知对任意给定的 ε ($0 < \varepsilon < -x$), 存在正整数 N_1 , 对一切 $n > N_1$, 成立

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon < 0.$$

记 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = H$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = h$, 则对上述 ε ($0 < \varepsilon < -x$), 存在正整数 N_2 , 对一切 $n > N_2$, 成立

$$h - \varepsilon < y_n < H + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 成立

$$\begin{aligned} \min\{(x - \varepsilon)(H + \varepsilon), (x + \varepsilon)(H + \varepsilon)\} &< x_n y_n < \max\{(x - \varepsilon)(h - \varepsilon), (x + \varepsilon)(h - \varepsilon)\}, \\ (x - \varepsilon)(h - \varepsilon) \} \end{aligned}$$

于是

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq \min\{(x - \varepsilon)(H + \varepsilon), (x + \varepsilon)(H + \varepsilon)\},$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \max\{(x - \varepsilon)(h - \varepsilon), (x + \varepsilon)(h - \varepsilon)\},$$

由 ε 的任意性, 即得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq xH = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq xh = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

由于



$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x_n} \cdot (x_n y_n) \right] \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n),$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x_n} \cdot (x_n y_n) \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n),$$

又得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

将此两式与前面两式结合, 即得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

§ 3

正项级数

1. 讨论下列正项级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{n^4 + 1};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3 + 3n};$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right);$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1);$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n};$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2 + (-1)^n]^n}{2^{2n+1}};$$

$$(11) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n};$$

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n};$$

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1});$$

$$(14) \sum_{n=1}^{\infty} (2n - \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1});$$

$$(15) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1};$$

$$(16) \sum_{n=3}^{\infty} \left(-\ln \cos \frac{\pi}{n} \right);$$

$$(17) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} (a > 0).$$

解 (1) 因为 $\frac{4n}{n^4 + 1} \sim \frac{4}{n^3}$ ($n \rightarrow \infty$), 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{n^4 + 1}$ 收敛。

(2) 因为 $\frac{2n^2}{n^3 + 3n} \sim \frac{2}{n}$ ($n \rightarrow \infty$), 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3 + 3n}$ 发散。

(3) 因为 $\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散。

(4) 因为当 $n \geq 4$ 有 $\frac{1}{n!} < \frac{1}{n^2}$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛。

(5) 因为 $\frac{\ln n}{n^2} < \frac{1}{n\sqrt{n}}$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 收敛。

(6) $1 - \cos \frac{\pi}{n} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi^2}{2n^2} (n \rightarrow \infty)$,

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2n^2}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$ 收敛。

(7) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 发散。

(8) 因为当 $n \geq 3$ 有

$$\sqrt[n]{n} - 1 > e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n} (n \rightarrow \infty),$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$ 发散。

(9) 设 $x_n = \frac{n^2}{2^n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} < 1,$$

由 d'Alembert 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 收敛。

(10) 设 $x_n = \frac{[2 + (-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{3}{4} < 1,$$

由 Cauchy 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2 + (-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$ 收敛。

(11) 设 $x_n = n^2 e^{-n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{e} < 1,$$

由 d'Alembert 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$ 收敛。

(12) 设 $x_n = \frac{2^n n!}{n^n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{e} < 1,$$



由 d'Alembert 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛。

$$(13) \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} = \frac{2}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} \sim \frac{1}{n} (n \rightarrow \infty),$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$ 发散。

$$(14) 2n - \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} = \frac{2(n^2 - \sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 1)})}{2n + \sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} \\ = \frac{2}{2n + \sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} \cdot \frac{1}{n^2 + \sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 1)}} \sim \frac{1}{4n^3} (n \rightarrow \infty),$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^3}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n - \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$ 收敛。

$$(15) \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} = \ln \left(1 + \frac{2}{n^2 - 1} \right) \sim \frac{2}{n^2} (n \rightarrow \infty),$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}$ 收敛。

$$(16) -\ln \cos \frac{\pi}{n} = -\ln \left[1 - \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \right] = -\ln \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \right) \sim \frac{\pi^2}{2n^2} (n \rightarrow \infty),$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2n^2}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=3}^{\infty} \left(-\ln \cos \frac{\pi}{n} \right)$ 收敛。

$$(17) \text{设 } x_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}, \text{则}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} a, & 0 < a < 1, \\ \frac{1}{2}, & a = 1, \\ 0, & a > 1. \end{cases}$$

由 d'Alembert 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ ($a > 0$) 收敛。

2. 利用级数收敛的必要条件, 证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}} = 0.$$

证 (1) 设 $x_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 0$, 由 d'Alembert 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$ 。

$$(2) \text{设 } x_n = \frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}, \text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{2^{2(n+1)}} = 0, \text{由 d'Alembert}$$

判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}} = 0$ 。

3. 利用 Raabe 判别法判断下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} (a>0);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}.$$

解 (1) 设 $x_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = a,$$

由 Raabe 判别法

当 $a > 1$ 时, 级数收敛; 当 $0 < a < 1$ 时, 级数发散;

当 $a = 1$, $x_n = \frac{1}{n+1}$, 级数发散。

(2) 设 $x_n = \frac{1}{3^{\ln n}}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \ln 3 > 1,$$

由 Raabe 判别法, 级数收敛。

(3) 设 $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \ln 2 < 1,$$

由 Raabe 判别法, 级数发散。

4. 讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \ln(1+x) dx.$$

解 (1) 当 $n \geq 2$, 有

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx < \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{2x} dx < \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$ 收敛。

(2) $\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx > \frac{1}{4n^2\pi^2} \int_{n\pi}^{2n\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{8n\pi}$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n\pi}$ 发散, 所以

$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散。

$$(3) \int_0^{\frac{1}{n}} \ln(1+x) dx < \int_0^{\frac{1}{n}} x dx = \frac{1}{2n^2},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \ln(1+x) dx$ 收敛。

5. 利用不等式 $\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{n}$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

存在(此极限为 Euler 常数 γ , 见例 2.4.8)。

证 设 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, 则

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < 0,$$

$$x_n > \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} - \int_1^n \frac{dx}{x} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} > 0,$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调减少有下界, 因此收敛。

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两个正项级数, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ 或 $+\infty$, 请问这两个级数的敛散性关系如何?

解 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$, 则当 n 充分大时有 $x_n < y_n$, 所以当 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 必定收敛, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 必定发散;

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$, 则当 n 充分大时有 $x_n > y_n$, 所以当 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 必定发散, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 必定收敛。

7. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 也收敛; 反之如何?

解 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 所以当 n 充分大时, 有 $0 \leq x_n < 1$, 即有 $x_n^2 \leq x_n$, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛; 反之, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 不一定收敛。

例如 $x_n = \frac{1}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

8. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 收敛; 又问当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 结论是否仍然成立?

解 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛。当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 由

$$\frac{\sqrt{x_n}}{n^p} \leq \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{n^{2p}} \right)$$

以及 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 的收敛性, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 收敛。

当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 不一定收敛。例如 $x_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 发散。

9. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调增加, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$,

(1) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n)]$ 收敛, 并求其和;

(2) 进一步设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $f''(x) < 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛。

证 (1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n)]$ 的部分和为 $S_n = f(n+1) - f(1)$, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 得到 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A - f(1)$;

(2) 由 Lagrange 中值定理以及 $f'(x)$ 单调减少, 得到

$$0 \leq f'(n) < f'(\xi) = f(n) - f(n-1),$$

由 $\sum_{n=2}^{\infty} [f(n) - f(n-1)]$ 收敛, 即得到 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛。

10. 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx, n = 1, 2, \dots$,

(1) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n}$ 的和;

(2) 设 $\lambda > 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

证 (1) $a_n + a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dt \tan x = \frac{1}{n+1},$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1;$$

(2) 由 $a_n > 0$ 及 $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, 可知 $a_n < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, 于是 $\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^{1+\lambda}}$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛。

11. 设 $x_n > 0$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 - \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

证 由 $x_n > 0$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 - \frac{1}{n}$, 得到

$$(n-1)x_n < nx_{n+1},$$

即数列 $\{nx_{n+1}\}$ 单调增加。于是存在 $a > 0$, 使得 $nx_{n+1} \geq a$, 因而

$$x_{n+1} \geq \frac{a}{n}.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n}$ 发散即可知 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

12. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散 ($x_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$), 证明: 必存在发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$ 。

证 设 $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ 。令

$$y_1 = \sqrt{S_1}, y_n = \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} (n = 2, 3, 4, \dots),$$

于是 $\sum_{k=1}^n y_k = \sqrt{S_n}$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是发散的正项级数, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} = 0.$$

13. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散, $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{S_n^2}$ 收敛。

证 由 $S_n \geq S_{n-1}$, 可知

$$\frac{x_n}{S_n^2} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n},$$

由此得到 $\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{S_k^2} \leq \frac{2}{x_1} - \frac{1}{S_n}$ 。由 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{S_n^2} \leq \frac{2}{x_1}.$$

14. 设 $\{a_n\}$ 为 Fibonacci 数列。证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 收敛, 并求其和。

解 首先 Fibonacci 数列具有性质 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} < 2$

(见例 2.4.4)。设 $x_n = \frac{a_n}{2^n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} < 1,$$

由 d'Alembert 判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 收敛。

设 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$, 则 $2S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{2^n}$, 两式相加得到

$$3S = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{2^n} = 4S - a_1 - a_2,$$

于是

$$S = a_1 + a_2 = 2.$$

§ 4

任意项级数

1. 讨论下列级数的敛散性(包括条件收敛与绝对收敛):

$$(1) 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \cdots; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x} \quad (x \neq -n);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}};$$

$$(5) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2 n}{n}; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{3};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n}; \quad (8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p};$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n} x^n; \quad (10) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}},$$

$$(11) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^p \ln^q n}; \quad (12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n} \quad (a > 0).$$

解 (1) 设级数 $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5} - \dots$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 则

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)!},$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = +\infty$, 因此级数 $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5} - \dots$ 发散。

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ ($x \neq -n$) 当 n 充分大(即 $n+x > 0$)时是交错级数, 且 $\left\{ \frac{1}{n+x} \right\}$ 单调减少趋于零, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ ($x \neq -n$) 收敛; 又由于 $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+x} \right| \sim \frac{1}{n}$ ($n \rightarrow \infty$), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ ($x \neq -n$) 条件收敛。

(3) 当 $x=0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$ 的一般项为零, 所以级数绝对收敛。

设 $x \neq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$ 当 n 充分大(即 $n > \frac{2|x|}{\pi}$)时是交错级数, 且 $\left| \sin \frac{x}{n} \right|$ 单调减少趋于零, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$ 收敛; 又由于 $\left| (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n} \right| \sim \frac{|x|}{n}$ ($n \rightarrow \infty$), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n}$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$ 条件收敛。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 不存在, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 发散。

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2 n}{n}$ 是交错级数, 当 $n \geq 8$, $\frac{\ln^2 n}{n}$ 单调减少趋于零, 所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2 n}{n}$ 收敛; 又由于 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2 n}{n}$ 条件收敛。

(6) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{3}$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 则

$$S_{6n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3k-2}} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2\sqrt{3k-1}} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{3k}},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{3n-2}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{3n-1}}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n}}$ 都是 Leibniz 级数, 即都是收敛的, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n}$ 存在且有限。容易证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n},$$

由此可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{3}$ 收敛。

由于 $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{3} \right| \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{3}$ 条件收敛。

(7) 当 $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ 时, 由于 $\left| (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n} \right| = \frac{1}{n} (4 \sin^2 x)^n$, $0 \leq 4 \sin^2 x < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (4 \sin^2 x)^n$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n}$ 绝对收敛。

当 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 时, $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 是条件收敛级数。

在其他情况下, 由于 $\left| (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n} \right| = \frac{1}{n} (4 \sin^2 x)^n$, $4 \sin^2 x > 1$, 级数的一般项趋于无穷大, 所以级数发散。

(8) 当 $x = \frac{k\pi}{2}$ 时, 级数的一般项为零, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p}$ 绝对收敛。

设 $x \neq \frac{k\pi}{2}$ 。当 $p > 1$ 时, 由于 $\left| \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p}$ 绝对收敛。

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由于

$$\frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p} = \frac{\sin 2nx}{2n^p} + \frac{\sin 2x}{2n^p},$$

由 Dirichlet 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n^p}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2x}{2n^p}$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p}$ 发散。

当 $p \leq 0$ 时, 由于级数的一般项不趋于零, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p}$ 发散。

(9) 设 $x_n = (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n} x^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{|x|}{2}$, 所以

当 $|x| < 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n} x^n$ 绝对收敛;



当 $|x| > 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n} x^n$ 发散;

当 $|x| = 2$ 时, 级数的一般项不趋于零, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n} x^n$ 也发散。

(10) 设 $u_n = \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$ 。由于 $|u_n|$ 单调减少趋于零, 所以

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 是 Leibniz 级数, 因此收敛。

因为 $u_n \sim \frac{\ln 2}{3n}$ ($n \rightarrow \infty$), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{3n}$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 条件收敛。

(11) 设 $x_n = \frac{x^n}{n^p \ln^q n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = |x|$, 所以

当 $|x| < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^p \ln^q n}$ 绝对收敛;

当 $|x| > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^p \ln^q n}$ 发散;

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^p \ln^q n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$, 因此当 $p > 1$ 或 $p = 1$ 且 $q > 1$ 时级数绝对收敛, 在其他情况下级数发散;

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^p \ln^q n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p \ln^q n}$, 因此当 $p > 1$ 或 $p = 1$ 且 $q > 1$ 时级数绝对收敛, 当 $p = 1$ 且 $q \leq 1$ 或 $0 < p < 1$ 或 $p = 0$ 且 $q > 0$ 时级数条件收敛, 在其他情况下级数发散。

(12) 设 $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n}$ 。

当 $a > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{a} < 1$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n}$ 绝对收敛;

当 $a = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$, 级数条件收敛;

当 $0 < a < 1$ 时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛; $\left\{ \frac{a}{1+a^n} \right\}$ 单调有界, 由 Abel 判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{a}{1+a^n}$ 收敛, 但由于 $|x_n| \sim \frac{a}{n}$ ($n \rightarrow \infty$), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n}$ 发散, 所以级数条件收敛。

2. 利用 Cauchy 收敛原理证明下列级数发散:

(1) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \dots$;

$$(2) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

证 (1) 设级数的一般项为 x_n , 则

$$x_{3n+1} + x_{3n+2} + \dots + x_{6n} > \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+4} + \dots + \frac{1}{6n-2} > \frac{n}{6n-2} > \frac{1}{6},$$

由于 n 可以取任意大, 由 Cauchy 收敛原理可知级数发散。

(2) 设级数的一般项为 x_n , 则

$$x_{3n+1} + x_{3n+2} + \dots + x_{6n} > \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+6} + \dots + \frac{1}{6n} > \frac{n}{6n} = \frac{1}{6},$$

由于 n 可以取任意大, 由 Cauchy 收敛原理可知级数发散。

3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, $\{x_n\}$ 单调减少, 利用 Cauchy 收敛原理证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 0.$$

证 由 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 $N' > 0$, 对一切 $m > n > N'$, 成立

$$0 < x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m < \frac{\epsilon}{2}.$$

取 $N = 2N' + 3$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\left[\frac{n}{2} \right] > N' + 1$, 于是成立

$$0 < \frac{n}{2} x_n < x_{\left[\frac{n}{2} \right]} + x_{\left[\frac{n}{2} \right] + 1} + \dots + x_n < \frac{\epsilon}{2},$$

即

$$0 < nx_n < \epsilon.$$

4. 若对任意 $\epsilon > 0$ 和任意正整数 p , 存在 $N(\epsilon, p)$, 使得

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \epsilon$$

对一切 $n > N$ 成立, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是否收敛?

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 不一定收敛。

例如: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 但对任意 $\epsilon > 0$ 和任意正整数 p , 取 $N(\epsilon, p) = \left[\frac{p}{3} \right]$, 当 $n > N(\epsilon, p)$ 时,

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \frac{p}{n+1} < \epsilon.$$

5. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是否收敛?



解 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 不一定收敛。

反例: $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, $y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛,

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散。

6. 设 $x_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 问交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ 是否收敛?

解 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ 不一定收敛。

反例: $x_n = \begin{cases} \frac{1}{k}, & n = 2k, \\ \frac{1}{k^2}, & n = 2k-1, \end{cases}$ 则 $x_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ 发散。

7. 设正项数列 $|x_n|$ 单调减少, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ 发散。问级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x_n} \right)^n$ 是否收敛? 并说明理由。

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x_n} \right)^n$ 收敛。

因为正项数列 $|x_n|$ 单调减少, 所以必定收敛。如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ 是 Leibniz 级数, 因此收敛, 与条件矛盾, 所以必定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha > 0$ 。于是当 n 充分大时, $\left(\frac{1}{1+x_n} \right)^n < \left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}} \right)^n$, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x_n} \right)^n$ 收敛。

8. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^{\alpha_0}}$ 收敛, 则当 $\alpha > \alpha_0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^{\alpha}}$ 也收敛。

证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_n}{n^{\alpha_0}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}} \right)$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^{\alpha_0}}$ 收敛, $\left| \frac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}} \right|$ 单调有界, 利用

Abel 判别法, 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^{\alpha}}$ 收敛。

注 本题也可利用 Dirichlet 判别法证明。

9. 若 $\{nx_n\}$ 收敛, $\sum_{n=2}^{\infty} n(x_n - x_{n-1})$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛。

证 令 $a_n = x_n$, $b_n = 1$, 则 $B_k = \sum_{i=1}^k b_i = k$ 。利用 Abel 变换, 得到

$$\sum_{k=1}^n x_k = nx_n - \sum_{k=1}^{n-1} k(x_{k+1} - x_k).$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x_{n+1} - x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(x_{n+1} - x_n) \cdot \frac{n}{n+1} \right],$$

因为数列 $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ 单调有界, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(x_{n+1} - x_n) = \sum_{n=2}^{\infty} n(x_n - x_{n-1})$ 收敛, 由 Abel 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} n(x_{n+1} - x_n)$ 收敛。再由数列 $\{nx_n\}$ 的收敛性, 即可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛。

10. 若 $\sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 收敛。

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛, 可知 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^+$, 成立 $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} y_k \right| < \varepsilon$ 。由于 $\sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ 绝对收敛, 所以收敛, 于是可知 $\{x_n\}$ 有界。设 $\sum_{n=2}^{\infty} |x_n - x_{n-1}| = A, |x_n| \leq B$, 令 $B_{n+k} = y_{n+1} + y_{n+2} + \dots + y_{n+k}$, 利用 Abel 变换, 得到

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k y_k \right| = \left| x_{n+p} B_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (x_{k+1} - x_k) B_k \right| < (A+B)\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛原理, 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 收敛。

11. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶连续导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

证 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 可知 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 于是

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{f''(0)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} (n \rightarrow \infty),$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

12. 已知任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n$ 也发散。

证 采用反证法。令 $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛, 因为 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 单调有界, 则由 Abel 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} y_n$ 收敛, 与条件矛盾, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n$ 发散。

13. 设 $x_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) > 0$, 证明: 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ 收敛。

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \gamma > 0$, 首先可知当 n 充分大时有 $x_n > x_{n+1}$, 即数列 $\{x_n\}$ 当 n 充分大时是单调减少的。然后取 $\alpha > 0, \beta > 0$, 使得 $\gamma > \beta > \alpha > 0$, 可知当 n 充分大时, 成立

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 + \frac{\beta}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} = \frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}},$$

从而

$$(n+1)^{\alpha} x_{n+1} < n^{\alpha} x_n,$$

这说明数列 $\{n^{\alpha} x_n\}$ 当 n 充分大时也是单调减少的, 于是存在 $A > 0$, 使得 $n^{\alpha} x_n \leq A$, 即

$$0 < x_n \leq \frac{A}{n^{\alpha}},$$

从而数列 $\{x_n\}$ 趋于零。因此交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ 是 Leibniz 级数, 所以收敛。

14. 利用

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \rightarrow \gamma (n \rightarrow \infty),$$

其中 γ 是 Euler 常数(见例 2.4.8), 求下述 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的更序级数的和:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

解 设 $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, 设级数

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots$$

的部分和数列为 $\{S_n\}$, 则

$$S_{3n} + \frac{1}{2}(b_n + \ln n) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1},$$

$$S_{3n} + \frac{1}{2}(b_n + \ln n) + \frac{1}{2}(b_{2n} + \ln 2n) = b_{4n} + \ln 4n,$$

于是

$$S_{3n} = b_{4n} - \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}b_{2n} + \frac{3}{2}\ln 2.$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \gamma$, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{3}{2}\ln 2.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n}$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2}\ln 2.$$

15. 利用级数的 Cauchy 乘积证明:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1;$$

$$(2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2} (|q| < 1).$$

解 (1) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, 则 $c_0 = 1$, 且当 $n \geq 1$ 时,

$$c_n = \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^i}{i!} \cdot \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{1}{n!} \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i! \cdot j!} (-1)^i = \frac{1}{n!} (1-1)^n = 0,$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

(2) 设 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, 则

$$c_n = \sum_{i+j=n} (q^i q^j) = (n+1)q^n.$$

又由于 $|q| < 1$, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, 从而得到

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2} (|q| < 1).$$

§ 5

无穷乘积

1. 讨论下列无穷乘积的敛散性:

$$(1) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1};$$

$$(2) \prod_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}};$$

$$(3) \prod_{n=3}^{\infty} \cos \frac{\pi}{n};$$

$$(4) \prod_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n};$$

$$(5) \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^x}};$$

$$(6) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right);$$

$$(7) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right);$$

$$(8) \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}};$$

$$(9) \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}\right];$$

$$(10) \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \cos \frac{\pi}{n^q}\right] (p, q > 0).$$

$$\text{解 (1)} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2 + 1}\right),$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ 收敛, 所以 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1}$ 收敛。

$$(2) \quad \prod_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} - 1\right)\right],$$

$$\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2}{n-1}} - 1 \sim \frac{1}{n-1} (n \rightarrow \infty),$$

由于 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ 发散, 所以 $\prod_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$ 发散。

$$(3) \quad \prod_{n=3}^{\infty} \cos \frac{\pi}{n} = \prod_{n=3}^{\infty} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}\right),$$

由于 $\sum_{n=3}^{\infty} 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}$ 收敛, 所以 $\prod_{n=3}^{\infty} \cos \frac{\pi}{n}$ 收敛。

$$(4) \quad \prod_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)\right],$$

$$1 - n \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{6n^2} (n \rightarrow \infty),$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n^2}$ 收敛, 所以 $\prod_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ 收敛。

$$(5) \quad \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^x}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(e^{\frac{1}{n^x}} - 1\right)\right],$$

$$\text{当 } x > 0, \quad e^{\frac{1}{n^x}} - 1 \sim \frac{1}{n^x} (n \rightarrow \infty).$$

当 $x > 1$ 时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 收敛, 所以 $\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^x}}$ 收敛;

当 $0 < x \leq 1$ 时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 发散, 所以 $\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^x}}$ 发散。

当 $x \leq 0$ 时, $\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^x}}$ 的一般项不趋于 1, 所以 $\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^x}}$ 发散。

(6) 因为对任意 x , $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2 \pi^2}$ 收敛, 所以 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$ 收敛。

(7) 当 $|x| < 2$ 时, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ 收敛, 所以 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right)$ 收敛;

当 $|x| \geq 2$ 时, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ 发散, 所以 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right)$ 发散。

$$(8) \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} = \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n})} = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + (e^{\frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n})} - 1)],$$

$$e^{\frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n})} - 1 \sim \frac{1}{n^2} (n \rightarrow \infty),$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以 $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$ 收敛。

$$(9) \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{2n^2}$ 收敛, 所以 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}\right]$ 收敛。

$$(10) \left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \cos \frac{\pi}{n^q} = \left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \left(1 - \frac{\pi^2}{2n^{2q}} + \dots\right) = 1 + \frac{1}{n^p} - \frac{\pi^2}{2n^{2q}} + \dots,$$

由此可知

当 $\min(p, 2q) > 1$ 时, $\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \cos \frac{\pi}{n^q}\right]$ 收敛;

当 $\min(p, 2q) \leq 1$ 时, $\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \cos \frac{\pi}{n^q}\right]$ 发散。

2. 计算下列无穷乘积的值:

$$(1) \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right); \quad (2) \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right);$$

$$(3) \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

解 (1) 由于

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

(2) 由于

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}.$$

(3) 由于

$$\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n(n-1)},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

3. 设 $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛, 则 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛。

证 设 $\cos x_n = 1 - \alpha_n$, 则

$$0 < \alpha_n = 1 - \cos x_n = 2 \sin^2 \frac{x_n}{2} < \frac{1}{2} x_n^2,$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛, 所以 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛。

4. 设 $|a_n| < \frac{\pi}{4}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则 $\prod_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + a_n\right)$ 绝对收敛。

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。设

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + a_n\right) = \frac{1 + \tan a_n}{1 - \tan a_n} = 1 + \alpha_n,$$

则

$$\alpha_n = \frac{2 \tan a_n}{1 - \tan a_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_n|}{|a_n|} = 2,$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛, 所以 $\prod_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + a_n\right)$ 绝对收敛。

5. 证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} = 0 \quad (0 < \beta < \alpha).$$

证 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$, 由于

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sim -\frac{1}{2n} \quad (n \rightarrow \infty), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2n}\right) = -\infty,$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = -\infty$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 0.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\beta+n}{\alpha+n} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right),$$

由于

$$\ln\left(1 + \frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right) \sim \frac{\beta-\alpha}{\alpha+n} \quad (n \rightarrow \infty), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right) = -\infty,$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right) = -\infty$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right) = 0.$$

6. 设 $|q| < 1$, 证明: $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})}$ 。

证 设 $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + q^k)$, 则

$$\begin{aligned} P_{2n} &= \prod_{k=1}^{2n} (1 + q^k) = \frac{\prod_{k=1}^{2n} (1 - q^{2k})}{\prod_{k=1}^{2n} (1 - q^k)} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} (1 - q^{2k})}{\prod_{k=1}^n (1 - q^{2k}) \cdot \prod_{k=1}^n (1 - q^{2k-1})} \\ &= \frac{\prod_{k=n+1}^{2n} (1 - q^{2k})}{\prod_{k=1}^n (1 - q^{2k-1})}, \end{aligned}$$

由于 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$ 收敛, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=n+1}^{2n} (1 - q^{2k}) = 1,$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}$, 所以



$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})}.$$

7. 设 $a_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都发散, 但无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty} (1 + a_n)$ 收敛。

证 设 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 则

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right),$$

由于 $\frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \sim \frac{1}{k}$ ($k \rightarrow \infty$), 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = +\infty,$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散; 又由于 $a_n^2 \geq \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也发散。

设 $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$, 则

$$P_{2n} = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right),$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}$ 存在且非零。由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n},$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ 存在且非零, 即无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty} (1 + a_n)$ 收敛。

第十章 函数项级数

§ 1 函数项级数的一致收敛性

1. 讨论下列函数序列在指定区间上的一致收敛性:

(1) $S_n(x) = e^{-nx}$, (i) $x \in (0, 1)$, (ii) $x \in (1, +\infty)$;

(2) $S_n(x) = xe^{-nx}$, $x \in (0, +\infty)$;

(3) $S_n(x) = \sin \frac{x}{n}$, (i) $x \in (-\infty, +\infty)$,

(ii) $x \in [-A, A]$ ($A > 0$);

(4) $S_n(x) = \arctan nx$, (i) $x \in (0, 1)$, (ii) $x \in (1, +\infty)$;

(5) $S_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(6) $S_n(x) = nx(1-x)^n$, $x \in [0, 1]$;

(7) $S_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$, (i) $x \in (0, 1)$, (ii) $x \in (1, +\infty)$;

(8) $S_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, (i) $x \in (0, 1)$, (ii) $x \in (1, +\infty)$;

(9) $S_n(x) = (\sin x)^n$, $x \in [0, \pi]$;

(10) $S_n(x) = (\sin x)^{\frac{1}{n}}$, (i) $x \in [0, \pi]$,

(ii) $x \in [\delta, \pi - \delta]$ ($\delta > 0$);

(11) $S_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, (i) $x \in (-\infty, +\infty)$,

(ii) $x \in [-A, A]$ ($A > 0$);

(12) $S_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)$, (i) $x \in (0, +\infty)$,

(ii) $x \in [\delta, +\infty)$ ($\delta > 0$).

解 (1) (i) $S(x) = 0$,

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in (0, 1)} |S_n(x) - S(x)| = 1 \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0, 1)$ 上非一致收敛。

(ii) $S(x) = 0$,

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in (1, +\infty)} |S_n(x) - S(x)| = e^{-n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

所以 $|S_n(x)|$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致收敛。

$$(2) S(x) = 0,$$

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in (0, +\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{n} e \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

所以 $|S_n(x)|$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛。

$$(3) (i) S(x) = 0,$$

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in (-\infty, +\infty)} |S_n(x) - S(x)| = 1 \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

所以 $|S_n(x)|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致收敛。

$$(ii) S(x) = 0, \text{ 当 } n > \frac{2A}{\pi},$$

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in [-A, A]} |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{A}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

所以 $|S_n(x)|$ 在 $[-A, A]$ 上一致收敛。

$$(4) (i) S(x) = \frac{\pi}{2},$$

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in (0, 1)} |S_n(x) - S(x)| = \frac{\pi}{2} \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

所以 $|S_n(x)|$ 在 $(0, 1)$ 上非一致收敛。

$$(ii) S(x) = \frac{\pi}{2},$$

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in (1, +\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \frac{\pi}{2} - \arctan n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

所以 $|S_n(x)|$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致收敛。

$$(5) S(x) = |x|, \text{ 由于 } |S_n(x) - S(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \leq \frac{1}{n}, \text{ 于是}$$

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in (-\infty, +\infty)} |S_n(x) - S(x)| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

所以 $|S_n(x)|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。

$$(6) S(x) = 0,$$

$$S_n\left(\frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

所以 $|S_n(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上非一致收敛。

$$(7) (i) S(x) = 0, \text{ 由于 } S_n(0+) - S(0+) = 0, \text{ 且}$$

$$\frac{d}{dx}[S_n(x) - S(x)] = \frac{1}{n} \left(1 + \ln \frac{x}{n}\right) < 0 (n > 2),$$

于是

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in (0,1)} |S_n(x) - S(x)| = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty),$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛。

$$(ii) \ S(x) = 0,$$

$$S_n(2n) - S(2n) = 2 \ln 2 \not\rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty),$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $(1, +\infty)$ 上非一致收敛。

$$(8) (i) \ S(x) = 0,$$

$$S_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \not\rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty),$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 上非一致收敛。

$$(ii) \ S(x) = 1,$$

$$S_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) - S\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} - 1 \not\rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty),$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $(1, +\infty)$ 上非一致收敛。

$$(9) \ S(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x \in [0, \pi], x \neq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 取 } x_n \in [0, \pi], \text{ 使得 } \sin x_n = 1 - \frac{1}{n}, \text{ 则}$$

$$x_n \neq \frac{\pi}{2},$$

$$S_n(x_n) - S(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \not\rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty),$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, \pi]$ 上非一致收敛。

$$(10) (i) \ S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \pi, \\ 1, & 0 < x < \pi, \end{cases} \text{ 取 } x_n \in (0, \pi), \text{ 使得 } \sin x_n = \frac{1}{2^n}, \text{ 则}$$

$$S_n(x_n) - S(x_n) = \frac{1}{2} - 1 \not\rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty),$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, \pi]$ 上非一致收敛。

$$(ii) \ S(x) = 1,$$

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in [\delta, \pi - \delta]} |S_n(x) - S(x)| = 1 - \sin^{\frac{1}{n}} \delta \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty),$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[\delta, \pi - \delta]$ 上一致收敛。

$$(11) (i) \ S(x) = e^x,$$

$$S_n(n) - S(n) = 2^n - e^n \not\rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty),$$



第十章 函数项级数

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致收敛。

(ii) 令 $f_n(x) = e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, 其中 $x \in [-A, A]$, $n > A$ 。设 $g_n(x) = \ln f_n(x)$, 则

$$g_n'(x) = \frac{n}{n+x} - 1 \begin{cases} > 0, & -A \leq x < 0, \\ = 0, & x = 0, \\ < 0, & 0 < x \leq A. \end{cases}$$

于是对 $x \in [-A, A]$,

$$\begin{aligned} \min\{g_n(A), g_n(-A)\} &\leq g_n(x) \leq g_n(0) = 0, \\ \min\{f_n(A), f_n(-A)\} &\leq f_n(x) \leq f_n(0) = 1, \\ 0 \leq 1 - f_n(x) &\leq 1 - \min\{f_n(A), f_n(-A)\} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [-A, A]} |S_n(x) - S(x)| &= \sup_{x \in [-A, A]} \left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| \\ &\leq e^A \sup_{x \in [-A, A]} |1 - f_n(x)| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[-A, A]$ 上一致收敛。

$$(12) \text{ (i)} \quad S(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$S_n\left(\frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)\sqrt{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致收敛。

$$(ii) \quad S(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$S_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} = S(x),$$

由于

$$\frac{d}{dx} [S_n(x) - S(x)] = \frac{-1}{2\sqrt{x} \left(x + \frac{1}{n}\right) \left(\sqrt{x} + \sqrt{x + \frac{1}{n}}\right)} + \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

可知

$$\begin{aligned} d(S_n, S) &= \sup_{x \in [\delta, +\infty)} |S_n(x) - S(x)| = |S_n(\delta) - S(\delta)| \\ &= -n \left(\sqrt{\delta + \frac{1}{n}} - \sqrt{\delta} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\delta}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛。

2. 设 $S_n(x) = n(x^n - x^{2n})$, 则函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上收敛但不一致收敛, 且极限运算与积分运算不能交换, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx.$$

证 函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于 $S(x) = 0$ 。取 $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, 则

$$S_n(x_n) - S(x_n) = n \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \right] \rightarrow +\infty,$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上非一致收敛。

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n(x^n - x^{2n}) dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx = 0,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx.$$

3. 设 $S_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$, 则

(1) 函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛;

(2) $\left\{ \frac{d}{dx} S_n(x) \right\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛;

(3) 极限运算与求导运算不能交换, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} S_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

并不对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立。

解 (1) $S_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$, $S(x) = 0$, 则

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{x}{1 + n^2 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。

(2) $\frac{d}{dx} S_n(x) = \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}$, $\sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} S_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$

取 $x_n = \frac{1}{2n}$, 则

$$\frac{d}{dx} S_n(x_n) - \sigma(x_n) = \frac{12}{25} \neq 0 (n \rightarrow \infty),$$

所以 $\left\{ \frac{d}{dx} S_n(x) \right\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛。

(3) 由于在 $x = 0$ 处,

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0, \sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} S_n(x) = 1,$$

所以在 $x=0$ 处,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} S_n(x) \neq \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

不成立。

4. 设 $S_n(x) = \frac{1}{n} \arctan x^n$, 则函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛;

试问极限运算与求导运算能否交换, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} S_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

是否成立?

$$\text{解 } S_n(x) = \frac{1}{n} \arctan x^n, S'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}},$$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0, S'(x) = 0,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(1) = \frac{1}{2} \neq S'(1)$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} S_n(x) \neq \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

在 $x=1$ 不成立。

5. 设 $S_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$, 其中 α 是参数。求 α 的取值范围, 使得函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上

(1) 一致收敛;

(2) 积分运算与极限运算可以交换, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx;$$

(3) 求导运算与极限运算可以交换, 即对一切 $x \in [0, 1]$ 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} S_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

解 (1) $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0$, 令 $S'_n(x) = n^\alpha e^{-nx} (1 - nx) = 0$, 得到 $x = \frac{1}{n}$, 即

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in [0, 1]} |S_n(x) - S(x)| = S_n \left(\frac{1}{n} \right) = n^{\alpha-1} e^{-1},$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(S_n, S) = 0$ 当且仅当 $\alpha < 1$ 时成立, 所以当 $\alpha < 1$ 时, $|S_n(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

$$(2) \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx = \int_0^1 S(x) dx = 0,$$

$$\int_0^1 S_n(x) dx = n^{\alpha-2} - n^{\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-nx},$$

所以当且仅当 $\alpha < 2$ 时, 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx.$$

$$(3) \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{d}{dx} S(x) = 0, \frac{d}{dx} S_n(x) = n^{\alpha} e^{-nx} (1 - nx), \text{ 由于}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx} (1 - nx) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1], \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

所以当且仅当 $\alpha < 0$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} S_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

对一切 $x \in [0, 1]$ 成立。

6. 设 $S'(x)$ 在区间 (a, b) 上连续,

$$S_n(x) = n \left[S\left(x + \frac{1}{n}\right) - S(x)\right],$$

证明: $\{S_n(x)\}$ 在 (a, b) 上内闭一致收敛于 $S'(x)$ 。

证 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S'(x)$, 所以只须证明 $\forall \eta > 0$, $|S_n(x)|$ 在 $[a + \eta, b - \eta]$ 上一致收敛于 $S'(x)$ 。

取 $0 < \alpha < \eta$, 则 $S'(x)$ 在 $[a + \alpha, b - \alpha]$ 上一致连续, 即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x', x'' \in [a + \alpha, b - \alpha]$, 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就成立

$$|S'(x') - S'(x'')| < \epsilon.$$

取 $N = \max \left\{ \left[\frac{1}{\delta} \right], \left[\frac{1}{\eta - \alpha} \right] \right\}$, 则当 $n > N$ 且 $x \in [a + \eta, b - \eta]$ 时, 有

$$x + \frac{1}{n} \in [a + \alpha, b - \alpha],$$

由 Lagrange 中值定理, $S_n(x) = S'(\xi)$, $\xi \in (x, x + \frac{1}{n})$, 于是

$$|S_n(x) - S'(x)| = |S'(\xi) - S'(x)| < \epsilon,$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 (a, b) 上内闭一致收敛于 $S'(x)$ 。

7. 设 $S_0(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 令

$$S_n(x) = \int_0^x S_{n-1}(t) dt, n = 1, 2, \dots$$

证明: $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, a]$ 上一致收敛于 0。

证 设 $|S_0(x)| \leq M$, 则

$$|S_1(x)| = \left| \int_0^x S_0(t) dt \right| \leq Mx,$$

$$|S_2(x)| = \left| \int_0^x S_1(t) dt \right| \leq \int_0^x Mt dt = M \frac{x^2}{2!},$$

...

$$|S_n(x)| = \left| \int_0^x S_{n-1}(t) dt \right| \leq \int_0^x M \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt = M \frac{x^n}{n!},$$

...

由于

$$M \frac{x^n}{n!} \leq M \frac{a^n}{n!}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(M \frac{a^n}{n!} \right) = 0,$$

所以 $|S_n(x)|$ 在 $[0, a]$ 上一致收敛于 0。

8. 设 $S(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $S(1) = 0$ 。证明: $|x^n S(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

证 $S(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 所以有界, 设 $|S(x)| \leq M$ 。由 $S(1) = 0$, 可知

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [1 - \delta, 1], \text{ 成立 } |x^n S(x)| < \epsilon.$$

由于 $|x^n|$ 在 $[0, 1 - \delta]$ 上一致收敛于零, 可知

$$\exists N, \forall n > N, \forall x \in [0, 1 - \delta], \text{ 成立 } |x^n| < \frac{\epsilon}{M},$$

于是

$$|x^n S(x)| < \epsilon$$

对一切 $x \in [0, 1]$ 成立, 因此 $|x^n S(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

§ 2 一致收敛级数的判别与性质

1. 讨论下列函数项级数在所指定区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n, \quad x \in [0, 1];$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^2 x^n, \quad x \in [0, 1];$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} x^3 e^{-n^2}, \quad x \in [0, +\infty);$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} x e^{-n^2}, \quad (i) x \in [0, +\infty), \quad (ii) x \in [\delta, +\infty) (\delta > 0);$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

- (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^4 + x^4}}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$
- (7) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n, x \in [0, 1];$
- (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$
- (9) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}, \quad \begin{array}{l} \text{(i)} \quad x \in (0, +\infty), \\ \text{(ii)} \quad x \in [\delta, +\infty) \quad (\delta > 0); \end{array}$
- (10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n}}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$
- (11) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^n}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$
- (12) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(1+x^2)^n}, x \in (-\infty, +\infty).$

解 (1) $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (1-x)x^k = 1 - x^{n+1},$

由于 $|x^{n+1}|$ 在 $[0, 1]$ 上非一致收敛, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上非一致收敛。

(2) 设 $u_n(x) = (1-x)^2 x^n$, 则在 $[0, 1]$ 上

$$0 \leq u_n(x) \leq u_n\left(\frac{n}{n+2}\right) < \frac{4}{(n+2)^2},$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(n+2)^2}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^2 x^n$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

(3) 设 $u_n(x) = x^3 e^{-nx^2}$, 则当 $n \geq 1$ 时, 在 $[0, +\infty)$ 上

$$0 \leq u_n(x) \leq u_n\left(\sqrt{\frac{3}{2n}}\right) = \frac{K}{n^{\frac{3}{2}}},$$

其中 $K = \frac{3\sqrt{6}}{4} e^{-\frac{3}{2}}$ 。由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} x^3 e^{-nx^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛。

(4) (i) 设 $u_n(x) = x e^{-nx^2}$, 对任意的正整数 N , 取 $m = 2n$ ($n > N$) 与 $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in [0, +\infty)$, 则

$$\sum_{k=n+1}^m u_k(x_n) = x_n e^{-(n+1)x_n^2} + x_n e^{-(n+2)x_n^2} + \cdots + x_n e^{-2nx_n^2} > nx_n e^{-2nx_n^2}$$

$$= \sqrt{n} e^{-2} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty),$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx^2}$ 不满足一致收敛的 Cauchy 收敛原理的条件, 由此可知

$\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上非一致收敛;

(ii) 设 $u_n(x) = x e^{-nx^2}$, 则当 $n > \frac{1}{2\delta^2}$ 时, $u_n(x)$ 关于 x 在 $[\delta, +\infty)$ 上单调减少, 所以

$$0 \leq u_n(x) \leq \delta e^{-\delta^2 n},$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \delta e^{-\delta^2 n}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx^2}$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛。

(5) 设 $u_n(x) = \frac{x}{1+n^3 x^2}$, 则当 $n \geq 1$ 时, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}$, 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^3 x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。

(6) 设 $u_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$, 则当 $n \geq 1$ 时, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。

(7) 设 $a_n(x) = (1-x)x^n$, $b_n(x) = (-1)^n$, 则 $|a_n(x)|$ 对固定的 $x \in [0, 1]$ 关于 n 是单调的, 且在 $[0, 1]$ 上一致收敛于零, 同时 $\left| \sum_{k=0}^n b_k(x) \right| \leq 1$, 由 Dirichlet 判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

(8) 设 $a_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$, $b_n(x) = (-1)^n$, 则 $|a_n(x)|$ 对固定的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 关于 n 是单调的, 且在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于零, 同时 $\left| \sum_{k=1}^n b_k(x) \right| \leq 1$, 由 Dirichlet 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。

(9) (i) 设 $u_n(x) = 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$, 取 $x_n = \frac{2}{3^n \pi} \in (0, +\infty)$, 则

$$u_n(x_n) = 2^n \rightarrow +\infty,$$

即 $|u_n(x)|$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致收敛于 0, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致收敛;

(ii) 设 $u_n(x) = 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$, 则当 $x \in [\delta, +\infty)$ 时,

$$|u_n(x_n)| \leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{2}{3} \right)^n,$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛。

(10) 设 $a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n(x) = \sin x \sin nx$, 由于 $a_n(x)$ 与 x 无关且单调趋于零, 所以 $|a_n(x)|$ 对固定的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 关于 n 是单调的, 且在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于零, 同时

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k(x) \right| = \left| \cos \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \sin kx \right| = \left| \cos \frac{x}{2} \right| \cdot \left| \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \cos \frac{x}{2} \right| \leq 2,$$

由 Dirichlet 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。

(11) 设 $u_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, 取 $\epsilon_0 = \frac{1}{e^2} > 0$, 对任意的正整数 N , 取 $m = 2N$ ($n > N$) 与 $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in (-\infty, +\infty)$, 则

$$\sum_{k=n+1}^m u_k(x_n) = \frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{n+1}} + \frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{n+2}} + \cdots + \frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{2n}} > \frac{nx_n^2}{(1+x_n^2)^{2n}} > \frac{1}{e^2} = \epsilon_0,$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 不满足一致收敛的 Cauchy 收敛原理的条件, 由此可知 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致收敛。

(12) 设 $a_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $b_n(x) = (-1)^n$, 则 $|a_n(x)|$ 对固定的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 关于 n 是单调的, 且在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于零, 同时 $\left| \sum_{k=1}^n b_k(x) \right| \leq 1$, 由 Dirichlet 判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。

2. 证明: 函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上连续, 且有连续的导函数。

证 由于 $\left| \frac{\cos nx}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{n^2 + 1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上一致收敛, 所以 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上连续。



设 $\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2 + 1} \right)' = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n^2 + 1}$, 由于 $\left| \frac{n}{n^2 + 1} \right|$ 单调趋于零, 且对任意的 $0 < \delta < \pi$, 当 $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ 时,

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \frac{\left| \cos \left(n + \frac{1}{2} \right)x - \cos \frac{x}{2} \right|}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}},$$

由 Dirichlet 判别法, 可知 $- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n^2 + 1}$ 在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上一致收敛, 即 $- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n^2 + 1}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上内闭一致收敛, 因此 $\sigma(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n^2 + 1}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上连续。再由逐项求导定理, 可知 $f'(x) = \sigma(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上成立, 即 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有连续的导函数。

3. 证明: 函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且有各阶连续导数。

证 对任意的 $0 < a < A < +\infty$, 当 $x \in [a, A]$, 成立 $0 < n e^{-nx} \leq n e^{-ax}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-ax}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在 $[a, A]$ 上一致收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上内闭一致收敛, 所以 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。

设 $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n e^{-nx})' = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$, 与上面类似可证明 $- \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上内闭一致收敛, 因此 $\sigma(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。再由逐项求导定理, 可知 $f'(x) = \sigma(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上成立, 即 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有连续的导函数。

注意到 $(-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k+1} e^{-nx}$ ($k = 1, 2, \dots$) 在 $(0, +\infty)$ 上都是内闭一致收敛的, 所以上述过程可以逐次进行下去, 由数学归纳法, 可知 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有各阶连续导函数。

4. 证明: 函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续, 且有各阶连续导数; 函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且有各阶连续导数。

证 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, 对任意 $1 < a < A < +\infty$, 当 $x \in [a, A]$, 成立 $0 < \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $[a, A]$ 上一致收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上内闭一致收敛, 所以 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续。

又 $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n^x} \right) = -\frac{\ln n}{n^x}$, 且对任意 $1 < a < A < +\infty$, $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 在 $[a, A]$ 上一致收敛, 即 $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上内闭一致收敛, 则 $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续。由逐项求导定理, 可知 $f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$, 即 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有连续导函数。

利用 $\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{n^x} \right) = (-1)^k \frac{\ln^k n}{n^x}$ ($k = 1, 2, \dots$), 可以证明 $(-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上内闭一致收敛, 同理可得 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有各阶连续导函数。

设 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$, 由 Dirichlet 判别法, 可知对任意 $0 < a < A < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ 在 $[a, A]$ 上一致收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上内闭一致收敛, 所以 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。

又 $\frac{d}{dx} \left(\frac{(-1)^n}{n^x} \right) = \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n^x}$, 同样由 Dirichlet 判别法, 可知对任意 $0 < a < A < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n^x}$ 在 $[a, A]$ 上一致收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上内闭一致收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。由逐项求导定理, 可知 $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n^x}$, 即 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有连续导函数。

利用 $\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{(-1)^n}{n^x} \right) = \frac{(-1)^{n+k} \ln^k n}{n^x}$ ($k = 1, 2, \dots$), 同样由 Dirichlet 判别法, 可以证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k} \ln^k n}{n^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上内闭一致收敛, 同理可得 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有各阶连续导函数。

5. 证明: 函数项级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$ 可以逐项求导, 即

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{x}{n^2} \right).$$

证 函数项级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$ 对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 收敛, 且

$$\frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{x}{n^2} \right) = \frac{1}{n^2 + \frac{x^2}{n^2}},$$

由于 $\frac{1}{n^2 + \frac{x^2}{n^2}} \leq \frac{1}{n^2}$, 由 Weierstrass 判别法, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{x}{n^2} \right)$ 在

$(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 再由逐项求导定理, 即可知道

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{x}{n^2} \right).$$

6. 设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad (2) \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

证 (1) 首先对于每一固定的 $x \in [0, \delta)$ ($\delta > 0$), $\frac{1}{n^x}$ 关于 n 单调, 且对于一切 $x \in [0, \delta)$ 与一切 n , 成立 $0 < \frac{1}{n^x} \leq 1$, 又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是数项级数, 它的收敛意味着关于 x 的一致收敛性, 于是由 Abel 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0, \delta)$ 上一致收敛, 因此和函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 关于 x 在 $[0, \delta)$ 连续, 从而成立

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(2) 由例题 10.2.4, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 再由逐项积分定理, 得到

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

7. 设 $u_n(x), v_n(x)$ 在区间 (a, b) 连续, 且 $|u_n(x)| \leq v_n(x)$ 对一切 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立。证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 (a, b) 上点态收敛于一个连续函数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 也必然收敛于一个连续函数。

证 设任意闭区间 $[c, d] \subset (a, b)$ 。由于 $v_n(x) \geq 0$ 在 $[c, d]$ 连续, 和函数

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 $[c, d]$ 连续, 则由 Dini 定理可知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 $[c, d]$ 一致收敛。于是由 Cauchy 收敛原理, 可知 $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m > n > N, \forall x \in [c, d]$, 成立

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_m(x)| \leq v_{n+1}(x) + v_{n+2}(x) + \cdots + v_m(x) < \epsilon,$$

此即说明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[c, d]$ 一致收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[c, d]$ 连续。由于 $[c, d] \subset (a, b)$ 的任意性, 即得到 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 连续。

8. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $x = a$ 与 $x = b$ 收敛, 且对一切 $n \in \mathbb{N}^+$, $u_n(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上单调增加, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $x = a$ 与 $x = b$ 收敛, 由 Cauchy 收敛原理, 可知

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m > n > N, \text{ 成立 } \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(a) \right| < \epsilon \text{ 与 } \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(b) \right| < \epsilon.$$

再由 $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上的单调增加性, 可知对一切 $x \in [a, b]$, 成立

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(a) \right|, \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(b) \right| \right\} < \epsilon,$$

此即说明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。

9. 设对一切 $n \in \mathbb{N}^+$, $u_n(x)$ 在 $x = a$ 右连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $x = a$ 发散,

证明: 对任意 $\delta > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(a, a + \delta)$ 上必定非一致收敛。

证 采用反证法。设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(a, a + \delta)$ 上一致收敛, 则

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m > n > N, \forall x \in (a, a + \delta), \text{ 成立 } \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

再令 $x \rightarrow a^+$, 得到 $\left| \sum_{k=n+1}^m u_k(a) \right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, 这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $x = a$ 收敛, 与

条件矛盾, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(a, a + \delta)$ 上必定非一致收敛。

10. 证明函数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n} \right)$ 在 $[-a, a]$ 上是一致收敛的, 其中 a 是小于 $2 \ln^2 2$ 的任意固定正数。

证 $\ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right)$ 在 $[-a, a]$ 上单调增加, 所以

$$\ln\left(1 - \frac{a}{n \ln^2 n}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{a}{n \ln^2 n}\right),$$

$$\ln\left(1 \pm \frac{a}{n \ln^2 n}\right) \sim \pm \frac{a}{n \ln^2 n} (n \rightarrow \infty).$$

由于 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a}{n \ln^2 n}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 \pm \frac{a}{n \ln^2 n}\right)$ 收敛, 再由习题 8 可知

$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right)$ 在 $[-a, a]$ 上一致收敛。

11. 设

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}.$$

(1) 证明: $f(x)$ 在 $[0, \pi/2]$ 上连续;

(2) 计算 $\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x) dx$ 。

解 (1) 对一切 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 有

$$0 \leq \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} \leq \frac{1}{2^n},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上一致收敛,

从而 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 连续。

(2) 由(1), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上一致收敛, 由逐项积分定理,

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \tan \frac{x}{2^n} d \frac{x}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \ln \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}}}{\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}},$$

再利用例题 9.5.3 的结果 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$, 得到

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x) dx = \ln \left(\frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \right) = \ln \frac{3}{2}.$$

12. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^3 + n}}$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续;

(2) 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 证明:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{15} < F\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

证 (1) 对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3 + n}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^3 + n}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一

致收敛, 所以 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^3 + n}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续;

(2) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^3 + n}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 由逐项积分定理,

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos nt}{\sqrt{n^3 + n}} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \sqrt{n^3 + n}},$$

于是

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n^3 + n}} \sin \frac{n\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{(2n-1)^3 + (2n-1)}},$$

这是一个 Leibniz 级数, 它的前两项为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 与 $-\frac{1}{3\sqrt{30}}$, 所以

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{15} < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3\sqrt{30}} < F\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

13. 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + x}$ 。

(1) 证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且一致连续;

(2) 证明反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 发散。

证 (1) 由 $\frac{1}{2^n + x} \leq \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 可知 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上点态收敛; 又 $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2^n + x} \right) = \frac{-1}{(2^n + x)^2}$, 且对一切 $x \in [0, +\infty)$, $\left| \frac{-1}{(2^n + x)^2} \right| \leq \frac{1}{2^{2n}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2^n + x} \right)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛。由逐项求导定理,

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导。

由于

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + x_1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + x_2} \right| \leq |x_1 - x_2| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n},$$

可知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续。

$$(2) \int_0^A f(x) dx = \int_0^A \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + x} \right) dx \geq \sum_{k=0}^n \int_0^A \frac{dx}{2^k + x} = \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{A}{2^k} \right),$$

由于 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{A}{2^k} \right) = +\infty$, 可知 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx = +\infty$, 所以反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 发散。

§ 3 幂级数

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) (x-1)^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n \cdot 2^n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1} (x+1)^n;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n;$$

$$(6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^n} x^{n^2};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n;$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n.$$

解 (1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3$, 所以收敛半径为 $R = \frac{1}{3}$ 。

当 $x = \frac{1}{3}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[1 + \left(-\frac{2}{3} \right)^n \right]$, 级数发散。

当 $x = -\frac{1}{3}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[(-1)^n + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right]$, 级数收敛。

所以收敛域为 $D = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$ 。

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, 所以收敛半径为 $R = 1$ 。

当 $x=2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$, 级数发散。

当 $x=0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$, 通项不趋于零, 级数也发散。

所以收敛域为 $D=(0,2)$ 。

$$(3) \text{ 设 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\left| \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 所}$$

以收敛半径为 $R=\sqrt{2}$ 。

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, 级数收敛。

所以收敛域为 $D=[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 。

$$(4) \text{ 设 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1} (x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \text{ 所}$$

以收敛半径为 $R=1$ 。

当 $x=0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 是 Leibniz 级数, 所以收敛。

当 $x=-2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$, 级数发散。

所以收敛域为 $D=(-2,0]$ 。

$$(5) \text{ 设 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot 2^n}{3^n} \right] = 0, \text{ 所以收敛半径为 } R=+\infty, \text{ 收敛域为 } D=(-\infty, +\infty).$$

$$(6) \text{ 设 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^n} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\ln^2 n}{n^n}} = 1, \text{ 所以收敛半径为 } R=1.$$

当 $x=\pm 1$ 时, 显然 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 所以收敛域为 $D=[-1,1]$ 。

$$(7) \text{ 设 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \right] = \frac{1}{e}, \text{ 所以收敛半径为 } R=e.$$

当 $x=\pm e$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (\pm e)^n$, 应用 Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (n \rightarrow \infty),$$

可知级数的通项 $\frac{n!}{n} (\pm e)^n$ 不趋于零, 因而发散。

所以收敛域为 $D = (-e, e)$ 。

(8) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right] = \frac{1}{4}$, 所以收敛半径为 $R = 4$ 。

当 $x = \pm 4$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (\pm 4)^n$, 应用 Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (n \rightarrow \infty),$$

可知级数的通项 $\frac{(n!)^2}{(2n)!} (\pm 4)^n$ 不趋于零, 因而发散。

所以收敛域为 $D = (-4, 4)$ 。

(9) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!} \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \right] = 1$, 所以收敛半径为 $R = 1$ 。

当 $x = -1$ 时, 应用不等式 $2k+1 > \sqrt{(2k)(2k+2)}$ 可知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 是 Leibniz 级数, 所以收敛。

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, 令 $b_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \frac{1}{2}$, 由 Raabe 判别法可知级数发散。

所以收敛域为 $D = [-1, 1)$ 。

2. 设 $a > b > 0$, 求下列幂级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n};$$

$$(3) ax + bx^2 + a^2 x^3 + b^2 x^4 + \cdots + a^n x^{2n-1} + b^n x^{2n} + \cdots.$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right|} = a$, 所以收敛半径为 $R = \frac{1}{a}$ 。

当 $x = -\frac{1}{a}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{b^n(-1)^n}{n^2 a^n} \right)$, 级数收敛。

当 $x = \frac{1}{a}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{b^n}{n^2 a^n} \right)$, 级数发散。

所以收敛域为 $D = \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a} \right]$ 。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^n + b^n}} = \frac{1}{a}$, 所以收敛半径为 $R = a$ 。

当 $x = \pm a$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$ 的通项不趋于零, 级数发散, 所以收敛域为 $D = (-a, a)$ 。

(3) 设 $ax + bx^2 + a^2 x^3 + b^2 x^4 + \cdots + a^n x^{2n-1} + b^n x^{2n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n-1]{a^n} = \sqrt{a}$, 所以收敛半径为 $R = \frac{1}{\sqrt{a}}$ 。

当 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ 的通项不趋于零, 级数发散, 所以收敛域为 $D = \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$ 。

3. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2 , 讨论下列幂级数的收敛半径:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n;$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n.$$

解 (1) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 R 。

当 $|x| < \sqrt{R_1}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 收敛, 当 $|x| > \sqrt{R_1}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 发散, 所以 $R = \sqrt{R_1}$ 。

(2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径为 R 。

当 $|x| < \min(R_1, R_2)$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 收敛。

当 $|x| > \min(R_1, R_2)$, $R_1 \neq R_2$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 发散。

但当 $R_1 = R_2$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径有可能增加, 例如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛半径为 1, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - 1 \right) x^n$ 的收敛半径也为 1, 但



$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$ 的收敛半径为 2。

所以 $R \geq \min(R_1, R_2)$ 。

(3) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ 的收敛半径为 R 。

由 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}$, 可知 $R \geq R_1 R_2$ 。

上式等号可能不成立, 例如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n}$ 的收敛半径为 1, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^{n+1}}$ 的收敛半径也为 1, 但 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ 的收敛半径为 $R = +\infty$ 。

4. 应用逐项求导或逐项求积分等性质, 求下列幂级数的和函数, 并指出它们的定义域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n x^n;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{2^n + 1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n;$$

$$(6) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{(2^n)!};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n.$$

解 (1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ 的收敛半径为 $R = 1$, 当 $x = \pm 1$ 时, 级数发散, 所以定义域为 $D = (-1, 1)$ 。

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$, $f(x) = \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, 利用逐项求积分, 得到

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

所以

$$S(x) = x \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

(2) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{2^n + 1}$ 的收敛半径为 $R = 1$, 当 $x = \pm 1$ 时, 级数发散, 所以定义域为 $D = (-1, 1)$ 。

设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{2^n + 1}$, $f(x) = x S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n+1}}{2^n + 1}$, 利用逐项求导, 得到

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n} = \frac{1}{1-x^2},$$

所以

$$S(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$ 的收敛半径为 $R=1$, 当 $x = \pm 1$ 时, 级数发散,

所以定义域为 $D=(-1,1)$ 。

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$, $f(x) = \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1}$, 利用逐项求积分与上面习题(1), 得到

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^n = \frac{x}{(1+x)^2},$$

所以

$$S(x) = x \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1+x)^2} \right) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}.$$

(4) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径为 $R=1$, 当 $x = \pm 1$ 时, 级数收敛, 所以定义域为 $D=[-1,1]$ 。

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$, $f(x) = xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, 利用逐项求导,

得到

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

于是 $f'(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x)$, 所以

$$S(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f'(x) dx = 1 - \left(1 - \frac{1}{x} \right) \ln(1-x), x \in [-1,1],$$

而 $S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ 。注意 $S(1)$ 也可利用 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的连续性,

由极限 $S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = 1$ 得到。

(5) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的收敛半径为 $R=1$, 当 $x = \pm 1$ 时, 级数发散, 所以定义域为 $D=(-1,1)$ 。

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$, $f(x) = \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$, 利用逐项

求积分与上面习题(1), 得到

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n(n+1)x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - 1,$$

所以

$$S(x) = x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1 \right) = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

(6) 级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的收敛半径为 $R = +\infty$, 所以定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$ 。

设 $S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, 则 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, 由 $S(x) + S'(x) = e^x$ 与 $S(x) - S'(x) = e^{-x}$, 即可得到

$$S(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

(7) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$ 的收敛半径为 $R = +\infty$, 所以定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$ 。

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$, 则 $\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x(e^x - 1)$, 所以

$$S(x) = \frac{d}{dx} [x(e^x - 1)] = (1+x)e^x - 1.$$

注 本题也可直接利用例题 10.3.6, 得到

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = (1+x)e^x - 1.$$

5. 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则不论 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = r$ 是否收敛, 只要 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 在 $x = r$ 收敛, 就成立。

$$\int_0^r f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1},$$

并由此证明:

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} \cdot \frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

证 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 在 $x = r$ 收敛, 可知 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径至少为 r , 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径也至少为 r 。当 $x \in [0, r)$, 利用逐项积分, 得到

$$\int_0^r f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}.$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ 收敛, 可知 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 在 $[0, r]$ 连续, 令 $x \rightarrow r-$, 得到

$$\int_0^r f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}.$$

对 $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x}$ 利用上述结果, 就得到

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} \cdot \frac{dx}{x} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

6. 证明:

$$(1) y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} \text{ 满足方程 } y^{(4)} = y;$$

$$(2) y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \text{ 满足方程 } xy'' + y' - y = 0.$$

证 (1) 连续 4 次逐项求导, 得到

$$y^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = y.$$

(2) 应用逐项求导, 可得

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)! n!}, y'' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)! n!},$$

于是

$$xy'' + y' = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n-1)! n!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{[(n-1)!]^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = y.$$

7. 应用幂级数性质求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{4^{n+1}}; \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n};$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)}; \quad (6) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n(n^2-1)};$$

$$(7) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{n!}.$$

解 (1) 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^n$, 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}$,

利用逐项求积分可得

$$g(x) = \frac{1}{(1+x)^2},$$

于是 $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{9}.$$

(2) 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, 利用逐项求导可得

$$f(x) = \ln \frac{1}{1-x},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2.$$

(3) 首先由逐项求积分可得 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n+1}$, 再利用逐项求积分, 得到

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+2} = \frac{x^3}{(1-x)^2},$$

于是

$$f(x) = \frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{4^{n+1}} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{11}{27}.$$

(4) 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$, 利用逐项求积分可得

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2},$$

于是

$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 12.$$

(5) 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$, 令 $g(x) = xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, 利用逐项求导可得

$$g(x) = \arctan x,$$

于是

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n (2n+1)} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi.$$

(6) 首先由逐项求导可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ 。设 $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} x^n$, 令 $g(x) = xf(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} x^{n+1}$, 则

$$g'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n+1} = x \ln(1+x),$$

于是

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \ln(1+x) - \frac{1}{4} x + \frac{1}{2},$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n (n^2-1)} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{3}{4} \ln \frac{3}{2}.$$

(7) 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}$, 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x},$$

因此 $f(x) = xg(x) = xe^{-x}$ 。所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{n!} = f(2) = \frac{2}{e^2}.$$

8. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$, 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

的收敛半径。

解 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1 , $\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$ 的收敛半径为 R_2 。由 $0 \leq a_n \leq A_n$, 可知 $R_1 \geq R_2$; 又由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 可知 $R_1 \leq 1$ 。

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1} - a_{n+1}}{A_{n+1}} = 1,$$

可知 $R_2 = 1$ 。结合上述关系, 得到 $R_1 = 1$ 。

9. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ 。

(1) 证明: $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上可导;

(2) $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的左导数是否存在?

证 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 $R = \frac{1}{2}$, 且在 $x = \pm \frac{1}{2}$, 级数收敛, 由 Abel 第二定理, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上一致收敛, 所以 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上连续。

由于 $\frac{d}{dx} \left(\frac{2^n}{n^2} x^n \right) = \frac{2^n}{n} x^{n-1}$, 且对任意 $\delta > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{n-1}$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \delta]$ 上一致收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{n-1}$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上内闭一致收敛, 由函数项级数的逐项求导定理, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上可导, 且 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{n-1}$ 。

(2) $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的左导数不存在。

令 $t = 2x$, 则 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2}$ 。令 $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2}$ 。利用逐项求导定理, 可以得到

$$g(t) = \int_0^t -\frac{\ln(1-u)}{u} du,$$

其中 $t \in [-1, 1]$ 。应用 L'Hospital 法则, 得到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{2}{t-1} \left[\int_0^t -\frac{\ln(1-u)}{u} du - \int_0^1 -\frac{\ln(1-u)}{u} du \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{2}{t-1} \int_1^t -\frac{\ln(1-u)}{u} du = \lim_{t \rightarrow 1^-} -\frac{2\ln(1-t)}{t} = +\infty. \end{aligned}$$

§ 4

函数的幂级数展开

1. 求下列函数在指定点的 Taylor 展开, 并确定它们的收敛范围:

$$(1) 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3, x_0 = 1; \quad (2) \frac{1}{x^2}, x_0 = -1;$$

$$(3) \frac{x}{2-x-x^2}, x_0 = 0; \quad (4) \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6};$$

$$(5) \ln x, x_0 = 2; \quad (6) \sqrt[3]{4-x^2}, x_0 = 0;$$

$$(7) \frac{x-1}{x+1}, x_0=1; \quad (8) (1+x)\ln(1-x), x_0=0;$$

$$(9) \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, x_0=0; \quad (10) \frac{e^{-x}}{1-x}, x_0=0.$$

解 (1) 令 $x-1=t$, 则

$$\begin{aligned} 1+2x-3x^2+5x^3 &= 1+2(t+1)-3(t+1)^2+5(t+1)^3 \\ &= 5+11t+12t^2+5t^3 = 5+11(x-1)+12(x-1)^2+5(x-1)^3. \end{aligned}$$

因为级数只有有限项, 所以收敛范围是 $D=(-\infty, +\infty)$ 。

$$(2) \text{由 } \frac{-1}{x} = \frac{1}{1-(x+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n, \text{应用逐项求导得到}$$

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n.$$

级数的收敛半径为 $R=1$ 。

当 $x=-2$ 与 $x=0$ 时, 级数发散, 所以收敛范围是 $D=(-2, 0)$ 。

$$\begin{aligned} (3) \frac{x}{2-x-x^2} &= \frac{x}{(2+x)(1-x)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{2+x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n \right] = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right] x^n. \end{aligned}$$

级数的收敛半径为 $R=1$ 。

当 $x=\pm 1$ 时, 级数发散, 所以收敛范围是 $D=(-1, 1)$ 。

$$\begin{aligned} (4) \sin x &= \sin \left[\left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{6} \right] = \sin \frac{\pi}{6} \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \frac{\pi}{6} \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{6} \right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{6} \right)^{2n+1}. \end{aligned}$$

级数的收敛半径为 $R=+\infty$, 所以收敛范围是 $D=(-\infty, +\infty)$ 。

$$(5) \ln x = \ln[2+(x-2)] = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{x-2}{2} \right) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n} (x-2)^n.$$

级数的收敛半径为 $R=2$ 。

当 $x=4$ 时, 级数为 $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, 收敛; 当 $x=0$ 时, 级数为 $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$, 发散。所以收敛范围是 $D=(0, 4]$ 。

$$(6) \sqrt[3]{4-x^2} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2} = \sqrt[3]{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \left[\frac{1}{3} \right] x^{2n}.$$

级数的收敛半径为 $R=2$ 。

当 $x = \pm 2$ 时, 级数为 $\sqrt[3]{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{3} \right] \left[\frac{1}{n} \right]$, 令 $u_n = (-1)^n \left[\frac{1}{3} \right] \left[\frac{1}{n} \right]$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{3(n+1)}{3n-1} - 1 \right) = \frac{4}{3} > 1,$$

由 Raabe 判别法, 级数收敛。所以收敛范围是 $D = [-2, 2]$ 。

$$(7) \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{1+\frac{x-1}{2}} = \frac{x-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} (x-1)^n.$$

级数的收敛半径为 $R = 2$ 。

当 $x = 3$ 与 $x = -1$ 时, 级数发散, 所以收敛范围是 $D = (-1, 3)$ 。

$$(8) (1+x) \ln(1-x) = (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} x^n \right) = -x - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) x^n.$$

级数的收敛半径为 $R = 1$ 。

当 $x = 1$ 时, 级数发散; 当 $x = -1$ 时, 级数收敛。所以收敛范围是 $D = [-1, 1)$ 。

$$(9) \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] \\ = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \frac{1}{n} x^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

级数的收敛半径为 $R = 1$ 。

当 $x = \pm 1$ 时, 级数发散, 所以收敛范围是 $D = (-1, 1)$ 。

$$(10) \frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) x^n.$$

设级数的 x^n 项的系数为 a_n , 则

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} < a_n < \frac{1}{2!} \quad (n \geq 4),$$

所以级数的收敛半径为 $R = 1$ 。

当 $x = \pm 1$ 时, 级数的通项不趋于零, 级数发散。所以收敛范围是 $D = (-1, 1)$ 。

2. 求下列函数在 $x_0 = 0$ 的 Taylor 展开:

$$(1) \frac{x}{\sin x} \text{ 至 } x^4; \quad (2) e^{ax} \text{ 至 } x^4;$$

$$(3) \ln \cos x \text{ 至 } x^6; \quad (4) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \text{ 至 } x^4.$$

$$\text{解} \quad (1) \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{120}x^4 + \cdots \right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{120}x^4 + \dots \right) + \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{120}x^4 + \dots \right)^2 + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{24}\sin^4 x + \dots \\
 &= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \dots \right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \dots \right)^3 + \\
 &\quad \frac{1}{24} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \dots \right)^4 + \dots = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \ln \cos x &= \ln[1 - (1 - \cos x)] = -(1 - \cos x) - \frac{1}{2}(1 - \cos x)^2 - \\
 &\quad \frac{1}{3}(1 - \cos x)^3 - \dots = - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 \dots \right) - \\
 &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \dots \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \dots \right)^3 - \dots \\
 &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 - \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \sqrt{1+2(x+x^2+x^3+x^4+\dots)} = 1 + (x+x^2+x^3+x^4+\dots) - \\
 &\quad \frac{1}{2}(x+x^2+x^3+\dots)^2 + \frac{1}{2}(x+x^2+\dots)^3 - \frac{5}{8}(x+\dots)^4 + \dots \\
 &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + \dots
 \end{aligned}$$

3. 利用幂级数展开,计算下列积分,要求精确到 0.001:

$$(1) \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx; \quad (2) \int_0^1 \cos x^2 dx;$$

$$(3) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx; \quad (4) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad (1) \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(2n+1)},
 \end{aligned}$$

这是一个 Leibniz 级数,其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值,设 $u_n = \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(2n+1)}$,由于 $u_3 \approx 0.00003$,因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字,所以

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(2n+1)} \approx 0.946.$$



$$\begin{aligned}
 (2) \int_0^1 \cos x^2 dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n} dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! (4n+1)},
 \end{aligned}$$

这是一个 Leibniz 级数, 其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值, 设 $u_n = \frac{1}{(2n)! (4n+1)}$, 由于 $u_3 \approx 0.0001$, 因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字, 所以

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \cos x^2 dx &\approx \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n}{(2n)! (4n+1)} \approx 0.905. \\
 (3) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}},
 \end{aligned}$$

这是一个 Leibniz 级数, 其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值, 设 $u_n = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}}$, 由于 $u_3 \approx 0.00016$, 因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字, 所以

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx &\approx \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \approx 0.487. \\
 (4) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} &= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} = \int_2^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{3n}} dx \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_2^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{3n}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)2^{3n-1}},
 \end{aligned}$$

这是一个 Leibniz 级数, 其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值, 设 $u_n = \frac{1}{(3n-1)2^{3n-1}}$, 由于 $u_4 \approx 0.00004$, 因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字, 所以

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \approx \sum_{n=1}^4 \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)2^{3n-1}} \approx 0.119.$$

4. 应用 $\frac{e^x - 1}{x}$ 在 $x=0$ 的幂级数展开, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

$$\text{证} \quad \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!},$$

应用逐项求导, 得到

$$\frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{(n+1)!}.$$

以 $x=1$ 代入, 即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

5. 求下列函数项级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{2n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n.$$

解 (1) 令 $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \cdot t^{n+1}$, 应用逐项求导, 得到

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} = \frac{1}{1+t},$$

于是

$$f'(t) = \ln(1+t), f(t) = \int_0^t \ln(1+t) dt = (1+t) \ln(1+t) - t,$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \cdot t^n = \left(1 + \frac{1}{t} \right) \ln(1+t) - 1, t \in [-1, 1].$$

以 $t = \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^2$ 代入, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{2n} = \frac{2(x^2+4)}{(x+2)^2} \ln \frac{2(x^2+4)}{(x-2)^2} - 1, x \in (-\infty, 0].$$

(2) 由级数乘法的 Cauchy 乘积,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) = \frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}.$$

其中 $x \in (-1, 1)$.

6. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $b > 1$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$ 的和.

解 设 $a_n = c + (n-1)d$, $n=1, 2, \dots$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} + d \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{b^n}.$$

首先我们有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{b}} = \frac{1}{b-1}$. 设 $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{b^n} x^{n-2}$, 则

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{b^n} = \frac{x}{b^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{b}} = \frac{x}{b(b-x)},$$

于是 $f(x) = \frac{1}{(b-x)^2}$, 所以

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{b^n} = f(1) = \frac{1}{(b-1)^2}.$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} + d \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{b^n} = \frac{c(b-1) + d}{(b-1)^2}.$$

7. 利用幂级数展开, 计算 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \ln x \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2n} \ln x dx = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

利用例题 10.4.6 中得到的结果 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 在等式两边乘以 $\frac{1}{4}$, 得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$

$= \frac{\pi^2}{24}$, 两式相减, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

于是得到

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = -\frac{\pi^2}{8}.$$

8. (1) 应用 $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$, 计算 π 的值, 要求精确到 10^{-4} ;

(2) 应用 $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$, 计算 π 的值, 要求精确到 10^{-4} 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \quad \pi &= 4 \left(\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{4}{2n-1} \left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} \right) \right]. \end{aligned}$$

这是一个 Leibniz 级数, 其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值, 设 $u_n = \frac{4}{2n-1} \left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} \right)$, 由于 $u_7 \approx 0.000038$, 因此前面 7 项之和的小数部分具有四位有效数字, 所以

$$\pi \approx \sum_{n=1}^7 (-1)^{n-1} \left[\frac{4}{2n-1} \left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} \right) \right] \approx 3.1416.$$

$$(2) \pi = 6 \arcsin \frac{1}{2} = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

设 $u_n = \frac{6(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}}$, 由于 $\sum_{n=8}^{\infty} u_n < \frac{6(15!!)}{17(16!!)} \sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} \approx 0.0000106$,

因此前面 7 项之和的小数部分具有四位有效数字, 所以

$$\pi = 6 \arcsin \frac{1}{2} \approx 3 + \sum_{n=1}^7 \frac{6(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \approx 3.1416.$$

9. 利用幂级数展开, 计算 $\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}} dx$ 的值, 要求精确到 10^{-4} 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_1^3 e^{-\frac{1}{x}} dx &= \int_1^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^3 \frac{(-1)^n}{n!} x^n dx \\ &= 2 - \ln 3 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n-1)} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

这是一个 Leibniz 级数, 其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值, 设 $u_n = \frac{1}{n! (n-1)} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$, 由于 $u_7 < 0.000033$, 因此前面 8 项之和的小数部分具有四位有效数字, 所以

$$\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}} dx \approx 2 - \ln 3 + \sum_{n=2}^7 \frac{(-1)^n}{n! (n-1)} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) \approx 1.1722.$$

§ 5 用多项式逼近连续函数

1. 求 $f(x) = x^3$ 的 Bernstein 多项式 $B_n(f, x)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad B_n(f, x) &= \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=3}^n \frac{k(k-1)(k-2)}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \\ &\quad \sum_{k=2}^n \frac{3k(k-1)}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

利用等式 $\frac{k}{n} C_n^k = \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k! (n-k)!} = C_{n-1}^{k-1}$, 可分别得到

$$\sum_{k=3}^n \frac{k(k-1)(k-2)}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=3}^n \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} C_{n-3}^{k-3} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x^3 \sum_{k=3}^n C_{n-3}^{k-3} x^{k-3} (1-x)^{n-k} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x^3;$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{3k(k-1)}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^n \frac{3(n-1)}{n^2} C_{n-2}^{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{3(n-1)}{n^2} x^2 \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} = \frac{3(n-1)}{n^2} x^2;$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} x \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n^2} x. \end{aligned}$$

所以

$$B_n(f, x) = \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x^3 + \frac{3(n-1)}{n^2} x^2 + \frac{1}{n^2} x.$$

2. 设 $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, 求它的四次 Bernstein 多项式 $B_4(f, x)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解 } B_4(f, x) &= \sum_{k=1}^4 \sqrt{\frac{k}{4}} C_4^k x^k (1-x)^{4-k} \\ &= 2x(1-x)^3 + 3\sqrt{2}x^2(1-x)^2 + 2\sqrt{3}x^3(1-x) + x^4 \\ &= (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 1)x^4 + 2(3 + \sqrt{3} - 3\sqrt{2})x^3 + \\ &\quad 3(\sqrt{2} - 2)x^2 + 2x. \end{aligned}$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明: 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在有理系数多项式 $P(x)$, 使得

$$|P(x) - f(x)| < \epsilon.$$

对一切 $x \in [a, b]$ 成立。

证 由定理 10.5.1, 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在多项式 $Q(x)$, 使得对一切 $x \in [a, b]$ 成立

$$|Q(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

设 $Q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$, 其中 $b_k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 是实数, 由于有理数集合在实数集中是稠密的, 可以取有理数 $a_k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 分别与 $b_k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 充分接近, 令 $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, 使得对一切 $x \in [a, b]$ 成立

$$|P(x) - Q(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

于是

$$|P(x) - f(x)| \leq |P(x) - Q(x)| + |Q(x) - f(x)| < \epsilon$$

对一切 $x \in [a, b]$ 成立。

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且对任一多项式 $g(x)$ 成立

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = 0.$$

证明: 在 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \equiv 0$ 。

证 由定理 10.5.1, 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得对一切

$x \in [a, b]$ 成立

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

由于

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx &= \int_a^b [f^2(x) - 2f(x)P(x) + P^2(x)] dx \\ &= \int_a^b [f^2(x) + P^2(x)] dx, \end{aligned}$$

所以

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \int_a^b [f^2(x) + P^2(x)] dx = \int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx < (b-a)\varepsilon^2.$$

由 ε 的任意性, 得到

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0,$$

再由 $f(x)$ 的连续性, 得到

$$f(x) \equiv 0.$$

5. 设 $P_0(x) = 0, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 证明:

$|P_n(x)|$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛于 $|x|$ 。

证 首先有 $0 \leq P_0(x) \leq |x|$ 。设 $0 \leq P_k(x) \leq |x|$, 由于函数 $h(t) = t + \frac{x^2 - t^2}{2}$ 在 $t \in [0, 1]$ 是单调增加的, 所以有

$$0 \leq P_{k+1}(x) = P_k(x) + \frac{x^2 - P_k^2(x)}{2} \leq |x|,$$

由数学归纳法得到对一切自然数 n 成立

$$0 \leq P_n(x) \leq |x|.$$

于是由 $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2}$, 又得到 $P_{n+1}(x) \geq P_n(x)$, 所以函数序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $[-1, 1]$ 上收敛。

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = P(x)$, 对等式 $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2}$ 两边求极限,

得到 $P(x) = P(x) + \frac{x^2 - P^2(x)}{2}$, 于是解得 $P(x) = |x|$, 并由 Dini 定理可知

$\{P_n(x)\}$ 在 $[-1, 1]$ 上是一致收敛于 $|x|$ 的。

第十一章 *Euclid* 空间上的极限和连续

§ 1

Euclid 空间上的基本定理

1. 证明定理 11.1.1; 距离满足正定性、对称性和三角不等式。

证 (a) 显然有 $|x - y| \geq 0$, 而且

$$|x - y| = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i (i = 1, 2, \dots, n) \Leftrightarrow x = y.$$

(b) 由距离定义直接可得

$$|x - y| = |y - x|.$$

(c) 由于

$$f(t) = \sum_{i=1}^n (a_i - tb_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0,$$

所以关于上述两次三项式的判别式有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n a_i^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2, \end{aligned}$$

即

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

令 $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$, 则有

$$|x - z| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2}$$



$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} = |x - y| + |y - z|.$$

2. 证明: 若 \mathbb{R}^n 中的点列 $\{x_k\}$ 收敛, 则其极限是惟一的。

证 假设 x 和 y 都是点列 $\{x_k\}$ 的极限, 则 $\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \exists N_1, \forall k > N_1: |x_k - x| < \epsilon, \\ \exists N_2, \forall k > N_2: |x_k - y| < \epsilon. \end{aligned}$$

于是当 $k > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 成立

$$|x - y| \leq |x_k - x| + |x_k - y| < 2\epsilon,$$

由于 ϵ 是任意正数, 所以 $x = y$, 即极限是惟一的。

3. 设 \mathbb{R}^n 中的点列 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 收敛, 证明: 对于任何实数 α, β , 成立等式

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \beta \lim_{k \rightarrow \infty} y_k.$$

证 设 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x, \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$, 则 $\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \exists N_1, \forall k > N_1: |x_k - x| < \epsilon, \\ \exists N_2, \forall k > N_2: |y_k - y| < \epsilon, \end{aligned}$$

于是当 $k > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 成立

$$|(\alpha x_k + \beta y_k) - (\alpha x + \beta y)| \leq |\alpha| |x_k - x| + |\beta| |y_k - y| < (|\alpha| + |\beta|) \epsilon,$$

所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \beta \lim_{k \rightarrow \infty} y_k.$$

4. 求下列 \mathbb{R}^2 中子集的内部、边界与闭包:

$$(1) S = \{(x, y) | x > 0, y \neq 0\};$$

$$(2) S = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$(3) S = \{(x, y) | 0 < x \leq 1, y = \sin \frac{1}{x}\}.$$

$$\text{解 } (1) S^\circ = \{(x, y) | x > 0, y \neq 0\}; \partial S = \{(x, y) | x = 0 \text{ 或 } x > 0, y = 0\};$$

$$\bar{S} = \{(x, y) | x \geq 0\}.$$

$$(2) S^\circ = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1\};$$

$$\partial S = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 = 1\};$$

$$\bar{S} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$(3) S^\circ = \emptyset; \partial S = \left\{ (x, y) \left| 0 < x \leq 1, y = \sin \frac{1}{x} \text{ 或 } x = 0, -1 \leq y \leq 1 \right. \right\};$$

$$\bar{S} = \left\{ (x, y) \left| 0 < x \leq 1, y = \sin \frac{1}{x} \text{ 或 } x = 0, -1 \leq y \leq 1 \right. \right\}.$$

5. 求下列点集的全部聚点:

$$(1) S = \left\{ (-1)^k \frac{k}{k+1} \left| k = 1, 2, \dots \right. \right\};$$

$$(2) S = \left\{ \left(\cos \frac{2k\pi}{5}, \sin \frac{2k\pi}{5} \right) \mid k = 1, 2, \dots \right\};$$

$$(3) S = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2)(y^2 - x^2 + 1) \leq 0\}.$$

解 (1) $S' = \{\pm 1\}$ 。

(2) $S' = \emptyset$ 。

(3) $S' = \{(x, y) \mid y^2 - x^2 + 1 \leq 0\}$.

6. 证明定理 11.1.3: x 是点集 $S (\subset \mathbb{R}^n)$ 的聚点的充分必要条件是: 存在 S 中的点列 $\{x_k\}$, 满足 $x_k \neq x (k = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ 。

证 必要性: 假设 x 是点集 S 的聚点, 对于 $\delta = \frac{1}{k}$, 在 x 的 $\delta = \frac{1}{k}$ 邻域中任取一点 $x_k \neq x$, 则有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ 。

充分性: 用反证法。假设 x 不是点集 S 的聚点, 则在 x 的某邻域 $O(x, \delta) (\delta > 0)$ 中, 最多只有 S 的有限个点, 所以 $S \cap O(x, \delta) - \{x\}$ 为有限集, 于是 $d = \inf \{ |y - x| \mid y \in S, y \neq x \} > 0$, 故不存在 S 中满足 $x_k \neq x$ 的点列 $\{x_k\}$ 以 x 为极限, 产生矛盾。

7. 设 U 是 \mathbb{R}^2 上的开集, 是否 U 的每个点都是它的聚点。对于 \mathbb{R}^2 中的闭集又如何呢?

解 开集 U 中的每个点 x 一定是它的内点, 所以 x 的任意邻域都有 U 中的无限个点, 所以 x 一定是 U 的聚点。

由于 $S = \{(0, 0)\}$ 是 \mathbb{R}^2 上的闭集, 而 S 只有一个点, 所以无聚点, 即闭集中的点不一定是它的聚点。

8. 证明 $S \subset \mathbb{R}^n$ 的所有内点组成的点集 S° 必是开集。

证 假设 $x \in S^\circ$, 则 $\exists \delta > 0, O(x, \delta) \subset S$ 。而 $\forall y \in O(x, \delta)$, 由于 $O(y, \delta - |y - x|) \subset O(x, \delta)$, 所以 y 也是 S 的内点, 从而 $O(x, \delta) \subset S^\circ$, 于是 S° 必是开集。如果 S° 是空集 \emptyset , 则 \emptyset 也是开集。

9. 证明 $S \subset \mathbb{R}^n$ 的闭包 $\bar{S} = S \cup S'$ 必是闭集。

证 假设 $x \in \bar{S}$, 则 $x \notin S$, 且 x 不是 S 的聚点, 于是在 x 的某邻域 $O(x, \delta)$ 中至多只有 S 的有限项, 故存在 x 的邻域 $O(x, \delta_1)$ 不含 S 的点, 即 $O(x, \delta_1) \subset \bar{S}^c$, 从而 \bar{S}^c 为开集, 所以 \bar{S} 必是闭集。

10. 设 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 。若 E 为开集, F 为闭集, 证明: $E \setminus F$ 为开集, $F \setminus E$ 为闭集。

证 由于 F 为闭集, 所以 F^c 为开集, 而 $E \setminus F = E \cap F^c$ 也是开集。由于 E 为开集, 所以 E^c 为闭集, 从而 $F \setminus E = F \cap E^c$ 也是闭集。

11. 证明 Cantor 闭区域套定理。

证 假设 $\{S_k\}$ 是非空闭集序列, 满足

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k \supset S_{k+1} \supset \cdots,$$

以及 $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } S_k = 0$ 。任取 $x_k \in S_k$, 则当 $m, n > k$ 时, $x_m, x_n \in S_k$, 从而成立 $|x_m - x_n| \leq \text{diam } S_k$, 于是 $\{x_k\}$ 是基本序列, 从而收敛, 设其极限为 x 。对于任意 k , 当 $m \geq k$ 时, $x_m \in S_k$, 所以 $\{x_k\}$ 的极限 $x \in \bar{S}_k = S_k$, 于是 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$, 所以 $\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$ 非空。

再证唯一性。假设 $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$, 则 $|x - y| \leq \text{diam } S_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 所以 $x = y$ 。

12. 举例说明: 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{k+1} - x_k| = 0$ 的点列 $\{x_k\}$ 不一定收敛。

解 设 $x_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \in \mathbb{R}$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{k+1} - x_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0$, 而 $|x_k| = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \rightarrow +\infty$, 所以 $\{x_k\}$ 不收敛。

13. 设 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集, 证明 $E \cap F$ 和 $E \cup F$ 为紧集。

证 因为 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集, 所以 E, F 为有界闭集, 于是可知 $E \cap F$ 和 $E \cup F$ 也都是有界闭集, 即紧集。

14. 用定义证明点集 $\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k} \mid k = 1, 2, \dots \right\}$ 是 \mathbb{R} 中的紧集。

证 假定 $\{U_\alpha\}$ 为点集 $S = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k} \mid k = 1, 2, \dots \right\}$ 的任一开覆盖。设 $0 \in U_{\alpha_0}$, 则 $\exists \delta > 0: O(0, \delta) \subset U_{\alpha_0}$, 于是当 $k > \frac{1}{\delta}$ 时, $\frac{1}{k} \in U_{\alpha_0}$ 。对于 $\left\{ \frac{1}{k} \mid k = 1, 2, \dots, \left[\frac{1}{\delta} \right] \right\}$, 存在 $\{U_\alpha\}$ 中 U_{α_k} , 使得 $\frac{1}{k} \in U_{\alpha_k}, k = 1, 2, \dots, \left[\frac{1}{\delta} \right]$ 。于是 $\left\{ U_{\alpha_0}, U_{\alpha_k} \mid k = 1, 2, \dots, \left[\frac{1}{\delta} \right] \right\}$ 构成 S 的有限开覆盖, 所以 S 为紧集。

15. 应用 Heine-Borel 定理直接证明: \mathbb{R}^n 上有界无限点集必有聚点。

证 假定 S 为 \mathbb{R}^n 上有界无限点集, 则由习题 9, $\bar{S} = S \cup S'$ 必是闭集。如果 S 无聚点, 即 $S' = \emptyset$, 则 $\bar{S} = S$, 即 S 为有界闭集, 从而由 Heine-Borel 定理知 S 为 \mathbb{R}^n 上的紧集。

$\forall x \in S$, 由于 x 不是 S 的聚点, 存在 $O(x, \delta_x)$ 只含有 S 中有限个点。显然 $\{O(x, \delta_x) \mid x \in S\}$ 构成 S 的一个开覆盖, 但由于其中有限个 $O(x, \delta_x)$ 只能包含 S 中有限个点, 因而不存在 S 的有限开覆盖, 矛盾! 所以 S 必有聚点。



$$(1) u = \ln(y-x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}; \quad (2) u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}};$$

$$(3) u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2} (R > r);$$

$$(4) u = \arcsin \frac{z}{x^2 + y^2}.$$

解 (1) $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1, y > x\}$ 。

(2) $D = \{(x, y, z) | x > 0, y > 0, z > 0\}$ 。

(3) $D = \{(x, y, z) | r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ 。

(4) $D = \{(x, y, z) | |z| \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 \neq 0\}$ 。

2. 设 $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (x > 0)$, 求 $f(x)$ 。

解 因为

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

所以

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. 若函数

$$z(x, y) = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1),$$

且当 $y=4$ 时 $z=x+1$, 求 $f(x)$ 和 $z(x, y)$ 。

解 由 $z(x, 4) = \sqrt{4} + f(\sqrt{x} - 1) = x + 1$, 可得

$$f(\sqrt{x} - 1) = x - 1 = (\sqrt{x} - 1 + 1)^2 - 1,$$

所以

$$f(x) = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x,$$

$$z(x, y) = x + \sqrt{y} - 1.$$

4. 讨论下列函数当 (x, y) 趋于 $(0, 0)$ 时的极限是否存在:

$$(1) f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}; \quad (2) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2};$$

$$(3) f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x^2, \\ 0, & \text{其它点}; \end{cases} \quad (4) f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^4 + y^8}.$$

解 (1) 由于 $f(x, kx) = \frac{x - kx}{x + kx} = \frac{1 - k}{1 + k}$ 依赖于 k , 所以当 (x, y) 趋于 $(0, 0)$ 时函数极限不存在。

(2) $f(x, kx) = \frac{kx^2}{x^2 + (kx)^2} = \frac{k}{1 + k^2}$ 依赖于 k , 所以当 (x, y) 趋于 $(0, 0)$ 时函

数极限不存在。

(3) 由于 $f\left(x, \frac{x^2}{2}\right) = 1$, 所以当 (x, y) 沿曲线 $y = \frac{x^2}{2}$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 函数极限为 1, 而当 (x, y) 沿 x 轴趋于 $(0, 0)$ 时, 函数极限为 0, 所以当 (x, y) 趋于 $(0, 0)$ 时函数极限不存在。

(4) 利用平均值不等式

$$\frac{x^4 + y^8}{3} = \frac{\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + y^8}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{4}x^8y^8},$$

可得

$$|f(x, y)| = \frac{|x^3y^3|}{x^4 + y^8} \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \frac{|xy|^3}{|xy|^{\frac{8}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} |xy|^{\frac{1}{3}} \rightarrow 0, ((x, y) \rightarrow (0, 0)),$$

所以当 (x, y) 趋于 $(0, 0)$ 时函数极限存在且为 0。

5. 对多元函数证明极限惟一性、局部有界性、局部保序性和局部夹逼性。

证 (1) 假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, 则 $\forall \epsilon > 0$,

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta_1) : |f(x) - A| < \epsilon,$$

$$\exists \delta_2 > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta_2) : |f(x) - B| < \epsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 成立

$$|A - B| \leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < 2\epsilon,$$

由于 ϵ 为任意正数, 所以 $A = B$, 即极限惟一。

(2) 假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则对于 $\epsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, $\forall x (0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < 1$, 即

$$|f(x)| < |A| + 1.$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 点的某个去心邻域有界。

(3) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则对于 $\epsilon = \frac{A - B}{2} > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, $\forall x (0 < |x - x_0| < \delta_1) : |f(x) - A| < \epsilon$, 即

$$f(x) > A - \epsilon = \frac{A + B}{2}.$$

又 $\exists \delta_2 > 0$, $\forall x (0 < |x - x_0| < \delta_2) : |g(x) - B| < \epsilon$, 即

$$g(x) < B + \epsilon = \frac{A + B}{2}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 成立局部保序性:

$$g(x) < \frac{A + B}{2} < f(x).$$

(4) 假定存在 $\rho > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \rho$ 时成立

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ 。

$\forall \epsilon > 0$, 由 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, $\exists \delta_1 > 0$, $\forall x (0 < |x - x_0| < \delta_1) : |h(x) - A| < \epsilon$, 所以

$$h(x) < A + \epsilon.$$

又由 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, $\exists \delta_2 > 0$, $\forall x (0 < |x - x_0| < \delta_2) : |g(x) - A| < \epsilon$, 所以

$$g(x) > A - \epsilon.$$

取 $\delta = \min\{\rho, \delta_1, \delta_2\} > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 成立

$$A - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < A + \epsilon,$$

即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

6. 对多元函数证明极限的四则运算法则: 假设当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限存在, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0).$$

证 假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则对任意 $\epsilon > 0$,

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta_1) : |f(x) - A| < \epsilon,$$

$$\exists \delta_2 > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta_2) : |g(x) - B| < \epsilon,$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 成立

$$|(f(x) \pm g(x)) - (A \pm B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < 2\epsilon,$$

所以(1)成立。

由于 $g(x)$ 在 x_0 有极限, 所以 $g(x)$ 在 x_0 局部有界, 即存在正数 X 和 $\delta' > 0$, $\forall x (0 < |x - x_0| < \delta') : |g(x)| < X$ 。取 $\delta = \min\{\delta', \delta_1, \delta_2\} > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 成立

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &\leq |f(x)g(x) - Ag(x)| + |Ag(x) - AB| \\ &< (X + |A|)\epsilon, \end{aligned}$$

所以(2)成立。

由于 $B \neq 0$, $\forall \epsilon \left(0 < \epsilon < \frac{|B|}{2} \right)$, $\exists \delta'' > 0$, $\forall x (0 < |x - x_0| < \delta'')$:

$$|g(x)| > |B| - \epsilon \geq \frac{|B|}{2}.$$

取 $\delta = \min\{\delta'', \delta_1, \delta_2\} > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 成立

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| &= \left| \frac{B(f(x) - A) - A(g(x) - B)}{Bg(x)} \right| \\ &< \frac{2(|A| + |B|)}{|B|^2} \epsilon, \end{aligned}$$

所以(3)成立。

7. 求下列各极限:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2};$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2};$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{xy};$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1};$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2};$$

$$(6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2};$$

$$(7) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2};$$

$$(8) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2+y^2) e^{-(x+y)}.$$

$$\text{解 } (1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (1-xy)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (x^2+y^2)} = 1.$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) = 0, \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x^2+y^2) = 1, \text{ 所以}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2} = +\infty.$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{1+xy}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{1+x^2+y^2}+1) = 2.$$

$$(5) \ln(x^2+e^{y^2}) = \ln(1+x^2+e^{y^2}-1) = \ln(1+x^2+y^2+o(y^2)) \\ = x^2+y^2+o(x^2+y^2),$$

所以

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2} = 1.$$

$$(6) |\sin(x^3+y^3)| \leq |x^3+y^3| = |x+y||x^2+y^2-xy| \leq 2|x+y||x^2+y^2|,$$

所以

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0.$$

(7) 因为



$$1 - \cos(x^2 + y^2) \sim \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0)),$$

$$\frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)x^2 y^2} \geq \frac{1}{|xy|}, \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{|xy|} = +\infty,$$

所以

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)x^2 y^2} = +\infty.$$

$$(8) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} [(x^2 e^{-x}) e^{-y}] + \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} [(y^2 e^{-y}) e^{-x}] = 0.$$

8. 讨论下列函数在原点的二重极限和二次极限：

$$(1) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2};$$

$$(2) f(x, y) = \frac{x^2(1+x^2) - y^2(1+y^2)}{x^2 + y^2};$$

$$(3) f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}.$$

解 (1) 由于

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x + k^2}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4(1+kx)^2}{x^4(1+kx)^2 + k^2 x^4} = \frac{1}{1+k^2},$$

所以二重极限不存在。

由 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{0}{y^2} = 0, y \neq 0$, 可知 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ 。同理可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ 。所以二次极限存在且都等于 0。

(2) 由于

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+x^2) - k^2 x^2(1+k^2 x^2)}{x^2(1+k^2)} = \frac{1-k^2}{1+k^2},$$

所以二重极限不存在。又

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -\lim_{y \rightarrow 0} (1+y^2) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2) = 1.$$

所以二次极限都存在但不相等。

(3) 由于 $|f(x, y)| \leq |x| + |y|$, 所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ 。

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} (y \neq 0)$ 和 $\lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y} (x \neq 0)$ 都不存在, 所以两个二次极限都不存在。

9. 验证函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} \left(y - \frac{1}{2} x^2 \right), & x > 0 \text{ 且 } \frac{1}{2} x^2 < y \leq x^2, \\ \frac{1}{x^2} (2x^2 - y), & x > 0 \text{ 且 } x^2 < y < 2x^2, \\ 0, & \text{其它点} \end{cases}$$

在原点不连续,而在其它点连续。

证 设 $x > 0, f(x, x^2) = \frac{2}{x^2} \left(x^2 - \frac{1}{2} x^2 \right) = 1$, 所以当点 (x, y) 沿 $y = x^2$ ($x > 0$) 趋于原点时函数 $f(x, y)$ 的极限为 1, 而当点 (x, y) 沿 x 轴趋于原点时函数 $f(x, y)$ 的极限为 0, 所以函数 $f(x, y)$ 在原点不连续。

对于函数 $f(x, y)$ 在其它点的连续性只要考虑函数在下述曲线

$$y = \frac{1}{2} x^2, y = x^2, y = 2x^2 \quad (x > 0)$$

上的情况(因为在除去上述曲线和原点的区域上函数显然连续)。

设 $x_0 > 0$ 。在 $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{1}{2} x_0^2 \right)$ 点, 由于

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ y > x^2/2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ y > x^2/2}} \frac{2 \left(y - \frac{1}{2} x^2 \right)}{x^2} = 0 = f(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ y \leq x^2/2}} f(x, y) = 0 = f(x_0, y_0),$$

所以函数 $f(x, y)$ 在 $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{1}{2} x_0^2 \right)$ 连续。同理可知函数 $f(x, y)$ 在 $(x_0, y_0) = (x_0, 2x_0^2)$ 也连续。

在 $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^2)$ 点, 由于

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ 2x^2 > y > x^2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ 2x^2 > y > x^2}} \frac{2x^2 - y}{x^2} = \frac{2x_0^2 - x_0^2}{x_0^2} = 1 = f(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ x^2/2 < y \leq x^2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ x^2/2 < y \leq x^2}} \frac{2 \left(y - \frac{1}{2} x^2 \right)}{x^2} = \frac{2 \left(x_0^2 - \frac{1}{2} x_0^2 \right)}{x_0^2} = 1 = f(x_0, y_0),$$

所以函数 $f(x, y)$ 在 $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^2)$ 也连续。

综上所述, 函数 $f(x, y)$ 除了在原点不连续, 在其它点都连续。

10. 讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

的连续范围。

解 显然函数 $f(x, y)$ 在区域 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$ 上连续, 所以只要考虑函数 $f(x, y)$ 在原点的连续性。由 $|x^2 y| \leq \frac{1}{2} |x| (x^2 + y^2)$, 得到

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} |x|,$$

所以

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0,$$

即函数在原点也连续。因此函数 $f(x, y)$ 在平面上点点连续。

11. 设 $f(t)$ 在区间 (a, b) 上具有连续导数, $D = (a, b) \times (a, b)$ 。定义 D 上的函数

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, & x \neq y, \\ f'(x), & x = y. \end{cases}$$

证明: 对于任何 $c \in (a, b)$ 成立

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (c, c)} F(x, y) = f'(c).$$

证 由题设, 利用 Lagrange 中值定理 $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, 其中 ξ 介于 x 和 y 之间。所以

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (c, c) \\ x \neq y}} F(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (c, c) \\ x \neq y}} f'(\xi) = f'(c),$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (c, c) \\ x = y}} F(x, y) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x) = f'(c),$$

综合上面两式可得

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (c, c)} F(x, y) = f'(c).$$

12. 设二元函数 $f(x, y)$ 在开集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 内对于变量 x 是连续的, 对于变量 y 满足 Lipschitz 条件:

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L |y' - y''|,$$

其中 $(x, y'), (x, y'') \in D$, L 为常数(通常称为 Lipschitz 常数)。证明 $f(x, y)$ 在 D 内连续。

证 假设 $(x_0, y_0) \in D$, 由于函数对于变量 x 是连续的, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, $\forall x (|x - x_0| < \delta)$, 成立

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

当 $|x, y - (x_0, y_0)| < \min(\delta, \epsilon)$ 时

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ &\leq L|y - y_0| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ &\leq L\epsilon + \epsilon, \end{aligned}$$

所以 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续, 证毕。

13. 证明: 若 f 和 g 是 D 到 \mathbf{R}^n 上的连续映射, 则映射 $f + g$ 与函数 $\langle f, g \rangle$ 在 D 上都是连续的。

证 假设 $x_0 \in D$, 由 f 和 g 是连续的, $\forall \epsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0, \forall x (|x - x_0| < \delta), \text{ 成立 } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x (|x - x_0| < \delta_1), \text{ 成立 } |g(x) - g(x_0)| < \epsilon,$$

于是, $\forall x (|x - x_0| < \min(\delta, \delta_1))$, 成立

$$\begin{aligned} &|f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < 2\epsilon, \end{aligned}$$

所以映射 $f + g$ 在 x_0 连续。又

$$\begin{aligned} &|\langle f(x), g(x) \rangle - \langle f(x_0), g(x_0) \rangle| \\ &= |\langle f(x) - f(x_0), g(x) \rangle + \langle f(x_0), g(x) - g(x_0) \rangle| \\ &\leq |g(x)|\epsilon + |f(x_0)|\epsilon, \end{aligned}$$

由于 g 连续, 所以 g 的每个分量都连续, 从而都局部有界, 于是 g 也局部有界。根据上式, $\langle f, g \rangle$ 在 x_0 连续, 证毕。

14. 证明复合映射的连续性定理(定理 11.2.3)。

证 假设 g 在 D 上连续, f 在 Ω 上连续, 并且 $x_0 \in D, u_0 = g(x_0) \in \Omega$ 。由 f 在 u_0 上连续, $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u (|u - u_0| < \eta)$ 成立

$$|f(u) - f(u_0)| < \epsilon.$$

对于上述 $\eta > 0$, 由 g 在 x_0 连续知 $\exists \delta > 0, \forall x (|x - x_0| < \delta)$ 成立

$$|g(x) - g(x_0)| < \eta.$$

于是, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f \circ g(x) - f \circ g(x_0)| = |f(u) - f(u_0)| < \epsilon,$$

所以复合函数 $f \circ g$ 在 x_0 连续。

第十一章 Euclid 空间上的极限和连续

a , 且 $a \in D$, 证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)。$$

证 由 f 在 a 连续, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x (|x - a| < \delta)$, 成立

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon。$$

又由于 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, 对于上述 $\delta > 0$, 存在 K , 当 $k > K$ 时成立

$$|x_k - a| < \delta,$$

于是当 $k > K$ 时成立

$$|f(x_k) - f(a)| < \epsilon。$$

所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)。$$

2. 设 f 是 \mathbf{R}^n 上的连续函数, c 为实数。设

$$A_c = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) < c\}, \quad B_c = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \leq c\}。$$

证明: A_c 为 \mathbf{R}^n 上的开集, B_c 为 \mathbf{R}^n 上的闭集。

证 对于任意 $x_0 \in A_c$, 由于 f 在 x_0 连续, 取 $\epsilon = c - f(x_0) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, $\forall x (|x - x_0| < \delta)$, 成立

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon = c - f(x_0),$$

即有 $f(x) < c$, 所以 $x \in A_c$ 。这说明 A_c 为 \mathbf{R}^n 上的开集。

由 f 在 \mathbf{R}^n 上连续可知 $-f$ 也在 \mathbf{R}^n 上连续, 于是

$$(B_c)^c = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) > c\} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid -f(x) < -c\}$$

为 \mathbf{R}^n 上的开集, 所以 B_c 为 \mathbf{R}^n 上的闭集。

3. 设二元函数

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - xy}, \quad (x, y) \in D = [0, 1] \times [0, 1],$$

证明: f 在 D 上连续, 但不一致连续。

证 由于 f 在 D 上是初等函数, 所以连续。但因为当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\left| \left(1 - \frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n} \right) - \left(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right) \right| \rightarrow 0,$$

而

$$\begin{aligned} & f\left(1 - \frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n} \right) - f\left(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{4n^2}{4n-1} - \frac{n^2}{2n-1} = \frac{(4n-3)n^2}{(4n-1)(2n-1)} \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

所以 f 在 D 上不一致连续。

4. 设 A 为 \mathbf{R}^n 上的非空子集, 定义 \mathbf{R}^n 上的函数 f 为

$$f(x) = \inf \{ \|x - y\| \mid y \in A\}.$$

它称为 x 到 A 的距离。证明：

(1) 当且仅当 $x \in \bar{A}$ 时, $f(x) = 0$;

(2) 对于任意 $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, 不等式

$$|f(x') - f(x'')| \leq |x' - x''|$$

成立, 从而 f 在 \mathbb{R}^n 上一致连续;

(3) 若 A 是紧集, 则对于任意 $c > 0$, 点集 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq c\}$ 是紧集。

证 (1) 假定 $x \in \bar{A}$, 则存在 A 中的点列 $\{x_k\}$, 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x| = 0$, 所以 $f(x) = 0$ 。反之, 由 $f(x) = 0$ 可知存在 A 中的点列 $\{x_k\}$, 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x| = 0$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, 所以 $x \in \bar{A}$ 。

(2) 不妨假设 $f(x') \geq f(x'')$ 。首先对于任意的 k , 存在 $x_k \in A$, 满足

$$f(x'') > |x'' - x_k| - \frac{1}{k},$$

再利用

$$f(x') \leq |x' - x_k|,$$

两式相减, 得到

$$0 < f(x') - f(x'') < |x' - x_k| - \left(|x'' - x_k| - \frac{1}{k} \right) \leq |x' - x''| + \frac{1}{k},$$

令 $k \rightarrow \infty$, 即得到

$$|f(x') - f(x'')| \leq |x' - x''|.$$

由上式即可知 f 在 \mathbb{R}^n 上一致连续。

(3) 由(2)知 f 在 \mathbb{R}^n 上连续, 再由习题 2 知点集 $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq c\}$ 是闭集。由于 A 是紧集, 所以 A 有界, 即 $\exists M, \forall x \in A$, 成立 $|x| \leq M$ 。 $\forall y \in B$, 取 $x \in A$, 使得

$$f(y) > |y - x| - 1.$$

于是

$$|y| \leq |y - x| + |x| < f(y) + 1 + M \leq c + 1 + M,$$

即 B 也有界。所以 B 为有界闭集, 也就是紧集。

5. 设二元函数 f 在 \mathbb{R}^2 上连续。证明：

(1) 若 $\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$, 则 f 在 \mathbb{R}^2 上的最小值必定存在;

(2) 若 $\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$, 则 f 在 \mathbb{R}^2 上的最大值与最小值至少存在一个。

证 (1) 任取一点 (x_0, y_0) , 由 $\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$, 可知存在 $R > 0$, 当 $x^2 + y^2 > R^2$, 成立 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ 。 $f(x, y)$ 在紧集 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 上一致连续, 故存在 $M > 0$, 使得 $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < M$ 。从而 $f(x, y) > f(x_0, y_0) - M$ 。故 $f(x, y)$ 在紧集 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 上的最小值存在。

\mathbb{R}^2 上必定取到最小值, 且此最小值就是它在 \mathbb{R}^2 上的最小值。

(2) 如果 $f(x, y) = 0$, 则命题显然成立。不然的话, 任取 (x_0, y_0) , 使得函数值在此点非零。

若 $f(x_0, y_0) > 0$, 由 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$, 可知存在 $R > 0$, 当 $x^2 + y^2 > R^2$, 成立 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, 则 $f(x, y)$ 在紧集 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 上必定取到最大值, 且此最大值就是它在 \mathbb{R}^2 上的最大值。

若 $f(x_0, y_0) < 0$, 由 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$, 可知存在 $R > 0$, 当 $x^2 + y^2 > R^2$, 成立 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, 则 $f(x, y)$ 在紧集 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 上必定取到最小值, 且此最小值就是它在 \mathbb{R}^2 上的最小值。

6. 设 f 是 \mathbb{R}^n 上的连续函数, 满足

(1) 当 $x \neq 0$ 时成立 $f(x) > 0$;

(2) 对于任意 x 与 $c > 0$, 成立 $f(cx) = cf(x)$ 。

证明: 存在 $a > 0, b > 0$, 使得

$$a|x| \leq f(x) \leq b|x|.$$

证 单位球面是 \mathbb{R}^n 上的紧集, 设 f 在单位球面上的最小值和最大值分别为 a 和 b , 则有

$$0 < a \leq f(x) \leq b < +\infty, \quad \forall |x| = 1.$$

于是 $\forall x \neq 0$, 由于 $\left| \frac{x}{|x|} \right| = 1$, 所以

$$f(x) = |x| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \leq b|x|,$$

同理 $f(x) \geq a|x|$ 。由于当 $x = 0$ 时不等式显然成立, 所以 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 成立

$$a|x| \leq f(x) \leq b|x|.$$

7. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为连续映射, 证明: 对于 \mathbb{R}^n 中的任意子集 A , 成立

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

举例说明 $f(\bar{A})$ 能够是 $\overline{f(A)}$ 的真子集。

证 $\forall x \in \bar{A}$, 存在 A 中的点列 $\{x_k\}$, 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, 由于映射 f 在 x 连续,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = f(x),$$

所以 $f(x) \in \overline{f(A)}$, 即 $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ 。

取 $n = 2, f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ 在 \mathbb{R}^2 上连续。令 $A = \mathbb{R}^2$, 则 $\bar{A} = A$, 但

$$f(\bar{A}) = \{x | x > 0\}, \quad \overline{f(A)} = \{x | x \geq 0\},$$

$f(\bar{A})$ 是 $\overline{f(A)}$ 的真子集。

8. 设 f 是有界开区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的一致连续函数, 证明:

(1) 可以将 f 连续延拓到 D 的边界上, 即存在定义在 \bar{D} 上的连续函数 \tilde{f} , 使得 $\tilde{f}|_D = f$;

(2) f 在 D 上有界。

证 (1) 由于 f 在 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上一致连续, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x', x'' \in D$ ($|x' - x''| < \delta$):

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

设 $\zeta \in \partial D$, 任取点列 $\{x_n\}$ ($x_n \in D$, $x_n \rightarrow \zeta$), 由于 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 点列, 对于上述 $\delta > 0$, $\exists K$, 当 $m, n > K$ 时, 成立 $|x_m - x_n| < \delta$, 于是

$$|f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon,$$

所以 $\{f(x_n)\}$ 是基本数列, 故一定收敛。记该极限为 $g(\zeta)$ 。

在 $|f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$ 中令 $m \rightarrow \infty$, 得到

$$|f(x_n) - g(\zeta)| \leq \epsilon.$$

对于 $\forall x \in D$, $|x - \zeta| < \delta/2$, 存在点列 $\{x_n\}$ 中某项 x_k , 满足

$$|x_k - \zeta| < \delta/2, |f(x_k) - g(\zeta)| \leq \epsilon.$$

于是

$$|x - x_k| \leq |x - \zeta| + |x_k - \zeta| < \delta,$$

$$|f(x) - g(\zeta)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - g(\zeta)| < 2\epsilon,$$

所以

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \zeta \\ x \in D}} f(x) = g(\zeta),$$

由此可知 $\{f(x_n)\}$ 的极限 $g(\zeta)$ 只与 $\zeta \in \partial D$ 有关, 而与点列 $\{x_n\}$ 的选取无关。

令

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D, \\ g(x), & x \in \partial D. \end{cases}$$

显然, \tilde{f} 在 D 上连续。现只要证明 \tilde{f} 在 ∂D 上连续。设 $\zeta \in \partial D$, 由

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \zeta \\ x \in D}} f(x) = g(\zeta) = \tilde{f}(\zeta),$$

可知 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in D$ ($|x - \zeta| < \delta$):

$$|f(x) - \tilde{f}(\zeta)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

对于 $\forall \zeta' \in \partial D$ ($|\zeta' - \zeta| < \delta$), 在上式中令 $x \rightarrow \zeta'$, 由

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \zeta' \\ x \in D}} f(x) = \tilde{f}(\zeta'),$$

可知

$$|\tilde{f}(\zeta') - \tilde{f}(\zeta)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$



于是得到

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \zeta \\ x \in D}} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(\zeta),$$

这就证明了 \tilde{f} 在 \bar{D} 上连续。换言之, \tilde{f} 是定义在 \bar{D} 上的连续函数, 满足 $\tilde{f}|_D = f$ 。

(2) 由于 \bar{D} 为有界闭集, 即紧集, \tilde{f} 在 \bar{D} 连续保证了 \tilde{f} 在 \bar{D} 有界, 从而 f 在 D 上有界。

第十二章 多元函数的微分学

§ 1 偏导数与全微分

1. 求下列函数的偏导数:

$$(1) z = x^5 - 6x^4y^2 + y^6; \quad (2) z = x^2 \ln(x^2 + y^2);$$

$$(3) z = xy + \frac{x}{y}; \quad (4) z = \sin(xy) + \cos^2(xy);$$

$$(5) z = e^x (\cos y + x \sin y); \quad (6) z = \tan\left(\frac{x^2}{y}\right);$$

$$(7) z = \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x}; \quad (8) z = (1 + xy)^y;$$

$$(9) z = \ln(x + \ln y); \quad (10) z = \arctan \frac{x + y}{1 - xy};$$

$$(11) u = e^{x(x^2 + y^2 + z^2)}; \quad (12) u = x^{\frac{y}{x}};$$

$$(13) u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad (14) u = x^{y^x};$$

$$(15) u = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (a_i \text{ 为常数}); \quad (16) u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \text{ 且为常数}.$$

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 - 24x^3y^2, \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^5 - 12x^4y$.

(2) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3}{x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}$.

(3) $\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$.

(4) $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \cos(xy) \cdot [1 - 2\sin(xy)], \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos(xy) [1 - 2\sin(xy)]$.

(5) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x (\cos y + x \sin y + \sin y), \frac{\partial z}{\partial y} = e^x (x \cos y - \sin y)$.

(6) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y} \sec^2\left(\frac{x^2}{y}\right), \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \sec^2\left(\frac{x^2}{y}\right)$.

(7) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2} \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}$.

$$(8) \frac{\partial z}{\partial x} = y^2(1+xy)^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = (1+xy)^y \left[\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \right]。$$

$$(9) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+\ln y}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y(x+\ln y)}。$$

$$(10) \text{注意 } z = \arctan x + \arctan y, \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}。$$

$$(11) \frac{\partial u}{\partial x} = (3x^2 + y^2 + z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xye^{x(x^2+y^2+z^2)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2xz e^{x(x^2+y^2+z^2)}。$$

$$(12) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z}x^{\frac{z}{x}-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\ln x}{z}x^{\frac{z}{x}}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y\ln x}{z^2}x^{\frac{z}{x}}。$$

$$(13) \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}。$$

$$(14) \frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = zy^{z-1}x^{y^z} \ln x, \frac{\partial u}{\partial z} = y^z x^{y^z} \ln x \ln y。$$

$$(15) \frac{\partial u}{\partial x_i} = a_i, i = 1, 2, \dots, n。$$

$$(16) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j, i = 1, 2, \dots, n, \frac{\partial u}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i, j = 1, 2, \dots, n。$$

2. 设 $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, 求 $f_x(3, 4)$ 及 $f_y(3, 4)$ 。

解 因为 $f_x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f_y = 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 所以

$$f_x(3, 4) = \frac{2}{5}, \quad f_y(3, 4) = \frac{1}{5}。$$

3. 设 $z = e^{\frac{x^2}{2}}$, 验证 $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 。

证 由于 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2} e^{\frac{x^2}{2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3} e^{\frac{x^2}{2}}$, 所以

$$2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0。$$

4. 曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4}, \\ y = 4 \end{cases}$, 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线与 x 轴的正向所夹的角度是多少?

解 以 x 为参数, 曲线在点 $(2, 4, 5)$ 处的切向量为 $\left(\frac{dx}{dx}, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx} \right) \Big|_{x=2} = (1, 0, 1)$, 设它与 x 轴的正向所夹的角度为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{(1,0,1) \cdot (1,0,0)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 。

5. 求下列函数在指定点的全微分：

$$(1) f(x, y) = 3x^2y - xy^2, \text{ 在点}(1, 2);$$

$$(2) f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2), \text{ 在点}(2, 4);$$

$$(3) f(x, y) = \frac{\sin x}{y^2}, \text{ 在点}(0, 1) \text{ 和 } \left(\frac{\pi}{4}, 2\right).$$

解 (1) 因为 $df(x, y) = (6xy - y^2)dx + (3x^2 - 2xy)dy$, 所以

$$df(1, 2) = 8dx - dy.$$

(2) 因为 $df(x, y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}dx + \frac{2y}{1+x^2+y^2}dy$, 所以

$$df(2, 4) = \frac{4}{21}dx + \frac{8}{21}dy.$$

(3) 因为 $df(x, y) = \frac{\cos x}{y^2}dx - \frac{2\sin x}{y^3}dy$, 所以

$$df(0, 1) = dx, df\left(\frac{\pi}{4}, 2\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}dx - \frac{\sqrt{2}}{8}dy.$$

6. 求下列函数的全微分：

$$(1) z = y^x;$$

$$(2) z = xye^{xy};$$

$$(3) z = \frac{x+y}{x-y};$$

$$(4) z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$(5) u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad (6) u = \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$\text{解 (1)} \quad dz = y^x \ln y dx + xy^{x-1} dy.$$

$$(2) dz = e^{xy} (1 + xy) (y dx + x dy).$$

$$(3) dz = -\frac{2y}{(x-y)^2}dx + \frac{2x}{(x-y)^2}dy.$$

$$(4) dz = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy.$$

$$(5) du = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$(6) du = \frac{2(x dx + y dy + z dz)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

7. 求函数 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1, 0)$ 处的沿从点 $P(1, 0)$ 到点 $Q(2, -1)$ 方向的方向导数。

解 由于 $\mathbf{v} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{(2, -1) - (1, 0)}{\|(2, -1) - (1, 0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) = (v_1, v_2)$, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{2y}, \frac{\partial z}{\partial y} = 2x e^{2y},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} v_1 + \frac{\partial z}{\partial y} v_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

8. 设 $z = x^2 - xy + y^2$, 求它在点 $(1, 1)$ 处的沿方向 $\mathbf{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 的方向导数, 并指出:

- (1) 沿哪个方向的方向导数最大?
- (2) 沿哪个方向的方向导数最小?
- (3) 沿哪个方向的方向导数为零?

解 由于

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha = (2x - y) \cos \alpha + (2y - x) \sin \alpha,$$

所以

$$\left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_{(1,1)} = \cos \alpha + \sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin \alpha = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$

- (1) 当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, 沿 $\mathbf{v} = \left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}\right)$, 方向导数最大。
- (2) 当 $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ 时, 沿 $\mathbf{v} = \left(\cos \frac{5\pi}{4}, \sin \frac{5\pi}{4}\right)$, 方向导数最小。
- (3) 当 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$ 时, 沿 $\mathbf{v} = \left(\cos \frac{3\pi}{4}, \sin \frac{3\pi}{4}\right)$ 或 $\mathbf{v} = \left(\cos \frac{7\pi}{4}, \sin \frac{7\pi}{4}\right)$, 方向导数为零。

9. 如果可微函数 $f(x, y)$ 在点 $(1, 2)$ 处的从点 $(1, 2)$ 到点 $(2, 2)$ 方向的方向导数为 2, 从点 $(1, 2)$ 到点 $(1, 1)$ 方向的方向导数为 -2。求

- (1) 这个函数在点 $(1, 2)$ 处的梯度;
- (2) 点 $(1, 2)$ 处的从点 $(1, 2)$ 到点 $(4, 6)$ 方向的方向导数。

解 $\mathbf{v}_1 = (2, 2) - (1, 2) = (1, 0)$, $\frac{\partial z}{\partial v_1} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot 0 = \frac{\partial z}{\partial x} = 2$ 。

$\mathbf{v}_2 = (1, 1) - (1, 2) = (0, -1)$, $\frac{\partial z}{\partial v_2} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (-1) = -\frac{\partial z}{\partial y} = -2$ 。

所以在 $(1, 2)$ 处,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

(1) $\text{grad } f(1, 2) = (2, 2)$ 。

(2) 因为 $(4,6)-(1,2)=(3,4)$, $\mathbf{v}=\frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{(3,4)}{5}$, 所以

$$\left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{(1,2)} = 2 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{14}{5}.$$

10. 求下列函数的梯度:

$$(1) z = x^2 + y^2 \sin(xy); \quad (2) z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right);$$

$$(3) u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3xy + 4yz + 6x - 2y - 5z, \text{ 在点 } (1,1,1).$$

$$\text{解 } (1) \mathbf{grad} z = (2x + y^2 \cos(xy), 2y \sin(xy) + xy^2 \cos(xy)).$$

$$(2) \mathbf{grad} z = \left(-\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2} \right).$$

$$(3) \mathbf{grad} u = (2x + 3y + 6, 4y + 3x + 4z - 2, 6z + 4y - 5), \mathbf{grad} u(1,1,1) = (11, 9, 5).$$

11. 对于函数 $f(x, y) = xy$, 在第 I 象限(包括边界)的每一点, 指出函数值增加最快的方向。

解 在 $(x, y) \neq (0,0)$ 点, 函数值增长最快的方向为 $\mathbf{grad} f = (y, x)$;

在 $(0,0)$ 点, 由于梯度为零向量, 不能直接从梯度得出函数值增长最快的方向。设沿方向 $\mathbf{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 自变量的改变量为

$$\Delta x = t \cos \alpha, \Delta y = t \sin \alpha,$$

则函数值的改变量为

$$f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \Delta x \Delta y = t^2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} t^2 \sin 2\alpha,$$

由此可知当 $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 时函数值增长最快, 即函数值增长最快的方向为 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 。

12. 验证函数

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$$

在原点 $(0,0)$ 连续且可偏导, 但除方向 \mathbf{e}_i 和 $-\mathbf{e}_i$ ($i=1,2$) 外, 在原点的沿其它方向的方向导数都不存在。

$$\text{解 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt[3]{xy} = 0 = f(0,0),$$

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot \Delta y} - 0}{\Delta y} = 0,$$

所以函数在原点 $(0,0)$ 连续且可偏导。取方向 $\mathbf{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + t \cos \alpha, 0 + t \sin \alpha) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{t \cos \alpha \cdot t \sin \alpha}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{\sin 2\alpha}}{\sqrt[3]{2t}}, \end{aligned}$$

当 $\sin 2\alpha = 0$, 即 $\alpha = \frac{k\pi}{2}$ 时, 极限存在且为零; 当 $\sin 2\alpha \neq 0$, 即 $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ 时, 极限不存在。所以除方向 e_i 和 $-e_i$ ($i = 1, 2$) 外, 在原点的沿其它方向的方向导数都不存在。

13. 验证函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在原点 $(0, 0)$ 连续且可偏导, 但它在该点不可微。

解 由于

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 ((x, y) \rightarrow (0, 0)),$$

所以

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0).$$

由定义,

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{\sqrt{\Delta x^2 + 0}} - 0}{\Delta x} = 0, f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot \Delta y}{\sqrt{0 + \Delta y^2}} - 0}{\Delta y} = 0.$$

所以函数在原点 $(0, 0)$ 连续且可偏导。但

$$\begin{aligned} f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) - [f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y] \\ = f(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \neq o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \end{aligned}$$

所以函数在 $(0, 0)$ 不可微。

14. 验证函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

的偏导函数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 不连续, 但它在该点可微。

解 由定义,

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x^2 + 0^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0,$$

当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$f_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0.$$

由于

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x=y}} f_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{2x^2} \right),$$

极限不存在, 所以 $f_x(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 不连续。同理 $f_y(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 也不连续。但由于

$$\begin{aligned} f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) &= [f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y] \\ &= (\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \end{aligned}$$

所以函数在 $(0, 0)$ 可微。

15. 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在原点 $(0, 0)$ 处沿各个方向的方向导数都存在, 但它在该点不连续, 因而不可微。

解 函数沿方向 $\mathbf{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 的方向导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + t \cos \alpha, 0 + t \sin \alpha) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos \alpha \sin^2 \alpha \cdot t^3}{(\cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha \cdot t^2) t^3} = \begin{cases} \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}, & \cos \alpha \neq 0, \\ 0, & \cos \alpha = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

所以函数在原点 $(0, 0)$ 处沿各个方向的方向导数都存在。但当 (x, y) 沿曲线 $x = ky^2$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 极限

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0 \\ x = ky^2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2ky^4}{k^2 y^4 + y^4} = \frac{2k}{k^2 + 1}$$

与 k 有关, 所以函数在原点不连续, 因而不可微。

16. 计算下列函数的高阶导数:

$$(1) z = \arctan \frac{y}{x}, \text{求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

$$(2) z = x \sin(x + y) + y \cos(x + y), \text{求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

$$(3) z = x e^{xy}, \text{求 } \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2};$$

$$(4) u = \ln(ax + by + cz), \text{求 } \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2};$$

$$(5) z = (x - a)^p (y - b)^q, \text{求 } \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q};$$



(6) $u = xyz e^{x+y+z}$, 求 $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$ 。

解 (1) 由

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(2) 由

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (1-y)\sin(x+y) + x\cos(x+y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (1+x)\cos(x+y) - y\sin(x+y),$$

得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2-y)\cos(x+y) - x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1-y)\cos(x+y) - (1+x)\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -y\cos(x+y) - (x+2)\sin(x+y).$$

(3) 由

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^3 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2x + x^2 y) e^{xy},$$

得到

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (2 + 4xy + x^2 y^2) e^{xy}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = (3x^2 + x^3 y) e^{xy}.$$

(4) 经计算, 可依次得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{ax + by + cz} \frac{\partial(ax + by + cz)}{\partial x} = \frac{a}{ax + by + cz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{a}{(ax + by + cz)^2} \frac{\partial(ax + by + cz)}{\partial x} = -\frac{a^2}{(ax + by + cz)^2},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{2a^2}{(ax + by + cz)^2} \frac{\partial(ax + by + cz)}{\partial x} = \frac{2a^3}{(ax + by + cz)^3},$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{3 \cdot 2a^3}{(ax + by + cz)^4} \frac{\partial(ax + by + cz)}{\partial x} = -\frac{6a^4}{(ax + by + cz)^4},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{2a^2}{(ax + by + cz)^2} \frac{\partial(ax + by + cz)}{\partial y} = \frac{2a^2 b}{(ax + by + cz)^2},$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} = -\frac{3 \cdot 2a^2 b}{(ax + by + cz)^4} \frac{\partial(ax + by + cz)}{\partial y} = -\frac{6a^2 b^2}{(ax + by + cz)^4}.$$

$$(5) \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} = \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left(\frac{\partial^q z}{\partial y^q} \right) = \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left((x-a)^p \frac{\partial^q (y-b)^q}{\partial y^q} \right) \\ = \frac{d^p (x-a)^p}{dx^p} \frac{d^q (y-b)^q}{dy^q} = p! q!.$$

(6) 对 x, y, z 应用 Leibniz 公式,

$$\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} = \frac{\partial^p (x e^x)}{\partial x^p} \frac{\partial^q (y e^y)}{\partial y^q} \frac{\partial^r (z e^z)}{\partial z^r} = \frac{d^p (x e^x)}{dx^p} \frac{d^q (y e^y)}{dy^q} \frac{d^r (z e^z)}{dz^r} \\ = (x+p) e^x \cdot (y+q) e^y \cdot (z+r) e^z \\ = (x+p)(y+q)(z+r) e^{x+y+z}.$$

17. 计算下列函数的高阶微分:

- (1) $z = x \ln(xy)$, 求 $d^2 z$;
- (2) $z = \sin^2(ax + by)$, 求 $d^3 z$;
- (3) $u = e^{x+y+z} (x^2 + y^2 + z^2)$, 求 $d^3 u$;
- (4) $z = e^x \sin y$, 求 $d^k z$.

解 (1) $dz = (\ln(xy) + 1)dx + \frac{x}{y}dy$,

$$d^2 z = \frac{1}{x}dx^2 + \frac{2}{y}dxdy - \frac{x}{y^2}dy^2.$$

(2) $dz = 2\sin(ax + by)\cos(ax + by)d(ax + by) = \sin 2(ax + by)(adx + bdy)$,

$$d^2 z = 2\cos 2(ax + by)(adx + bdy)^2,$$

$$d^3 z = -4\sin 2(ax + by)(adx + bdy)^3.$$

(3) $du = e^{x+y+z} [(x^2 + y^2 + z^2)(dx + dy + dz) + (2xdx + 2ydy + 2zdz)]$,

$$d^2 u = e^{x+y+z} [(x^2 + y^2 + z^2)(dx + dy + dz)^2 + 2(2xdx + 2ydy + 2zdz)(dx + dy + dz) + 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2],$$

$$d^3 u = e^{x+y+z} [(x^2 + y^2 + z^2)(dx + dy + dz)^3 + 6(xdx + ydy + zdz)(dx + dy + dz)^2 + 6(dx^2 + dy^2 + dz^2)(dx + dy + dz)]$$

$$= e^{x+y+z} [(x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6)dx^3 + (x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 6)dy^3 + (x^2 + y^2 + z^2 + 6z + 6)dz^3] + 3e^{x+y+z} [(x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2)dx^2 dy + (x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 2z + 2)dy^2 dz + (x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 2x + 2)dz^2 dx + (x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 2)dx dy^2 + (x^2 + y^2 + z^2 + 2y + 4z + 2)dy dz^2 + (x^2 + y^2 + z^2 + 2z + 4x + 2)dz dx^2] + 6e^{x+y+z} (x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z)dx dy dz.$$

$$(4) \quad d^k z = \left(dx \frac{\partial z}{\partial x} + dy \frac{\partial z}{\partial y} \right)^k \\ = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^i e^x}{\partial x^i} dx^i \cdot \frac{\partial^{k-i} \sin y}{\partial y^{k-i}} dy^{k-i} \\ = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} e^x \sin \left(y + \frac{k-i}{2}\pi \right) dx^i dy^{k-i}.$$

18. 函数 $z = f(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin y + \frac{1}{1-xy}, \text{ 及 } f(0, y) = 2\sin y + y^3.$$

求 $f(x, y)$ 的表达式。

解 对 x 积分, 得到

$$f(x, y) = -x\sin y - \frac{1}{y}\ln(1-xy) + g(y),$$

再将 $f(0, y) = 2\sin y + y^3$ 代入上式, 得到

$$g(y) = 2\sin y + y^3,$$

所以

$$f(x, y) = (2-x)\sin y - \frac{1}{y}\ln(1-xy) + y^3.$$

19. 验证:

(1) $z = e^{-kn^2x} \sin(ny)$ 满足热传导方程 $\frac{\partial z}{\partial x} = k \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(2) $u = z \arctan \frac{x}{y}$ 满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ 。

证 (1) 由

$$\frac{\partial z}{\partial y} = n e^{-kn^2x} \cos(ny), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -n^2 e^{-kn^2x} \sin(ny),$$

得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -kn^2 e^{-kn^2x} \sin(ny) = k \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

(2) 由

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{yz}{x^2 + y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2xyz}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{xz}{x^2 + y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xyz}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \arctan \frac{x}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

20. 设 $f(r, t) = t^\alpha e^{-\frac{r^2}{4t}}$, 确定 α 使得 f 满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right).$$

解 将

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\alpha t^{\alpha-1} + \frac{1}{4} t^{\alpha-2} r^2 \right) e^{-\frac{r^2}{4t}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{1}{2} t^{\alpha-1} r e^{-\frac{r^2}{4t}}, \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \left(-\frac{3}{2} t^{\alpha-1} r^2 + \frac{1}{4} t^{\alpha-2} r^4 \right) e^{-\frac{r^2}{4t}},$$

代入方程,解得

$$\alpha = -\frac{3}{2}.$$

21. 求下列向量值函数在指定点的导数:

$$(1) f(x) = (a \cos x, b \sin x, cx)^\top, \text{ 在 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 点};$$

$$(2) f(x, y, z) = (3x + e^y \cot z, x^3 + y^2 \tan z)^\top, \text{ 在 } \left(1, 2, \frac{\pi}{4}\right) \text{ 点};$$

$$(3) g(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)^\top, \text{ 在 } (1, \pi) \text{ 点}.$$

$$\text{解 (1)} \quad f'(x) = (-a \sin x, b \cos x, c)^\top,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b, c\right)^\top.$$

$$(2) \quad f'(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3 & e^y \cot z & -e^y \csc^2 z \\ 3x^2 & 2y \tan z & y^2 \sec^2 z \end{bmatrix},$$

$$f'\left(1, 2, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} 3 & e^2 & -2e^2 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \quad g'(u, v) = \begin{bmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$g'(1, \pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

22. 设 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ 为向量值函数。

$$(1) \text{ 如果坐标分量函数 } f_1(x, y, z) = x, f_2(x, y, z) = y, f_3(x, y, z) = z,$$

证明 f 的导数是单位阵;

(2) 写出坐标分量函数的一般形式,使 f 的导数是单位阵;

(3) 如果已知 f 的导数是对角阵 $\text{diag}(p(x), q(y), r(z))$, 那么坐标分量函数应该具有什么样的形式?

解 (1) 由于

$$f'_1(x, y, z) = (1, 0, 0), f'_2(x, y, z) = (0, 1, 0), f'_3(x, y, z) = (0, 0, 1),$$

所以 f 的导数是单位阵。



(2) 由 $f'_1(x, y, z) = (1, 0, 0)$, 可知 $f_1(x, y, z)$ 与 y, z 无关, 所以

$$f_1(x, y, z) = x + C_1,$$

同理可得

$$f_2(x, y, z) = y + C_2, \quad f_3(x, y, z) = z + C_3.$$

(3) 由 $f'_1(x, y, z) = (p(x), 0, 0)$, 可知 $f_1(x, y, z)$ 与 y, z 无关, 所以

$$f_1(x, y, z) = \int p(x) dx,$$

同理可得

$$f_2(x, y, z) = \int q(y) dy, \quad f_3(x, y, z) = \int r(z) dz.$$

§ 2

多元复合函数的求导法则

1. 利用链式规则求偏导数:

$$(1) z = \tan(3t + 2x^2 - y^2), x = \frac{1}{t}, y = \sqrt{t}, \text{求 } \frac{dz}{dt};$$

$$(2) z = e^{x+2y}, x = \sin t, y = t^3, \text{求 } \frac{d^2z}{dt^2};$$

$$(3) w = \frac{e^{xy}(y - z)}{a^2 + 1}, y = a \sin x, z = \cos x, \text{求 } \frac{dw}{dx};$$

$$(4) z = u^2 \ln v, u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y, \text{求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$(5) u = e^{x^2 + y^2 + z^2}, z = y^2 \sin x, \text{求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$(6) w = (x + y + z) \sin(x^2 + y^2 + z^2), x = t e^s, y = e^t, z = e^{s+t}, \text{求 } \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t};$$

$$(7) z = x^2 + y^2 + \cos(x + y), x = u + v, y = \arcsin v, \text{求 } \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u};$$

(以下假设 f 具有二阶连续偏导数)

$$(8) u = f\left(xy, \frac{x}{y}\right), \text{求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$(9) u = f(x^2 + y^2 + z^2), \text{求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y};$$

$$(10) w = f(x, y, z), x = u + v, y = u - v, z = uv, \text{求 } \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}.$$

解 (1) 记 $u = 3t + 2x^2 - y^2$, 则

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{du} \frac{du}{dt} = \frac{dz}{du} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[3 + 4x \cdot \left(-\frac{1}{t^2} \right) - 2y \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \right] \sec^2 u \\
 &= \left(2 - \frac{4}{t^3} \right) \sec^2 \left(2t + \frac{2}{t^2} \right) \circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = e^{x-2y} \cos t - 2e^{x-2y} \cdot 3t^2 = z(\cos t - 6t^2), \\
 \frac{d^2 z}{dt^2} &= (\cos t - 6t^2) \frac{dz}{dt} + z \frac{d}{dt}(\cos t - 6t^2) \\
 &= e^{\sin t - 2t^3} [(\cos t - 6t^2)^2 - \sin t - 12t] \circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{dw}{dx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dx} \\
 &= \frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1} + \frac{e^{ax}}{a^2+1} \cdot a \cos x - \frac{e^{ax}}{a^2+1} \cdot (-\sin x) \\
 &= e^{ax} \sin x \circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} \cdot 3 \\
 &= \frac{2x}{y^2} \ln(3x-2y) + \frac{3x^2}{y^2(3x-2y)}, \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \ln v \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) + \frac{u^2}{v} \cdot (-2) \\
 &= -\frac{2x^2}{y^3} \ln(3x-2y) - \frac{2x^2}{y^2(3x-2y)} \circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = u \cdot 2x + u \cdot 2z \cdot y^2 \cos x \\
 &= e^{x^2+y^2+y^4 \sin^2 x} (2x + 2y^4 \sin x \cos x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = u \cdot 2y + u \cdot 2z \cdot 2y \sin x \\
 &= e^{x^2+y^2+y^4 \sin^2 x} (2y + 4y^3 \sin^2 x) \circ
 \end{aligned}$$

(6) 记 $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = x + y + z$ 。则

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\
 &= x(\sin u + 2xv \cos u) + 0(\sin u + 2yv \cos u) + z(\sin u + 2zv \cos u) \\
 &= te^t(\sin u + 2xv \cos u) + e^{t+1}(\sin u + 2yv \cos u),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\
 &= e^t(\sin u + 2xv \cos u) + y(\sin u + 2yv \cos u) + z(\sin u + 2zv \cos u) \\
 &= e^t(\sin u + 2xv \cos u) + e^t(\sin u + 2yv \cos u) + e^{t+1}(\sin u + 2zv \cos u) \circ
 \end{aligned}$$

$$(7) \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = [2x - \sin(x+y)] \cdot 1 + [2y - \sin(x+y)] \cdot 0 \\ = 2(u+v) - \sin(u+v + \arcsin v),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) = 2 - \cos(u+v + \arcsin v) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right).$$

$$(8) \text{记 } v = xy, w = \frac{x}{y}, \text{则}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = yf_1\left(xy, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}f_2\left(xy, \frac{x}{y}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} = xf_1\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}f_2\left(xy, \frac{x}{y}\right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= f_1\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y^2}f_2\left(xy, \frac{x}{y}\right) + x \frac{\partial}{\partial x} f_1\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2} \frac{\partial}{\partial x} f_2\left(xy, \frac{x}{y}\right) \\ &= f_1\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y^2}f_2\left(xy, \frac{x}{y}\right) + xyf_{11}\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^3}f_{22}\left(xy, \frac{x}{y}\right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{2x}{y^3}f_2\left(xy, \frac{x}{y}\right) + x \frac{\partial}{\partial y} f_1\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} f_2\left(xy, \frac{x}{y}\right) \\ &= \frac{2x}{y^3}f_2\left(xy, \frac{x}{y}\right) + x^2 f_{11}\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{2x^2}{y^2}f_{12}\left(xy, \frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^4}f_{22}\left(xy, \frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

$$(9) \text{记 } v = x^2 + y^2 + z^2, \text{则}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dv} \frac{\partial v}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{dv} \frac{\partial v}{\partial y} = 2yf'(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{df}{dv} \frac{\partial v}{\partial z} = 2zf'(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 2x \frac{\partial}{\partial x} f'(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 2y \frac{\partial}{\partial x} f'(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= 4xyf''(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

$$(10) \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} = f_x + f_y + vf_z,$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} = f_x - f_y + u f_z, \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v} = f_x + \frac{\partial f_x}{\partial u} - \frac{\partial f_y}{\partial u} + u \frac{\partial f_z}{\partial u} \\
 &= f_x + \frac{\partial f_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial f_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} + \\
 &\quad u \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\
 &= f_{xx} + (u + v) f_{xy} - f_{yy} + (u - v) f_{yz} + f_z + u v f_{zz}.
 \end{aligned}$$

2. 设 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 且 $f(x, x^2) = 1, f_x(x, x^2) = x$, 求 $f_y(x, x^2)$ 。

解 在等式 $f(x, x^2) = 1$ 两边对 x 求导, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = f_x(x, x^2) + 2x f_y(x, x^2) = 0,$$

再将 $f_x(x, x^2) = x$ 代入, 即可得到

$$f_y(x, x^2) = -\frac{1}{2}.$$

3. 设 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 且 $f(1, 1) = 1, f_x(1, 1) = 2, f_y(1, 1) = 3$ 。如果 $\varphi(x) = f(x, f(x, x))$, 求 $\varphi'(1)$ 。

$$\text{解 } \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \frac{dy(x)}{dx},$$

其中

$$y(x) = f(x, x), \frac{dy(x)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x).$$

由于 $y(1) = f(1, 1) = 1$, 以 $x = 1$ 代入上述等式, 得到

$$\varphi'(1) = f_x(1, 1) + f_y(1, 1)(f_x(1, 1) + f_y(1, 1)) = 17.$$

4. 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 其中 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(t) \neq 0$, 求 $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y}$ 。

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{f^2(x^2 - y^2)} \frac{\partial f(x^2 - y^2)}{\partial x} = -\frac{2xyf'(x^2 - y^2)}{f^2(x^2 - y^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{f(x^2 - y^2)} - \frac{y}{f^2(x^2 - y^2)} \frac{\partial f(x^2 - y^2)}{\partial y} = \frac{1}{f(x^2 - y^2)} + \frac{2y^2 f'(x^2 - y^2)}{f^2(x^2 - y^2)},$$

直接计算可得

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{yf(x^2 - y^2)}.$$

5. 设 $z = \arctan \frac{x}{y}$, $x = u + v$, $y = u - v$, 验证

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y} + \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{y - x}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y} + \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{x}{y^2} = \frac{y + x}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

又由于 $x^2 + y^2 = (u + v)^2 + (u - v)^2 = 2u^2 + 2v^2$, 所以

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}.$$

6. 设 φ 和 ψ 具有二阶连续导数, 验证

$$(1) \quad u = y\varphi(x^2 - y^2) \text{ 满足 } y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y}u;$$

$$(2) \quad u = \varphi(x - at) + \psi(x + at) \text{ 满足波动方程 } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (1) \quad &\frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial \varphi(x^2 - y^2)}{\partial x} \\ &= y\varphi'(x^2 - y^2) \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} = 2xy\varphi'(x^2 - y^2), \\ &\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x^2 - y^2) + y \frac{\partial \varphi(x^2 - y^2)}{\partial y} \\ &= \varphi(x^2 - y^2) + y\varphi'(x^2 - y^2) \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = \varphi(x^2 - y^2) - 2y^2\varphi'(x^2 - y^2), \end{aligned}$$

所以

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y}u.$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x - at) + \psi''(x + at),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \varphi''(x - at) + a^2 \psi''(x + at),$$



所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

7. 设 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 写出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 在坐标变换

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy \end{cases}$$

下的表达式。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \frac{\partial z}{\partial u} + 2y \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial z}{\partial u} + 2x \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2y \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= 2 \frac{\partial z}{\partial u} + 4x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 8xy \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 4y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \frac{\partial z}{\partial u} + 2x \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -2 \frac{\partial z}{\partial u} - 2y \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2x \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -2 \frac{\partial z}{\partial u} + 4y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 8xy \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 4x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

由于 $u^2 + v^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$, 所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) = 4\sqrt{u^2 + v^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

8. 设 $f(x, y) = \int_0^y e^{-t^2} dt$, 求 $\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{-x^2 y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{-x^2 y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2xy^3 e^{-x^2 y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{-x^2 y^2} - 2x^2 y^2 e^{-x^2 y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^3 y e^{-x^2 y^2}. \end{aligned}$$

所以

$$\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{-x^2 y^2}.$$

9. 如果函数 $f(x, y)$ 满足: 对于任意的实数 t 及 x, y , 成立

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y),$$

那么 f 称为 n 次齐次函数。

(1) 证明 n 次齐次函数 f 满足方程

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf;$$

(2) 利用上述性质,对于 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 求出 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ 。

证 (1) 在等式 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ 两边对 t 求导,

$$\frac{\partial f(tx, ty)}{\partial t} = xf_1(tx, ty) + yf_2(tx, ty) = nt^{n-1}f(x, y),$$

将 $t=1$ 代入即得到

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

(2) 由于 $z(tx, ty) = tz(x, y)$, 所以 $n=1$, 由(1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

10. 设 $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

解 令 $u = xy, v = \frac{x}{y}$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f \partial u}{\partial u \partial y} + \frac{\partial f \partial v}{\partial v \partial y} + \frac{dg \partial v}{dv \partial y} = xf_1(u, v) - \frac{x}{y^2}f_2(u, v) - \frac{x}{y^2}g'(v), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f_1(u, v) - \frac{1}{y^2}f_2(u, v) - \frac{1}{y^3}g'(v) + x \left[f_{11}(u, v) \frac{\partial u}{\partial x} + f_{12}(u, v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \\ &\quad \frac{x}{y^2} \left[f_{21}(u, v) \frac{\partial u}{\partial x} + f_{22}(u, v) \frac{\partial v}{\partial x} + g''(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ &= f_1\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y^2}f_2\left(xy, \frac{x}{y}\right) + xyf_{11}\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^3}f_{22}\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \\ &\quad \frac{1}{y^2}g'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^3}g''\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

11. 设向量值函数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的坐标分量函数为

$$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u^2 - v^2, \\ z = uv. \end{cases}$$

向量值函数 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的坐标分量函数为

$$\begin{cases} u = r \cos \theta, \\ v = r \sin \theta. \end{cases}$$

求复合函数 $f \circ g$ 的导数。

$$\text{解 } f'(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \\ v & u \end{pmatrix}, g'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix},$$

所以

$$(f \circ g)'(r, \theta) = f'(g(r, \theta))g'(r, \theta) = \begin{bmatrix} 2r\cos\theta & 2r\sin\theta \\ 2r\cos\theta & -2r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2r & 0 \\ 2r\cos 2\theta & -2r^2 \sin 2\theta \\ r\sin 2\theta & r^2 \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

12. 设 $w = f(x, u, v)$, $u = g(y, z)$, $v = h(x, y)$, 求 $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f_x + f_u h_x, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = f_u g_y + f_v h_y, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = f_v g_z. \end{aligned}$$

13. 设 $z = u^v$, $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \arctan \frac{y}{x}$, 求 dz 。

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= vu^{v-1} \frac{x}{x^2 + y^2} + u^v \ln u \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= vu^{v-1} \frac{x}{x^2 + y^2} - u^v \ln u \frac{y}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= vu^{v-1} \frac{y}{x^2 + y^2} + u^v \ln u \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) \\ &= vu^{v-1} \frac{y}{x^2 + y^2} + u^v \ln u \frac{x}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = u^{v-1} \left(\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} v + \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} u \ln u \right),$$

其中 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \arctan \frac{y}{x}$ 。

14. 设 $z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{y}{x}}$, 求 dz 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x e^{-\arctan \frac{y}{x}} + (x^2 + y^2) e^{-\arctan \frac{y}{x}} \frac{-1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= (2x + y) e^{-\arctan \frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y e^{-\arctan \frac{y}{x}} + (x^2 + y^2) e^{-\arctan \frac{y}{x}} \frac{-1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= (2y - x) e^{-\arctan \frac{y}{x}},$$

所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = [(2x + y) dx + (2y - x) dy] e^{-\arctan \frac{y}{x}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-\arctan \frac{y}{x}} + (2x + y) e^{-\arctan \frac{y}{x}} \cdot \frac{-1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{y^2 - xy - x^2}{x^2 + y^2} e^{-\arctan \frac{y}{x}}.$$

15. 求下列函数的全微分:

$$(1) u = f(ax^2 + by^2 + cz^2);$$

$$(2) u = f(x + y, xy);$$

$$(3) u = f(\ln(1 + x^2 + y^2 + z^2), e^{x+y+z}).$$

解 (1) 令 $v = ax^2 + by^2 + cz^2$, 则

$$\begin{aligned} du &= f'(v) \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) \\ &= 2f'(ax^2 + by^2 + cz^2)(ax dx + by dy + cz dz). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ &= (f_1 + yf_2) dx + (f_1 + xf_2) dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ &= \frac{2f_1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} (xdx + ydy + zdz) + (e^{x+y+z} f_2)(dx + dy + dz). \end{aligned}$$

16. 设 $f(t)$ 具有任意阶连续导数, 而 $u = f(ax + by + cz)$ 。对任意正整数 k , 求 $d^k u$ 。

解 当 $k = 1$ 时, 成立

$$du = f'(ax + by + cz) d(ax + by + cz) = f'(ax + by + cz)(adx + bdy + cdz),$$

应用数学归纳法, 假设对于 k 成立

$$d^k u = f^{(k)}(ax + by + cz)(adx + bdy + cdz)^k,$$

则对于 $k + 1$ 成立

$$d^{k+1} u = d(d^k u) = d[f^{(k)}(ax + by + cz)(adx + bdy + cdz)^k]$$

$$= f^{(k+1)}(ax+by+cz)(adx+b dy+cdz)^{k+1}。$$

由数学归纳法可知对任意正整数 k 成立

$$d^k u = f^{(k)}(ax+by+cz)(adx+b dy+cdz)^k。$$

17. 设函数 $z = f(x, y)$ 在全平面上有定义, 具有连续的偏导数, 且满足方程

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = 0,$$

证明: $f(x, y)$ 为常数。

证 当 $r \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \cos \theta f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta f_y(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \frac{1}{r} (xf_x(x, y) + yf_y(x, y)) = 0, \end{aligned}$$

所以

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = F(\theta)。$$

再利用 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的连续性, 得到

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = F(\theta) = f(0, 0),$$

即 $F(\theta)$ 为常数, 所以 $f(x, y)$ 为常数。

18. 设 n 元函数 f 在 \mathbf{R}^n 上具有连续偏导数, 证明对于任意的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, 成立下述 Hadamard 公式:

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y - x)) dt。$$

证 设 $F(t) = f(x + t(y - x))$, 则

$$f(y) - f(x) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(t) dt。$$

由于

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y - x)) \frac{\partial(x_i + t(y_i - x_i))}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y - x))。 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= F(1) - F(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y - x)) dt。 \end{aligned}$$

§3 中值定理和 Taylor 公式

1. 对函数 $f(x, y) = \sin x \cos y$ 应用中值定理证明: 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\frac{3}{4} = \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi\theta}{3} \cos \frac{\pi\theta}{6} - \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi\theta}{3} \sin \frac{\pi\theta}{6}.$$

证 设 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(\Delta x, \Delta y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, 对函数 $f(x, y) = \sin x \cos y$

应用微分中值定理(即 $k=0$ 时的 Taylor 公式), 可知存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} &= f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) - f(0, 0) = f_x(\theta \Delta x, \theta \Delta y) \Delta x + f_y(\theta \Delta x, \theta \Delta y) \Delta y \\ &= \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi\theta}{3} \cos \frac{\pi\theta}{6} - \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi\theta}{3} \sin \frac{\pi\theta}{6}.\end{aligned}$$

2. 写出函数 $f(x, y) = 3x^3 + y^3 - 2x^2y - 2xy^2 - 6x - 8y + 9$ 在点 $(1, 2)$ 的 Taylor 展开式。

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 3[(x-1)+1]^3 + [(y-2)+2]^3 - 2[(x-1)+1]^2[(y-2)+2] - \\ &\quad 2[(x-1)+1][(y-2)+2]^2 - 6[(x-1)+1] - 8[(y-2)+2] + 9 \\ &= -14 - 13(x-1) - 6(y-2) + 5(x-1)^2 - 12(x-1)(y-2) + 4(y-2)^2 + \\ &\quad 3(x-1)^3 - 2(x-1)^2(y-2) - 2(x-1)(y-2)^2 + (y-2)^3.\end{aligned}$$

注 本题也可设 $u = x-1, v = y-2$, 于是

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(u+1, v+2) \\ &= 3(u+1)^3 + (v+2)^3 - 2(u+1)^2(v+2) - 2(u+1)(v+2)^2 - 6(u+1) - 8(v+2) + 9,\end{aligned}$$

展开后再用 $u = x-1, v = y-2$ 代换回来。

3. 求函数 $f(x, y) = \sin x \ln(1+y)$ 在 $(0, 0)$ 点的 Taylor 展开式(展开到三阶导数为止)。

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)\right) \\ &= xy - \frac{1}{2}xy^2 + o((\sqrt{x^2 + y^2})^3).\end{aligned}$$

4. 求函数 $f(x, y) = e^{x+y}$ 在 $(0, 0)$ 点的 n 阶 Taylor 展开式, 并写出余项。

$$f(x, y) = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x+y)^n + R_n,$$

其中 $R_n = \frac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1} e^{\theta(x+y)}$, $\theta \in (0, 1)$ 。

5. 设 $f(x, y) = \frac{\cos y}{x}$, $x > 0$ 。

(1) 求 $f(x, y)$ 在 $(1, 0)$ 点的 Taylor 展开式(展开到二阶导数), 并计算余项 R_2 ;

(2) 求 $f(x, y)$ 在 $(1, 0)$ 点的 k 阶 Taylor 展开式, 并证明在 $(1, 0)$ 点的某个邻域内, 余项 R_k 满足当 $k \rightarrow \infty$ 时, $R_k \rightarrow 0$ 。

$$(1) f(x, y) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - \frac{1}{2}y^2 + R_2,$$

$$\begin{aligned}
R_2 &= \frac{1}{3!} \left[(x-1) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 f(1 + \theta(x-1), \theta y) \\
&= -\frac{\cos \eta}{\xi^4} (x-1)^3 - \frac{\sin \eta}{\xi^3} (x-1)^2 y + \frac{\cos \eta}{2\xi^2} (x-1) y^2 + \frac{\sin \eta}{6\xi} y^3,
\end{aligned}$$

其中 $\xi = 1 + \theta(x-1)$, $\eta = \theta y$, $0 < \theta < 1$ 。

$$\begin{aligned}
(2) f(x, y) &= 1 + \sum_{n=1}^k \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n C_n (-1)^{n-j} (n-j)! \cos\left(\frac{j}{2}\pi\right) (x-1)^{n-j} y^j \right] + R_k, \\
R_k &= \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j (-1)^{k+1-j} (k+1-j)! \frac{1}{\xi^{k-j+2}} \cos\left(\eta + \frac{j}{2}\pi\right) (x-1)^{k+1-j} y^j.
\end{aligned}$$

当 $x=1$ 时, $\xi=1$, 对任意 $y \in (-\infty, +\infty)$, $R_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) 显然成立; 当 $0 < |x-1| < \frac{1}{3}$ 时, $\frac{2}{3} < \xi < \frac{4}{3}$, $\left| \frac{x-1}{\xi} \right| < \frac{1}{2}$, 于是对任意 $y \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\begin{aligned}
|R_k| &\leq \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{j! (k+1-j)!} (k+1-j)! \frac{1}{|\xi|^{k-j+2}} |x-1|^{k+1-j} |y|^j \\
&= \frac{1}{|\xi|} \sum_{j=0}^{k+1} \frac{1}{j!} \left| \frac{x-1}{\xi} \right|^{k+1-j} |y|^j \leq \frac{1}{|\xi|} \left| \frac{x-1}{\xi} \right|^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left| \frac{y \xi}{x-1} \right|^j = \frac{1}{|\xi|} \left| \frac{x-1}{\xi} \right|^{k+1} e^{\left| \frac{y \xi}{x-1} \right|},
\end{aligned}$$

因此也成立 $R_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)。

6. 利用 Taylor 公式近似计算 $8.96^{2.03}$ (展开到二阶导数)。

解 考虑 $f(x, y) = (9+x)^{2+y}$ 在 $(0, 0)$ 点的 Taylor 公式:

$$f(x, y) = 81 + 18x + 81\ln 9 \cdot y + x^2 + (9 + 18\ln 9)xy + \frac{81}{2}\ln^2 9 \cdot y^2 + R_2(x, y),$$

于是

$$\begin{aligned}
8.96^{2.03} &= f(-0.04, 0.03) \approx 81 + 18(-0.04) + 81\ln 9 \cdot 0.03 + \\
&\quad (-0.04)^2 + (9 + 18\ln 9) \cdot (-0.04) \cdot 0.03 + \frac{81}{2} \cdot \ln^2 9 \cdot 0.03^2 \\
&\approx 85.74.
\end{aligned}$$

7. 设 $f(x, y)$ 在 \mathbf{R}^2 上可微。 \mathbf{l}_1 与 \mathbf{l}_2 是 \mathbf{R}^2 上两个线性无关的单位向量(方向)。若

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_i}(x, y) \equiv 0, \quad i = 1, 2,$$

证明: 在 \mathbf{R}^2 上 $f(x, y) \equiv$ 常数。

证 设 $\mathbf{l}_1 = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1)$, $\mathbf{l}_2 = (\cos \alpha_2, \sin \alpha_2)$ 。由于 $f(x, y)$ 在 \mathbf{R}^2 上可微,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_1}(x, y) = f_x(x, y) \cos \alpha_1 + f_y(x, y) \sin \alpha_1 \equiv 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_2}(x, y) = f_x(x, y) \cos \alpha_2 + f_y(x, y) \sin \alpha_2 \equiv 0.$$

因为 l_1 与 l_2 线性无关, 所以

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

因此上面的线性方程组只有零解, 即

$$f_x(x, y) \equiv 0, \quad f_y(x, y) \equiv 0.$$

于是由推论 12.3.1 知道 $f(x, y) \equiv$ 常数。

8. 设 $f(x, y) = \sin \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$), 证明:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x, y) \equiv 0, \quad k \geq 1.$$

证 因为

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = x \cdot \cos \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) + y \cdot \cos \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} \equiv 0,$$

所以当 $k > 1$ 时成立

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x, y) = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{k-1} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) \equiv 0.$$

§ 4 隐函数

1. 求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数:

$$(1) \sin y + e^x - xy^2 = 0, \text{求 } \frac{dy}{dx};$$

$$(2) x^y = y^x, \text{求 } \frac{dy}{dx};$$

$$(3) \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}, \text{求 } \frac{dy}{dx};$$

$$(4) \arctan \frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0, \text{求 } \frac{dy}{dx} \text{ 和 } \frac{d^2 y}{dx^2};$$

$$(5) \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}, \text{求 } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ 和 } \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$(6) e^z - xyz = 0, \text{求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ 和 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

$$(7) z^3 - 3xyz = a^3, \text{求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ 和 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

$$(8) f(x+y, y+z, z+x) = 0, \text{求 } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ 和 } \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$(9) z = f(xz, z-y), \text{求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ 和 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

(10) $f(x, x+y, x+y+z) = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

解 (1) 设 $F(x, y) = \sin y + e^x - xy^2 = 0$, 则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{y^2 - e^x}{\cos y - 2xy}.$$

(2) 设 $F(x, y) = x^y - y^x = 0$, 则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}.$$

注 本题也可先在等式 $x^y = y^x$ 两边取对数, 然后设

$$G(x, y) = y \ln x - x \ln y = 0.$$

(3) 设 $F(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x} = 0$, 则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{x+y}{x-y}.$$

(4) 设 $F(x, y) = \arctan \frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$, 则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{a^2}{(x+y)^2},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = -\frac{2a^2}{(x+y)^3} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) = -\frac{2a^2}{(x+y)^5} [a^2 + (x+y)^2].$$

(5) 设 $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{z}{x+z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{z^2}{y(x+z)}.$$

(6) 设 $F(x, y, z) = e^z - xyz = 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{e^z - xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{y}{e^z - xy} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{yz}{(e^z - xy)^2} \left(e^z \frac{\partial z}{\partial x} - y \right) = \frac{2y^2 z}{(e^z - xy)^2} - \frac{y^2 z^2 e^z}{(e^z - xy)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{1}{e^z - xy} \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{xz}{(e^z - xy)^2} \left(e^z \frac{\partial z}{\partial x} - y \right)$$

$$= \frac{z}{e^z - xy} + \frac{2xyz}{(e^z - xy)^2} - \frac{xyz^2 e^z}{(e^z - xy)^3}.$$

(7) 设 $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^3 = 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{z^2 - xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{y}{z^2 - xy} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{yz}{(z^2 - xy)^2} \left(2z \frac{\partial z}{\partial x} - y \right) = -\frac{2xy^3 z}{(z^2 - xy)^3},$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{1}{z^2 - xy} \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{xz}{(z^2 - xy)^2} \left(2z \frac{\partial z}{\partial x} - y \right) \\ &= \frac{z^5 - 2xyz^3 - x^2y^2z}{(z^2 - xy)^3}.\end{aligned}$$

(8) 由 $f(x+y, y+z, z+x) = 0$ 即可得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_1 + f_3}{f_2 + f_3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_1 + f_2}{f_2 + f_3}.$$

(9) 设 $F(x, y, z) = z - f(xz, z-y) = 0$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = \frac{zf_1}{1 - xf_1 - f_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{f_2}{1 - xf_1 - f_2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{1}{1 - xf_1 - f_2} \left[\frac{\partial z}{\partial x} f_1 + z \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) f_{11} + z \frac{\partial z}{\partial x} f_{12} \right] + \\ &\quad \frac{zf_1}{(1 - xf_1 - f_2)^2} \left[f_1 + x \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) f_{11} + x \frac{\partial z}{\partial x} f_{12} + \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) f_{21} + \frac{\partial z}{\partial x} f_{22} \right] \\ &= \frac{1}{1 - xf_1 - f_2} \left[2 \frac{\partial z}{\partial x} f_1 + \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 f_{11} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) f_{12} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 f_{22} \right].\end{aligned}$$

(10) 由 $f(x, x+y, x+y+z) = 0$ 即可得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{f_1 + f_2 + f_3}{f_3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_2 + f_3}{f_3}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = -\frac{1}{f_3} \left[f_{11} + f_{12} + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right) f_{13} + f_{21} + f_{22} + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right) f_{23} \right] + \\ &\quad \frac{f_1 + f_2}{f_3^2} \left[f_{31} + f_{32} + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right) f_{33} \right] \\ &= -\frac{1}{f_3^3} [f_3^2(f_{11} + 2f_{12} + f_{22}) - 2f_3(f_1 + f_2)(f_{13} + f_{23}) + (f_1 + f_2)^2 f_{33}], \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = -\frac{1}{f_3} \left[f_{21} + f_{22} + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right) f_{23} \right] + \frac{f_2}{f_3^2} \left[f_{31} + f_{32} + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right) f_{33} \right] \\ &= -\frac{1}{f_3^3} [f_3^2(f_{12} + f_{22}) - f_2 f_3 f_{13} + f_2(f_1 + f_2) f_{33} - f_3(f_1 + 2f_2) f_{23}].\end{aligned}$$

2. 设 $y = \tan(x+y)$ 确定 y 为 x 的隐函数, 验证

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{2(3y^4 + 8y^2 + 5)}{y^8}.$$

证 由

$$y' = \sec^2(x+y)(1+y') = (1+y^2)(1+y')$$

解出

$$y' = -1 - \frac{1}{y^2},$$

再求二阶和三阶导数, 有

$$y'' = \frac{2}{y^3} y' = -\frac{2}{y^3} - \frac{2}{y^5},$$

$$y''' = \left(\frac{6}{y^4} + \frac{10}{y^6} \right) y' = -\frac{2(3y^4 + 8y^2 + 5)}{y^8}.$$

3. 设 φ 是可微函数, 证明由 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 满足方程

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

证 由 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 可得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c\varphi_1}{-a\varphi_1 - b\varphi_2} = \frac{c\varphi_1}{a\varphi_1 + b\varphi_2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c\varphi_2}{-a\varphi_1 - b\varphi_2} = \frac{c\varphi_2}{a\varphi_1 + b\varphi_2},$$

所以

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

4. 设方程 $\varphi(x + zy^{-1}, y + zx^{-1}) = 0$ 确定隐函数 $z = f(x, y)$, 证明它满足方程

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

证 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi_1 + z\left(-\frac{1}{x^2}\right)\varphi_2}{\frac{1}{y}\varphi_1 + \frac{1}{x}\varphi_2} = \frac{yz\varphi_2 - x^2y\varphi_1}{x(x\varphi_1 + y\varphi_2)}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z\left(-\frac{1}{y^2}\right)\varphi_1 + \varphi_2}{\frac{1}{y}\varphi_1 + \frac{1}{x}\varphi_2} = \frac{xz\varphi_1 - xy^2\varphi_2}{y(x\varphi_1 + y\varphi_2)},$$

所以

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

5. 求下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数:

$$(1) \begin{cases} z - x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4a^2, \end{cases} \text{求 } \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \text{ 和 } \frac{d^2z}{dx^2};$$

$$(2) \begin{cases} xu + yv = 0, \\ yu + xv = 1, \end{cases} \text{求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ 和 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y};$$

$$(3) \begin{cases} u = f(ux, v + y), \\ v = g(u - x, v^2y), \end{cases} \text{求 } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ 和 } \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$(4) \begin{cases} x = u + v, \\ y = u - v, \\ z = u^2v^2, \end{cases} \text{求 } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ 和 } \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$(5) \begin{cases} x = e^u \cos v, \\ y = e^u \sin v, \\ z = u^2 + v^2, \end{cases} \text{求 } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ 和 } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 (1) 在方程组中对 x 求导, 得到

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} - 2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0, \\ 2x + 4y \frac{dy}{dx} + 6z \frac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

由此解出

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+6z)}{y(2+6z)}, \frac{dz}{dx} = \frac{x}{1+3z}.$$

再求二阶导数, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{(1+6z)}{y(2+6z)} + \frac{x(1+6z)}{y^2(2+6z)} \frac{dy}{dx} + \frac{x(-3)}{2y(1+3z)^2} \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{1}{2y} \left[\frac{1}{1+3z} - \frac{x^2(1+6z)^2}{2y^2(1+3z)^2} - \frac{3x^2}{(1+3z)^3} - 2 \right], \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= \frac{1}{1+3z} - \frac{3x}{(1+3z)^2} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+3z} - \frac{3x^2}{(1+3z)^3}. \end{aligned}$$

(2) 在方程组中对 x 求偏导, 得到

$$\begin{cases} u + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ y \frac{\partial u}{\partial x} + v + x \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

解此方程组, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ux - vy}{y^2 - x^2}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{vx - uy}{y^2 - x^2}.$$

在方程组中对 y 求偏导, 得到

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial y} + v + y \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ u + y \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

解此方程组, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{ux - uy}{y^2 - x^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{ux - vy}{y^2 - x^2}.$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y^2 - x^2} \left(u + x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{ux - vy}{(y^2 - x^2)^2} 2x = \frac{2u(x^2 + y^2) - 4xyv}{(y^2 - x^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y^2 - x^2} \left(v + x \frac{\partial v}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{ux - uy}{(y^2 - x^2)^2} 2x = \frac{2v(x^2 + y^2) - 4xyu}{(y^2 - x^2)^2}.$$

(3) 在方程组中对 x 求偏导, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \left(u + x \frac{\partial u}{\partial x} \right) f_1 + \frac{\partial v}{\partial x} f_2, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1 \right) g_1 + 2vyg_2 \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

解此方程组, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f_2 g_1 + u f_1 (2vyg_2 - 1)}{f_2 g_1 - (x f_1 - 1)(2vyg_2 - 1)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(1 - x f_1) g_1 - u f_1 g_1}{f_2 g_1 - (x f_1 - 1)(2vyg_2 - 1)}.$$

(4) 在方程组中分别对 x 与 y 求偏导, 得到

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}, \end{cases}$$

解此两方程组, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \quad \text{与} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2uv^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2u^2 v \frac{\partial v}{\partial x} = uv(u + v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2uv^2 \frac{\partial u}{\partial y} + 2u^2 v \frac{\partial v}{\partial y} = uv(v - u).$$

(5) 在方程组中对 x 求偏导, 得到

$$\begin{cases} 1 = e^u \cos v \frac{\partial u}{\partial x} - e^u \sin v \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = e^u \sin v \frac{\partial u}{\partial x} + e^u \cos v \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

解此方程组, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-u} \cos v, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-u} \sin v,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(u \cos v - v \sin v)}{e^u}.$$

在方程组中对 y 求偏导, 得到

$$\begin{cases} 0 = e^u \cos v \frac{\partial u}{\partial y} - e^u \sin v \frac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = e^u \sin v \frac{\partial u}{\partial y} + e^u \cos v \frac{\partial v}{\partial y}, \end{cases}$$

解此方程组,得到

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-u} \sin v, \frac{\partial v}{\partial y} = e^{-u} \cos v,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2(v \cos v + u \sin v)}{e^u}.$$

6. 求微分:

$$(1) x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0, \text{求 } dz;$$

$$(2) \begin{cases} x + y = u + v, \\ \frac{x}{y} = \frac{\sin u}{\sin v}, \end{cases} \text{求 } du \text{ 与 } dv.$$

解 (1) 直接对等式两边求微分,得到

$$dx + 2dy + dz - \frac{1}{\sqrt{xyz}}(yzdx + xzdy + xydz) = 0,$$

由此解出

$$dz = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy} dx + \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy} dy.$$

(2) 直接在方程组中求微分,得到

$$\begin{cases} dx + dy = du + dv, \\ \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = \frac{\cos u}{\sin v}du - \frac{\sin u \cos v}{\sin^2 v}dv, \end{cases}$$

解此方程组,得到

$$du = \frac{\sin v + x \cos v}{x \cos v + y \cos u} dx + \frac{x \cos v - \sin u}{x \cos v + y \cos u} dy,$$

$$dv = \frac{y \cos u - \sin v}{x \cos v + y \cos u} dx + \frac{y \cos u + \sin u}{x \cos v + y \cos u} dy.$$

7. 设 $\begin{cases} x = x(y), \\ z = z(y) \end{cases}$ 是由方程组 $\begin{cases} F(y-x, y-z) = 0, \\ G\left(xy, \frac{z}{y}\right) = 0 \end{cases}$ 所确定的向量值隐

函数,其中二元函数 F 和 G 分别具有连续的偏导数,求 $\frac{dx}{dy}$ 和 $\frac{dz}{dy}$ 。

解 在方程组中对 y 求导数,有

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{dx}{dy}\right)F_1 + \left(1 - \frac{dz}{dy}\right)F_2 = 0, \\ \left(x + y \frac{dx}{dy}\right)G_1 + \left(-\frac{z}{y^2} + \frac{1}{y} \frac{dz}{dy}\right)G_2 = 0, \end{cases}$$

解此方程组,得到

$$\frac{dx}{dy} = \frac{yF_1G_2 + xy^2F_2G_1 + (y-z)F_2G_2}{y(F_1G_2 - y^2F_2G_1)},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{xF_1G_2 - y^3F_2G_1 - y^2(x+y)F_1G_1}{y(F_1G_2 - y^2F_2G_1)}.$$

8. 设 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数。在极坐标 $\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ 变换下, 求

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

关于极坐标的表达式。

解 经计算, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \cos \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) + \sin \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= -r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} - r \sin \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) + \\ &\quad r \cos \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ &= -r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} + r^2 \left(\sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

容易验证

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

9. 设二元函数 f 具有二阶连续偏导数。证明: 通过适当线性变换

$$\begin{cases} u = x + \lambda y, \\ v = x + \mu y, \end{cases}$$

可以将方程

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (AC - B^2 < 0)$$

化简为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0.$$

并说明此时 λ, μ 为一元二次方程 $A + 2Bt + Ct^2 = 0$ 的两个相异实根。

证 经计算,有

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}, \\
 \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v}, \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \lambda \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
 &= \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\lambda\mu \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \mu \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 0 &= A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
 &= (A + 2B\lambda + C\lambda^2) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (A + 2B\mu + C\mu^2) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2[A + B(\lambda + \mu) + C\lambda\mu] \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}.
 \end{aligned}$$

由条件 $AC - B^2 < 0$ 知一元二次方程 $A + 2Bt + Ct^2 = 0$ 有两个相异实根, 所以只要取 λ, μ 为方程的两个相异实根。此时由 $\lambda + \mu = -\frac{2B}{C}$ 与 $\lambda\mu = \frac{A}{C}$, 可得

$$A + B(\lambda + \mu) + C\lambda\mu = 2 \frac{AC - B^2}{C} \neq 0,$$

于是原方程化简为 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$ 。

10. 通过自变量变换 $\begin{cases} x = e^\xi, \\ y = e^\eta \end{cases}$ 变换方程

$$ax^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad a, b, c \text{ 为常数。}$$

解 由 $\xi = \ln x, \eta = \ln y$, 可得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi}.
 \end{aligned}$$

代入原方程, 得到

$$ax^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + c \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = 0.$$

11. 通过自变量变换 $\begin{cases} u = x - 2\sqrt{y}, \\ v = x + 2\sqrt{y} \end{cases}$ 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y}, y > 0.$$

解 经计算, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{y}} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2\sqrt{y^3}} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{1}{y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

代入原方程, 得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0,$$

所以原方程变换为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

12. 导出新的因变量关于新的自变量的偏导数所满足的方程:

(1) 用 $\begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \end{cases}$ 及 $w = \ln z - (x + y)$ 变换方程

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z;$$

(2) 用 $\begin{cases} u = x, \\ v = x + y \end{cases}$ 及 $w = x + y + z$ 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$$

(3) 用 $\begin{cases} u = x + y, \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$ 及 $w = \frac{z}{x}$ 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

解 (1) 由 $w = \ln z - (x + y)$ 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z \left(\frac{\partial w}{\partial x} + 1 \right) = z \left(2x \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} + 1 \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z \left(\frac{\partial w}{\partial y} + 1 \right) = z \left(2y \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} + 1 \right).$$

代入

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z,$$

得到

$$z \left(2xy \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} + y \right) - z \left(2xy \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} + x \right) - z(y - x) = 0,$$

化简后得到

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

(2) 由 $w = x + y + z$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} - 1 = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} - 1 = \frac{\partial w}{\partial v} - 1, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

代入

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\frac{v}{u} - 1 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

(3) 由 $w = \frac{z}{x}$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= w + x \frac{\partial w}{\partial x} = w + \left(x \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x} \frac{\partial w}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial w}{\partial y} = x \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} + \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{y}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} + x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{2y}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^3} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right) \\ &= 2 \frac{\partial w}{\partial u} + x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{2y}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^3} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u} + x \frac{\partial^2 w}{\partial^2 u} + \left(1 - \frac{y}{x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

代入

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

13. 设 $y = f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的 x, y 的隐函数,

其中 f 和 F 都具有连续偏导数。证明

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f \partial F}{\partial x \partial t} - \frac{\partial f \partial F}{\partial t \partial x}}{\frac{\partial f \partial F}{\partial t \partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

证 设由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的隐函数为 $t = h(x, y)$, 于是就由方程 $y = f(x, t) = f(x, h(x, y))$ 确定了隐函数 $y = y(x)$, 并由此可知 t 也是 x 的一元函数, 即 $t = h(x, y(x)) = t(x)$ 。

首先在等式 $F(x, y, t) = F(x, y(x), t(x)) = 0$ 两边对 x 求导, 得到

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dx} = 0,$$

解出

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial t}},$$

然后再在等式 $y = f(x, t(x))$ 两边对 x 求导, 得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^{-1},$$

从而解出

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f \partial F}{\partial x \partial t} - \frac{\partial f \partial F}{\partial t \partial x}}{\frac{\partial f \partial F}{\partial t \partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

14. 设二元函数 $f(x, y): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 具有连续偏导数, 证明: 存在一对一的连续的向量值函数 $\mathbf{G}(t): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, 使得

$$f \circ \mathbf{G} \equiv \text{常数}.$$

证 若函数 $f(x, y)$ 恒等于常数, 则任意的一对一的连续的向量值函数 $\mathbf{G}(t): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ (例如 $\mathbf{G}(t) = (t, t)$) 都满足要求。

现假设函数 $f(x, y)$ 不恒等于常数, 则存在 (x_0, y_0) , 使得 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 不全为 0, 不妨设 $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ 。记 $F(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$, 它满足定理 12.4.1 的所有条件, 所以在 x_0 的邻域 (a, b) 存在严格单调的连续函数 $y = g(x)$ 满足 $F(x, g(x)) \equiv 0$, 即 $f(x, g(x)) \equiv \text{常数}$ 。

设 $t = \tan \pi \left(\frac{x - a}{b - a} - \frac{1}{2} \right)$ 的逆函数为 $x = x(t): (-\infty, +\infty) \rightarrow (a, b)$, 则

$$\mathbf{G}(t) = (x(t), g(x(t)))$$

是 $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ 的一对一的连续的向量值函数, 满足题目要求。

§ 5 偏导数在几何中的应用

1. 求下列曲线在指定点处的切线与法平面方程:

$$(1) \begin{cases} y = x^2, \\ z = \frac{x}{1+x}, \end{cases} \text{ 在 } \left(1, 1, \frac{1}{2}\right) \text{ 点;}$$

$$(2) \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ z = 4 \sin \frac{t}{2}, \end{cases} \text{ 在 } t = \frac{\pi}{2} \text{ 对应的点;}$$

$$(3) \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \end{cases} \text{ 在 } (1, -2, 1) \text{ 点;}$$

$$(4) \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x^2 + z^2 = R^2, \end{cases} \text{ 在 } \left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right) \text{ 点。}$$

解 (1) 曲线的切向量函数为 $\left(1, 2x, \frac{1}{(1+x)^2}\right)$, 在 $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ 点的切向量为 $\left(1, 2, \frac{1}{4}\right)$ 。于是曲线在 $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ 点的切线方程为

$$2(x-1) = y-1 = 4(2z-1),$$

法平面方程为

$$8x + 16y + 2z = 25.$$

(2) 曲线的切向量函数为 $(1 - \cos t, \sin t, 2 \cos \frac{t}{2})$, 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 对应点的切向量为 $(1, 1, \sqrt{2})$ 。于是曲线在 $t = \frac{\pi}{2}$ 对应点的切线方程为

$$x - \frac{\pi}{2} + 1 = y - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}z - 2,$$

法平面方程为

$$\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right) + (y - 1) + \sqrt{2}(z - 2\sqrt{2}) = x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0.$$

(3) 曲线的切向量函数为 $2(y-z, z-x, x-y)$, 在 $(1, -2, 1)$ 点的切向量为 $(-6, 0, 6)$ 。于是曲线在 $(1, -2, 1)$ 点的切线方程为

$$\begin{cases} x + z = 2, \\ y = -2, \end{cases}$$

法平面方程为

$$x = z.$$

(4) 曲线的切向量函数为 $4(yz, -xz, -xy)$, 在 $\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ 点的切向量为 $2R^2(1, -1, -1)$ 。于是曲线在 $\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ 点的切线方程为

$$x - \frac{R}{\sqrt{2}} = -y + \frac{R}{\sqrt{2}} = -z + \frac{R}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$x - y - z + \frac{\sqrt{2}}{2}R = 0.$$

2. 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求一点, 使曲线在这一点的切线与平面 $x + 2y + z = 10$ 平行。

解 曲线的切向量为 $(1, 2t, 3t^2)$, 平面的法向量为 $(1, 2, 1)$, 由题设,

$$(1, 2t, 3t^2) \cdot (1, 2, 1) = 1 + 4t + 3t^2 = 0,$$

由此解出 $t = -1$ 或 $-\frac{1}{3}$, 于是

$$(-1, 1, -1) \text{ 和 } \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$$

为满足题目要求的点。

3. 求曲线 $x = \sin^2 t, y = \sin t \cos t, z = \cos^2 t$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 所对应的点处的切线的方向余弦。

解 曲线的切向量函数为 $(\sin 2t, \cos 2t, -\sin 2t)$, 将 $t = \frac{\pi}{2}$ 代入得 $(0, -1, 0)$, 它是单位向量, 所以是方向余弦。

4. 求下列曲面在指定点的切平面与法线方程:

(1) $z = 2x^4 + 3y^3$, 在点 $(2, 1, 35)$;

(2) $e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}} = 4$, 在点 $(\ln 2, \ln 2, 1)$;

(3) $x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3$, 在点 $u = 0, v = 1$ 所对应的点。

解 (1) 曲面的法向量函数为 $(8x^3, 9y^2, -1)$, 以 $(x, y, z) = (2, 1, 35)$ 代入, 得到 $(64, 9, -1)$, 所以切平面方程为

$$64(x - 2) + 9(y - 1) - (z - 35) = 0, \text{ 即 } 64x + 9y - z - 102 = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x - 2}{64} = \frac{y - 1}{9} = \frac{z - 35}{-1}.$$

(2) 曲面的法向量函数为 $\left(e^{\frac{x}{z}} \frac{1}{z}, e^{\frac{y}{z}} \frac{1}{z}, -\frac{x}{z^2} e^{\frac{x}{z}} - \frac{y}{z^2} e^{\frac{y}{z}}\right)$, 以 $(x, y, z) =$

$(\ln 2, \ln 2, 1)$ 代入, 得到 $(2, 2, -4\ln 2)$, 所以切平面方程为

$$x - \ln 2 + y - \ln 2 - 2\ln 2(z - 1) = 0, \text{ 即 } x + y - 2z\ln 2 = 0,$$

法线方程为

$$x - \ln 2 = y - \ln 2 = -\frac{1}{2\ln 2}(z - 1)。$$

(3) 由于 $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \\ 3u^2 & 3v^2 \end{bmatrix}$, 所以在 $u = 0, v = 1$ 所对应的点处的法向量为

$(0, -3, 2)$, 所以切平面方程为

$$-3(y - 1) + 2(z - 1) = 0, \text{ 即 } -3y + 2z + 1 = 0,$$

法线方程为

$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ \frac{y - 1}{-3} = \frac{z - 1}{2}, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x = 1, \\ 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

5. 在马鞍面 $z = xy$ 上求一点, 使得这一点的法线与平面 $x + 3y + z + 9 = 0$ 垂直, 并写出此法线的方程。

解 马鞍面的法向量 $(y, x, -1)$ 与 $(1, 3, 1)$ 平行, 所以 $\frac{y}{1} = \frac{x}{3} = \frac{-1}{1}$, 即 $y = -1$, $x = -3$, $z = xy = 3$, 于是该点为 $(-3, -1, 3)$, 在该点处的法线方程为

$$x + 3 = \frac{1}{3}(y + 1) = z - 3。$$

6. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 498$ 的平行于平面 $x + 3y + 5z = 7$ 的切平面。

解 由于椭球面的法向量 $(2x, 4y, 6z)$ 与 $(1, 3, 5)$ 平行, 所以 $\frac{x}{1} = \frac{2y}{3} = \frac{3z}{5}$,
解出 $y = \frac{3}{2}x$, $z = \frac{5}{3}x$, 代入椭球面方程可得 $x = \pm 6$, 即切点为 $\pm(6, 9, 10)$ 。所以有两个切平面满足条件, 切平面的方程分别为

$$(x - 6) + 3(y - 9) + 5(z - 10) = 0 \quad \text{与} \quad (x + 6) + 3(y + 9) + 5(z + 10) = 0,$$

即

$$x + 3y + 5z \pm 83 = 0。$$

7. 求圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与马鞍面 $bz = xy$ 的交角。

解 设 (x, y, z) 是圆柱面与马鞍面交线上一点。圆柱面在该点的法向量为 $(2x, 2y, 0)$, 马鞍面在该点的法向量为 $(y, x, -b)$, 于是两法向量的夹角 θ 的余弦为

$$\cos \theta = \frac{(2x, 2y, 0)}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}} \cdot \frac{(y, x, -b)}{\sqrt{x^2 + y^2 + b^2}} = \frac{2xy}{a \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2bz}{a \sqrt{a^2 + b^2}},$$

所以

$$\theta = \arccos \frac{2bx}{a\sqrt{a^2+b^2}}.$$

8. 已知曲面 $x^2 - y^2 - 3z = 0$, 求经过点 $A(0, 0, -1)$ 且与直线 $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ 平行的切平面的方程。

解 设切点为 (x_0, y_0, z_0) , 则曲面在该点的法向量为 $(2x_0, -2y_0, -3)$, 切平面方程为

$$2x_0x - 2y_0y - 3(z + 1) = 0.$$

由于切点在切平面上, 所以 $2x_0^2 - 2y_0^2 - 3(z_0 + 1) = 0$, 与曲面方程相比较可得 $z_0 = 1$ 。由于切平面与直线平行, 所以

$$(2x_0, -2y_0, -3) \cdot (2, 1, 2) = 4x_0 - 2y_0 - 6 = 0,$$

与曲面方程联立, 并注意到 $z_0 = 1$, 可以求出切点坐标为 $(2, 1, 1)$ 。于是, 切平面方程为

$$4x - 2y - 3z - 3 = 0.$$

9. 设椭球面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 上点 $P(1, 1, 1)$ 处指向外侧的法向量为 n , 求函数 $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 n 的方向导数。

解 曲面的单位法向量为 $n = \frac{(4x, 6y, 2z)}{\|(4x, 6y, 2z)\|}$, 将点 $P(1, 1, 1)$ 的坐标代入, 得到 $n = \frac{(2, 3, 1)}{\sqrt{14}}$ 。于是, 函数 u 在点 P 处沿方向 n 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot n = \left(\frac{6}{\sqrt{14}}, \frac{8}{\sqrt{14}}, -\sqrt{14} \right) \cdot \frac{(2, 3, 1)}{\sqrt{14}} = \frac{11}{7}.$$

10. 证明: 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) 上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a 。

证 设切点为 (x_0, y_0, z_0) , 则曲面在该点的法向量为 $\left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \frac{1}{2\sqrt{y_0}}, \frac{1}{2\sqrt{z_0}} \right)$, 切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0,$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{\sqrt{y_0}}y + \frac{1}{\sqrt{z_0}}z = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a},$$

所以截距之和为

$$\sqrt{x_0}\sqrt{a} + \sqrt{y_0}\sqrt{a} + \sqrt{z_0}\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a.$$

11. 证明: 曲线

$$\begin{cases} x = a e^t \cos t, \\ y = a e^t \sin t, \\ z = a e^t \end{cases}$$

与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的各母线相交的角度相同。

证 易知曲线的切向量为 $a e^t (\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1)$, 锥面的母线方向为 $(x, y, z) = a e^t (\cos t, \sin t, 1)$, 假定它们的夹角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1) \cdot (\cos t, \sin t, 1)}{\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1^2} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

12. 证明: 曲面 $f(ax - bz, ay - cz) = 0$ 上的切平面都与某一定直线平行, 其中函数 f 具有连续偏导数, 且常数 a, b, c 不同时为零。

证 曲面的法向量为 $(af_1, af_2, -bf_1 - cf_2)$, 由于 $(af_1, af_2, -bf_1 - cf_2) \cdot (b, c, a) \equiv 0$, 所以曲面的法向量与非零向量 (b, c, a) 垂直, 即曲面的切平面都与向量 (b, c, a) 平行, 也就是与以此向量为方向的直线平行。

13. 证明: 曲面 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ ($x \neq 0$) 在任一点处的切平面都通过原点, 其中函数 f 具有连续偏导数。

证 易知曲面上任意一点 (x_0, y_0, z_0) 处的切向量为

$$\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right), f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right), -1 \right),$$

因此过点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面为

$$\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \right) (x - x_0) + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) (y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

容易验证, $(0, 0, 0)$ 满足上述方程, 即所有切平面都经过原点。

14. 证明: 曲面 $F\left(\frac{z}{y}, \frac{x}{z}, \frac{y}{x}\right) = 0$ 的所有切平面都过某一定点, 其中函数 F 具有连续偏导数。

证 易知曲面上任意一点 (x_0, y_0, z_0) 处的切向量为

$$\left(\frac{1}{z_0} F_2 - \frac{y_0}{x_0^2} F_3, \frac{1}{x_0} F_3 - \frac{z_0}{y_0^2} F_1, \frac{1}{y_0} F_1 - \frac{x_0}{z_0^2} F_2 \right),$$

因此过点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面为

$$\left(\frac{1}{z_0} F_2 - \frac{y_0}{x_0^2} F_3 \right) (x - x_0) + \left(\frac{1}{x_0} F_3 - \frac{z_0}{y_0^2} F_1 \right) (y - y_0) + \left(\frac{1}{y_0} F_1 - \frac{x_0}{z_0^2} F_2 \right) (z - z_0) = 0,$$

容易验证, $(0, 0, 0)$ 满足上述方程, 即所有切平面都经过原点。

15. 设 $F(x, y, z)$ 具有连续偏导数, 且 $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$ 。进一步, 设 k 为正整数, $F(x, y, z)$ 为 k 次齐次函数, 即对于任意的实数 t 和 (x, y, z) , 成立

$$F(tx, ty, tz) = t^k F(x, y, z)。$$

证明: 曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上所有点的切平面相交于一定点。

证 利用齐次条件对 t 求导, 有

$$x F_x(tx, ty, tz) + y F_y(tx, ty, tz) + z F_z(tx, ty, tz) = k t^{k-1} F(x, y, z),$$

再令 $t = 1$, 得到曲面上的点 (x, y, z) 所满足的恒等式:

$$x F_x(x, y, z) + y F_y(x, y, z) + z F_z(x, y, z) = k F(x, y, z)。$$

因为曲面上任意一点 (x_0, y_0, z_0) 处的法向量为

$$(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)),$$

于是过点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面方程为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0。$$

利用前面的恒等式, 切平面方程化为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)x + F_y(x_0, y_0, z_0)y + F_z(x_0, y_0, z_0)z = k F(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

显然切平面经过原点, 所以原点就是所有切平面的交点。

§ 6

无条件极值

1. 讨论下列函数的极值:

$$(1) f(x, y) = x^4 + 2y^4 - 2x^2 - 12y^2 + 6;$$

$$(2) f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2;$$

$$(3) f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2;$$

$$(4) f(x, y) = (y - x^2)(y - x^4);$$

$$(5) f(x, y) = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y}, \text{ 其中常数 } a > 0, b > 0;$$

$$(6) f(x, y, z) = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}, \quad (x, y, z > 0)。$$

解 (1) 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 4x = 0, \\ f_y = 8y^3 - 24y = 0 \end{cases}$$

解得

$$x = 0, \pm 1; y = 0, \pm \sqrt{3},$$

即函数有 9 个驻点。再由 $f_{xx} = 4(3x^2 - 1)$, $f_{yy} = 0$, $f_{yy} = 24(y^2 - 1)$, 可知

$$H = 96(x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

应用定理 12.6.2。驻点 $(0,0), (1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}), (-1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3})$ 满足 $H > 0$, 所以是极值点, 而其余驻点不是极值点。再根据 f_{xx} 的符号, 可知函数在 $(0,0)$ 点取极大值 6; 在 $(1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}), (-1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3})$ 四点取极小值 -13。

注 本题可使用配方法得到

$$f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + 2(y^2 - 3)^2 - 13,$$

由此易知 $(1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}), (-1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3})$ 四点为函数的最小值点, 最小值为 -13, 函数无最大值, $(0,0)$ 点为函数的极大值点, 极大值为 6。

(2) 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ f_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

两式相减, 可解得 $x = y = 0, \pm 1$, 即驻点为 $(0,0), (1,1), (-1,-1)$ 三点。再由 $f_{xx} = 12x^2 - 2, f_{xy} = -2, f_{yy} = 12y^2 - 2$, 可知

$$H = 4(6x^2 - 1)(6y^2 - 1) - 4.$$

应用定理 12.6.2。驻点 $(1,1), (-1,-1)$ 满足 $H > 0$, 所以是极值点, 再根据 f_{xx} 的符号, 可知函数在 $(1,1), (-1,-1)$ 两点取极小值 -2。

在 $(0,0)$ 点, 有 $H = 0$, 且 $f(0,0) = 0$ 。由于 $f(x, x) = 2x^2(x^2 - 2), f(x, -x) = 2x^4$, 可知函数在 $(0,0)$ 点附近变号, 所以 $(0,0)$ 不是极值点。

(3) 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0, \\ f_y = 2y = 0, \\ f_z = -2z = 0 \end{cases}$$

解得 $(0,0,0)$ 是唯一的驻点。由 $f(0,0,0) = 0, f(x, y, 0) = x^2 + y^2, f(0,0,z) = -z^2$, 可知函数在 $(0,0,0)$ 点附近变号, 即 $(0,0,0)$ 不是极值点, 所以函数无极值点。

注 对于二次多项式 $f(x), x \in \mathbb{R}^n$, 它的 Hesse 矩阵 H 是常数矩阵, 我们有如下结论:

设 x_0 为 $f(x)$ 的驻点, 则由 $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^T H(x - x_0)$ 可知

(a) $f(x_0)$ 为最小值的充分必要条件是 H 为半正定矩阵;

(b) $f(x_0)$ 为最大值的充分必要条件是 H 为半负定矩阵;

(c) $f(x_0)$ 不是极值的充分必要条件是 H 为不定矩阵。

本题由于函数 $f(x, y, z)$ 的 Hesse 矩阵为不定矩阵, 所以 $(0,0,0)$ 不是

$f(x, y, z)$ 的极值点。

(4) 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 2x(3x^4 - 2yx^2 - y) = 0, \\ f_y = 2y - x^2 - x^4 = 0 \end{cases}$$

解得 $x = y = 0$; $x = \pm 1, y = 1$; $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{3}{8}$, 即驻点为 $(0, 0), (1, 1), (-1, 1), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{8}\right)$ 和 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{8}\right)$ 五点。再由 $f_{xx} = 30x^4 - 12yx^2 - 2y, f_{yy} = -2x - 4x^3, f_{xy} = 2$, 可知

$$H = 2(30x^4 - 12yx^2 - 2y) - (2x + 4x^3)^2.$$

应用定理 12.6.2。驻点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{8}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{8}\right)$ 满足 $H > 0$, 所以是极值点, 再

根据 f_{yy} 的符号, 可知函数在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{8}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{8}\right)$ 取极小值 $-\frac{1}{64}$ 。

在 $(1, 1), (-1, 1)$ 点 $H < 0$, 所以 $(1, 1), (-1, 1)$ 不是极值点。

在 $(0, 0)$ 点 $H = 0$, 且 $f(0, 0) = 0$ 。由于 $f(x, x^3) = -x^5(1-x)^2$, 易知函数在 $(0, 0)$ 点附近变号, 所以 $(0, 0)$ 不是极值点。

(5) 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = y - \frac{a^3}{x^2} = 0, \\ f_y = x - \frac{b^3}{y^2} = 0 \end{cases}$$

解得 $\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right)$ 是唯一的驻点。再由 $f_{xx} = \frac{2a^3}{x^5}, f_{yy} = 1, f_{xy} = \frac{2b^3}{y^3}$, 可知

$$H = \frac{4a^3b^3}{x^3y^3} - 1.$$

应用定理 12.6.2。由于在驻点 $\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right)$ 有 $H > 0$, 再根据 f_{xx} 的符号, 可知函数在 $\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right)$ 点取极小值 $3ab$ 。

(6) 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 1 - \frac{y}{x^2} = 0, \\ f_y = \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2} = 0, \\ f_z = \frac{1}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \end{cases}$$

解得唯一的驻点 $(2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{3}{4}})$ 。由于函数在 $(2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{3}{4}})$ 点的 Hesse 矩阵

$$\begin{pmatrix} 2^{\frac{3}{4}} & -2^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ -2^{-\frac{1}{2}} & 2^{\frac{1}{4}} & -2^{-1} \\ 0 & -2^{-1} & 2^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$$

是正定的,所以函数在 $(2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{3}{4}})$ 取极小值 $4 \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ 。

2. 设 $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz$, 证明: 函数 f 的最小值为 0。

证 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y + 2z = 0, \\ f_y = 6y - 2x = 0, \\ f_z = 4z + 2x = 0 \end{cases}$$

解得唯一驻点 $(0, 0, 0)$, 由于函数在 $(0, 0, 0)$ 点的 Hesse 矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

是正定的, 所以函数在 $(0, 0, 0)$ 点取极小值 $f(0, 0, 0) = 0$ 。

注 本题可使用配方法得到

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - 2y)^2 + \frac{1}{2}(x + 2z)^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

由此可知函数在 $(0, 0, 0)$ 点取最小值 $f(0, 0, 0) = 0$ 。

3. 证明: 函数 $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ 有无穷多个极大值点, 但无极小值点。

证 由

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -(1 + e^y) \sin x = 0, \\ f_y(x, y) = e^y \cos x - (1 + y)e^y = 0 \end{cases}$$

解得 $x = k\pi$, $y = \cos k\pi - 1$, 所以驻点为

$$(k\pi, \cos k\pi - 1), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

由 $f_{xx} = -(1 + e^y) \cos x$, $f_{yy} = -e^y \sin x$, $f_{xy} = e^y \cos x - (2 + y)e^y$, 可知在驻点 $(k\pi, \cos k\pi - 1)$ 处,

$$H = \cos k\pi(1 + e^y)e^y,$$

所以当 k 为奇数时 $H < 0$, $(k\pi, \cos k\pi - 1)$ 不是极值点; 当 k 为偶数时 $H > 0$, 再由 $f_{yy} < 0$, 可知 $(k\pi, \cos k\pi - 1)$ 是极大值点。所以函数有无穷多个极大值点, 但无极小值点。

4. 求函数 $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ 在闭区域

$$D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi\}$$

上的最大值与最小值。

解 由

$$\begin{cases} f_x = \cos x - \cos(x+y) = 0, \\ f_y = \cos y - \cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

得到 $\cos x = \cos y = \cos(x+y)$ 。在 $D^o = \{(x, y) | 0 < x, y < x+y < 2\pi\}$ 上考虑, 得到 $x = y = 2\pi - x - y$, 即 $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$ 是函数在区域内部唯一的驻点。由于在区域边界上, 即当 $x = 0$ 或 $y = 0$ 或 $x+y = 2\pi$ 时, 有 $f(x, y) = 0$, 而在区域内部唯一的驻点上取值为 $f\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0$, 根据闭区域上连续函数的性质, 可知函数的最大值为 $f_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 最小值为 $f_{\min} = 0$ 。

5. 在 $[0, 1]$ 上用怎样的直线 $\xi = ax + b$ 来代替曲线 $y = x^2$, 才能使它在平方误差的积分

$$J(a, b) = \int_0^1 (y - \xi)^2 dx$$

为极小意义下的最佳近似。

$$\text{解 } J(a, b) = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \frac{1}{5} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}(a^2 - 2b) + ab + b^2$$

是 a, b 的二次多项式, 它的 Hesse 矩阵 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 是正定的, 所以有最小值(见第 1 题(3)的注)。对参数 a, b 求导,

$$\begin{cases} J_a = \frac{2}{3}a - \frac{1}{2} + b = 0, \\ J_b = a + 2b - \frac{2}{3} = 0, \end{cases}$$

得到 $a = 1, b = -\frac{1}{6}$, 即 $\left(1, -\frac{1}{6}\right)$ 是唯一的驻点, 所以必定是最小值点。因此最佳直线为 $\xi = x - \frac{1}{6}$ 。

6. 在半径为 R 的圆上, 求内接三角形的面积最大者。

解 设圆内接三角形的各边所对的圆心角为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 则三角形的面积为

$$S = \frac{R^2}{2} [\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3] = \frac{R^2}{2} [\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 - \sin(\alpha_1 + \alpha_2)],$$

由第 4 题知, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2\pi}{3} = \alpha_3$ 时三角形面积最大, 这时圆内接三角形为正三角形,

$$S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2.$$

7. 要做一圆柱形帐幕, 并给它加一个圆锥形的顶。问: 在体积为定值时, 圆柱的半径 R , 高 H , 及圆锥的高 h 满足什么关系时, 所用的布料最省?

解 由帐幕的体积 $V = \pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi R^2 h$, 得到 $H = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{1}{3}h$, 于是帐幕的表面积为

$$S = 2\pi R H + \pi R \sqrt{R^2 + h^2} = \frac{2V}{R} - \frac{2\pi R h}{3} + \pi R \sqrt{R^2 + h^2}.$$

对 R 与 h 求偏导数, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial h} = -\frac{2\pi R}{3} + \frac{\pi R h}{\sqrt{R^2 + h^2}} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial R} = -\frac{2V}{R^2} - \frac{2\pi h}{3} + \pi \sqrt{R^2 + h^2} + \frac{\pi R^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} = 0. \end{cases}$$

由第一个方程, 得到 $R = \frac{\sqrt{5}}{2}h$, 再将 $R = \frac{\sqrt{5}}{2}h$ 与 $V = \pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi R^2 h$ 代入第二个方程, 得到 $H = \frac{1}{2}h$, 所以当 $\frac{R}{\sqrt{5}} = \frac{H}{1} = \frac{h}{2}$ 时, 布料最省。

8. 求由方程 $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的极值。

解 由

$$y' = -\frac{x+y}{x+2y} = 0,$$

得到 $x+y=0$, 再代入 $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ 得到 $y^2 = 1$, 由此可知隐函数 $y = y(x)$ 的驻点为 $x = \pm 1$, 且当 $x = \pm 1$ 时有 $y = \mp 1$ 。

由于在驻点有

$$y'' = -\frac{1+y'}{x+2y} + \frac{x+y}{(x+2y)^2}(1+2y') = -\frac{1}{y},$$

根据 $y''(\pm 1)$ 的符号可知, $y = y(x)$ 在 $x = -1$ 取极大值 1, 在 $x = 1$ 取极小值 -1。

注 本题也可由

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + y^2 = 1,$$

得到 $-1 \leq y \leq 1$, 由此可知 $y = y(x)$ 在 $x = -1$ 取极大值 1, 在 $x = 1$ 取极小值 -1。

9. 求由方程 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的极值。

解 由

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x}{1-2z-8y} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4(y+2z)}{1-2z-8y} = 0, \end{cases}$$

得到 $x=0$ 与 $y+2z=0$, 再代入 $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$, 得到 $7z^2+z-8=0$, 即 $z=1, -\frac{8}{7}$ 。由此可知隐函数 $z=z(x, y)$ 的驻点为 $(0, -2)$ 与 $\left(0, \frac{16}{7}\right)$ 。

由

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4}{1-2z-8y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4}{1-2z-8y},$$

可知在驻点 $(0, -2)$ 与 $\left(0, \frac{16}{7}\right)$ 有 $H>0$ 。

在 $(0, -2)$ 点, $z=1$, 因此 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4}{15} > 0$, 所以 $(0, -2)$ 为极小值点, 极小值为 $z=1$; 在 $\left(0, \frac{16}{7}\right)$ 点, $z=-\frac{8}{7}$, 因此 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4}{15} < 0$, 所以 $\left(0, \frac{16}{7}\right)$ 为极大值点, 极大值为 $z=-\frac{8}{7}$ 。

注 1 原方程可以改写为

$$2x^2 + 2(y+2z)^2 = (z-1)(7z+8),$$

由左边非负可得 $(z-1)(7z+8) \geq 0$, 即 $z \leq -\frac{8}{7}$ 或者 $z \geq 1$ 。

注 2 在三维空间中, 方程的图像是双叶双曲面, 由两个不相连的部分组成。其中之一开口向上, 最小值 $z=1$, 另一个开口向下, 最大值 $z=-\frac{8}{7}$ 。

10. 在 Oxy 平面上求一点, 使它到三直线 $x=0$, $y=0$ 和 $x+2y-16=0$ 的距离的平方和最小。

解 平面上点 (x, y) 到三直线的距离平方和为

$$D(x, y) = x^2 + y^2 + \left(\frac{x+2y-16}{\sqrt{5}}\right)^2.$$

对 x, y 求偏导数,

$$\begin{cases} D_x = 2x + \frac{2}{5}(x+2y-16) = 0, \\ D_y = 2y + \frac{4}{5}(x+2y-16) = 0, \end{cases}$$

得到 $x=\frac{8}{5}$, $y=\frac{16}{5}$, 所以函数只有一个驻点 $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ 。



由于

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} D(x, y) = +\infty,$$

可知函数 $D(x, y)$ 在驻点 $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ 有最小值。

11. 证明: 圆的所有外切三角形中, 以正三角形的面积为最小。

证 设圆半径为 1, 外切三角形的两个顶角为 2α 与 2β , 则三角形的面积为

$$S = \cot \alpha + \cot \beta + \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cot \alpha + \cot \beta + \tan(\alpha + \beta)。$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\csc^2 \alpha + \sec^2(\alpha + \beta) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} = -\csc^2 \beta + \sec^2(\alpha + \beta) = 0, \end{cases}$$

得到 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6} - \alpha - \beta$, 所以

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{6},$$

即外切正三角形的面积为最小。

12. 证明: 圆的所有内接 n 边形中, 以正 n 边形的面积为最大。

证 设圆半径为 1, 圆内接 n 边形的各边所对的圆心角为 α_k ($k = 1, 2, \dots, n$), 则 n 边形的面积为

$$S = \frac{1}{2} [\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{n-1} - \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1})]。$$

由

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_k} = \frac{1}{2} [\cos \alpha_k - \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1})] = 0, (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

推出

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}),$$

所以

$$\alpha_k = \frac{2\pi}{n}, (k = 1, 2, \dots, n),$$

即内接正 n 边形的面积为最大。

13. 证明: 当 $0 < x < 1, 0 < y < +\infty$ 时, 成立不等式

$$yx^y(1-x) < e^{-1}。$$

证 令 $f(x, y) = yx^y(1-x)$, 对 y 求偏导,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y(1-x)(1+y\ln x) = 0,$$

解得 $y = \frac{-1}{\ln x}$ 。对固定的 $x \in (0, 1)$, 根据 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $y = \frac{-1}{\ln x}$ 附近的符号变化, 可知

$f(x, y)$ (作为 y 的函数) 的极大值点为 $y = \frac{-1}{\ln x}$, 极大值为 $\varphi(x) = \frac{-(1-x)}{e \ln x}$ 。

再对 $\varphi(x)$ 求导, 得到

$$\varphi'(x) = \frac{1}{ex \ln^2 x} (1 - x + x \ln x)。$$

记

$$g(x) = 1 - x + x \ln x, x \in (0, 1),$$

则 $g'(x) = \ln x < 0$, $g(0^+) = 1$, $g(1^-) = 0$, 所以 $g(x) > 0$, 于是 $\varphi(x)$ 严格单调增加。再由 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = e^{-1}$, 得到

$$f(x, y) \leq \varphi(x) < e^{-1} \quad (0 < x < 1, 0 < y < +\infty)。$$

14. 某养殖场饲养两种鱼, 若甲种鱼放养 x (万尾), 乙种鱼放养 y (万尾), 收获时两种鱼的收获量分别为

$$(3 - \alpha x - \beta y)x \quad \text{和} \quad (4 - \beta x - 2\alpha y)y \quad (\alpha > \beta > 0)。$$

求使产鱼总量最大的放养数。

解 鱼总产量为

$$P = (3 - \alpha x - \beta y)x + (4 - \beta x - 2\alpha y)y = -\alpha x^2 - 2\beta xy - 2\alpha y^2 + 3x + 4y。$$

对 x, y 求偏导数,

$$\begin{cases} P_x = -2\alpha x - 2\beta y + 3 = 0, \\ P_y = -2\beta x - 4\alpha y + 4 = 0, \end{cases}$$

解得

$$x = \frac{3\alpha - 2\beta}{2\alpha^2 - \beta^2}, y = \frac{4\alpha - 3\beta}{4\alpha^2 - 2\beta^2}。$$

因为 $P = -\alpha x^2 - 2\beta xy - 2\alpha y^2 + 3x + 4y$ 是二次多项式, 由

$$H = (-2\alpha)(-4\alpha) - (2\beta)^2 = 4(2\alpha^2 - \beta^2) > 0, P_{xx} = -2\alpha < 0,$$

可知其 Hesse 矩阵是负定的, 所以函数有最大值, 即当 $x = \frac{3\alpha - 2\beta}{2\alpha^2 - \beta^2}$, $y = \frac{4\alpha - 3\beta}{4\alpha^2 - 2\beta^2}$ 时产鱼总量最大。

计算实习题

(在教师的指导下, 编制程序在电子计算机上实际计算)

1. 某种机器零件的加工需经两道工序, x 表示零件在第一道工序中出现的疵点数(疵点指气泡、砂眼、裂痕等), y 表示在第二道工序中出现的疵点数。某日测得 8 个零件的 x 与 y 如下:



第十二章 多元函数的微分学

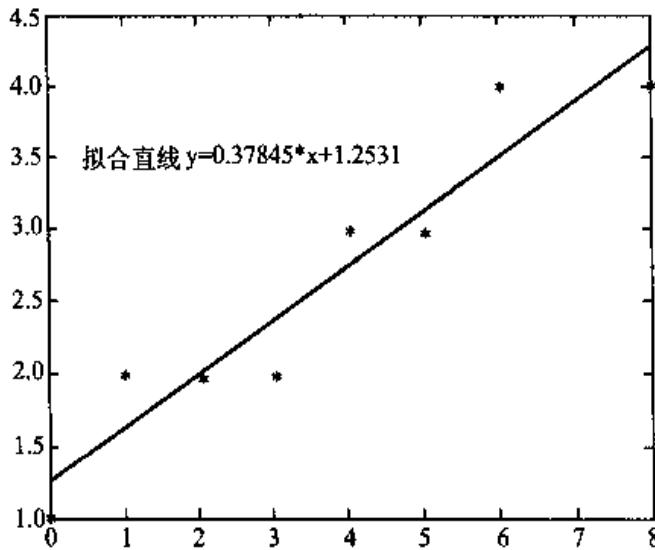
x	0	1	3	6	8	5	4	2
y	1	2	2	4	4	3	3	2

画出这些数据的散点图,找出它们之间关系的经验公式 $y = ax + b$,并画出拟合曲线。

解 程序代码为

```
hold off
x=[0,1,3,6,8,5,4,2];
y=[1,2,2,4,4,3,3,2];
plot(x,y,'b *')
hold on
A=[x',ones(size(x'))];
B=y';
x1=A \ B;
a=x1(1);b=x1(2);y=a * x + b;
plot(x,y,'r')
string=['拟合直线 y=',num2str(a),' * x + ',num2str(b)];
text(0.5,3.5,str,'FontSize',16)
```

运行后,得拟合曲线 $y = 0.37845x + 1.2531$ 。图形为



2. 某品种大豆的脂肪含量 x (%)与蛋白质含量 y (%)的测定结果如下表所示:

x	16.5	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5	24.5
y	43.5	42.6	41.8	40.6	40.3	38.7	37.2	36.0	34.0

画出这些数据的散点图,找出它们之间关系的经验公式,并画出拟合曲线。

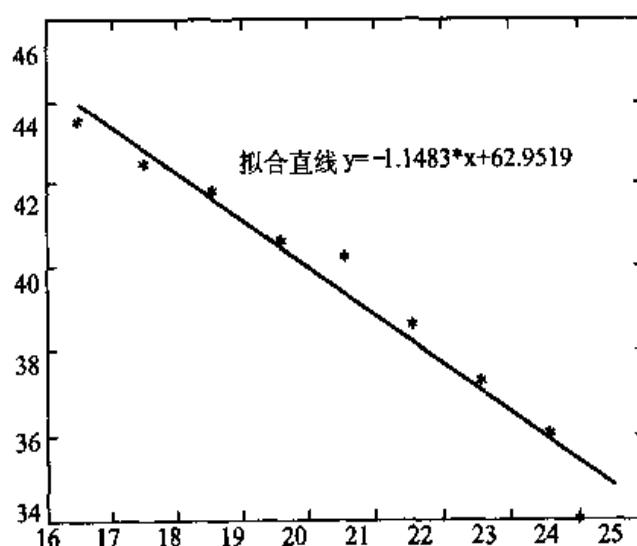
解 程序代码为

```

hold off
x=[16.5,17.5,18.5,19.5,20.5,21.5,22.5,23.5,24.5];
y=[43.5,42.6,41.8,40.6,40.3,38.7,37.2,36.0,34.0];
plot(x,y,'b *')
hold on
A=[x',ones(size(x'))];
B=y';
x1=A\B;
a=x1(1);b=x1(2);y=a*x+b;
plot(x,y,'r')
str=['拟合直线 y=',num2str(a),'*x+',num2str(b)];
text(18,44,str,'FontSize',16)

```

运行后,得拟合曲线 $y = -1.1483x + 62.9519$ 。图形为



3. 某种产品加工前的含水率(%)与加工后含水率(%)的测试结果如下表:

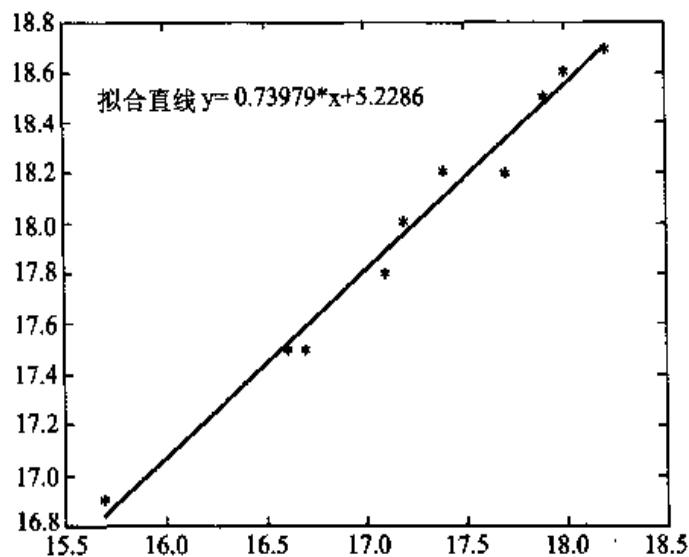
测试编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
加工前的含水率 x_i	16.7	18.2	18.0	17.9	17.4	16.6	17.2	17.7	15.7	17.1
加工后的含水率 y_i	17.5	18.7	18.6	18.5	18.2	17.5	18.0	18.2	16.9	17.8

试确定加工后的含水率 y 与加工前含水率 x 的关系。

解 程序代码为

```
hold off
x=[16.7,18.2,18.0,17.9,17.4,16.6,17.2,17.7,15.7,17.1];
y=[17.5,18.7,18.6,18.5,18.2,17.5,18.0,18.2,16.9,17.8];
plot(x,y,'b*')
hold on
A=[x',ones(size(x'))];
B=y';
x1=A\B;
a=x1(1);b=x1(2);y=a*x+b;
plot(x,y,'r')
str=['拟合直线 y=',num2str(a),'*x+',num2str(b)];
text(15.6,18.5,str,'FontSize',16)
```

运行后,得拟合曲线 $y = 0.73979x + 5.2286$ 。图形为



4. 盛钢水的钢包,在使用过程中由于钢水对耐火材料的浸蚀,容积会不断增大。在生产过程中,积累了使用次数与钢包容积增大之间的以下 16 组数据。画出这些数据的散点图,找出使用次数 x 与钢包容积增大 y 之间的关系,并画出拟合曲线。

x	2	3	4	5	6	7	8	9
y	6.42	8.20	9.58	9.50	9.70	10.00	9.93	9.99
x	10	11	12	13	14	15	16	17
y	10.50	10.59	10.60	10.63	10.60	10.90	10.76	10.80

(提示:假设 $y = ax^2 + bx + c$)

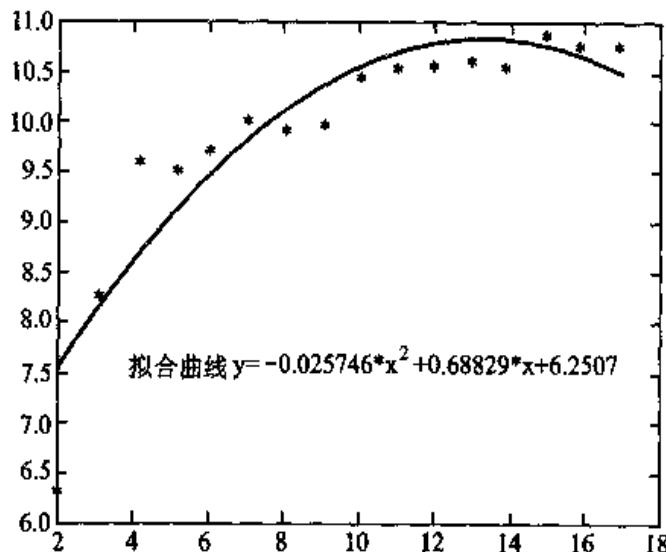
解 程序代码为

```

hold off
x=2:17;
y = [ 6.42, 8.20, 9.58, 9.50, 9.70, 10.00, 9.93, 9.99, 10.50, 10.59, 10.60,
10.63, 10.60, 10.90, 10.76, 10.80];
plot(x,y,'b*')
A=[x.^2,x',ones(size(x))'];
a=A\y'
hold on
y=a(1)*x.^2+a(2)*x+a(3)
plot(x,y,'r')
string=['拟合曲线 y =',num2str(a(1)),'* x^2 +',num2str(a(2)),'* x +',
num2str(a(3))];
text(5,8,string)

```

运行后,得拟合曲线 $y = -0.025746x^2 + 0.68829x + 6.2507$,图形为



5. 在研究化学反应速度时,得到下列数据。找出实验开始后的时间 t 与反应物的量 m 之间的关系,并画出拟合曲线。

t	3	6	9	12	15	18	21	24
m	57.6	41.5	31.2	22.9	15.4	12.1	8.9	6.4

(提示: m 与 t 的关系为 $m = ae^{bt}$ 。)

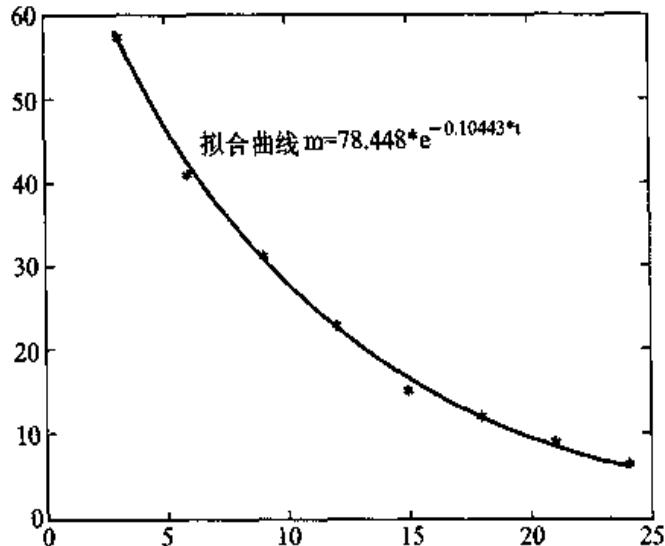
解 程序代码为

```

hold off
x=3:3:24;
y=[57.6,41.5,31.2,22.9,15.4,12.1,8.9,6.4];
plot(x,y,'b*')
hold on
y1=log(y);
A=[x',ones(size(x))'];
a=A \ y1';
y=exp(a(2))*exp(a(1)*x);
plot(x,y,'r')
string=['拟合曲线 m=','num2str(exp(a(2))),'*'e'','num2str(a(1)),'*'t'];
text(8,28,string,'FontSize',16)

```

运行后,得拟合曲线 $m = 78.448e^{-0.10443t}$,图形为



§ 7

条件极值问题与 Lagrange 乘数法

1. 求下列函数的条件极值:

(1) $f(x, y) = xy$, 约束条件为 $x + y = 1$;

(2) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, 约束条件为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(3) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, 约束条件为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ Ax + By + Cz = 0, \end{cases}$ 其中 $a >$

$b > c > 0, A^2 + B^2 + C^2 = 1$ 。

解 (1) 令

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x + y - 1),$$

求偏导, 得到

$$\begin{cases} L_x = y - \lambda = 0, \\ L_y = x - \lambda = 0, \\ L_\lambda = -(x + y - 1) = 0, \end{cases}$$

解得 $x = y = \frac{1}{2}$, 即目标函数只有一个驻点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 。

由 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 可知 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 是目标函数的条件极大值点, 也是条件最大值点, 条件最大值为 $f_{\max} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ 。

(2) 令

$$L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

求偏导, 得到

$$\begin{cases} L_x = 1 - 2\lambda x = 0, \\ L_y = -2 - 2\lambda y = 0, \\ L_z = 2 - 2\lambda z = 0, \\ L_\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0, \end{cases}$$

由前三式得到 $y = -z = -2x$, 代入约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 解得

$$(x, y, z) = \pm \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集, 目标函数连续, 所以必有最大值和最小值。由于目标函数的驻点为 $\pm \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 对应的目标函数值为 ± 3 , 所以 $f_{\max} = f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3$, $f_{\min} = f\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -3$ 。

(3) 令

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(Ax + By + Cz),$$

求偏导, 得到

$$\begin{cases} L_x = \frac{2x}{a^2} - 2\lambda x - \mu A = 0, \\ L_y = \frac{2y}{b^2} - 2\lambda y - \mu B = 0, \\ L_z = \frac{2z}{c^2} - 2\lambda z - \mu C = 0, \\ L_\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0, \\ L_\mu = -(Ax + By + Cz) = 0, \end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{2}(xL_x + yL_y + zL_z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \lambda = 0.$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集, 目标函数连续, 所以必有最大值和最小值。由上式可知最大值和最小值包含在上面的方程组关于 λ 的解中。

由

$$AL_x + BL_y + CL_z = 2\left(\frac{Ax}{a^2} + \frac{By}{b^2} + \frac{Cz}{c^2}\right) - \mu(A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

得到

$$\mu = \frac{2}{A^2 + B^2 + C^2} \left(\frac{Ax}{a^2} + \frac{By}{b^2} + \frac{Cz}{c^2}\right) = 2\left(\frac{Ax}{a^2} + \frac{By}{b^2} + \frac{Cz}{c^2}\right),$$

代入上面的方程组, 得到

$$\begin{cases} \frac{L_x}{2} = \left(\frac{1-A^2}{a^2} - \lambda\right)x - \frac{AB}{b^2}y - \frac{AC}{c^2}z = 0, \\ \frac{L_y}{2} = -\frac{AB}{a^2}x + \left(\frac{1-B^2}{b^2} - \lambda\right)y - \frac{BC}{c^2}z = 0, \\ \frac{L_z}{2} = -\frac{AC}{a^2}x - \frac{BC}{b^2}y + \left(\frac{1-C^2}{c^2} - \lambda\right)z = 0. \end{cases}$$

由约束条件可知驻点不在原点, 即上面方程组有非零解, 所以其系数行列式为零。经计算得到

$$-\lambda \left[\lambda^2 + \left(\frac{A^2-1}{a^2} + \frac{B^2-1}{b^2} + \frac{C^2-1}{c^2}\right)\lambda + \left(\frac{A^2}{b^2c^2} + \frac{B^2}{c^2a^2} + \frac{C^2}{a^2b^2}\right) \right] = 0,$$

显然目标函数的最大值与最小值不为零, 即 $\lambda \neq 0$, 所以 f 的最大值与最小值分别为方程

$$\lambda^2 + \left(\frac{A^2-1}{a^2} + \frac{B^2-1}{b^2} + \frac{C^2-1}{c^2}\right)\lambda + \left(\frac{A^2}{b^2c^2} + \frac{B^2}{c^2a^2} + \frac{C^2}{a^2b^2}\right) = 0$$

的两个根。

2. 在周长为 $2p$ 的一切三角形中, 找出面积最大的三角形。

解 记三角形的边长为 a, b, c , 面积为 S , 则 $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ 。令

$$L(a, b, c, \lambda) = p(p-a)(p-b)(p-c) - \lambda(a+b+c-2p),$$

求偏导数, 得到

$$\begin{cases} L_a = -p(p-b)(p-c) - \lambda = 0, \\ L_b = -p(p-a)(p-c) - \lambda = 0, \\ L_c = -p(p-a)(p-b) - \lambda = 0, \end{cases}$$

于是



$$p - a = p - b = p - c,$$

再根据约束条件得到

$$a = b = c = \frac{2}{3}p,$$

所以面积最大的三角形为正三角形,最大面积为 $\frac{\sqrt{3}}{9}p^2$ 。

3. 要做一个容积为 1 m^3 的有盖铝圆桶,什么样的尺寸才能使用料最省?

解 假设圆桶的底面半径为 r ,高为 h ,则圆桶的容积为 $\pi r^2 h = 1$,表面积为 $S = 2\pi r h + 2\pi r^2$ 。令

$$L(r, h, \lambda) = 2\pi r h + 2\pi r^2 - \lambda(\pi r^2 h - 1),$$

求偏导,得到

$$\begin{cases} L_r = 2\pi h + 4\pi r - 2\pi r h \lambda = 0, \\ L_h = 2\pi r - \pi r^2 \lambda = 0, \end{cases}$$

解得 $h = 2r$,再代入约束条件 $\pi r^2 h = 1$,得到

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}, h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}.$$

根据题意,目标函数必有最小值,所以可知当底面半径为 $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$,高为 $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ 时用料最省。

4. 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆,求原点到这个椭圆的最长距离与最短距离。

解 设原点到椭圆上一点的距离为 $d(x, y, z)$,则 $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 。令

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 - z) - \mu(x + y + z - 1),$$

求偏导数,得到

$$\begin{cases} L_x = 2x - 2\lambda x - \mu = 0, \\ L_y = 2y - 2\lambda y - \mu = 0, \\ L_z = 2z + \lambda - \mu = 0, \end{cases}$$

将前两式相减,得到 $(\lambda - 1)(x - y) = 0$ 。

若 $\lambda = 1$,则有 $\mu = 0$, $z = -\frac{1}{2}$,显然不满足约束条件。

若 $\lambda \neq 1$,则 $x = y$,再联立约束条件 $z = x^2 + y^2$ 与 $x + y + z = 1$,可解出 $x = y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$, $z = 2x^2 = 2 \mp \sqrt{3}$,从而有 $d^2 = 9 \mp 5\sqrt{3}$ 。

由于满足约束条件的点集是连通紧集,目标函数连续,所以必有最大值和最小值。于是得到

$$d_{\max} = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}, d_{\min} = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}.$$

5. 求椭圆 $x^2 + 3y^2 = 12$ 的内接等腰三角形, 其底边平行于椭圆的长轴, 而使面积最大。

解 设 $(x, y), x \geq 0$ 为三角形底边上的顶点, 则三角形面积为 $S = x(2 - y)$, 令

$$L(x, y, \lambda) = x(2 - y) - \lambda(x^2 + 3y^2 - 12),$$

求偏导数, 得到

$$\begin{cases} L_x = 2 - y - 2\lambda x, \\ L_y = -x - 6\lambda y, \end{cases}$$

消去 λ , 可得 $6y - 3y^2 + x^2 = 0$, 再联立约束条件 $x^2 + 3y^2 = 12$, 可得满足 $x \geq 0$ 的驻点只有 $(0, 2)$ 和 $(3, -1)$ 。

当 $(x, y) = (0, 2)$ 时 $S = 0$, 当 $(x, y) = (3, -1)$ 时 $S = 9$ 。由题意三角形面积一定存在最大值, 于是得到

$$S_{\max} = 9。$$

6. 求空间一点 (a, b, c) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离。

解 设 (x, y, z) 为平面上的一点, 它与点 (a, b, c) 之间的距离为 $d(x, y, z)$, 则 $d^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$, 令

$$L(x, y, z, \lambda) = d^2(x, y, z) - \lambda(Ax + By + Cz + D),$$

求偏导, 得到

$$\begin{cases} L_x = 2(x - a) - A\lambda = 0, \\ L_y = 2(y - b) - B\lambda = 0, \\ L_z = 2(z - c) - C\lambda = 0, \end{cases}$$

解得

$$x = a + \frac{1}{2}\lambda A, y = b + \frac{1}{2}\lambda B, z = c + \frac{1}{2}\lambda C,$$

代入约束条件 $Ax + By + Cz + D = 0$, 得到

$$\frac{\lambda}{2} = -\frac{Aa + Bb + Cc + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

于是

$$d^2 = \left(\frac{\lambda A}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda B}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda C}{2}\right)^2 = \frac{(Aa + Bb + Cc + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

所以 (a, b, c) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|aA + bB + cC + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

7. 求平面 $Ax + By + Cz = 0$ 与柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相交所成的椭圆的面积 (A, B, C 都不为零; a, b 为正数)。

解 椭圆的中心在原点, 原点到椭圆周上点 (x, y, z) 的距离 d 的最大值和最小值分别为椭圆的长半轴和短半轴。令

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) - \mu(Ax + By + Cz),$$

求偏导数, 得到

$$\begin{cases} L_x = 2x - \frac{2\lambda x}{a^2} - \mu A = 0, \\ L_y = 2y - \frac{2\lambda y}{b^2} - \mu B = 0, \\ L_z = 2z - \mu C = 0, \\ L_\lambda = -\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0, \\ L_\mu = -(Ax + By + Cz) = 0, \end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{2}(xL_x + yL_y + zL_z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda = 0.$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集, 目标函数连续, 所以必有最大值和最小值。由上式可知最大值和最小值包含在上面的方程组关于 λ 的解中。以 $\mu = \frac{2z}{C} = -2 \frac{Ax + By}{C^2}$ 代入前两个方程, 可得

$$\begin{cases} \frac{L_x}{2} = \left(1 - \frac{\lambda}{a^2} + \frac{A^2}{C^2} \right) x + \frac{AB}{C^2} y = 0, \\ \frac{L_y}{2} = \frac{AB}{C^2} x + \left(1 - \frac{\lambda}{b^2} + \frac{B^2}{C^2} \right) y = 0, \end{cases}$$

此方程组有非零解, 所以系数行列式为 0。因此

$$\left(1 - \frac{\lambda}{a^2} + \frac{A^2}{C^2} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{b^2} + \frac{B^2}{C^2} \right) - \frac{A^2 B^2}{C^4} = 0,$$

即

$$A^2 \left(1 - \frac{\lambda}{b^2} \right) + B^2 \left(1 - \frac{\lambda}{a^2} \right) + C^2 \left(1 - \frac{\lambda}{b^2} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{a^2} \right) = 0.$$

这个二次方程的两个根 λ_1 与 λ_2 就是椭圆的长半轴和短半轴的平方, 因此椭圆面积为 $S = \pi \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$, 利用多项式根与系数的关系可得

$$\lambda_1 \lambda_2 = (A^2 + B^2 + C^2) \frac{a^2 b^2}{C^2},$$

所以

$$S = \frac{\pi ab}{C} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

8. 求 $z = \frac{1}{2}(x^4 + y^4)$ 在条件 $x + y = a$ 下的最小值, 其中 $x \geq 0, y \geq 0, a$ 为常数。并证明不等式

$$\frac{x^4 + y^4}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^4.$$

解 令

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(x^4 + y^4) - \lambda(x + y - a),$$

求偏导数, 得到

$$\begin{cases} L_x = 2x^3 - \lambda = 0, \\ L_y = 2y^3 - \lambda = 0, \\ L_\lambda = -(x + y - a) = 0, \end{cases}$$

解得 $x = y = \frac{a}{2}$ 。

由于连续函数 $z = \frac{1}{2}(x^4 + y^4)$ 在线段 $\{(x, y) | x + y = a, x \geq 0, y \geq 0\}$ 的两个端点 $(0, a), (a, 0)$ 上的函数值有 $f(0, a) = f(a, 0) = \frac{1}{2}a^4 > f\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{16}a^4$, 所以 $f_{\min} = f\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{16}a^4$ 。因此

$$\frac{x^4 + y^4}{2} \geq \frac{1}{16}a^4 = \left(\frac{a}{2}\right)^4 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^4.$$

9. 当 $x > 0, y > 0, z > 0$ 时, 求函数

$$f(x, y, z) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$$

在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6R^2$ 上的最大值。并由此证明: 当 a, b, c 为正实数时, 成立不等式

$$abc^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

解 令

$$L(x, y, z, \lambda) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 6R^2),$$

求偏导数, 得到

$$\begin{cases} L_x = \frac{1}{x} - 2x\lambda = 0, \\ L_y = \frac{2}{y} - 2y\lambda = 0, \\ L_z = \frac{3}{z} - 2z\lambda = 0, \end{cases}$$

解得 $2\lambda = \frac{1}{x^2} = \frac{2}{y^2} = \frac{3}{z^2}$, 代入约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 6R^2$, 可得

$$x^2 = R^2, y^2 = 2R^2, z^2 = 3R^2.$$

由于目标函数无最小值, 所以唯一的驻点必是最大值点。于是得到

$$\ln x + 2\ln y + 3\ln z \leq \ln [\sqrt{R^2}(2R^2)(3R^2)^{\frac{3}{2}}] = \ln(6\sqrt{3}R^6),$$

即

$$xy^2z^3 \leq 6\sqrt{3} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{6} \right)^3.$$

由前一式得到

$$f_{\max} = f(R, \sqrt{2}R, \sqrt{3}R) = \ln(6\sqrt{3}R^6).$$

在后一式中令 $a = x^2, b = y^2$ 和 $c = z^2$, 得到

$$ab^2c^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^6.$$

10. (1) 求函数 $f(x, y, z) = x^a y^b z^c$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 在约束条件 $x^k + y^k + z^k = 1$ 下的极大值, 其中 k, a, b, c 均为正常数;

(2) 利用(1)的结果证明: 对于任何正数 u, v, w , 成立不等式

$$\left(\frac{u}{a} \right)^a \left(\frac{v}{b} \right)^b \left(\frac{w}{c} \right)^c \leq \left(\frac{u+v+w}{a+b+c} \right)^{a+b+c}.$$

解 (1) 令

$$L(x, y, z, \lambda) = a \ln x + b \ln y + c \ln z - \lambda(x^k + y^k + z^k - 1),$$

求偏导数, 得到

$$\begin{cases} L_x = \frac{a}{x} - k\lambda x^{k-1} = 0, \\ L_y = \frac{b}{y} - k\lambda y^{k-1} = 0, \\ L_z = \frac{c}{z} - k\lambda z^{k-1} = 0, \end{cases}$$

解得 $k\lambda = \frac{a}{x^k} = \frac{b}{y^k} = \frac{c}{z^k}$, 代入约束条件 $x^k + y^k + z^k = 1$, 得到 $\frac{a+b+c}{k\lambda} = 1$, 所以

$$x^k = \frac{a}{a+b+c}, y^k = \frac{b}{a+b+c}, z^k = \frac{c}{a+b+c}.$$



由于目标函数无最小值,所以唯一的驻点必是最大值点。于是

$$a \ln x + b \ln y + c \ln z = \ln(x^a y^b z^c) \leq \ln \left[\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}} \right]^{\frac{1}{k}},$$

即得到

$$x^a y^b z^c \leq \left[\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}} \right]^{\frac{1}{k}}.$$

(2) 令 $k=1$, $x=\frac{u}{u+v+w}$, $y=\frac{v}{u+v+w}$, $z=\frac{w}{u+v+w}$, 则 $x+y+z=1$, 且

$$x^a y^b z^c = \left(\frac{u}{u+v+w} \right)^a \left(\frac{v}{u+v+w} \right)^b \left(\frac{w}{u+v+w} \right)^c = \frac{u^a v^b w^c}{(u+v+w)^{a+b+c}}.$$

利用(1)的结果,有

$$x^a y^b z^c \leq \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}.$$

整理后得到

$$\left(\frac{u}{a} \right)^a \left(\frac{v}{b} \right)^b \left(\frac{w}{c} \right)^c \leq \left(\frac{u+v+w}{a+b+c} \right)^{a+b+c}.$$

11. 求 a, b 之值,使得椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 包含圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$,且面积最小。

解 为了使椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 既包含圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 又面积最小, 可以要求圆心 $(1,0)$ 到椭圆周上的点的最短距离为 1。为此先考虑目标函数 $g(x, y) = (x-1)^2 + y^2$ 在 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 条件下的极小值问题, 并设条件极小值为 $g_{\min} = 1$, 由此导出 a, b 之间的关系。构造 Lagrange 函数

$$L(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 - \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right),$$

求偏导数, 得到

$$\begin{cases} \frac{1}{2} L_x = (x-1) - \frac{\lambda x}{a^2} = 0, \\ \frac{1}{2} L_y = y - \frac{\lambda y}{b^2} = y \left(1 - \frac{\lambda}{b^2} \right) = 0, \\ L_\lambda = - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0, \end{cases}$$

并由此可得

$$g_{\min} = (x-1)^2 + y^2 = \lambda \left(1 - \frac{x}{a^2} \right) = 1.$$

若 $y=0$, 则 $x=a$ 。由 $g_{\min}=(x-1)^2+y^2=1$, 可得 $a=2$ 。在方程组

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$
中消去 y , 得到 $\left(1-\frac{b^2}{4}\right)x^2-2x+b^2=0$, 容易知道当 $b < \sqrt{2}$

时, 方程除了解 $x_1=2$ 外另有一解 $x_2 \in (0, 2)$, 这说明椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 不完全包含圆 $(x-1)^2+y^2=1$, 不满足条件。所以 $b \geq \sqrt{2}$, 这时椭圆面积 $S \geq 2\sqrt{2}\pi$ 。

若 $\lambda=b^2$, 则 $x=\frac{a^2}{a^2-b^2}$, 代入 $g_{\min}=\lambda\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=1$, 得到 a, b 必须满足的关系式

$$a^2b^2=a^2+b^4。$$

现求目标函数 $f(a, b)=\pi ab$ 在 $a^2b^2=a^2+b^4$ 条件下的极小值。令

$$l(a, b, \lambda)=\pi ab-\lambda(a^2b^2-a^2-b^4),$$

求偏导数, 得到

$$\begin{cases} l_a=\pi b-2\lambda a(b^2-1)=0, \\ l_b=\pi a-2\lambda b(a^2-2b^2)=0, \end{cases}$$

消去 λ , 得到 $a=\sqrt{2}b^2$, 再代入关于 a, b 的约束条件 $a^2b^2=a^2+b^4$, 解得

$$a=\frac{3\sqrt{2}}{2}, b=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

这时椭圆面积 $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ 。由于 $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi < 2\sqrt{2}\pi$, 所以当 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}, b=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 包含圆 $(x-1)^2+y^2=1$, 且面积最小。

12. 设三角形 ABC 的三个顶点分别在三条光滑曲线 $f(x, y)=0, g(x, y)=0$ 及 $h(x, y)=0$ 上。证明: 若三角形 ABC 的面积取极大值, 则各曲线分别在三个顶点处的法线必通过三角形 ABC 的垂心。

证 不妨固定一边 BC 于 x 轴上, A 点在曲线 $f(x, y)=0$ 上移动, 设 $y=y(x)$ 是 $f(x, y)=0$ 所确定的隐函数, 则 $y(x)$ 就是三角形的高, 当三角形 ABC 的面积取极大值时, $\frac{dy(x)}{dx}=0$, 即曲线 $f(x, y)=0$ 在 A 点的切线与对边 BC 平行, 所以在 A 点的法线与 BC 边垂直。由于这是图形的几何性质, 不依赖于坐标系, 所以曲线 $f(x, y)=0, g(x, y)=0$ 与 $h(x, y)=0$ 在三个顶点处的切线分别平行于三角形的对边, 从而在三个顶点处的法线分别垂直于三角形的对边。

13. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个已知正数。求 n 元函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=\sum_{k=1}^n a_k x_k$$

在约束条件

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 \leq 1$$

下的最大值与最小值。

解 由于 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ 上没有驻点, 所以只需要求 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在约束条件 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ 下的最大值与最小值。令

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1),$$

求偏导数, 得到

$$L_{x_k} = a_k - 2\lambda x_k = 0, k = 1, \dots, n,$$

所以

$$x_k = \frac{a_k}{2\lambda}, k = 1, \dots, n,$$

代入约束条件 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$, 可得 $2\lambda = \pm \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}$, 于是

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{\pm \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}} = \pm \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2},$$

从而

$$f_{\max} = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}, f_{\min} = -\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}.$$

14. 求二次型 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) 在 n 维单位球面 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1\}$ 上的最大值与最小值。

解 令

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1),$$

求偏导数, 得到

$$\begin{cases} \frac{1}{2} L_{x_k} = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i - \lambda x_k = 0, k = 1, \dots, n, \\ L_{\lambda} = -(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1) = 0, \end{cases}$$

由

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k L_{x_k} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k - \lambda \sum_{k=1}^n x_k^2 = 0,$$

可知

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \lambda,$$

即目标函数的最大值和最小值包含在上面的方程组关于 λ 的解中。

记 $A = (a_{ij})$, 由于方程组 $\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i - \lambda x_k = 0 (k = 1, \dots, n)$ 有非零解, 所以系数行列式 $|A - \lambda I| = 0$, 即 λ 是矩阵 $A = (a_{ij})$ 的特征值。由于 $A = (a_{ij})$ 是实对称阵, 所以特征值都是实数, 将它们按照大小排序为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, 则得到

$$f_{\max} = \lambda_n, f_{\min} = \lambda_1.$$

15. 设生产某种产品必须投入两种要素, x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量, Q 为产出量。若生产函数为 $Q = 2x_1^\alpha x_2^\beta$, 其中 α, β 为正的常数, 且 $\alpha + \beta = 1$ 。假定两种要素的价格分别为 p_1 和 p_2 , 试问: 当产出量为 12 时, 两种要素各投入多少可以使得投入总费用最小。

解 目标函数为 $f(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$, 约束条件为 $x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} = 6$ 。令

$$L(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda(2x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} - 12),$$

求偏导数, 得到

$$\begin{cases} L_{x_1} = p_1 - 2\alpha\lambda x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = 0, \\ L_{x_2} = p_2 - 2(1-\alpha)\lambda x_1^\alpha x_2^{-\alpha} = 0, \end{cases}$$

消去 λ , 得到 $x_2 = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} x_1$, 代入约束条件 $x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} = 6$, 可解得

$$x_1 = \frac{6 p_1^{\alpha-1} p_2^\beta}{\alpha^{\alpha-1} \beta^\beta}, x_2 = \frac{6 p_1^\alpha p_2^{\beta-1}}{\alpha^\alpha \beta^{\beta-1}}.$$

由于 $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow \infty} f(x_1, x_2) = +\infty$, 所以目标函数的唯一驻点必是最小值点, 即当

$x_1 = \frac{6 p_1^{\alpha-1} p_2^\beta}{\alpha^{\alpha-1} \beta^\beta}, x_2 = \frac{6 p_1^\alpha p_2^{\beta-1}}{\alpha^\alpha \beta^{\beta-1}}$ 时投入总费用最小。

第十三章 重积分

§1 有界区域上的重积分

1. 设一平面薄板(不计其厚度), 它在 xy 平面上的表示是由光滑的简单闭曲线围成的闭区域 D 。如果该薄板分布有面密度为 $\mu(x, y)$ 的电荷, 且 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续, 试用二重积分表示该薄板上的全部电荷。

解 设电荷总量为 Q , 则

$$Q = \iint_D \mu(x, y) d\sigma.$$

2. 设函数 $f(x, y)$ 在矩形 $D = [0, \pi] \times [0, 1]$ 上有界, 而且除了曲线段 $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ 外, $f(x, y)$ 在 D 上其他点连续。证明 f 在 D 上可积。

证 设 $|f(x, y)| \leq M, (x, y) \in D$, 将 D 用平行于两坐标轴的直线分成 n 个小区域 ΔD_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\text{diam } \Delta D_i\}$, 不妨设 ΔD_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 将曲线段 $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ 包含在内, 于是 $f(x, y)$ 在有界闭区域 $\bigcup_{i=k+1}^n \Delta D_i$ 上连续, 因此 $f(x, y)$ 在 $\bigcup_{i=k+1}^n \Delta D_i$ 上可积, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $\lambda < \delta_1$ 时,

$$\sum_{i=k+1}^n \omega_i \Delta \sigma_i < \frac{\epsilon}{2}.$$

而当 $\lambda < \sqrt{\frac{\epsilon}{4kM}}$ 时,

$$\sum_{i=1}^k \omega_i \Delta \sigma_i < 2M \sum_{i=1}^k \Delta \sigma_i < 2kM\lambda^2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

取 $\delta = \min\left(\delta_1, \frac{\epsilon}{4kM}\right)$, 当 $\lambda < \delta$ 时, 就有

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta \sigma_i < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

所以 f 在 D 上可积。

3. 按定义计算二重积分 $\iint_D xy dxdy$, 其中 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ 。

解 将 D 分成 n^2 个小正方形

$$\Delta D_{ij} = \left\{ (x, y) \mid \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} \leq y \leq \frac{j}{n} \right\} (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

取 $\xi_i = \frac{i}{n}$, $\eta_j = \frac{j}{n}$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n \xi_i \eta_j \Delta \sigma_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i,j=1}^n ij \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

4. 设一元函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $D = [a, b] \times [c, d]$ 。定义二元函数

$$F(x, y) = f(x), (x, y) \in D.$$

证明 $F(x, y)$ 在 D 上可积。

证 将 $[a, b], [c, d]$ 分别作划分:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

和

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = d,$$

则 D 分成了 nm 个小矩形 ΔD_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$)。

记 ω_i 是 $f(x)$ 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅, $\omega_{ij}(F)$ 是 F 在 ΔD_{ij} 上的振幅, 则

$$\omega_{ij}(F) = \omega_i,$$

于是

$$\sum_{i,j=1}^n \omega_{ij}(F) \Delta \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \Delta y_j = (d-c) \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i,$$

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 可知 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow 0)$, 所以

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij}(F) \Delta \sigma_{ij} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ (d-c) \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \right\} = 0,$$

即 $F(x, y)$ 在 D 上可积。

5. 设 D 是 \mathbb{R}^2 上的零边界闭区域, 二元函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 在 D 上可积。

证明

$$H(x, y) = \max\{f(x, y), g(x, y)\}$$

和

$$h(x, y) = \min\{f(x, y), g(x, y)\}$$

也在 D 上可积。

证 首先我们有

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + g(x, y) + |f(x, y) - g(x, y)|),$$

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + g(x, y) - |f(x, y) - g(x, y)|).$$

设 $\varphi(x, y) = |f(x, y) - g(x, y)|$, 将 D 划分成 n 个小区域 ΔD_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 利用不等式 $||a - b| - |c - d|| \leq |(a - b) - (c - d)| \leq |a - c| + |b - d|$, 可得

$$\omega_i(\varphi) \leq \omega_i(f) + \omega_i(g) (i = 1, 2, \dots, n),$$

于是

$$\omega_i(H) \leq \omega_i(f) + \omega_i(g) (i = 1, 2, \dots, n),$$

所以

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(H) \Delta \sigma_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta \sigma_i + \sum_{i=1}^n \omega_i(g) \Delta \sigma_i,$$

由 f, g 在 D 上可积, 可知

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i(H) \Delta \sigma_i = 0,$$

即 $H(x, y) = \max\{f(x, y), g(x, y)\}$ 在 D 上可积。

类似地可得

$$\omega_i(h) \leq \omega_i(f) + \omega_i(g) (i = 1, 2, \dots, n),$$

从而 $h(x, y) = \min\{f(x, y), g(x, y)\}$ 在 D 上也可积。

§ 2 重积分的性质与计算

1. 证明重积分的性质 8。

证 不妨设 $g(x) \geq 0, M, m$ 分别是 $f(x)$ 在区域 Ω 上的上确界、下确界, 由 $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ 、性质 1 和性质 3, 可得

$$m \int_{\Omega} g(x) dV \leq \int_{\Omega} f(x)g(x) dV \leq M \int_{\Omega} g(x) dV,$$

当 $\int_{\Omega} g(x) dV = 0$, 积分中值定理显然成立。当 $\int_{\Omega} g(x) dV \neq 0$, 则

$$m \leq \frac{\int_{\Omega} f(x)g(x) dV}{\int_{\Omega} g(x) dV} \leq M,$$

所以存在 $\mu \in [m, M]$, 使得

$$\frac{\int_D f(x)g(x)dV}{\int_D g(x)dV} = \mu,$$

即

$$\int_D f(x)g(x)dV = \mu \int_D g(x)dV.$$

如果 f 在有界闭区域 Ω 上连续, 由介值定理, 存在 $\xi \in \Omega$, 使得 $f(\xi) = \mu$, 所以

$$\int_D f(x)g(x)dV = f(\xi) \int_D g(x)dV.$$

2. 根据二重积分的性质, 比较下列积分的大小:

- (1) $\iint_D (x+y)^2 dxdy$ 与 $\iint_D (x+y)^3 dxdy$, 其中 D 为 x 轴, y 轴与直线 $x+y=1$ 所围的区域;
- (2) $\iint_D \ln(x+y) dxdy$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 dxdy$, 其中 D 为闭矩形 $[3,5] \times [0,1]$ 。

解 (1) 因为在 D 上成立 $0 < x+y < 1$, 所以 $(x+y)^2 > (x+y)^3$, 于是

$$\iint_D (x+y)^2 dxdy > \iint_D (x+y)^3 dxdy.$$

(2) 因为在 D 上成立 $x+y \geq 3$, 所以 $\ln(x+y) < [\ln(x+y)]^2$, 于是

$$\iint_D \ln(x+y) dxdy < \iint_D [\ln(x+y)]^2 dxdy.$$

3. 用重积分的性质估计下列重积分的值:

- (1) $\iint_D xy(x+y) dxdy$, 其中 D 为闭矩形 $[0,1] \times [0,1]$;
- (2) $\iint_D \frac{dxdy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, 其中 D 为区域 $\{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 10\}$;
- (3) $\iiint_D \frac{dxdydz}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Ω 为单位球 $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 。

解 (1) 因为在 D 上成立 $0 \leq xy(x+y) \leq 2$, 所以

$$0 \leq \iint_D xy(x+y) dxdy \leq 2.$$

(2) 因为在 D 上成立 $\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100}$, 所以



$$\frac{100}{51} \leq \iint_D \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq 2.$$

(3) 因为在 Ω 上成立 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} \leq 1$, 所以

$$\frac{2}{3}\pi \leq \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{1+x^2+y^2+z^2} \leq \frac{4}{3}\pi.$$

4. 计算下列重积分:

$$(1) \iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为闭矩形 } [0,1] \times [0,1];$$

$$(2) \iint_D xye^{x^2+y^2} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为闭矩形 } [a,b] \times [c,d];$$

$$(3) \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(x+y+z)^3}, \text{ 其中 } \Omega \text{ 为长方体 } [1,2] \times [1,2] \times [1,2].$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3) dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^1 (x^3 + 3x^2y + y^3) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + y + y^3 \right) dy = 1. \end{aligned}$$

$$(2) \iint_D xye^{x^2+y^2} dx dy = \int_a^b xe^{x^2} dx \int_c^d ye^{y^2} dy = \frac{1}{4} (e^{b^2} - e^{a^2})(e^{d^2} - e^{c^2}).$$

$$\begin{aligned} (3) \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(x+y+z)^3} &= \int_1^2 dx \int_1^2 dy \int_1^2 \frac{dz}{(x+y+z)^3} \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^2 dx \int_1^2 \left[\frac{1}{(x+y+2)^2} - \frac{1}{(x+y+1)^2} \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{x+4} - \frac{2}{x+3} + \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{128}{125}. \end{aligned}$$

5. 在下列积分中改变累次积分的次序:

$$(1) \int_a^b dx \int_a^x f(x,y) dy \quad (a < b);$$

$$(2) \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y) dy \quad (a > 0);$$

$$(3) \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y) dy;$$

$$(4) \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x,y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x,y) dx;$$

$$(5) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z) dz \text{ (改成先 } y \text{ 方向, 再 } x \text{ 方向和 } z \text{ 方向的)}$$

次序积分);

(6) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz$ (改成先 x 方向, 再 y 方向和 z 方向的次序积分)。

$$\text{解} \quad (1) \int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy \\ = \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx + \\ \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \\ \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

$$(4) \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx = \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x, y) dy.$$

$$\begin{aligned} (5) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \\ = \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy - \int_0^1 dz \int_0^x dx \int_0^{x-z} f(x, y, z) dy. \end{aligned}$$

注 也可写成

$$\int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy + \int_0^1 dz \int_0^z dx \int_{z-x}^{1-x} f(x, y, z) dy.$$

$$(6) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz = \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx.$$

6. 计算下列重积分:

(1) $\iint_D xy^2 dx dy$, 其中 D 为抛物线 $y^2 = 2px$ 和直线 $x = \frac{p}{2}$ ($p > 0$) 所围的区域;

(2) $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}}$ ($a > 0$), 其中 D 为圆心在 (a, a) , 半径为 a 并且与坐标轴相切的圆周上较短的一段弧和坐标轴所围的区域;

(3) $\iint_D e^{x+y} dx dy$, 其中 D 为区域 $\{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$;



(4) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, 其中 D 为直线 $y = x$, $y = x + a$, $y = a$ 和 $y = 3a$ ($a > 0$) 所围的区域;

(5) $\iint_D y dx dy$, 其中 D 为摆线的一拱 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 与 x 轴所围的区域;

(6) $\iint_D y [1 + x e^{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}] dx dy$, 其中 D 为直线 $y = x$, $y = -1$ 和 $x = 1$ 所围的区域;

(7) $\iint_D x^2 y dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 2x, 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$;

(8) $\iiint_D xy^2 z^3 dx dy dz$, 其中 Ω 为曲面 $z = xy$, 平面 $y = x$, $x = 1$ 和 $z = 0$ 所围的区域;

(9) $\iiint_D \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ 和 $x + y + z = 1$ 所围成的四面体;

(10) $\iiint_D z dx dy dz$, 其中 Ω 为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = h$ ($h > 0$) 所围的区域;

(11) $\iiint_D z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ ($R > 0$) 的公共部分;

(12) $\iiint_D x^2 dx dy dz$, 其中 Ω 为椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 。

$$\text{解 } (1) \iint_D xy^2 dx dy = \int_{-p}^p y^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{p}{2}} x dx = \frac{1}{8} \int_{-p}^p y^2 \left(p^2 - \frac{y^4}{p^2} \right) dy = \frac{1}{21} p^5.$$

$$\begin{aligned} (2) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{2a - x}} &= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2a - x}} \int_0^{a - \sqrt{2a - x}} dy = \int_0^a \left(\frac{a}{\sqrt{2a - x}} - \sqrt{x} \right) dx \\ &= \left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3} \right) a^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

$$(3) \iint_D e^{x+y} dx dy = \int_{-1}^0 e^x dx \int_{-1-x}^{1+x} e^y dy + \int_0^1 e^x dx \int_{x-1}^{1-x} e^y dy = e - \frac{1}{e}.$$

$$\begin{aligned} (4) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_a^{3a} \left(2ay^2 - a^2 y + \frac{1}{3} a^3 \right) dy = 14a^4. \end{aligned}$$

$$(5) \iint_D y \, dx \, dy = \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} y \, dy = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \frac{5\pi}{2} a^3.$$

$$\begin{aligned} (6) \iint_D y [1 + x e^{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}] \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 y \, dy \int_{-y}^1 [1 + x e^{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}] \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[y - y^2 + \frac{1}{2} y (e^{\frac{y^2+1}{2}} - e^{y^2}) \right] dy \\ &= - \int_{-1}^1 y^2 \, dy = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$(7) \iint_D x^2 y \, dx \, dy = \int_1^2 x^2 \, dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^x y \, dy = \int_1^2 x^2 (x^2 - x) \, dx = \frac{49}{20}.$$

$$\begin{aligned} (8) \iiint_D x y^2 z^3 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 x \, dx \int_0^x y^2 \, dy \int_0^{xy} z^3 \, dz \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x^5 \, dx \int_0^1 y^6 \, dy = \frac{1}{364}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) \iiint_D \frac{dx \, dy \, dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} - \frac{1-x}{4} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

$$(10) \iiint_D z \, dx \, dy \, dz = \int_0^h z \, dz \iint_D \, dx \, dy = \pi \int_0^h z^2 \, dz = \frac{1}{3} \pi h^3.$$

$$\begin{aligned} (11) \iiint_D z^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R z^2 \, dz \iint_D \, dx \, dy \\ &= \pi \int_0^R z^2 (2Rz - z^2) \, dz + \pi \int_R^R z^2 (R^2 - z^2) \, dz \\ &= \frac{59}{480} \pi R^5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12) \iiint_D x^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_{-a}^a x^2 \, dx \iint_D \, dy \, dz \\ &= \pi bc \int_{-a}^a x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4}{15} \pi a^3 bc. \end{aligned}$$

7. 设平面薄片所占的区域是由直线 $x + y = 2$, $y = x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度为 $\rho(x, y) = x^2 + y^2$, 求这个薄片的质量。

解 设薄片的质量为 m , 则

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{8}{3} - 4y + 4y^2 - \frac{8}{3}y^3 \right) dy = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

8. 求抛物线 $y^2 = 2px + p^2$ 与 $y^2 = -2qx + q^2$ ($p, q > 0$) 所围图形的面积。

解 联立两个抛物线方程, 解得 $x = \frac{q-p}{2}$, $y = \pm \sqrt{pq}$, 于是两抛物线所围的面积为

$$S = \int_{-\sqrt{pq}}^{\sqrt{pq}} dy \int_{\frac{q-p}{2}-\frac{y^2}{2p}}^{\frac{q-p}{2}+\frac{y^2}{2p}} dx = \int_0^{\sqrt{pq}} \left[(p+q) - \frac{p+q}{pq}y^2 \right] dy = \frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}.$$

9. 求四张平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 和 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积。

解 设 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 利用对称性, 有

$$\iint_D x dx dy = \iint_D y dx dy,$$

于是

$$V = \iint_D (6 - 2x - 3y) dx dy = 6 - 5 \int_0^1 dx \int_0^1 y dy = \frac{7}{2}.$$

10. 求柱面 $y^2 + z^2 = 1$ 与三张平面 $x=0, y=x, z=0$ 所围的在第一卦限的立体的体积。

解 设 D 是所围空间区域在 xy 平面的投影, 则

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\},$$

于是

$$V = \iint_D \sqrt{1-y^2} dx dy = \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy \int_0^y dx = \int_0^1 y \sqrt{1-y^2} dy = \frac{1}{3}.$$

11. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$, 三个坐标平面及平面 $x+y=1$ 所围有界区域的体积。

解 设 D 是所围空间区域在 xy 平面的投影, 则

$$D = \{(x, y) | x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

于是

$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 2 \iint_D x^2 dx dy = 2 \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} dy = \frac{1}{6}.$$

12. 设 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上连续, a, b 为常数。证明

$$(1) \int_a^b dx \int_a^x f(y) dy = \int_a^b f(y)(b-y) dy;$$

$$(2) \int_0^a dy \int_0^y e^{(a-x)} f(x) dx = \int_0^a (a-x) e^{(a-x)} f(x) dx (a > 0).$$

证 (1) 交换积分次序, 则得到

$$\int_a^b dx \int_a^x f(y) dy = \int_a^b f(y) dy \int_y^b dx = \int_a^b f(y) (b-y) dy.$$

(2) 交换积分次序, 则得到

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{(a-x)} f(x) dx = \int_0^a e^{(a-x)} f(x) dx \int_x^a dy = \int_0^a (a-x) e^{(a-x)} f(x) dx.$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^y f(x) dx = \int_0^1 (e^x - e^{x^2}) f(x) dx.$$

证 交换积分次序, 则得到

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^y f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \int_{x^2}^x e^y dy = \int_0^1 (e^x - e^{x^2}) f(x) dx.$$

14. 设 $D = [0,1] \times [0,1]$, 证明

$$1 \leq \iint_D [\sin(x^2) + \cos(y^2)] dx dy \leq \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad & \iint_D [\sin(x^2) + \cos(y^2)] dx dy = \int_0^1 \sin(x^2) dx \int_0^1 dy + \int_0^1 \cos(y^2) dy \int_0^1 dx \\ &= \int_0^1 \sin(x^2) dx + \int_0^1 \cos(y^2) dy = \int_0^1 [\sin(x^2) + \cos(x^2)] dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) dx. \end{aligned}$$

当 $x \in [0,1]$ 时, 成立

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1,$$

所以

$$1 \leq \iint_D [\sin(x^2) + \cos(y^2)] dx dy \leq \sqrt{2}.$$

15. 设 $D = [0,1] \times [0,1]$, 利用不等式 $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1 \left(|t| \leq \frac{\pi}{2} \right)$, 证明

$$\frac{49}{50} \leq \iint_D \cos(xy)^2 dx dy \leq 1.$$

证 由

$$1 - \frac{(xy)^4}{2} \leq \cos(xy)^2 \leq 1,$$

易知

$$\iint_D \cos(xy)^2 dx dy \leq 1,$$

另一方面,由于

$$\iint_D \left[1 - \frac{(xy)^4}{2} \right] dx dy = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^4 dx \int_0^1 y^4 dy = \frac{49}{50},$$

所以

$$\frac{49}{50} \leq \iint_D \cos(xy)^2 dx dy.$$

16. 设 D 是由 xy 平面上的分段光滑简单闭曲线所围成的区域, D 在 x 轴和 y 轴上的投影长度分别为 l_x 和 l_y , (α, β) 是 D 内任意一点。证明

$$(1) \left| \iint_D (x - \alpha)(y - \beta) dx dy \right| \leq l_x l_y m D;$$

$$(2) \left| \iint_D (x - \alpha)(y - \beta) dx dy \right| \leq \frac{l_x^2 l_y^2}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (1) \quad & \left| \iint_D (x - \alpha)(y - \beta) dx dy \right| \leq \iint_D |x - \alpha| |y - \beta| dx dy \\ & \leq l_x l_y \iint_D dx dy = l_x l_y m D. \end{aligned}$$

(2) 设 $D \subseteq D' = [a, b] \times [c, d]$, 且 $b - a = l_x, d - c = l_y$, 则

$$\begin{aligned} & \left| \iint_D (x - \alpha)(y - \beta) dx dy \right| \leq \iint_{D'} |(x - \alpha)(y - \beta)| dx dy \\ & \leq \iint_{D'} |x - \alpha| |y - \beta| dx dy = \int_a^b |x - \alpha| dx \int_c^d |y - \beta| dy, \end{aligned}$$

由于 $\alpha \in [a, b]$, 于是

$$\begin{aligned} \int_a^b |x - \alpha| dx &= - \int_a^\alpha (x - \alpha) dx + \int_\alpha^b (x - \alpha) dx = \frac{1}{2} [(\alpha - a)^2 + (b - \alpha)^2] \\ &= \frac{1}{2} [(b - \alpha) + (\alpha - a)]^2 - (b - \alpha)(\alpha - a) \leq \frac{1}{2} (b - a)^2 = \frac{1}{2} l_x^2, \end{aligned}$$

同理可得

$$\int_c^d |y - \beta| dy \leq \frac{1}{2} l_y^2,$$

所以

$$\left| \iint_D (x - \alpha)(y - \beta) dx dy \right| \leq \frac{l_x^2 l_y^2}{4}.$$

17. 利用重积分的性质和计算方法证明:若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b - a) \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

证 由于

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 = \iint_{[a,b] \times [a,b]} f(x)f(y) dx dy \leq \frac{1}{2} \iint_{[a,b] \times [a,b]} (f^2(x) + f^2(y)) dx dy,$$

由对称性,

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [a,b]} (f^2(x) + f^2(y)) dx dy &= 2 \iint_{[a,b] \times [a,b]} f^2(x) dx dy \\ &= 2 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b dy = 2(b-a) \int_a^b f^2(x) dx, \end{aligned}$$

所以

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

18. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明

$$\iint_{[a,b] \times [a,b]} e^{f(x) - f(y)} dx dy \geq (b-a)^2.$$

证明一 将区间 $[a, b]$ n 等分, 并取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 则

$$\iint_{[a,b] \times [a,b]} e^{f(x) - f(y)} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n e^{f(\xi_i)} \cdot \sum_{i=1}^n e^{-f(\xi_i)} \right\},$$

再利用不等式: 当 $x_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 时成立

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2,$$

(注: 上述不等式可由算术平均不小于几何平均得到)

就有

$$\frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n e^{f(\xi_i)} \cdot \sum_{i=1}^n e^{-f(\xi_i)} \geq (b-a)^2,$$

所以

$$\iint_{[a,b] \times [a,b]} e^{f(x) - f(y)} dx dy \geq (b-a)^2.$$

证明二 设 $D = [a, b] \times [a, b]$, 由对称性, 有

$$\iint_D e^{f(x) - f(y)} dx dy = \iint_D e^{f(y) - f(x)} dx dy,$$

于是

$$\iint_D e^{f(x) - f(y)} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D [e^{f(x) - f(y)} + e^{f(y) - f(x)}] dx dy \geq \iint_D dx dy = (b-a)^2.$$

19. 设 $\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}$, 计算下列 n 重积分:



$$(1) \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n;$$

$$(2) \int_{\Omega} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

$$\text{解} \quad (1) \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= n \int_{\Omega} x_1^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n = n \int_0^1 x_1^2 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_n = \frac{n}{3}.$$

$$(2) \int_{\Omega} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n x_i x_j \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} x_i^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_{\Omega} x_i x_j dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \frac{n}{3} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{4} = \frac{n}{3} + \frac{1}{4} n(n-1) = \frac{n(3n+1)}{12}.$$

§ 3 重积分的变量代换

1. 利用极坐标计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由圆周 } x^2 + y^2 = R^2 (R > 0) \text{ 所围区域};$$

$$(2) \iint_D \sqrt{x} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由圆周 } x^2 + y^2 = x \text{ 所围区域};$$

$$(3) \iint_D (x+y) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由圆周 } x^2 + y^2 = x + y \text{ 所围区域};$$

$$(4) \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由圆周 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 及坐标轴所围成的}$$

在第一象限上的区域。

$$\text{解} \quad (1) \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

$$(2) \iint_D \sqrt{x} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta} d\theta \int_0^{\cos \theta} \sqrt{r} r dr = \frac{4}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{8}{15}.$$

$$\begin{aligned}
 (3) \iint_D (x+y) dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin \theta + \cos \theta) d\theta \int_0^{\sin \theta + \cos \theta} r^2 dr \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin \theta + \cos \theta)^4 d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^4 \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi} \sin^4 t dt = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

注 本题也可通过作变换

$$x = \frac{1}{2} + r \cos \theta, y = \frac{1}{2} + r \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}})$$

来求解。

$$\begin{aligned}
 (4) \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r dr = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

2. 求下列图形的面积：

- (1) $(a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 = 1$ ($\delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$) 所围的区域；
- (2) 由抛物线 $y^2 = mx, y^2 = nx$ ($0 < m < n$), 直线 $y = \alpha x, y = \beta x$ ($0 < \alpha < \beta$) 所围的区域；
- (3) 三叶玫瑰线 $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)$ ($a > 0$) 所围的图形；
- (4) 曲线 $\left(\frac{x}{h} + \frac{y}{k}\right)^4 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ($h, k > 0; a, b > 0$) 所围图形在 $x > 0, y > 0$ 的部分。

解 (1) 作变换 $u = a_1 x + b_1 y + c_1, v = a_2 x + b_2 y + c_2$, 则 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = a_1 b_2 - a_2 b_1$, 于是面积

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \frac{1}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|} \iint_D du dv = \frac{\pi}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}.$$

(2) 作变换 $u = \frac{y^2}{x}, v = \frac{y}{x}$, 则 $x = \frac{u}{v^2}, y = \frac{u}{v}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{u}{v^4}$, 于是面积

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \int_m^n u du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{v^4} = \frac{1}{6} (n^2 - m^2) \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right).$$

(3) 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则曲线方程可化为极坐标形式 $r = a \cos 3\theta$,

于是面积

$$S = 3 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^{\cos 3\theta} r dr = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta = \frac{\pi}{4} a^2.$$

(4) 作变换 $\begin{cases} x = h r \cos^2 \theta, \\ y = k r \sin^2 \theta, \end{cases}$ 则 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = h k r \sin 2\theta$, 而曲线方程化为

$$r^2 = \frac{h^2}{a^2} \cos^4 \theta + \frac{k^2}{b^2} \sin^4 \theta,$$

于是面积

$$\begin{aligned} S &= h k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{h^2}{a^2} \cos^4 \theta + \frac{k^2}{b^2} \sin^4 \theta}} r dr \\ &= h k \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h^2}{a^2} \sin \theta \cos^5 \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2}{b^2} \sin^5 \theta \cos \theta d\theta \right) \\ &= \frac{h k (a^2 k^2 + b^2 h^2)}{6 a^2 b^2}. \end{aligned}$$

3. 求极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy,$$

其中 $f(x, y)$ 在原点附近连续。

解 由积分中值定理,

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \pi \rho^2,$$

其中 $\xi^2 + \eta^2 \leq \rho^2$ 。

因为 f 连续, 且当 $\rho \rightarrow 0$ 时, $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$, 所以

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy = f(0, 0).$$

4. 选取适当的坐标变换计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy$, 其中 D 是由坐标轴及抛物线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ 所围的区域;

(2) $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$, 其中 D 是由 i) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围区域;

ii) 圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 所围的区域;

(3) $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由直线 $x = -2, y = 0, y = 2$ 以及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围的区域;

(4) $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$, 其中 D 是由直线 $x+y=2$, $x=0$ 及 $y=0$ 所围的区域;

(5) $\iint_D \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2} dx dy$, 其中闭区域 $D=\{(x,y) \mid |x|+|y|\leq 1\}$;

(6) $\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dx dy$, 其中闭区域 D 是由曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}-a$ ($a>0$) 和直线 $y=-x$ 所围成。

解 (1) 作变换 $\begin{cases} u=\sqrt{x}, \\ v=\sqrt{y}, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x=u^2, \\ y=v^2, \end{cases}$ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=4uv$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (\sqrt{x}+\sqrt{y}) dx dy &= \iint_D (u+v) 4uv du dv = 8 \int_0^1 v dv \int_0^{1-v} u^2 du \\ &= \frac{8}{3} \int_0^1 [(1-v)^3 - (1-v)^4] dv = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

注 本题也可通过作变换 $x=r\cos^4\theta$, $y=r\sin^4\theta$ 来求解。

(2) i) 作广义极坐标变换 $\begin{cases} x=ar\cos\theta, \\ y=br\sin\theta, \end{cases}$ 则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$, 于是

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2} ab;$$

ii) 利用极坐标变换, 得到

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} \right) d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi(a^2+b^2)R^4}{4a^2b^2}.$$

$$\begin{aligned} (3) \iint_D y dx dy &= \iint_{\substack{-2 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 2}} y dx dy - \iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{2y-x^2} \geq -x}} y dx dy \\ &= \int_{-2}^0 dx \int_0^2 y dy - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 dr \\ &= 4 - \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4\theta d\theta \\ &= 4 - \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta d\theta = 4 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(4) 作变换 $u=x+y$, $v=\frac{x-y}{x+y}$, 则 $x=\frac{1}{2}u(1+v)$, $y=\frac{1}{2}u(1-v)$, 直接

计算得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{u}{2}.$$

由 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 2$, 可得 $0 \leq u \leq 2$, $-1 \leq v \leq 1$, 于是

$$\iint_D e^{x+y} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^2 u du \int_{-1}^1 e^v dv = e - \frac{1}{e}.$$

(5) 作变换 $u = x + y, v = x - y$, 则 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = -2, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}$, 于是

$$\iint_D \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2} dx dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^2 du \int_{-1}^1 \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\pi}{6}.$$

(6) 利用极坐标, 得到

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{2a \sin \theta} \frac{r^2}{\sqrt{4a^2 - r^2}} dr,$$

由

$$\int \frac{r^2}{\sqrt{4a^2 - r^2}} dr = - \int r d\sqrt{4a^2 - r^2} = -r\sqrt{4a^2 - r^2} + \int \sqrt{4a^2 - r^2} dr$$

以及

$$\int \frac{r^2}{\sqrt{4a^2 - r^2}} dr = \int \frac{4a^2 - (4a^2 - r^2)}{\sqrt{4a^2 - r^2}} dr = 4a^2 \arcsin \frac{r}{2a} - \int \sqrt{4a^2 - r^2} dr,$$

可得

$$\int \frac{r^2}{\sqrt{4a^2 - r^2}} dr = 2a^2 \arcsin \frac{r}{2a} - \frac{r}{2} \sqrt{4a^2 - r^2} + C,$$

所以

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (\sin \theta \cos \theta - \theta) d\theta = \frac{\pi^2 - 8}{16} a^2.$$

5. 选取适当的坐标变换计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega \text{ 为球 } \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\};$$

$$(2) \iiint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega \text{ 为椭球}$$

$$\left\{ (x, y, z) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\};$$

$$(3) \iiint_D z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega \text{ 为柱面 } y = \sqrt{2x - x^2} \text{ 及平面}$$

$z = 0, z = a (a > 0)$ 和 $y = 0$ 所围的区域;

$$(4) \iiint_D \frac{z \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega \text{ 为半球}$$

$$\left\{ (x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0 \right\};$$

$$(5) \iiint_D (x + y + z)^2 dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega \text{ 为抛物面 } x^2 + y^2 = 2az \text{ 与球面}$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ ($a > 0$) 所围的区域。

(6) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z = 8$ 所围的区域;

(7) $\iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$, 其中闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, z \geq 0, y \geq 0\}$;

(8) $\iiint_{\Omega} (x + y - z)(x - y + z)(y + z - x) dx dy dz$, 其中闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x + y - z \leq 1, 0 \leq x - y + z \leq 1, 0 \leq y + z - x \leq 1\}$ 。

解 (1) 应用球面坐标, 则

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{4\pi}{5}.$$

(2) 应用广义球面坐标, 则

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz &= abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r^2 dr \\ &= 4\pi abc \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r^2 dr, \end{aligned}$$

令 $r = \sin t$, 则

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz &= 4\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t dt \\ &= \pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt \\ &= \frac{1}{2} \pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt \\ &= \frac{1}{4} \pi^2 abc. \end{aligned}$$

(3) 应用柱面坐标, 则

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos \theta} r^2 dr \int_0^a z dz = \frac{4}{3} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{8}{9} a^2. \end{aligned}$$

(4) 应用柱面坐标, 则

$$\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} \frac{z \ln(1+r^2+z^2)}{1+r^2+z^2} dz \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r [\ln^2 2 - \ln^2(1+r^2)] dr \\
 &= \frac{\pi}{4} \ln^2 2 - \frac{\pi}{4} \int_1^2 \ln^2 t dt = \left(\ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln^2 2 \right) \pi.
 \end{aligned}$$

(5) 由于 Ω 关于 yz 平面和 zx 平面都对称, 则

$$\iiint_{\Omega} xy dx dy dz = \iiint_{\Omega} yz dx dy dz = \iiint_{\Omega} zx dx dy dz = 0,$$

于是

$$\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

应用柱面坐标, 就有

$$\begin{aligned}
 &\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dx dy dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}a} r dr \int_{\frac{r}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}} (r^2 + z^2) dz \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}a} \left[r^2 \sqrt{3a^2-r^2} - \frac{r^4}{2a} + \frac{1}{3} (3a^2-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^6}{24a^3} \right] r dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}a} \left[3a^2 \sqrt{3a^2-r^2} - \frac{2}{3} (3a^2-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^4}{2a} - \frac{r^6}{24a^3} \right] r dr \\
 &= \pi \left[2(3\sqrt{3}-1)a^5 - \frac{4}{15}(9\sqrt{3}-1)a^5 - \frac{8a^6}{6a} - \frac{16a^8}{96a^3} \right] \\
 &= \frac{108\sqrt{3}-97}{30} \pi a^5.
 \end{aligned}$$

(6) 可得 Ω 由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 与平面 $z = 8$ 所围, 应用柱面坐标, 则

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 r^3 dr \int_{\frac{r}{2}}^8 dz = 2\pi \int_0^4 r^3 \left(8 - \frac{r^2}{2} \right) dr = \frac{1024}{3} \pi.$$

(7) 应用球面坐标, 则

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz &= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\cos \varphi} r dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{4}{3} \pi.
 \end{aligned}$$

(8) 作变换 $u = x + y - z, v = x - y + z, w = y + z - x$, 则 $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = -4$, 于是 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = -\frac{1}{4}$, 所以

$$\begin{aligned}
 & \iiint_D (x+y-z)(x-y+z)(y+z-x) dx dy dz \\
 &= \iiint_D uvw \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw = \frac{1}{4} \int_0^1 u du \int_0^1 v dv \int_0^1 w dw = \frac{1}{32}.
 \end{aligned}$$

6. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 和圆柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ ($R > 0$) 所围立体的体积。

$$\begin{aligned}
 \text{解 } V &= 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - r^2} r dr \\
 &= \frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{6\pi - 8}{9} R^3.
 \end{aligned}$$

7. 求抛物面 $z = 6 - x^2 - y^2$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围立体的体积。

解 联立两个曲面方程, 解得交线所在的平面为 $z = 2$, 所围空间区域在 xy 平面的投影区域为

$$D: x^2 + y^2 \leq 4,$$

于是

$$V = \iint_D (6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (6 - r^2 - r) r dr = \frac{32}{3}\pi.$$

8. 求下列曲面所围空间区域的体积:

$$(1) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = ax (a, b, c > 0);$$

(2) $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1 (a, b, c > 0)$ 与三张平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 所围的在第一卦限的立体。

$$\text{解 (1) 作变量代换} \begin{cases} x = ar \sin \varphi \cos \theta, \\ y = br \sin \varphi \sin \theta, \\ z = cr \cos \varphi, \end{cases} \text{则} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} \right| = abc r^2 \sin \varphi.$$

由于 $x \geq 0$, 所以 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq (a^2 \sin \varphi \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$ 。于是

$$\begin{aligned}
 V &= abc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{(a^2 \sin \varphi \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} r^2 dr \\
 &= \frac{1}{3} a^3 bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{3} a^3 bc.
 \end{aligned}$$

$$\text{解 (2) 作变量代换} \begin{cases} x = ar \sin \varphi \cos^2 \theta, \\ y = br \sin \varphi \sin^2 \theta, \\ z = cr \cos \varphi, \end{cases} \text{则} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} \right| = abc r^2 \sin \varphi \sin 2\theta, \text{于}$$



是

$$V = abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \frac{abc}{3}.$$

9. 设一物体在空间的表示为由曲面 $4z^2 = 25(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 5$ 所围成的一立体。其密度为 $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, 求此物体的质量。

解 设物体的质量为 M , 则

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr \int_{\frac{5}{2}r}^5 dz = 2\pi \int_0^2 r^3 \left(5 - \frac{5}{2}r\right) dr = 8\pi.$$

10. 在一个形状为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 的容器内, 已经盛有 $8\pi \text{ cm}^3$ 的水, 现又倒入 $120\pi \text{ cm}^3$ 的水, 问水面比原来升高多少 cm。

解 设容器盛有 $8\pi \text{ cm}^3$ 水时水面的高为 h , 则

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{h}} r(h - r^2) dr = 8\pi,$$

即 $\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{4}h^2 = 4$, 从而解得

$$h = 4 \text{ (cm)}.$$

又设容器盛有 $128\pi \text{ cm}^3$ 水时水面的高为 H , 则

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{H}} r(H - r^2) dr = 128\pi,$$

即 $\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}H^2 = 64$, 从而解得

$$H = 16 \text{ (cm)},$$

所以水面比原来升高 12 cm 。

11. 求质量为 M 的均匀薄片 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ z = 0 \end{cases}$, 对 z 轴上 $(0, 0, c)$ ($c > 0$) 点处的单位质量的质点的引力。

解 设薄片对单位质点的引力为 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$, 由对称性, $F_x = F_y = 0$ 。

在均匀薄片上点 $(x, y, 0)$ 的附近取一小块, 其面积设为 $d\sigma = dx dy$, 根据万有引力定律, 这小块微元对质点的引力为

$$d\mathbf{F} = \left(\frac{G\rho x}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy, \frac{G\rho y}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy, -\frac{G\rho c}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy \right),$$

于是

$$dF_z = -\frac{G\rho c}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy,$$

$$F_z = - \iint_D \frac{G\rho c}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy = -G\rho c \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{r dr}{(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -2\pi G\rho c \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right) = -\frac{2MG}{a^2} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right),$$

其中 G 是万有引力常数, M 是均匀薄片的质量, ρ 是均匀薄片的密度。

12. 已知球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$, 在其上任一点的密度在数量上等于该点到原点距离的平方, 求球体的质量与重心。

解 设球体的质量为 M , 则

$$M = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^4 dr = \frac{32}{15} \pi R^5.$$

设重心的坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性, $\bar{x} = \bar{y} = 0$ 。由

$$\iiint_D z(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^5 dr = \frac{8}{3} \pi R^6,$$

得到

$$\bar{z} = \frac{\iiint_D z(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz}{M} = \frac{5}{4} R,$$

所以重心坐标为 $(0, 0, \frac{5}{4} R)$ 。

13. 证明不等式

$$2\pi(\sqrt{17} - 4) \leq \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{16 + \sin^2 x + \sin^2 y}} \leq \frac{\pi}{4}.$$

证 首先有

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{16 + \sin^2 x + \sin^2 y}} \leq \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{4} dx dy = \frac{\pi}{4}.$$

另一方面, 由 $\sin^2 u \leq u^2$, 得到

$$\begin{aligned} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{16 + \sin^2 x + \sin^2 y}} &\geq \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{16 + x^2 + y^2}} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{16 + r^2}} = 2\pi(\sqrt{17} - 4). \end{aligned}$$

所以

$$2\pi(\sqrt{17} - 4) \leq \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{16 + \sin^2 x + \sin^2 y}} \leq \frac{\pi}{4}.$$

14. 设一元函数 $f(u)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 证明

$$\iint_{|x+y| \leq 1} f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du.$$

证 作变换 $u = x + y, v = x - y$, 则 $-1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1$, 变换的 Jacobi

行列式为

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = -2, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y) dx dy &= \iint_D f(u) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(u) du \int_{-1}^1 dv = \int_{-1}^1 f(u) du. \end{aligned}$$

15. 设一元函数 $f(u)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续。证明

$$\iiint_D f(z) dx dy dz = \pi \int_{-1}^1 f(u) (1-u^2) du,$$

其中 Ω 为单位球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 。

证 $\iiint_D f(z) dx dy dz = \int_{-1}^1 f(z) dz \iint_{\Omega_z} dx dy,$

其中 $\Omega_z : x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_z} dx dy &= \int_{-1}^1 dz \iint_{\Omega_z} dx dy \\ &= \pi \int_{-1}^1 f(z) (1-z^2) dz = \pi \int_{-1}^1 f(u) (1-u^2) du. \end{aligned}$$

16. 计算下列 n 重积分:

(1) $\int_{\Omega} \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$, 其中

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\};$$

(2) $\int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) dx_1 dx_2 \dots dx_n$, 其中 Ω 为 n 维球体

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}.$$

解 (1) 作变量代换 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n, \\ y_2 = x_2 + x_3 + \dots + x_n, \\ \dots \\ y_n = x_n, \end{cases}$ 则 $\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 1$,

从而 $\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = 1$, 于是

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ = \int_{\Omega'} \sqrt{y_1} dy_1 dy_2 \dots dy_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \sqrt{y_1} dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \int_0^{y_2} dy_3 \cdots \int_0^{y_{n-1}} dy_n \\
&= \frac{1}{(n-i)!} \int_0^1 \sqrt{y_1} dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \int_0^{y_2} dy_3 \cdots \int_0^{y_{n-1}} y_i^{n-i} dy_i \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 y_1^{\frac{1}{2}+n-1} dy_1 = \frac{2}{(n-1)! (2n+1)}.
\end{aligned}$$

(2) 作球面坐标变换

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1, \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \\ \dots \\ x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}, \end{cases}$$

它把 Ω 变为

$$\Omega' = \{(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi_i \leq \pi (i=1, 2, \dots, n-2), 0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi\}.$$

它的 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2},$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_n (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_0^1 r^{n+1} dr \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}.
\end{aligned}$$

由于当 k 为正整数时, $\int_0^\pi \sin^{k-1} \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi$, 利用 Wallis 公式,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}, & n = 2m, \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1, \end{cases}$$

于是得到

$$\int_n (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \begin{cases} \frac{\pi^m}{(m-1)! (m+1)}, & n = 2m, \\ \frac{2^{m+1} \pi^m}{(2m-1)!! (2m+3)}, & n = 2m+1. \end{cases}$$

1. 讨论下列反常积分的敛散性:



$$(1) \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)};$$

$$(2) \iint_D \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} dxdy, D = \{(x,y) | 0 \leq y \leq 1\}, \text{而且 } 0 < m \leq |\varphi(x,y)| \leq M (m, M \text{ 为常数});$$

$$(3) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p} dxdy, \text{其中 } \varphi(x,y) \text{ 满足与上题同样的条件};$$

$$(4) \iint_{[0,a] \times [0,a]} \frac{dxdy}{|x-y|^p};$$

$$(5) \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}.$$

解 (1) 由于

$$\iint_{|x| \leq A, |y| \leq B} \frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} = \int_{-A}^A \frac{dx}{1+|x|^p} \int_{-B}^B \frac{dy}{1+|y|^q},$$

当 A, B 都趋于正无穷大时, 等式右端的积分当且仅当 $p > 1$ 且 $q > 1$ 时收敛, 所以原积分当 $p > 1$ 且 $q > 1$ 时收敛, 而在其他情况下发散。

(2) 由于

$$\frac{m}{(1+x^2+y^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x,y)|}{(1+x^2+y^2)^p} \leq \frac{M}{(1+x^2+y^2)^p},$$

而积分 $\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^p} dxdy$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛, 当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时发散, 所以原积分当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛, 当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时发散。

(3) 由于

$$\frac{m}{(1-x^2-y^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x,y)|}{(1-x^2-y^2)^p} \leq \frac{M}{(1-x^2-y^2)^p},$$

而

$$\iint_{\rho^2 \leq x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{(1-x^2-y^2)^p} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\rho}^1 \frac{r dr}{(1-r^2)^p} = -\pi \int_{\rho}^1 \frac{d(1-r^2)}{(1-r^2)^p},$$

当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 等式右端的积分当 $p < 1$ 时收敛, 当 $p \geq 1$ 时发散, 所以原积分当 $p < 1$ 时收敛, 当 $p \geq 1$ 时发散。

(4) $[0,a] \times [0,a] = D_1 \cup D_2$, 其中

$$D_1 = \{(x,y) | 0 \leq y \leq x \leq a\}, D_2 = \{(x,y) | 0 \leq x \leq y \leq a\}.$$

则

$$\iint_{[0,a] \times [0,a]} \frac{dxdy}{|x-y|^p} = \iint_{D_1} \frac{dxdy}{(x-y)^p} + \iint_{D_2} \frac{dxdy}{(y-x)^p}$$

$$= \int_0^a dy \int_y^a \frac{dx}{(x-y)^p} + \int_0^a dx \int_x^a \frac{dy}{(y-x)^p},$$

可知当 $p < 1$ 时积分收敛, 当 $p \geq 1$ 时积分发散。

(5) 利用球面坐标, 得到

$$\iint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ p^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 1}} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p} = 4\pi \int_p^1 \frac{dr}{r^{2p-2}},$$

当 $p \rightarrow 0$ 时, 右边的积分当且仅当 $2p-2 < 1$ 即 $p < \frac{3}{2}$ 时收敛, 所以原积分当 $p < \frac{3}{2}$ 时收敛, 当 $p \geq \frac{3}{2}$ 时发散。

2. 计算下列反常积分:

$$(1) \iint_D \frac{dx dy}{x^p y^q}, \text{ 其中 } D = \{(x, y) \mid xy \geq 1, x \geq 1\}, \text{ 且 } p > q > 1;$$

$$(2) \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1}} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy;$$

$$(3) \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \iint_D \frac{dx dy}{x^p y^q} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{1}{y^q} dy \\ &= \frac{1}{q-1} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{p-q+1}} dx = \frac{1}{(p-q)(q-1)}. \end{aligned}$$

(2) 作广义极坐标变换 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$, 则

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1}} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy = ab \iint_{r \geq 1} e^{-r^2} r dr d\theta = ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi ab}{e}.$$

$$\begin{aligned} (3) \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^3 = \pi^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

3. 设 D 是由第一象限内的抛物线 $y = x^2$, 圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 以及 x 轴所围的平面区域, 证明 $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$ 收敛。

证 取 $r > 0$ 充分小, 设 $D_r = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq r\}$, x_0 是抛物线 $y = x^2$ 与圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 交点的横坐标, 则

$$\iint_{D_r} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = \int_r^{x_0} dx \int_0^{x^2} \frac{dy}{x^2 + y^2} + \int_{x_0}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{x^2 + y^2}$$



$$= \int_r^{x_0} \frac{\arctan x}{x} dx + \int_{x_0}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{x^2 + y^2},$$

由于 $\lim_{r \rightarrow 0} \int_r^{x_0} \frac{\arctan x}{x} dx$ 存在, 所以 $\lim_{r \rightarrow 0} \iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$ 存在, 即反常积分 $\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$ 收敛。

4. 判别反常积分

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

是否收敛。如果收敛, 求其值。

解 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2}$ 收敛, 所以 $I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$ 收敛, 并且

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \pi^2.$$

5. 设 $F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{-\frac{xy}{2}} dxdy$, 求 $F'(t)$ 。

解 当 $t > 0$ 时, 令 $\begin{cases} x = tu, \\ y = tv, \end{cases}$ 则 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = t^2$, 于是

$$F(t) = t^2 \cdot \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{-\frac{uv}{2}} du dv,$$

所以

$$F'(t) = 2t \cdot \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{-\frac{uv}{2}} du dv = \frac{2F(t)}{t}.$$

当 $t = 0$ 时, $F(0) = 0$, 易得

$$F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t) - F(0)}{t} = 0.$$

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 证明

$$\iint_{0 \leq y \leq x \leq a} \frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dxdy = \pi \int_0^a f(x) dx.$$

证 由于

$$\iint_{0 \leq y \leq x \leq a} \frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dxdy = \int_0^a f(y) dy \int_y^a \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dx,$$

在积分 $\int_y^a \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dx$ 中, 令 $x = y \cos^2 t + a \sin^2 t$, 则 $dx = (a -$

$y)\sin 2t dt$, 且当 $x:y \rightarrow a$ 时, $t:0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 于是

$$\int_y^a \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \pi,$$

所以

$$\iint_{0 \leq y \leq x \leq a} \frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dx dy = \pi \int_0^a f(x) dx.$$

7. 计算积分 $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n$ 。

解

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_n^2} dx_n = \pi^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

§5

微分形式

1. 计算下列外积:

- (1) $(xdx + 7z^2 dy) \wedge (ydx - xdy + 6dz)$;
- (2) $(\cos ydx + \cos xdy) \wedge (\sin ydx - \sin xdy)$;
- (3) $(6dx \wedge dy + 27dx \wedge dz) \wedge (dx + dy + dz)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \quad & (xdx + 7z^2 dy) \wedge (ydx - xdy + 6dz) \\ &= -(x^2 + 7yz^2) dx \wedge dy + 42z^2 dy \wedge dz - 6xdz \wedge dx. \\ (2) \quad & (\cos ydx + \cos xdy) \wedge (\sin ydx - \sin xdy) \\ &= -\sin(x+y) dx \wedge dy. \\ (3) \quad & (6dx \wedge dy + 27dx \wedge dz) \wedge (dx + dy + dz) \\ &= -21dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

2. 设

$$\omega = a_0 + a_1 dx_1 + a_2 dx_1 \wedge dx_3 + a_3 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4,$$

$$\eta = b_1 dx_1 \wedge dx_2 + b_2 dx_1 \wedge dx_3 + b_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + b_4 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

求 $\omega + \eta$ 和 $\omega \wedge \eta$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \omega + \eta &= a_0 + a_1 dx_1 + b_1 dx_1 \wedge dx_2 + (a_2 + b_2) dx_1 \wedge dx_3 \\ &+ b_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + (a_3 + b_4) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= a_0 b_1 dx_1 \wedge dx_2 + a_0 b_2 dx_1 \wedge dx_3 + a_0 b_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &+ a_0 b_4 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + a_1 b_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4. \end{aligned}$$

3. 求

$$\begin{aligned}\omega &= x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_3 dx_2 \wedge dx_3 + (1 + x_2^2) dx_1 \wedge dx_3 + x_2^2 dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + (x_3^2 + x_2^2) dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - x_1^2 dx_3 \wedge dx_2\end{aligned}$$

的标准形式。

解

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3 + (x_1^2 + x_3) dx_2 \wedge dx_3 - (x_2^2 + x_3^2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

4. 证明外积满足分配律和结合律。

证 由外积的线性性质, 只需对 ω, η, σ 分别是 p -形式、 q -形式和 r -形式的情形证明即可。

设 $\omega = \sum_I f_I(x) dx_I, \eta = \sum_J g_J(x) dx_J, \sigma = \sum_K h_K(x) dx_K$, 则

$$\begin{aligned}(\omega + \eta) \wedge \sigma &= \left(\sum_I f_I(x) dx_I + \sum_J g_J(x) dx_J \right) \wedge \sum_K h_K(x) dx_K \\ &= \sum_{I,K} f_I(x) h_K(x) dx_I \wedge dx_K + \sum_{J,K} g_J(x) h_K(x) dx_J \wedge dx_K \\ &= \omega \wedge \sigma + \eta \wedge \sigma.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma \wedge (\omega + \eta) &= \sum_K h_K(x) dx_K \wedge \left(\sum_I f_I(x) dx_I + \sum_J g_J(x) dx_J \right) \\ &= \sum_{K,I} h_K(x) f_I(x) dx_K \wedge dx_I + \sum_{K,J} h_K(x) g_J(x) dx_K \wedge dx_J \\ &= \sigma \wedge \omega + \sigma \wedge \eta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \eta) \wedge \sigma &= \left(\sum_{I,J} f_I(x) g_J(x) dx_I \wedge dx_J \right) \wedge \sum_K h_K(x) dx_K \\ &= \sum_{I,J,K} f_I(x) g_J(x) h_K(x) dx_I \wedge dx_J \wedge dx_K \\ &= \left(\sum_I f_I(x) dx_I \right) \wedge \left(\sum_J g_J(x) h_K(x) dx_J \wedge dx_K \right) \\ &= \omega \wedge (\eta \wedge \sigma).\end{aligned}$$

5. 写出微分形式 $dx \wedge dy \wedge dz$ 在下列变换下的表达式:

(1) 柱面坐标变换

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z;$$

(2) 球面坐标变换

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi.$$

解 (1) 由

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta, dz = dz,$$

得到

$$dx \wedge dy \wedge dz = r dr \wedge d\theta \wedge dz.$$

(2) 由

$$\begin{aligned} dx &= \sin \varphi \cos \theta dr + r \cos \varphi \cos \theta d\varphi - r \sin \varphi \sin \theta d\theta, \\ dy &= \sin \varphi \sin \theta dr + r \cos \varphi \sin \theta d\varphi + r \sin \varphi \cos \theta d\theta, \\ dz &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

得到

$$dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin \varphi dr \wedge d\varphi \wedge d\theta.$$

6. 设 $\omega_j = \sum_{i=1}^n a_i^j dx_i$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 为 \mathbb{R}^n 上的 1-形式, 证明

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n = \det(a_i^j) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

证 由于

$$x_i \wedge x_j = -x_j \wedge x_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad x_i \wedge x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

所以

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_n}^n dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} (-1)^\sigma a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_n}^n dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \det(a_i^j) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n, \end{aligned}$$

其中 σ 是排列 (i_1, i_2, \dots, i_n) 的逆序数。

第十四章 曲线积分、曲面积分与场论

§ 1

第一类曲线积分与第一类曲面积分

1. 求下列第一类曲线积分：

$$(1) \int_L (x+y)ds, \text{ 其中 } L \text{ 是以 } O(0,0), A(1,0), B(0,1) \text{ 为顶点的三角形;}$$

$$(2) \int_L |y|ds, \text{ 其中 } L \text{ 为单位圆周 } x^2 + y^2 = 1;$$

$$(3) \int_L |x|^{\frac{1}{3}}ds, \text{ 其中 } L \text{ 为星形线 } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$$

$$(4) \int_L |x|ds, \text{ 其中 } L \text{ 为双纽线 } (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2;$$

$$(5) \int_L (x^2 + y^2 + z^2)ds, L \text{ 为螺旋线 } x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$$

的一段；

$$(6) \int_L xyzds, \text{ 其中 } L \text{ 为曲线 } x = t, y = \frac{2\sqrt{2t^3}}{3}, z = \frac{1}{2}t^2 \text{ 上相应于 } t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1 \text{ 的一段弧;}$$

$$(7) \int_L (xy + yz + zx)ds, \text{ 其中 } L \text{ 为球面 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ 和平面 } x + y + z = 0 \text{ 的交线。}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \int_L (x+y)ds &= \int_{OA} (x+y)ds + \int_{AB} (x+y)ds + \int_{BO} (x+y)ds \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 \sqrt{2} dx + \int_0^1 y dy = 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$(2) \int_L |y|ds = \int_0^{2\pi} |\sin t| dt = 4.$$

(3) 令 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$, 则 $ds = 3a |\sin t \cos t| dt$, 于是

$$\int_L |x|^{\frac{1}{3}}ds = 3a^{\frac{4}{3}} \int_0^{2\pi} |\sin t \cos^2 t| dt = 12a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t dt = 4a^{\frac{4}{3}}.$$

(4) 将 L 表示为参数方程 $\begin{cases} x = \sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta, \\ y = \sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta, \end{cases}$ 再利用对称性, 就有

$$\int_L |x| ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta = 2\sqrt{2}.$$

注 本题也可利用 L 的极坐标方程 $r^2 = \cos 2\theta$, 得到

$$\int_L |x| ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \cos \theta \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta = 2\sqrt{2}.$$

$$(5) \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt = \frac{2\pi}{3} (3a^2 + 4\pi^2 b^2) \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$(6) \int_L xyz ds = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^1 t^{\frac{9}{2}} \sqrt{1 + 2t + t^2} dt = \frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

(7) 因为在 L 上成立

$$xy + yz + zx = \frac{1}{2} [(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)],$$

所以

$$\int_L (xy + yz + zx) ds = -\frac{a^2}{2} \int_L ds = -\pi a^3.$$

2. 求椭圆周 $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ 的质量, 已知曲线在点 $M(x, y)$ 处的线密度是 $\rho(x, y) = |y|$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{质量 } m &= \int_L \rho ds = b \int_0^{2\pi} |\sin t| \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= 2b \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t} dt \\ &= \begin{cases} 2b^2 + \frac{2a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, & \text{当 } a > b, \\ 4a^2, & \text{当 } a = b, \\ 2b^2 + \frac{2a^2 b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}, & \text{当 } a < b. \end{cases} \end{aligned}$$

3. 求下列曲面的面积:

(1) $z = axy$ 包含在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 内的部分;

(2) 锥面 $x^2 + y^2 = \frac{1}{3} z^2$ 被平面 $x + y + z = 2a (a > 0)$ 所截的部分;

(3) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 包含在锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 内的部分;

(4) 圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 被两平面 $x + z = 0, x - z = 0$ ($x > 0, y > 0$) 所截部分;

(5) 抛物面 $x^2 + y^2 = 2az$ 包含在柱面 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ ($a > 0$) 内的部分;

$$(6) \text{ 环面} \begin{cases} x = (b + a \cos \phi) \cos \varphi, \\ y = (b + a \cos \phi) \sin \varphi, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \text{ 其中 } 0 < a < b. \\ z = a \sin \phi, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \quad A &= \iint_D \sqrt{1 + a^2(x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1 + a^2 r^2} r dr = \frac{2\pi}{3a^2} (\sqrt{(1 + a^4)^3} - 1). \end{aligned}$$

(2) 联立锥面与平面方程, 消去 z , 得到

$$x^2 + y^2 - xy + 2a(x + y) = 2a^2,$$

这是所截的部分在 xy 平面上投影区域的边界, 它是个椭圆。记

$$D = \{(x, y) | (x^2 - xy + y^2) + 2a(x + y) \leq 2a^2\},$$

再令 $\begin{cases} x = u + v, \\ y = u - v, \end{cases}$ 则区域 D 与区域

$$D' = \{(u, v) | (u + 2a)^2 + 3v^2 \leq 6a^2\}$$

对应, 且 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -2$, 于是所截部分的面积为

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \iint_{D'} 2 dx dy = \iint_{D'} 4 du dv = 8\sqrt{3}\pi a^2.$$

(3) 这部分球面在 xy 平面上的投影区域为 $D = \left\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{2}\right\}$,

于是

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr = (2 - \sqrt{2})\pi a^2. \end{aligned}$$

(4) 圆柱面方程可写成 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, 区域 $D = \{(x, y) | -x \leq z \leq x, 0 \leq x \leq a\}$, 于是

$$A = \iint_D \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dz dx = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dz dx = \int_0^a dx \int_{-x}^x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dz = 2a^2.$$

(5) 方程 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ 可化为极坐标方程 $r^2 = a^2 \sin 2\theta$, 于是

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = 2 \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2}} dx dy$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} \sqrt{a^2 + r^2} r dr \\
 &= \frac{2}{3} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\sin \theta + \cos \theta)^3 - 1] d\theta \\
 &= \frac{1}{9} (20 - 3\pi) a^2.
 \end{aligned}$$

(6) 由

$$\begin{aligned}
 x'_\psi &= -a \sin \psi \cos \varphi, y'_\psi = -a \sin \psi \sin \varphi, z'_\psi = a \cos \psi, \\
 x'_\varphi &= -(b + a \cos \psi) \sin \varphi, y'_\varphi = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, z'_\varphi = 0,
 \end{aligned}$$

可得

$$E = a^2, G = (b + a \cos \psi)^2, F = 0,$$

所以

$$A = \iint_B \sqrt{EG - F^2} d\psi d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b + a \cos \psi) d\psi = 4\pi^2 ab.$$

4. 求下列第一类曲面积分：

$$(1) \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是左半球面 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \leq 0;$$

$$(2) \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是区域 } \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\} \text{ 的边界;}$$

$$(3) \iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS, \Sigma \text{ 是锥面 } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 被柱面 } x^2 + y^2 = 2ax \text{ 所截}$$

部分;

$$(4) \iint_{\Sigma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是圆柱面 } x^2 + y^2 = a^2 \text{ 介于平面 } z = 0 \text{ 与 } z = H \text{ 之间的部分;}$$

$$(5) \iint_{\Sigma} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} \right) dS, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是球面 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2;$$

$$(6) \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z) dS, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是抛物面 } 2z = x^2 + y^2 \text{ 介于平面 } z = 0 \text{ 与 } z = 8 \text{ 之间的部分;}$$

$$(7) \iint_{\Sigma} zdS, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是螺旋面 } x = u \cos v, y = u \sin v, z = v, 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi \text{ 的一部分。}$$

解 (1) 由对称性,

$$\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \iint_{\Sigma} y dS = - \iint_{\Sigma_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}} dz dx$$



$$= -\pi a^3 \circ$$

(2) 设 $\Sigma_1: z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\Sigma_2: z = 1 (x^2 + y^2 \leq 1)$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{\Sigma_2} (x^2 + y^2) dS \\ &= (1 + \sqrt{2}) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \pi \circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS &= \iint_{\Sigma_{xy}} [xy + (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}] \sqrt{2} dx dy \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta \cos \theta + \cos \theta + \sin \theta) d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^3 dr \\ &= 4\sqrt{2} a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4 \circ \end{aligned}$$

(4) 设 $\Sigma_1: x = \sqrt{a^2 - y^2}$, $\Sigma_2: x = -\sqrt{a^2 - y^2} (0 \leq z \leq H)$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS &= \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS + \iint_{\Sigma_2} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS \\ &= 2 \iint_{\Sigma_{xy}} \frac{1}{a^2 + z^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy dz \\ &= 2 \int_0^H \frac{a dz}{a^2 + z^2} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy = 2\pi \arctan \frac{H}{a} \circ \end{aligned}$$

(5) 由对称性, 有 $\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$, 又由于

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_{\Sigma} a^2 dS = 4\pi a^4,$$

所以

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} \right) dS = \frac{13}{12} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{13}{9} \pi a^4 \circ$$

(6) 由对称性, 有 $\iint_{\Sigma} x^3 dS = 0$, $\iint_{\Sigma} y^2 dS = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 再由 $\iint_{\Sigma} z dS = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 得到

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^3 + y^2 + z) dS &= \iint_{\Sigma_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \sqrt{1 + r^2} r^3 dr = \pi \int_0^4 [(1 + r^2)^{\frac{3}{2}} - (1 + r^2)^{\frac{1}{2}}] d(1 + r^2) \\ &= \frac{1564 \sqrt{17} + 4}{15} \pi \circ \end{aligned}$$

(7) 由 $x'_u = \cos v, y'_u = \sin v, z'_u = 0, x'_v = -u \sin v, y'_v = u \cos v, z'_v = 1$, 得到

$$E = 1, G = 1 + u^2, F = 0。$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z dS &= \iint_D v \sqrt{1+u^2} du dv = \int_0^{2\pi} v dv \int_0^a \sqrt{1+u^2} du \\ &= \pi^2 [a \sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})]. \end{aligned}$$

5. 设球面 Σ 的半径为 R , 球心在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上。问当 R 何值时, Σ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 内部的面积最大? 并求该最大面积。

解 不妨设 Σ 的球心在 $(0, 0, a)$, 于是 Σ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 内部的曲面方程为

$$z = a - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}。$$

将此方程与球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 联立, 解得 $z = \frac{2a^2 - R^2}{2a}$, 这样, Σ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 内部的部分在 Oxy 平面上的投影为

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 - \frac{R^4}{4a^2} \right\},$$

从而面积为

$$\begin{aligned} S(R) &= \iint_D \sqrt{1+z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{1 - \frac{R^2}{4a^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{R}{2a}\right). \end{aligned}$$

对 $S(R)$ 求导, 得

$$S'(R) = \frac{\pi}{a} (4aR - 3R^2),$$

令 $S'(R) = 0$, 得到 $R = \frac{4}{3}a$ 。由于 $S''\left(\frac{4}{3}a\right) = -2\pi < 0$, 所以当 $R = \frac{4}{3}a$ 时, 面积最大, 面积最大值为

$$S_{\max} = \frac{32}{27}\pi a^3.$$

6. 求密度为 $\rho(x, y) = z$ 的抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq 1$ 的质量与重心。

解 质量 $M = \iint_{\Sigma} \rho(x, y) dS = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{1+r^2} dr^2 \\
 &= \frac{12\sqrt{3}+2}{15} \pi.
 \end{aligned}$$

设重心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性, $\bar{x}=0, \bar{y}=0$ 。

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} z \rho(x, y) dS &= \frac{1}{4} \iint_{\Sigma_{xy}} (x^2 + y^2)^2 \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^5 \sqrt{1+r^2} dr = \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{2}} r^4 \sqrt{1+r^2} dr^2,
 \end{aligned}$$

作代换 $t = \sqrt{1+r^2}$, 得到

$$\iint_{\Sigma} z \rho(x, y) dS = \frac{\pi}{4} \int_1^{\sqrt{3}} 2(t^2 - 1)^2 t^2 dt = \frac{66\sqrt{3} - 4}{105} \pi,$$

于是

$$\bar{z} = \frac{\iint_{\Sigma} z \rho(x, y) dS}{M} = \frac{596 - 45\sqrt{3}}{749},$$

所以重心为 $\left(0, 0, \frac{596 - 45\sqrt{3}}{749}\right)$ 。

7. 求均匀球面(半径是 a , 密度是1)对不在该球面上的质点(质量为1)的引力。

解 设球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 质点的坐标为 $(0, 0, b)$ ($0 \leq b \neq a$)。在球面上 (x, y, z) 处取一微元, 面积为 dS , 它对质点的引力为

$$dF = \frac{G dS}{x^2 + y^2 + (z-b)^2}.$$

由对称性, $F_x = F_y = 0$,

$$F_z = \iint_{\Sigma} \frac{G(z-b)}{[x^2 + y^2 + (z-b)^2]^{\frac{3}{2}}} dS.$$

令 $\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta, \\ y = a \sin \varphi \sin \theta, \\ z = a \cos \varphi, \end{cases}$ 得到 $\sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin \varphi$, 于是

$$F_z = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \frac{G(a \cos \varphi - b) a^2 \sin \varphi}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi,$$

在上述积分中, 再令 $t = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}$, 得到

$$F_z = -\frac{\pi G a}{b^2} \int_{1-a/b}^{a+b} \frac{b^2 - a^2 + t^2}{t^2} dt = \begin{cases} 0, & b < a, \\ -\frac{4\pi G a^2}{b^2}, & b > a, \end{cases}$$

所以当 $b < a$ 时, 引力 $\mathbf{F} = (0, 0, 0)$; 当 $b > a$ 时, 引力 $\mathbf{F} = \left(0, 0, -\frac{4\pi G a^2}{b^2}\right)$ 。

8. 设 $u(x, y, z)$ 为连续函数, 它在 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处有连续的二阶导数。记 Σ 为以 M 点为中心, 半径为 R 的球面, 以及

$$T(R) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma} u(x, y, z) dS.$$

(1) 证明: $\lim_{R \rightarrow 0} T(R) = u(x_0, y_0, z_0)$;

(2) 若 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$, 求当 $R \rightarrow 0$ 时无穷小量 $T(R) - u(x_0, y_0, z_0)$ 的主要部分。

解 (1) 由于 $u(x, y, z)$ 在 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处连续, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$ 时, 成立

$$|u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0)| < \varepsilon.$$

于是当 $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma} u(x, y, z) dS - u(x_0, y_0, z_0) \right| \\ & \leq \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma} |u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0)| dS < \varepsilon, \end{aligned}$$

所以成立

$$\lim_{R \rightarrow 0} T(R) = u(x_0, y_0, z_0).$$

(2) 令 $\begin{cases} x = x_0 + R\xi, \\ y = y_0 + R\eta, \\ z = z_0 + R\zeta, \end{cases}$ 则

$$T(R) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma^*} u(x_0 + R\xi, y_0 + R\eta, z_0 + R\zeta) dS,$$

其中 $\Sigma^* = \{(\xi, \eta, \zeta) \mid \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$ 。利用对称性, 有

$$\iint_{\Sigma^*} \xi dS = \iint_{\Sigma^*} \eta dS = \iint_{\Sigma^*} \zeta dS = 0,$$

$$\iint_{\Sigma^*} \xi\eta dS = \iint_{\Sigma^*} \eta\zeta dS = \iint_{\Sigma^*} \zeta\xi dS = 0,$$

$$\iint_{\Sigma^*} \xi^2 dS = \iint_{\Sigma^*} \eta^2 dS = \iint_{\Sigma^*} \zeta^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma^*} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) dS = \frac{4}{3}\pi.$$

由于



$$T'(R) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\xi u'_x + \eta u'_y + \zeta u'_z] dS,$$

$$T''(R) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\xi^2 u''_{xx} + \eta^2 u''_{yy} + \zeta^2 u''_{zz} + 2(\xi\eta u''_{xy} + \xi\zeta u''_{xz} + \eta\zeta u''_{yz})] dS,$$

以 $R=0$ 代入, 得到

$$T'(0) = 0,$$

$$T''(0) = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}.$$

由 Taylor 公式, 即知当 $R \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $T(R) - u(x_0, y_0, z_0)$ 的主要部分为 $\frac{R^2}{6} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}$ 。

9. 设 Σ 为上半椭球面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1 (z \geq 0)$, π 为 Σ 在点 $P(x, y, z)$ 处的切平面, $\rho(x, y, z)$ 为原点 $O(0, 0, 0)$ 到平面 π 的距离, 求 $\iint_{\Sigma} \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$ 。

解 因为椭球面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 在 $P(x, y, z)$ 点的法向量为 $n = (x, y, 2z)$, 所以切平面 π 的方程为

$$xX + yY + 2zZ = 2,$$

从而原点到 π 的距离为

$$\rho(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}.$$

令 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \sqrt{2} \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \cos \varphi, \end{cases}$ 则 $\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2} = \sqrt{2 \sin^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi}$, 由

$$x'_\varphi = \sqrt{2} \cos \varphi \cos \theta, y'_\varphi = \sqrt{2} \cos \varphi \sin \theta, z'_\varphi = -\sin \varphi,$$

$$x'_\theta = -\sqrt{2} \sin \varphi \sin \theta, y'_\theta = \sqrt{2} \sin \varphi \cos \theta, z'_\theta = 0,$$

得到

$$\sqrt{EG - F^2} = \sin \varphi \sqrt{2 \sin^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi},$$

由此得到

$$\iint_{\Sigma} \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi (\sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{3}{2} \pi.$$

注 本题也可由 $\Sigma: z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 投影到 xy 平面上来计算得到

$$\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS = \frac{1}{4} \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy = \frac{3}{2} \pi.$$

10. 设 Σ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。证明

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du,$$

其中 a, b, c 为不全为零的常数, $f(u)$ 是 $|u| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 上的一元连续函数。

证 将 xyz 坐标系保持原点不动旋转成 $x'y'z'$ 坐标系, 使 z' 轴上的单位向量为 $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c)$, 由于旋转变换是正交变换, 保持度量不变, 所以球面 Σ 上的面积元 dS 也不变。设球面 Σ 上一点 (x, y, z) 的新坐标为 (x', y', z') , 则 $ax + by + cz = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} z'$, 于是

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = \iint_S f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} z') dS.$$

下面计算这一曲面积分。令球面 Σ 的参数方程为

$$x' = \sin \varphi \cos \theta, y' = \sin \varphi \sin \theta, z' = \cos \varphi,$$

则

$$\sqrt{EG - F^2} = \sin \varphi,$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_S f(ax + by + cz) dS &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du. \end{aligned}$$

11. 设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化过程中, 其侧面满足方程 (设长度单位为 cm, 时间单位为 h)

$$z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}.$$

已知体积减少的速率与侧面积成正比 (比例系数 0.9)。问高度为 130 cm 的雪堆全部融化需多少时间?

解 雪堆的体积为

$$V(t) = \iint_D \left(h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{h(t)}} \left(h(t) - \frac{2}{h(t)} r^2 \right) r dr = \frac{\pi}{4} h^3(t),$$

雪堆的侧面积为

$$S(t) = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \frac{1}{h(t)} \iint_D \sqrt{h^2(t) + 16(x^2 + y^2)} dx dy$$

$$= \frac{1}{h(t)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{h^2(t) + 16r^2} r dr = \frac{13}{12}\pi h^2(t).$$

由 $\frac{dV}{dt} = -\frac{9}{10}S(t)$, 得到 $h'(t) = -\frac{13}{10}$, 注意到 $h(0) = 130$ (cm), 得到

$$h(t) = 130 - \frac{13}{10}t.$$

因为当雪堆全部融化即 $h(t) = 0$ 时, 有 $t = 100$ (h), 所以雪堆全部融化需 100 小时。

§ 2

第二类曲线积分与第二类曲面积分

1. 求下列第二类曲线积分:

$$(1) \int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy, \text{ 其中 } L \text{ 是以 } A(1,0), B(2,0), C(2,1),$$

$D(1,1)$ 为顶点的正方形, 方向为逆时针方向;

$$(2) \int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy, \text{ 其中 } L \text{ 是抛物线的一段: } y = x^2, -1 \leq x \leq 1, \text{ 方向由 } (-1,1) \text{ 到 } (1,1);$$

$$(3) \int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}, \text{ 其中 } L \text{ 是圆周 } x^2 + y^2 = a^2, \text{ 方向为逆时针方向;}$$

$$(4) \int_L ydx - xdy + (x^2 + y^2) dz, \text{ 其中 } L \text{ 是曲线 } x = e^t, y = e^{-t}, z = a^t, 0 \leq t \leq 1, \text{ 方向由 } (e, e^{-1}, a) \text{ 到 } (1, 1, 1);$$

$$(5) \int_L xdx + ydy + (x + y - 1) dz, L \text{ 是从点 } (1, 1, 1) \text{ 到点 } (2, 3, 4) \text{ 的直线段;}$$

$$(6) \int_L ydx + zd\bar{y} + xdz, L \text{ 为曲线 } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \\ x + z = a (a > 0), \end{cases} \text{ 若从 } z \text{ 轴的正向看去, } L \text{ 的方向为逆时针方向;}$$

$$(7) \int_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz, L \text{ 为圆周 } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ y = x \tan \alpha (0 < \alpha < \pi), \end{cases} \text{ 若从 } x \text{ 轴的正向看去, 这个圆周的方向为逆时针方向。}$$

解 (1) $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} \right\} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy \\
 &= \int_1^2 x^2 dx + \int_0^1 (4 - y^2) dy + \int_2^1 (x^2 + 1) dx + \int_1^0 (1 - y^2) dy = 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy &= \int_{-1}^1 [(x^2 - 2x^3) + (x^4 - 2x^3)2x] dx \\
 &= \int_{-1}^1 (x^2 - 4x^4) dx = -\frac{14}{15}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} \\
 &= \int_0^{2\pi} [(\cos t + \sin t)(-\sin t) - (\cos t - \sin t)\cos t] dt = -2\pi.
 \end{aligned}$$

$$(4) I = \int_L ydx - xdy + (x^2 + y^2)dz = \int_1^0 [2 + (e^{2t} + e^{-2t})a^t \ln a] dt.$$

$$\text{当 } a = e^2 \text{ 时, } I = \int_1^0 (4 + 2e^{4t}) dt = -\frac{1}{2}(7 + e^4);$$

$$\text{当 } a = e^{-2} \text{ 时, } I = \int_0^1 2e^{-4t} dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-4});$$

当 $a \neq e^2$ 且 $a \neq e^{-2}$ 时,

$$I = -2 + \ln a \int_1^0 [(ae^2)^t + (ae^{-2})^t] dt = -2 + \left(\frac{1 - ae^2}{\ln a + 2} + \frac{1 - ae^{-2}}{\ln a - 2} \right) \ln a.$$

$$(5) \int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz = \int_0^1 [1 + t + 2(1 + 2t) + 3(1 + 3t)] dt = 13.$$

(6) 由曲线积分的定义, 以 $z = a - x$ 代入积分, 得到

$$\int_L ydx + zdy + xdz = \int_{L_{xy}} (y - x) dx + (a - x) dy,$$

其中 L_{xy} 为 L 在 xy 平面上的投影曲线(椭圆) $2x^2 + y^2 = a^2$, 取逆时针方向。

令 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}a \cos t, y = a \sin t, t: 0 \rightarrow 2\pi$, 则

$$\begin{aligned}
 &\int_L ydx + zdy + xdz \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} \left[\left(\sin t - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right) \cos t \right] dt \\
 &= -\sqrt{2}\pi a^2.
 \end{aligned}$$

(7) 由曲线积分的定义, 以 $y = x \tan \alpha$ 代入积分, 得到

$$\int_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz = (1 - \tan \alpha) \int_{L_{xz}} xdz - zdx,$$

其中 L_{α} 为 L 在 zx 平面上的投影曲线(椭圆) $z^2 + x^2 \sec^2 \alpha = 1$, 取顺时针方向。

令 $x = \cos \alpha \sin t, z = \cos t, t: 2\pi \rightarrow 0$, 则

$$\begin{aligned} & \int_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz \\ &= (1 - \tan \alpha) \int_{2\pi}^0 \cos \alpha (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = 2\pi(\cos \alpha - \sin \alpha). \end{aligned}$$

2. 证明不等式

$$\left| \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \right| \leq MC,$$

其中 C 是曲线 L 的弧长, $M = \max \{ \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)} \mid (x, y) \in L \}$ 。记圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 为 L_R , 利用以上不等式估计

$$I_R = \int_{L_R} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2},$$

并证明

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = 0.$$

证 由 Schwarz 不等式及 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$, 可得

$$\begin{aligned} \left| \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \right| &= \left| \int_L [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta] ds \right| \\ &\leq \int_L |P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta| ds \\ &\leq \int_L \sqrt{[P^2(x, y) + Q^2(x, y)][\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta]} ds \\ &\leq M \int_L ds = MC. \end{aligned}$$

在积分 $I_R = \int_{L_R} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$ 中, 令 $P(x, y) = \frac{y}{(x^2 + xy + y^2)^2}$,

$Q(x, y) = \frac{-x}{(x^2 + xy + y^2)^2}$, 则

$$P^2(x, y) + Q^2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + xy + y^2)^4} \leq \frac{16}{(x^2 + y^2)^3},$$

于是 $|I_R| \leq \frac{4}{R^3} C = \frac{8\pi}{R^2}$, 所以

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = 0.$$

3. 方向依纵轴的负方向, 且大小等于作用点的横坐标的平方的力构成一个力场。求质量为 m 的质点沿抛物线 $y^2 = 1 - x$ 从点 $(1, 0)$ 移到 $(0, 1)$ 时, 场力所做的功。

$$\text{解 } W = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^1 (1 - y^2)^2 dy = -\frac{8}{15}.$$

4. 计算下列第二类曲面积分：

$$(1) \iint_{\Sigma} (x+y) dy dz + (y+z) dz dx + (z+x) dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是中心在原点,}$$

边长为 $2h$ 的立方体 $[-h, h] \times [-h, h] \times [-h, h]$ 的表面, 方向取外侧;

$$(2) \iint_{\Sigma} yz dz dx, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是椭球面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ 的上半部分, 方向取上侧;}$$

$$(3) \iint_{\Sigma} zd y dz + xd z dx + y d x dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是柱面 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 被平面 } z = 0 \text{ 和}$$

$z = 4$ 所截部分, 方向取外侧;

$$(4) \iint_{\Sigma} zx dy dz + 3 dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是抛物面 } z = 4 - x^2 - y^2 \text{ 在 } z \geq 0 \text{ 部分, 方向}$$

取下侧;

$$(5) \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) +$$

$z] dx dy, \text{ 其中 } f(x, y, z) \text{ 为连续函数, } \Sigma \text{ 是平面 } x - y + z = 1 \text{ 在第四卦限部分,}$

方向取上侧;

$$(6) \iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + (z^2 + 5) dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是锥面 } z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq$$

$z \leq h), \text{ 方向取下侧。}$

$$(7) \iint_{\Sigma} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2 + x^2}} dz dx, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是抛物面 } y = x^2 + z^2 \text{ 与平面 } y = 1, y = 2 \text{ 所围}$$

立体的表面, 方向取外侧。

$$(8) \iint_{\Sigma} \frac{1}{x} dy dz + \frac{1}{y} dz dx + \frac{1}{z} dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为椭球面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ 方向}$$

取外侧;

$$(9) \iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是球面 } (x - a)^2 + (y - b)^2 +$$

$(z - c)^2 = R^2, \text{ 方向取外侧。}$

解 (1) 将 Σ 的上、下、左、右、前、后六个面分别记为 $\Sigma_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x+y) dy dz &= \iint_{\Sigma_5} (x+y) dy dz + \iint_{\Sigma_6} (x+y) dy dz \\ &= \iint_{\Sigma_5} x dy dz + \iint_{\Sigma_6} x dy dz = 2h \iint_{\Sigma_5} dy dz = 8h^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} (y+z) dz dx &= \iint_{\Sigma_3} (y+z) dz dx + \iint_{\Sigma_4} (y+z) dz dx \\
 &= \iint_{\Sigma_3} y dz dx + \iint_{\Sigma_4} y dz dx = 2h \iint_{B_{xy}} dz dx = 8h^3, \\
 \iint_{\Sigma} (z+x) dx dy &= \iint_{\Sigma_1} (z+x) dx dy + \iint_{\Sigma_2} (z+x) dx dy \\
 &= \iint_{\Sigma_1} z dx dy + \iint_{\Sigma_2} z dx dy = 2h \iint_{B_{xy}} dx dy = 8h^3,
 \end{aligned}$$

所以

$$\iint_{\Sigma} (x+y) dy dz + (y+z) dz dx + (z+x) dx dy = 24h^3.$$

(2) 设曲面 Σ 的单位法向量为 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 由 $dz dx = \cos \beta dS$ 与 $dx dy = \cos \gamma dS$, 得到 $dz dx = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} dx dy = \frac{c^2}{b^2} \frac{y}{z} dx dy$ 。由于 Σ 的方向取上侧,

它在 xy 平面的投影区域为 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, 于是

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} yz dz dx &= \iint_{\Sigma} \frac{c^2}{b^2} y^2 dx dy = \iint_D \frac{c^2}{b^2} y^2 dx dy \\
 &= abc^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4} abc^2.
 \end{aligned}$$

(3) 解法一

取曲面 Σ 的参数表示 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \\ z = z, \end{cases}$, $D = \{(\theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 4\}$, 则

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, z)} = \cos \theta, \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, z)} = \sin \theta, \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, z)} = 0.$$

由于 Σ 的方向取外侧, 于是

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} z dy dz + x dz dx + y dx dy &= \iint_D \left[z \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, z)} + \cos \theta \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, z)} + \sin \theta \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, z)} \right] d\theta dz \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^4 z dz + \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^4 dz = 0.
 \end{aligned}$$

解法二

由于曲面 Σ 的单位法向量为 $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right)$, 可知

$$\iint_{\Sigma} y dx dy = 0.$$



将柱面 Σ 分成前后两部分 Σ_1, Σ_2 , 其中 $\Sigma_1: x = \sqrt{1 - y^2}$, $\Sigma_2: x = -\sqrt{1 - y^2}$, 则

$$\iint_{\Sigma} z \, dy \, dz = \iint_{\Sigma_1} z \, dy \, dz + \iint_{\Sigma_2} z \, dy \, dz = \iint_{D_{xy}} z \, dy \, dz - \iint_{D_{xy}} z \, dy \, dz = 0,$$

类似地可得 $\iint_{\Sigma} x \, dz \, dx = 0$, 所以

$$\iint_{\Sigma} z \, dy \, dz + x \, dz \, dx + y \, dx \, dy = 0.$$

(4) 设曲面 Σ 的单位法向量为 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 由 $dy \, dz = \cos \alpha dS$ 与 $dx \, dy = \cos \gamma dS$, 得到 $dy \, dz = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dx \, dy = 2x \, dx \, dy$ 。由于 Σ 的方向取下侧, 它在 xy 平面的投影区域为 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} zx \, dy \, dz + 3 \, dx \, dy &= \iint_{\Sigma} (2x^2 z + 3) \, dx \, dy = - \iint_D [2x^2(4 - x^2 - y^2) + 3] \, dx \, dy \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 [2r^2 \cos^2 \theta (4 - r^2) + 3] r \, dr \\ &= - \frac{32}{3} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - 12\pi = - \frac{68}{3}\pi. \end{aligned}$$

(5) 平面 Σ 的方程为 $x - y + z = 1$, 方向取上侧, 由此可知 $dy \, dz = dx \, dy$, $dz \, dx = -dx \, dy$, 于是

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] \, dy \, dz + [2f(x, y, z) + y] \, dz \, dx + [f(x, y, z) + z] \, dx \, dy \\ &= \iint_{\Sigma} \{[f(x, y, z) + x] - [2f(x, y, z) + y] + [f(x, y, z) + z]\} \, dx \, dy \\ &= \iint_{D_{xy}} dx \, dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(6) 由对称性, $\iint_{\Sigma} x^2 \, dy \, dz = 0$, $\iint_{\Sigma} y^2 \, dz \, dx = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + (z^2 + 5) \, dx \, dy &= - \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2 + 5) \, dx \, dy \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h (r^2 + 5) r \, dr = - \frac{\pi}{2} (h^4 + 10h^2). \end{aligned}$$

(7) 记 $\Sigma_1: y = x^2 + z^2$ ($1 \leq y \leq 2$), 方向取外侧; $\Sigma_2: y = 1$ ($x^2 + z^2 \leq 1$), 方向取左侧; $\Sigma_3: y = 2$ ($x^2 + z^2 \leq 2$), 方向取右侧, 则

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2 + x^2}} \, dz \, dx = - \iint_{D_{xy}} \frac{e^{\sqrt{x^2 + z^2}}}{\sqrt{z^2 + x^2}} \, dz \, dx = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} e^r \, dr = - 2\pi(e^{\sqrt{2}} - e),$$

$$\iint_{\Sigma_2} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2 + x^2}} dz dx = - \iint_{\Sigma_{2_{zx}}} \frac{e}{\sqrt{z^2 + x^2}} dz dx = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e dr = -2e\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_3} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2 + x^2}} dz dx = \iint_{\Sigma_{3_{zx}}} \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{z^2 + x^2}} dz dx = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}} dr = 2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\pi,$$

所以

$$\iint_{\Sigma} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2 + x^2}} dz dx = 2e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1)\pi.$$

(8) 设 Σ_1, Σ_2 分别表示上、下两半椭球面, 方向分别取上、下侧, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dx dy &= \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{z} dx dy + \iint_{\Sigma_2} \frac{1}{z} dx dy = 2 \iint_{D_{xy}} \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{ab r dr}{c \sqrt{1 - r^2}} = \frac{4\pi ab}{c}, \end{aligned}$$

由对称性, 可得

$$\iint_{\Sigma} \frac{1}{y} dz dx = \frac{4\pi ac}{b}, \quad \iint_{\Sigma} \frac{1}{x} dy dz = \frac{4\pi bc}{a},$$

所以

$$\iint_{\Sigma} \frac{1}{x} dy dz + \frac{1}{y} dz dx + \frac{1}{z} dx dy = \frac{4\pi}{abc} (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2).$$

(9) 设 Σ_1, Σ_2 分别表示上、下两半球面, 方向分别取上、下侧。则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z^2 dx dy &= \iint_{\Sigma_1} z^2 dx dy + \iint_{\Sigma_2} z^2 dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} [c + \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2}]^2 dx dy \\ &\quad - \iint_{D_{xy}} [c - \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2}]^2 dx dy \\ &= 4c \iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2} dx dy = \frac{8}{3}\pi c R^3. \end{aligned}$$

同理可得

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz = \frac{8}{3}\pi a R^3, \quad \iint_{\Sigma} y^2 dz dx = \frac{8}{3}\pi b R^3,$$

所以

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \frac{8\pi}{3}(a + b + c)R^3.$$

§ 3

Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式

1. 利用 Green 公式计算下列积分:

- (1) $\int_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy$, 其中 L 是以 $A(1,1), B(3,2), C(2,5)$ 为顶点的三角形的边界, 逆时针方向;
- (2) $\int_L xy^2 dx - x^2 y dy$, 其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$, 逆时针方向;
- (3) $\int_L (x^2 y \cos x + 2x y \sin x - y^2 e^x) dx + (x^2 \sin x - 2y e^x) dy$, 其中 L 是星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} (a>0)$, 逆时针方向;
- (4) $\int_L e^x [(1-\cos y) dx - (y-\sin y) dy]$, 其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段;
- (5) $\int_L (x^2-y) dx - (x+\sin^2 y) dy$, 其中 L 是圆周 $x^2+y^2=2x$ 的上半部分, 方向从点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$;
- (6) $\int_L [e^x \sin y - b(x+y)] dx + (e^x \cos y - ax) dy$, 其中 a, b 是正常数, L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的一段;
- (7) $\int_L \frac{x dy - y dx}{4x^2+y^2}$, 其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心, R 为半径的圆周 ($R>1$), 逆时针方向;
- (8) $\int_L \frac{(x-y) dx + (x+4y) dy}{x^2+4y^2}$, 其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$, 逆时针方向;
- (9) $\int_L \frac{e^x [(x \sin y - y \cos y) dx + (x \cos y + y \sin y) dy]}{x^2+y^2}$, 其中 L 是包围原点的简单光滑闭曲线, 逆时针方向。

解 (1)
$$\int_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy = \iint_D (-4x-2y) dx dy$$

$$= -2 \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3} (2x+y) dy - 2 \int_2^3 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{11-3x} (2x+y) dy = -\frac{140}{3}.$$

(2)
$$\int_L xy^2 dx - x^2 y dy = \iint_D (-2xy-2xy) dx dy$$

$$= -4 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^a r^3 dr = 0.$$

$$(3) \quad \int_L (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x) dx + (x^2 \sin x - 2ye^x) dy \\ = \iint_D 0 dx dy = 0.$$

(4) 设 $L_1: y=0, x: 0 \rightarrow \pi$, 则

$$\int_{L+L_1} e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy] = \iint_D e^x y dx dy = \int_0^\pi e^x dx \int_0^{\sin x} y dy = \frac{e^\pi - 1}{5},$$

所以

$$\int_L e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy] \\ = \int_{L_1} e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy] + \frac{e^\pi - 1}{5} = \frac{e^\pi - 1}{5}.$$

(5) 设 $L_1: y=0, x: 0 \rightarrow 2$, 则

$$\int_{L+L_1} (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy = \iint_D (1 - 1) dx dy = 0,$$

所以

$$\int_L (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy = \int_{L_1} (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

(6) 设 $L_1: y=0, x: 0 \rightarrow 2a$, 则

$$\int_{L+L_1} [e^x \sin y - b(x + y)] dx + (e^x \cos y - ax) dy = \iint_D (b - a) dx dy = \frac{\pi}{2} a^2 (b - a),$$

所以

$$\int_L [e^x \sin y - b(x + y)] dx + (e^x \cos y - ax) dy \\ = \frac{\pi}{2} a^2 (b - a) - \int_{L_1} [e^x \sin y - b(x + y)] dx + (e^x \cos y - ax) dy \\ = \frac{\pi}{2} a^2 (b - a) + b \int_0^{2a} x dx = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) a^2 b - \frac{\pi}{2} a^3.$$

(7) 设 $P(x, y) = -\frac{y}{4x^2 + y^2}, Q(x, y) = \frac{x}{4x^2 + y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径 $L_1: 4x^2 + y^2 = 1$, 逆时针方向, 由 Green 公式,

$$\int_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \int_{L_1} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}.$$

令 $x = \frac{1}{2} \cos t, y = \sin t$, 得到

$$\int_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \int_{L_1} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \cos^2 t + \frac{1}{2} \sin^2 t \right) dt = \pi.$$

(8) 设 $P(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + 4y^2}, Q(x, y) = \frac{x + 4y}{x^2 + 4y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4y^2 - 8xy - x^2}{(x^2 + 4y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径 $L_1: x^2 + 4y^2 = 1$, 逆时针方向, 由 Green 公式,

$$\int_L \frac{(x - y) dx + (x + 4y) dy}{x^2 + 4y^2} = \int_{L_1} \frac{(x - y) dx + (x + 4y) dy}{x^2 + 4y^2}.$$

令 $x = \cos t, y = \frac{1}{2} \sin t$, 得到

$$\int_L \frac{(x - y) dx + (x + 4y) dy}{x^2 + 4y^2} = \int_{L_1} \frac{(x - y) dx + (x + 4y) dy}{x^2 + 4y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt = \pi.$$

(9) 设 $P(x, y) = \frac{e^x (x \sin y - y \cos y)}{x^2 + y^2}, Q(x, y) = \frac{e^x (x \cos y + y \sin y)}{x^2 + y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{[(x^2 + y^2)x + y^2 - x^2]\cos y + (x^2 + y^2 - 2x)y \sin y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径 $L_r: x^2 + y^2 = r^2$, 即 $x = r \cos t, y = r \sin t, t: 0 \rightarrow 2\pi$, 由 Green 公式,

$$\begin{aligned} & \int_L \frac{e^x [(x \sin y - y \cos y) dx + (x \cos y + y \sin y) dy]}{x^2 + y^2} \\ &= \int_{L_r} \frac{e^x [(x \sin y - y \cos y) dx + (x \cos y + y \sin y) dy]}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

于是

$$I = \int_{L_r} \frac{e^x [(x \sin y - y \cos y) dx + (x \cos y + y \sin y) dy]}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} e^{r \cos t} \cos(r \sin t) dt,$$

令 $r \rightarrow 0$, 即得到

$$I = 2\pi.$$

2. 利用曲线积分, 求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$;

(2) 抛物线 $(x + y)^2 = ax (a > 0)$ 与 x 轴;

(3) 旋轮线的一段: $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} t \in [0, 2\pi]$ 与 x 轴。

$$\text{解 (1)} S = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

(2) 令 $y = tx$, 则 $x = \frac{a}{(1+t)^2}$, $y = \frac{at}{(1+t)^2}$, $t: 0 \rightarrow +\infty$ 。于是

$$S = - \int_C y dx = 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t)^5} dt = \frac{1}{6} a^2.$$

$$(3) S = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (2 - t \sin t - 2 \cos t) dt = 3\pi a^2.$$

3. 先证明曲线积分与路径无关, 再计算积分值:

$$(1) \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy);$$

$$(2) \int_{(2,1)}^{(1,2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy, \text{其中 } \varphi(x), \psi(y) \text{ 为连续函数};$$

$$(3) \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{沿不通过原点的路径}.$$

解 (1) 设 $P(x, y) = x - y$, $Q(x, y) = -(x - y)$,
则 $\frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以曲线积分与路径无关。

取积分路径为 $L: y = x$, $x: 0 \rightarrow 1$, 于是

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy) = 0$$

(2) 设 $P(x, y) = \varphi(x)$, $Q(x, y) = \psi(y)$,
则 $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以曲线积分与路径无关。

取积分路径为 L : 折线 \overline{ABC} , 其中 $A(2,1)$, $B(1,1)$, $C(1,2)$, 于是

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy = \int_2^1 \varphi(x)dx + \int_1^2 \psi(y)dy = \int_1^2 [\psi(t) - \varphi(t)]dt.$$

$$(3) \text{ 设 } P(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, Q(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

则 $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以曲线积分与路径无关。

取积分路径为 L : 折线 \overline{ABC} , 其中 $A(1,0)$, $B(6,0)$, $C(6,8)$, 于是

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_1^6 dx + \int_0^8 \frac{ydy}{\sqrt{36+y^2}} = 9.$$

4. 证明 $(2x \cos y + y^2 \cos x)dx + (2y \sin x - x^2 \sin y)dy$ 在整个 xy 平面上是某个函数的全微分, 并找出这样一个原函数。

证 设 $P(x, y) = 2x \cos y + y^2 \cos x$, $Q(x, y) = 2y \sin x - x^2 \sin y$, 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x \sin y + 2y \cos x = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以 $(2x \cos y + y^2 \cos x)dx + (2y \sin x - x^2 \sin y)dy$ 在整个 xy 平面上是某个函数的全微分。

设这个函数为 $u(x, y)$, 则

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x \cos y + y^2 \cos x)dx + (2y \sin x - x^2 \sin y)dy + C \\ &= \int_0^x 2x dx + \int_0^y (2y \sin x - x^2 \sin y)dy = x^2 \cos y + y^2 \sin x + C. \end{aligned}$$

5. 证明 $\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ 在除去 y 的负半轴及原点的裂缝 xy 平面上是某个函数的全微分, 并找出这样一个原函数。

证 设 $P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, Q(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以 $\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ 在除去 y 的负半轴及原点的裂缝 xy 平面上是某个函数的全微分。

设这个函数为 $u(x, y)$, 则

$$u(x, y) = \int_{(0,1)}^{(x,y)} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + C = \int_0^x \frac{x dx}{x^2 + 1} + \int_1^y \frac{y dy}{x^2 + y^2} + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C.$$

6. 设 $Q(x, y)$ 在 xy 平面上具有连续偏导数, 曲线积分 $\int_L 2xy dx + Q(x, y) dy$ 与路径无关, 并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy,$$

求 $Q(x, y)$ 。

解 因为曲线积分 $\int_L 2xy dx + Q(x, y) dy$ 与路径无关, 所以 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, 两边关于 x 积分, 即得到 $Q(x, y) = x^2 + \varphi(y)$, 其中 φ 待定。

由条件 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy$, 可得

$$\int_0^1 (t^2 + \varphi(y)) dy = \int_0^t (1 + \varphi(y)) dy,$$

两边对 t 求导, 得到 $2t = 1 + \varphi(t)$, 即 $\varphi(y) = 2y - 1$, 所以

$$Q(x, y) = x^2 + 2y - 1.$$

7. 确定常数 λ , 使得右半平面 $x > 0$ 上的向量函数 $r(x, y) = 2xy(x^4 +$



$y^2)^{\lambda} \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2)^{\lambda} \mathbf{j}$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度, 并求 $u(x, y)$ 。

解 由题意, $\frac{\partial[2xy(x^4 + y^2)^{\lambda}]}{\partial y} = \frac{\partial[-x^2(x^4 + y^2)^{\lambda}]}{\partial x}$, 即

$$2x(x^4 + y^2)^{\lambda} + 4\lambda xy^2(x^4 + y^2)^{\lambda-1} = -2x(x^4 + y^2)^{\lambda} - 4\lambda x^5(x^4 + y^2)^{\lambda-1},$$

化简后, 求得 $\lambda = -1$ 。这时

$$u(x, y) = \int_{(1, 0)}^{(x, y)} \frac{2xy \, dx - x^2 \, dy}{x^4 + y^2} + C = - \int_0^y \frac{x^2 \, dy}{x^4 + y^2} + C = -\arctan \frac{y}{x} + C.$$

8. 设一力场为 $\mathbf{F} = (3x^2y + 8xy^2)\mathbf{i} + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)\mathbf{j}$, 证明质点在此场内移动时, 场力所做的功与路径无关。

证 设 $P(x, y) = 3x^2y + 8xy^2$, $Q(x, y) = x^3 + 8x^2y + 12ye^y$, 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 16xy = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以质点在此场内移动时, 场力所做的功与路径无关。

9. 利用 Gauss 公式计算下列曲面积分:

$$(1) \iint_{\Sigma} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy, \Sigma \text{ 为立方体 } 0 \leq x, y, z \leq a \text{ 的表面, 方向取外侧;}$$

$$(2) \iint_{\Sigma} (x - y + z) \, dy \, dz + (y - z + x) \, dz \, dx + (z - x + y) \, dx \, dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为闭曲面 } |x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1, \text{ 方向取外侧;}$$

$$(3) \iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) \, dS, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为锥面 } z^2 = x^2 + y^2 \text{ 介于平面 } z = 0 \text{ 与 } z = h (h > 0) \text{ 之间的部分, 方向取下侧;}$$

$$(4) \iint_{\Sigma} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为上半球面 } z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \text{ 方向取上侧;}$$

$$(5) \iint_{\Sigma} 2(1 - x^2) \, dy \, dz + 8xy \, dz \, dx - 4zx \, dx \, dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是由 } xy \text{ 平面上的曲线 } x = e^y (0 \leq y \leq a) \text{ 绕 } x \text{ 轴旋转而成的旋转面, 曲面的法向量与 } x \text{ 轴的正向的夹角为钝角;}$$

$$(6) \iint_{\Sigma} (2x + z) \, dy \, dz + z \, dx \, dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是曲面 } z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1), \text{ 曲面的法向量与 } z \text{ 轴的正向的夹角为锐角;}$$

$$(7) \iint_{\Sigma} \frac{ax \, dy \, dz + (a + z)^2 \, dx \, dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} (a > 0), \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是下半球面 } z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \text{ 方向取上侧;}$$

$$(8) \iint_{\Sigma} \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是}$$

(i) 椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, 方向取外侧;

(ii) 抛物面 $1 - \frac{z}{5} = \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9}$ ($z \geq 0$), 方向取上侧。

解 (1) 设 Ω 是 Σ 所围的空间区域, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy \\ &= \iiint_{\Omega} 2(x + y + z) \, dx \, dy \, dz = 6 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a z \, dz = 3a^4. \end{aligned}$$

(2) 设 Ω 是 Σ 所围的空间区域, 作变换 $\varphi: \begin{cases} u = x - y + z, \\ v = y - z + x, \\ w = z - x + y, \end{cases}$ 则 $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} =$

4, 且变换 φ 将 Ω 变为 $\Omega' = \{(u, v, w) \mid |u| + |v| + |w| \leq 1\}$, 记 Ω'' 是 Ω' 在第一象限的部分, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (x - y + z) \, dy \, dz + (y - z + x) \, dz \, dx + (z - x + y) \, dx \, dy \\ &= \iiint_{\Omega} 3 \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega'} \frac{3}{4} \, du \, dv \, dw - 6 \iiint_{\Omega''} \, du \, dv \, dw = 1. \end{aligned}$$

(3) 补充 $\Sigma_1: z = h(x^2 + y^2 \leq h^2)$, 方向取上侧, 设 Ω 是 $\Sigma + \Sigma_1$ 所围的空间区域, 因为 Ω 的对称性, 有 $\iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz = 0$ 。由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma + \Sigma_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) \, dS = \iint_{\Omega} 2(x + y + z) \, dx \, dy \, dz \\ &= 2 \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r \, dr \int_r^h z \, dz = \frac{\pi}{2} h^4, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) \, dS \\ &= \frac{\pi}{2} h^4 - \iint_{\Sigma_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) \, dS \\ &= \frac{\pi}{2} h^4 - \iint_{\Sigma_1} h^2 \, dx \, dy = -\frac{1}{2} \pi h^4. \end{aligned}$$

(4) 补充 $\Sigma_1: z = 0(x^2 + y^2 \leq R^2)$, 方向取下侧, 设 Ω 是 $\Sigma + \Sigma_1$ 所围的空间区域, 由 Gauss 公式,

$$\iint_{\Sigma \cup \Sigma_1} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_{\Omega} 3 dx dy dz = 2\pi R^3,$$

于是

$$\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = 2\pi R^3 - \iint_{\Sigma_1} x dy dz + y dz dx + z dx dy = 2\pi R^3.$$

(5) 由题意, 可得 $\Sigma: x = e^{\sqrt{y^2+z^2}}$ ($y^2 + z^2 \leq a^2$), 方向取后侧。补充 $\Sigma_1: x = e^a$ ($y^2 + z^2 \leq a^2$), 方向取前侧, 设 Ω 是 $\Sigma + \Sigma_1$ 所围的空间区域, 由 Gauss 公式,

$$\iint_{\Sigma \cup \Sigma_1} 2(1-x^2) dy dz + 8xy dz dx - 4zx dx dy = \iiint_{\Omega} 0 dx dy dz = 0,$$

于是

$$\iint_{\Sigma} 2(1-x^2) dy dz + 8xy dz dx - 4zx dx dy = - \iint_{\Sigma_1} 2(1-e^{2a}) dy dz = 2\pi a^2 (e^{2a} - 1).$$

(6) 补充 $\Sigma_1: z = 1$ ($x^2 + y^2 \leq 1$), 方向取下侧, 设 Ω 是 $\Sigma + \Sigma_1$ 所围的空间区域, 由 Gauss 公式,

$$\iint_{\Sigma \cup \Sigma_1} (2x+z) dy dz + z dx dy = - \iiint_{\Omega} 3 dx dy dz = - 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 dz = - \frac{3}{2}\pi,$$

于是

$$\iint_{\Sigma} (2x+z) dy dz + z dx dy = - \frac{3}{2}\pi - \iint_{\Sigma_1} 1 dx dy = - \frac{\pi}{2}$$

(7) 由题意,

$$\iint_{\Sigma} \frac{ax dy dz + (a+z)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} ax dy dz + (a+z)^2 dx dy.$$

补充 $\Sigma_1: z = 0$ ($x^2 + y^2 \leq a^2$), 方向取下侧, 设 Ω 是 $\Sigma + \Sigma_1$ 所围的空间区域, 由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma \cup \Sigma_1} ax dy dz + (a+z)^2 dx dy &= - \iiint_{\Omega} (3a+2z) dx dy dz \\ &= - 2\pi a^4 - 2\pi \int_{-a}^0 z (a^2 - z^2) dz = - \frac{3}{2}\pi a^4, \end{aligned}$$

于是

$$\iint_{\Sigma} ax dy dz + (a+z)^2 dx dy = - \frac{3}{2}\pi a^4 - \iint_{\Sigma_1} a^2 dx dy = - \frac{1}{2}\pi a^4,$$

从而

$$\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (a+z)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}\pi a^3.$$

(8) (i) 记 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 设原积分为 $\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

设 $\Sigma' = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2\}$, 方向为外侧, 设 Ω 是 $\Sigma + (-\Sigma')$ 所围的空间区域, 由 Gauss 公式,

$$\iint_{\Sigma + (-\Sigma')} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = 0.$$

$$\text{由于 } \cos \alpha = \frac{x}{r}, \cos \beta = \frac{y}{r}, \cos \gamma = \frac{z}{r},$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{r^3} &= \iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{r^3} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\Sigma} \cos \alpha dy dz + \cos \beta dz dx + \cos \gamma dx dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\Sigma} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) dS \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\Sigma} dS = 4\pi. \end{aligned}$$

注 对上面的积分, 也可取 Σ' 的参数表示为 $\begin{cases} x = \epsilon \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \epsilon \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \epsilon \cos \varphi, \end{cases}$ 其中 $(\varphi, \theta) \in D'$

$D' = \{0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{r^3} &= \iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{r^3} \\ &= \iint_D \sin \varphi d\varphi d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

(ii) 设 $\Sigma' = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} \leq 1, z=0 \right\} - \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 < \epsilon^2, \right.$

$\left. z=0 \right\}$, 方向为下侧, $\Sigma'' = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2, z \geq 0\}$, 方向为下侧, 则由 Gauss 公式

$$\iint_{\Sigma + \Sigma' + \Sigma''} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{r^3} = 0,$$

由此得到

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{r^3} &= \iint_{\Sigma} \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{r^3} \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma} \cos \alpha \, dy \, dz + \cos \beta \, dz \, dx + \cos \gamma \, dx \, dy \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \, dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma} dS = 2\pi.
 \end{aligned}$$

注 对上面的积分,也可取 Σ 的参数表示为 $\begin{cases} x = \varepsilon \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \varepsilon \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \varepsilon \cos \varphi, \end{cases}$ 其中 $(\varphi, \theta) \in D'' = \left\{ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$, 则

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{r^3} &= \iint_{\Sigma} \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{r^3} \\
 &= \iint_D \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = 2\pi.
 \end{aligned}$$

10. 利用 Gauss 公式证明阿基米德原理: 将物体全部浸没在液体中时, 物体所受的浮力等于与物体同体积的液体的重量, 而方向是垂直向上的。

证 以液面为 xy 平面, 垂直向上的轴为 z 轴, 在物体表面上点 (x, y, z) 处任取一微元, 其面积为 dS , 设 n 为物体表面上点 (x, y, z) 处的单位(外)法向量, ρ 为液体密度。则这小块面积所受的压力大小为

$$dF = \rho z \, dS,$$

它在三个方向的分力分别为

$$dF_x = \rho z \cos(n, x) \, dS, dF_y = \rho z \cos(n, y) \, dS, dF_z = \rho z \cos(n, z) \, dS,$$

于是由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned}
 F_x &= \rho \iint_D z \cos(n, x) \, dS = 0, F_y = \rho \iint_D z \cos(n, y) \, dS = 0, \\
 F_z &= \rho \iint_D z \cos(n, z) \, dS = \rho \iint_D dx \, dy \, dz = \rho V,
 \end{aligned}$$

这就是所要证明的。

11. 设某种流体的速度场为 $\mathbf{v} = yzi + xzj + xyk$, 求单位时间内流体

(1) 流过圆柱: $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$ 的侧面(方向取外侧)的流量;

(2) 流过该圆柱的全表面(方向取外侧)的流量。

解 (1) 设 $\Sigma_1: z = 0 (x^2 + y^2 \leq a^2)$, 方向取下侧, $\Sigma_2: z = h (x^2 + y^2 \leq a^2)$, 方向取上侧, D 是 Σ_1, Σ_2 在 xy 平面上的投影区域。由于

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \, dS = - \iint_D xy \, dx \, dy = 0, \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \, dS = \iint_D xy \, dx \, dy = 0,$$



由 Gauss 公式,

$$\iint_{\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2} \mathbf{v} d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} 0 dx dy dz = 0,$$

所以流量

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{v} d\mathbf{S} = 0.$$

(2) 由(1)可知, 流过该圆柱的全表面的流量 $\iint_{\Sigma} \mathbf{v} d\mathbf{S} = 0$ 。

12. 利用 Stokes 公式计算下列曲线积分:

$$(1) \int_L y dx + z dy + x dz, \text{ 其中 } L \text{ 是球面 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ 与平面 } x + y + z = 0$$

的交线(它是圆周), 从 x 轴的正向看去, 此圆周的方向是逆时针方向;

$$(2) \int_L 3z dx + 5x dy - 2y dz, \text{ 其中 } L \text{ 是圆柱面 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 与平面 } z = y + 3$$

的交线(它是椭圆), 从 z 轴的正向看去, 是逆时针方向;

$$(3) \oint_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz, \text{ 其中 } L \text{ 为圆柱面 } x^2 + y^2 = a^2 \text{ 和}$$

平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 (a > 0, h > 0)$ 的交线(它是椭圆), 从 x 轴的正向看去, 是逆时针方向;

$$(4) \int_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz, \text{ 其中 } L \text{ 是用平面 } x + y + z = \frac{3}{2}$$

$\text{截立方体 } 0 \leq x, y, z \leq 1$ 的表面所得的截痕, 从 x 轴的正向看去, 是逆时针方向;

$$(5) \int_L (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz, \text{ 其中 } L \text{ 是沿着螺线}$$

$$x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = \frac{h}{2\pi} \varphi$$

从点 $A(a, 0, 0)$ 至点 $B(a, 0, h)$ 的路径;

$$(6) \int_L (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz, \text{ 其中 } L \text{ 是平面 } x + y + z = 2 \text{ 与柱面 } |x| + |y| = 1 \text{ 的交线, 从 } z \text{ 轴的正向看去, 是逆时针方向。}$$

解 (1) 设 Σ 是 L 所围的平面 $x + y + z = 0$ 的部分, 方向由右手法则确定(即取上侧)。由 Stokes 公式,



$$\int_L ydx + zd\gamma + xdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = - \iint_{\Sigma} dydz + dzdx + dxdy$$

$$= -\sqrt{3} \iint_{\Sigma} dS = -\sqrt{3}\pi a^2.$$

(2) 设 Σ 是 L 所围的平面 $z = y + 3$ 的部分, 方向由右手法则确定(即取上侧), 则 Σ 是一个长半轴为 $\sqrt{2}$ 、短半轴为 1 的椭圆。由 Stokes 公式,

$$\int_L 3zdx + 5xd\gamma - 2ydz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 5x & -2y \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} -2dydz + 3dzdx + 5dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(0 - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}\right) dS = 2\pi.$$

(3) 设 Σ 是 L 所围的平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ 的部分, 方向由右手法则确定(即取上侧)。由 Stokes 公式,

$$\int_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

$$= -2 \iint_{\Sigma} dydz + dzdx + dxdy$$

$$= -2 \iint_{\Sigma} \frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}} dS = -2\pi a(a+h).$$

(4) 设 Σ 是 L 所围的平面 $x + y + z = \frac{3}{2}$ 的部分, 方向由右手法则确定(即取上侧), 则 Σ 是一个边长为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的正六边形。由 Stokes 公式,

$$\int_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

$$= -2 \iint_{\Sigma} (y+z)dydz + (z+x)dzdx + (x+y)dxdy$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x+y+z) dS = -2\sqrt{3} \iint_{\Sigma} dS = -\frac{9}{2}.$$

(5) 设 $L_1: \begin{cases} x = a, \\ y = 0, (t: 0 \rightarrow h), \\ z = t, \end{cases}$ 由 Stokes 公式,

$$\int_{L+(-L_1)} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz = 0,$$

于是

$$\int_L (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz = \int_0^h z^2 dz = \frac{1}{3}h^3.$$

(6) 设 Σ 是 L 所围的平面 $x + y + z = 2$ 的部分, 方向由右手法则确定(即取上侧)。设 Σ 在 xy 平面的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$, 则

$$\iint_{D_{xy}} x dx dy = \iint_{D_{xy}} y dx dy = 0。由 Stokes 公式,$$

$$\begin{aligned} & \int_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz \\ &= -2 \iint_{\Sigma} (y + 2z)dy dz + (z + 3x)dz dx + (x + y)dx dy \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (4x + 2y + 3z) dS = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x - y + 6) dS \\ &= -2 \iint_{D_{xy}} (x - y + 6) dx dy = -24。 \end{aligned}$$

13. 设 $f(t)$ 是 \mathbf{R} 上恒为正值的连续函数, L 是逆时针方向的圆周 $(x - a)^2 + (y - a)^2 = 1$ 。证明

$$\int_L xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx \geq 2\pi。$$

证 设 $D = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - a)^2 \leq 1\}$ 。由 Green 公式,

$$\begin{aligned} \int_L xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx &= \iint_D \left[f(y) + \frac{1}{f(x)} \right] dx dy \\ &= \iint_D \left[f(x) + \frac{1}{f(x)} \right] dx dy \geq \iint_D 2 dx dy = 2\pi, \end{aligned}$$

其中第二个等式利用了区域的对称性。

14. 设 D 为两条直线 $y = x, y = 4x$ 和两条双曲线 $xy = 1, xy = 4$ 所围成的区域, $F(u)$ 是具有连续导数的一元函数, 记 $f(u) = F'(u)$ 。证明

$$\int_D \frac{F(xy)}{y} dy = \ln 2 \int_1^4 f(u) du,$$

其中 ∂D 的方向为逆时针方向。

证 由 Green 公式, 得 $\int_D \frac{F(xy)}{y} dy = \iint_D f(xy) dx dy$ 。作变换 $u = xy, v = \frac{y}{x}$, 则此变换将区域 D 变为 $D_{uv} = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 4\}$, 变换的 Jacobi



行列式为 $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2v}$, 于是

$$\iint_D f(xy) dx dy = \iint_{B_{uv}} \frac{f(u)}{2v} du dv = \int_1^4 f(u) du \int_1^4 \frac{1}{2v} dv = \ln 2 \int_1^4 f(u) du,$$

所以

$$\iint_D \frac{F(xy)}{y} dy = \ln 2 \int_1^4 f(u) du.$$

15. 证明: 若 Σ 为封闭曲面, \mathbf{l} 为一固定向量, 则

$$\iint_{\Sigma} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) dS = 0,$$

其中 \mathbf{n} 为曲面 Σ 的单位外法向量。

证 记 $\mathbf{l} = (a, b, c)$, 而 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 则

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}}{\|\mathbf{l}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{l}\|} (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma),$$

于是由 Gauss 公式, 得到

$$\iint_{\Sigma} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) dS = \frac{1}{\|\mathbf{l}\|} \iint_{\Sigma} (a dy dz + b dz dx + c dx dy) = 0.$$

16. 设区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 所围成。证明:

$$\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{r} = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS,$$

其中 \mathbf{n} 为曲面 Σ 的单位外法向量, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

证 由 $\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} = \frac{1}{r} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)$, 可知

$$\iint_{\Sigma} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS = \iint_{\Sigma} \frac{1}{r} (x dy dz + y dz dx + z dx dy).$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{y^2 + z^2}{r^3}, \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) = \frac{x^2 + z^2}{r^3}, \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \right) = \frac{x^2 + y^2}{r^3},$$

由 Gauss 公式, 得到

$$\frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{r}.$$

17. 设函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ 和 $R(x, y, z)$ 在 \mathbf{R}^3 上具有连续偏导数。

且对于任意光滑曲面 Σ , 成立

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = 0.$$

证明: 在 \mathbf{R}^3 上, $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ 。

证 用反证法。若存在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 使得 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \neq 0$ 。则不妨设 $\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0} > 0$ 。由于函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ 和 $R(x, y, z)$ 在 \mathbf{R}^3 上具有连续偏导数, 即 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ 连续, 所以存在 $r, c > 0$, 使得当 $(x, y, z) \in \Omega = \{(x, y, z) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2\}$ 时成立 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} > c > 0$ 。

于是由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned} \iint_D P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &\geq \iiint_D c dx dy dz = \frac{4}{3} \pi r^3 c > 0, \end{aligned}$$

这就与题设矛盾。

18. 设 L 是平面 $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ 上的简单闭曲线, 它所包围的区域 D 的面积为 S , 其中 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 是平面取定方向上的单位向量。证明

$$S = \frac{1}{2} \int_L \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中 L 的定向与平面的定向符合右手定则。

证 由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned} &\int_L \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \iint_D (z \cos \beta - y \cos \gamma) dx + (x \cos \gamma - z \cos \alpha) dy + (y \cos \alpha - x \cos \beta) dz \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z \cos \beta - y \cos \gamma & x \cos \gamma - z \cos \alpha & y \cos \alpha - x \cos \beta \end{vmatrix} dS \\ &= 2 \iint_D (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) dS = 2 \iint_D dS = 2S, \end{aligned}$$

所以

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} \right\}.$$

§ 4 微分形式的外微分

1. 计算下列微分形式的外微分:

$$(1) 1\text{-形式 } \omega = 2xydx + x^2dy;$$

$$(2) 1\text{-形式 } \omega = \cos ydx - \sin xdy;$$

$$(3) 2\text{-形式 } \omega = 6zdx \wedge dy - xydx \wedge dz.$$

$$\text{解 } (1) d\omega = 2ydx \wedge dx + 2xdy \wedge dx + 2xdx \wedge dy = 0.$$

$$(2) d\omega = -\sin ydy \wedge dx - \cos xdx \wedge dy = (\sin y - \cos x)dx \wedge dy.$$

$$(3) d\omega = 6zdx \wedge dy - xdy \wedge dx \wedge dz = (x+6)dx \wedge dy \wedge dz.$$

2. 设 $\omega = a_1(x_1)dx_1 + a_2(x_2)dx_2 + \dots + a_n(x_n)dx_n$ 是 \mathbb{R}^n 上的 1-形式, 求 $d\omega$.

$$\text{解 } d\omega = \sum_{i=1}^n a'_i(x_i)dx_i \wedge dx_i = 0$$

3. 设 $\omega = a_1(x_2, x_3)dx_2 \wedge dx_3 + a_2(x_1, x_3)dx_3 \wedge dx_1 + a_3(x_1, x_2)dx_1 \wedge dx_2$ 是 \mathbb{R}^3 上的 2-形式, 求 $d\omega$.

解 设 $\omega_1 = a_1(x_2, x_3)dx_2 \wedge dx_3$, 由于

$$dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0, dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0,$$

则有

$$d\omega_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0.$$

类似地, 设 $\omega_2 = a_2(x_1, x_3)dx_3 \wedge dx_1$, $\omega_3 = a_3(x_1, x_2)dx_1 \wedge dx_2$, 则

$$d\omega_2 = d\omega_3 = 0,$$

从而

$$d\omega = d\omega_1 + d\omega_2 + d\omega_3 = 0.$$

4. 在 \mathbb{R}^3 上在一个开区域 $\Omega = (a, b) \times (c, d) \times (e, f)$ 上定义了具有连续导数的函数 $a_1(z), a_2(x), a_3(y)$, 试求形如

$$\omega = b_1(y)dx + b_2(z)dy + b_3(x)dz$$

的 1-形式 ω , 使得

$$d\omega = a_1(z)dy \wedge dz + a_2(x)dz \wedge dx + a_3(y)dx \wedge dy.$$

解 由题意, 可得

$$b'_1(y) = -a_3(y), b'_2(z) = -a_1(z), b'_3(x) = -a_2(x),$$

所以

$$\omega = - \left(\int a_3(y) dy \right) dx - \left(\int a_1(z) dz \right) dy - \left(\int a_2(x) dx \right) dz.$$

5. 设 $\omega = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx_i \wedge dx_j$ ($a_{ij} = -a_{ji}, i, j = 1, 2, \dots, n$) 是 \mathbb{R}^n 上的 2-形式, 证明

$$d\omega = \frac{1}{3} \sum_{i,j,k=1}^n \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k.$$

证 因为

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx_i \wedge dx_j = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} dx_j \wedge dx_k = \sum_{k,i=1}^n a_{ki} dx_k \wedge dx_i,$$

所以

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_k \wedge dx_i, \end{aligned}$$

由于

$$dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j = dx_i \wedge dx_k \wedge dx_j = dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k,$$

从而

$$d\omega = \frac{1}{3} \sum_{i,j,k=1}^n \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k.$$

§ 5

场论初步

1. 设 $a = 3i + 20j - 15k$, 对下列数量场 $f(x, y, z)$, 分别计算 $\text{grad } f$ 和 $\text{div}(fa)$:

$$(1) f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$(2) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$(3) f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$\text{解 } (1) \text{grad } f = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(xi + yj + zk),$$

$$\text{div}(fa) = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(3x + 20y - 15z).$$

$$(2) \text{grad } f = 2(xi + yj + zk),$$



$$\operatorname{div}(f\mathbf{a}) = 2(3x + 20y - 15z).$$

$$(3) \operatorname{grad} f = 2(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}(xi + yj + zk),$$

$$\operatorname{div}(f\mathbf{a}) = 2(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}(3x + 20y - 15z).$$

2. 求向量场 $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ 穿过球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的通量, 其中球面在这一部分的定向为上侧。

解 设 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$, 方向取上侧, 则所求通量为

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

$$\text{由于 } \iint_{\Sigma} z^2 dx dy = \iint_{\Sigma} (1 - x^2 - y^2) dx dy = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{8},$$

同理可得

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz = \iint_{\Sigma} y^2 dz dx = \frac{\pi}{8},$$

所以

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \frac{3}{8}\pi.$$

3. 设 $\mathbf{r} = xi + yj + zk, r = |\mathbf{r}|$, 求:

(1) 满足 $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}] = 0$ 的函数 $f(r)$;

(2) 满足 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$ 的函数 $f(r)$ 。

解 (1) 经计算得到

$$\frac{\partial(f(r)x)}{\partial x} = f(r) + f'(r)\frac{x^2}{r},$$

$$\frac{\partial(f(r)y)}{\partial y} = f(r) + f'(r)\frac{y^2}{r},$$

$$\frac{\partial(f(r)z)}{\partial z} = f(r) + f'(r)\frac{z^2}{r},$$

所以

$$\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}] = 3f(r) + rf'(r).$$

由 $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}] = 0$, 得 $3f(r) + rf'(r) = 0$, 解此微分方程, 得到

$$f(r) = \frac{c}{r^3},$$

其中 c 为任意常数。

(2) 由 $\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{x}{r}f'(r), \frac{\partial f(r)}{\partial y} = \frac{y}{r}f'(r), \frac{\partial f(r)}{\partial z} = \frac{z}{r}f'(r)$, 得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{r}f'(r) \right] = \frac{r^2 - x^2}{r^3}f'(r) + \frac{x^2}{r^2}f''(r),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y}{r}f'(r) \right] = \frac{r^2 - y^2}{r^3}f'(r) + \frac{y^2}{r^2}f''(r),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{z}{r} f'(r) \right] = \frac{r^2 - z^2}{r^3} f'(r) + \frac{z^2}{r^2} f''(r),$$

所以

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = \frac{2}{r} f'(r) + f''(r).$$

由 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$, 得 $2f'(r) + rf''(r) = 0$, 解此微分方程, 得到

$$f(r) = \frac{c_1}{r} + c_2$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。

4. 计算

$$\operatorname{grad} \left\{ \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2} \ln(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \right\}$$

其中 \mathbf{c} 是常矢量, $\mathbf{r} = xi + yj + zk$, 且 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} > 0$ 。

解 设 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $u = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2} \ln(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c_1 + \frac{c_1}{2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}, \frac{\partial u}{\partial y} = c_2 + \frac{c_2}{2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}, \frac{\partial u}{\partial z} = c_3 + \frac{c_3}{2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})},$$

所以

$$\operatorname{grad} \left\{ \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2} \ln(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \right\} = \mathbf{c} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}}.$$

5. 计算向量场 $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \left(\arctan \frac{y}{x} \right)$ 沿下列定向曲线的环量:

(1) 圆周 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1, z=0$, 从 z 轴正向看去为逆时针方向;

(2) 圆周 $x^2 + y^2 = 4, z=1$, 从 z 轴正向看去为顺时针方向。

解 经计算, 可得

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \left(\arctan \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y, x, 0),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

它在除去 z 轴的空间上是无旋场。

(1) 设 $L = \{(x, y, z) | (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1, z=0\}$, 从 z 轴正向看去为逆时针方向; $\Sigma = \{(x, y, z) | (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1, z=0\}$, 方向取上侧。由于 z 轴不穿过曲面 Σ , 根据 Stokes 公式,

$$\int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

(2) 令 $x = 2\cos \theta, y = 2\sin \theta, z = 0$, 则

$$\int \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = - \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi.$$

6. 计算向量场 $\mathbf{r} = xyz(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ 在点 $M(1, 3, 2)$ 处的旋度, 以及在这点沿方向 $\mathbf{n} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 的环量面密度。

解 由

$$\operatorname{rot} \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & xyz & xyz \end{vmatrix} = x(z-y)\mathbf{i} + y(x-z)\mathbf{j} + z(y-x)\mathbf{k},$$

可得

$$\operatorname{rot} \mathbf{r}(M) = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

向量场 $\mathbf{r} = xyz(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ 在点 $M(1, 3, 2)$ 沿方向 \mathbf{n} 的环量面密度为

$$\lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{1}{m(\Sigma)} \int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \operatorname{rot} \mathbf{r}(M) \cdot \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{1}{3}.$$

7. 设 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ 向量场, $f(x, y, z)$ 为数量场, 证明: (假设函数 a_x, a_y, a_z 和 f 具有必要的连续偏导数)

- (1) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) = 0$;
- (2) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$;
- (3) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{a}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) = \Delta \mathbf{a}$.

证 (1) $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$.

设 a_x, a_y, a_z 二阶偏导数连续, 则

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = 0.$$

$$(2) \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

(3) 由

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{a}) &= \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{a}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{a}}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{a}}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{a} &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}, \\ \text{rot}(\text{rot } \mathbf{a}) &= \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{k},\end{aligned}$$

得到

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{a}) - \text{rot}(\text{rot } \mathbf{a}) = \Delta a_x \mathbf{i} + \Delta a_y \mathbf{j} + \Delta a_z \mathbf{k} = \Delta \mathbf{a}.$$

8. 位于原点的点电荷 q 产生的静电场的电场强度为 $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (xi + yj + zk)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ϵ_0 为真空介电常数。求 $\text{rot } \mathbf{E}$ 。

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{r^3} \right) &= -\frac{3yz}{r^4} + \frac{3yz}{r^4} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{r^3} \right) &= -\frac{3zx}{r^4} + \frac{3zx}{r^4} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{r^3} \right) &= -\frac{3xy}{r^4} + \frac{3xy}{r^4} = 0,\end{aligned}$$

所以

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (x, y, z) \neq \mathbf{0}.$$

9. 设 \mathbf{a} 为常向量, $\mathbf{r} = xi + yj + zk$, 验证:

- (1) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$;
- (2) $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$;
- (3) $\nabla \cdot ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{a}) = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}$.

$$\begin{aligned}\text{证} \quad (1) \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial(a_y z - a_z y)}{\partial x} + \frac{\partial(a_z x - a_x z)}{\partial y} + \frac{\partial(a_x y - a_y x)}{\partial z} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_y z - a_z y & a_z x - a_x z & a_x y - a_y x \end{vmatrix} \\ &= 2(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = 2\mathbf{a}.\end{aligned}$$

$$(3) \nabla \cdot ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{a}) = \frac{\partial(a_x x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(a_y y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(a_z z^2)}{\partial z} = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}.$$

10. 求全微分 $(x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz$ 的原函数。

解 记 $\mathbf{a} = (x^2 - 2yz)\mathbf{i} + (y^2 - 2xz)\mathbf{j} + (z^2 - 2xy)\mathbf{k}$, 由于

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = -2x = \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} = -2y = \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} = -2z = \frac{\partial a_x}{\partial y},$$

所以向量场 $\mathbf{a} = (x^2 - 2yz)\mathbf{i} + (y^2 - 2xz)\mathbf{j} + (z^2 - 2xy)\mathbf{k}$ 是一个无旋场, 其原函数为

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz + C \\ &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y y^2 dy + \int_0^z (z^2 - 2xy)dz \\ &= \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C. \end{aligned}$$

11. 证明向量场 $\mathbf{a} = \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ ($x > 0$) 是有势场, 并求势函数。

证 当 $x > 0$ 时

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x+y}{x^2+y^2} \right),$$

所以向量场 \mathbf{a} 是有势场, 其势函数为

$$\begin{aligned} V(x, y) &= -U(x, y) = - \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2} + C \\ &= - \int_1^x \frac{dx}{x} - \int_0^y \frac{x+y}{x^2+y^2} dy + C = -\arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + C. \end{aligned}$$

12. 证明向量场 $\mathbf{a} = (2x+y+z)yz\mathbf{i} + (x+2y+z)zx\mathbf{j} + (x+y+2z)xy\mathbf{k}$ 是有势场, 并求出它的势函数。

证 设 $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_z}{\partial y} &= x^2 + 2x(y+z) = \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} = y^2 + 2y(x+z) = \frac{\partial a_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} &= z^2 + 2z(x+y) = \frac{\partial a_x}{\partial y}, \end{aligned}$$

所以向量场 \mathbf{a} 是有势场。设原函数为 $U = U(x, y, z)$, 则

$$\begin{aligned} dU &= (2x+y+z)yzdx + (x+2y+z)zx dy + (x+y+2z)xy dz \\ &= [yzdx^2 + x^2(zdy + ydz)] + [y^2(zdx + xdz) + zx dy^2] \\ &\quad + [z^2(ydx + xdy) + xy dz^2] \\ &= d(x^2yz) + d(xy^2z) + d(xyz^2) = d[xyz(x+y+z)], \end{aligned}$$

所以势函数为

$$V(x, y, z) = -U(x, y, z) = -xyz(x + y + z) + C.$$

13. 验证:

(1) $u = y^3 - 3x^2y$ 为平面 \mathbf{R}^2 上的调和函数;

(2) $u = \ln \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ 为 $\mathbf{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$ 上的调和函数;

(3) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 为 $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ 上的调和函数。

解 (1) 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy, \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y,$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

即 $u = y^3 - 3x^2y$ 为平面 \mathbf{R}^2 上的调和函数。

(2) 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{(y - b)^2 - (x - a)^2}{[(x - a)^2 + (y - b)^2]^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(x - a)^2 - (y - b)^2}{[(x - a)^2 + (y - b)^2]^2}, \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

即 $u = \ln \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ 为 $\mathbf{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$ 上的调和函数。

(3) 记 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{x}{r^4} \frac{x}{r} = -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{r^2} \frac{y}{r} = -\frac{y}{r^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{y}{r^4} \frac{y}{r} = -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{r^2} \frac{z}{r} = -\frac{z}{r^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{z}{r^4} \frac{z}{r} = -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{z^2}{r^5},$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3}{r^3} + 3 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = 0,$$

即 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 为 $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ 上的调和函数。

14. 设 $u(x, y)$ 在 \mathbf{R}^2 上具有二阶连续偏导数, 证明 u 是调和函数的充要条件

件为:对于 \mathbb{R}^2 中任意光滑封闭曲线 C ,成立 $\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿 C 的外法线方向的方向导数。

证 必要性。设 C 是 \mathbb{R}^2 中任意光滑封闭曲线,由

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\tau, y) - \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\tau, x),$$

其中 n, τ 分别是曲线 C 上点 (x, y) 处的单位外法向和单位切向,得到

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

由 Green 公式,得到

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = 0.$$

充分性。如果存在点 $M_0(x_0, y_0)$,使得 $\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} \neq 0$,不妨设其大于零。由于 $u(x, y)$ 具有二阶连续偏导数,所以存在 $\delta > 0$,使得在 $D = O(M_0, \delta)$ 上,成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0,$$

于是

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy > 0,$$

与条件矛盾,所以 u 是调和函数。

15. 设 $u = u(x, y)$ 与 $v = v(x, y)$ 都为平面上的调和函数。令 $F = \sqrt{u^2 + v^2}$ 。证明当 $p \geq 2$ 时,在 $F \neq 0$ 的点成立

$$\Delta(F^p) \geq 0.$$

证 由

$$\frac{\partial F^p}{\partial x} = pF^{p-1} \frac{uu_x + vv_x}{F} = pF^{p-2}(uu_x + vv_x)$$

和

$$\frac{\partial F^p}{\partial y} = pF^{p-1} \frac{uu_y + vv_y}{F} = pF^{p-2}(uu_y + vv_y),$$

得到

$$\frac{\partial^2 (F^p)}{\partial x^2} = p(p-2)F^{p-4}(uu_x + vv_x)^2 + pF^{p-2}(u_x^2 + v_x^2 + uu_{xx} + vv_{xx})$$

和

$$\frac{\partial^2 (F^p)}{\partial y^2} = p(p-2)F^{p-4}(uu_y + vv_y)^2 + pF^{p-2}(u_y^2 + v_y^2 + uu_{yy} + vv_{yy}),$$

所以

$$\Delta(F^p) =$$

$$p(p-2)F^{p-4}[(uu_x+vv_x)^2+(uu_y+vv_y)^2]+pF^{p-2}(u_x^2+v_x^2+u_y^2+v_y^2) \geq 0.$$

16. 设 $B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $\mathbf{F}(x, y, z) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ 为具有连续导数的向量值函数, 且满足

$$\mathbf{F} \Big|_{\partial B} = (0, 0, 0), \nabla \cdot \mathbf{F} \Big|_B = 0.$$

证明: 对于任何 \mathbf{R}^3 上具有连续偏导数的函数 $g(x, y, z)$ 成立

$$\iiint_B \nabla g \cdot \mathbf{F} dx dy dz = 0.$$

证 由 $\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = \nabla g \cdot \mathbf{F} + g \nabla \cdot \mathbf{F}$ 及 Gauss 公式, 得到

$$\begin{aligned} \iiint_B \nabla g \cdot \mathbf{F} dx dy dz &= \iiint_B \nabla \cdot (g\mathbf{F}) dx dy dz - \iiint_B g \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz \\ &= \iint_{\partial B} g \mathbf{F} \cdot dS - \iiint_B g \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz = 0, \end{aligned}$$

最后一个等式利用了条件 $\mathbf{F} \Big|_{\partial B} = (0, 0, 0), \nabla \cdot \mathbf{F} \Big|_B = 0$ 。

17. 设 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$, $u(x, y)$ 在 \bar{D} 上具有连续二阶偏导数。进一步, 设 u 在 \bar{D} 上不恒等于零, 但在 D 的边界 ∂D 上恒为零, 且在 D 上成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u \quad (\lambda \text{ 为常数}).$$

证明

$$\iint_D \|\mathbf{grad} u\|^2 dx dy + \lambda \iint_D u^2 dx dy = 0.$$

证 由 Green 公式,

$$\int_D -u \frac{\partial u}{\partial y} dx + u \frac{\partial u}{\partial x} dy = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dx dy.$$

由于在 ∂D 上 $u(x, y)$ 恒为零, 所以 $\int_D -u \frac{\partial u}{\partial y} dx + u \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0$, 另一方面, 在 D

上成立 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u$, 所以

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \lambda u^2 \right] dx dy = 0,$$

即

$$\iint_D \|\mathbf{grad} u\|^2 dx dy + \lambda \iint_D u^2 dx dy = 0.$$

18. 设区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 所围成, $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上具有二阶连续偏导数, 且在 $\bar{\Omega}$ 上调和, 即满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ 。

(1) 证明

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0,$$

其中 n 为 Σ 的单位外法向量;

(2) 设 $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ 为一定点, 证明

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

其中 $\mathbf{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $r = |\mathbf{r}|$ 。

证 (1) 设 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 由方向导数的计算公式及 Gauss 公式, 得到

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

(2) 由于 $\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r}$, $\frac{\partial u}{\partial n} = (\mathbf{grad} u) \cdot \mathbf{n}$, 于是

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

其中 $P = \frac{(x - x_0)u + r^2 u_z}{r^3}$, $Q = \frac{(y - y_0)u + r^2 u_y}{r^3}$, $R = \frac{(z - z_0)u + r^2 u_z}{r^3}$ 。

经计算得到

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{u}{r^3} - 3 \frac{(x - x_0)^2}{r^5} u + \frac{u_{xx}}{r},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{u}{r^3} - 3 \frac{(y - y_0)^2}{r^5} u + \frac{u_{yy}}{r},$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{u}{r^3} - 3 \frac{(z - z_0)^2}{r^5} u + \frac{u_{zz}}{r},$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

现在取一个以 (x_0, y_0, z_0) 为中心, $\delta > 0$ 为半径的球面 S_0 , 使得 $S_0 \subset \Omega$, 并设 n 为 S_0 的单位外法向量, 然后在 Σ 与 S_0 所围的区域 Ω' 上应用 Gauss 公式, 得到

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma + (-S_0)} \left(u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = 0,$$

从而

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \left(u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

注意, $r = \delta$ 为常数, $\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 1$ 与 $\iint_{S_0} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$, 则

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \frac{1}{4\pi \delta^2} \iint_{S_0} u(x, y, z) dS,$$

利用积分中值定理并令 $\delta \rightarrow 0$, 即得

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

第十五章 含参变量积分

§ 1 含参变量的常义积分

1. 求下列极限:

$$(1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}.$$

解 (1) 由积分中值定理, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} + \int_1^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} + \frac{\alpha}{1+\xi^2+\alpha^2} \quad (\xi \text{ 在 } 1 \text{ 与 } 1+\alpha \text{ 之间}), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{1+\xi^2+\alpha^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(2) 由连续性定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x} = - \int_0^1 \frac{de^{-x}}{1 + e^{-x}} = \ln \frac{2e}{1 + e}.$$

2. 设 $f(x, y)$ 当 y 固定时, 关于 x 在 $[a, b]$ 上连续, 且当 $y \rightarrow y_0^-$ 时, 它关于 y 单调增加地趋于连续函数 $\varphi(x)$, 证明

$$\lim_{y \rightarrow y_0^-} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

证 若能证明 $\lim_{y \rightarrow y_0^-} f(x, y) = \varphi(x)$ 关于 $x \in [a, b]$ 是一致的, 即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall y \in (y_0 - \delta, y_0)$, $\forall x \in [a, b]$: $|f(x, y) - \varphi(x)| < \epsilon$; 则

$$\left| \int_a^b (f(x, y) - \varphi(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| dx < (b - a)\epsilon,$$

就有

$$\lim_{y \rightarrow y_0^-} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

以下用反证法证明 $\lim_{y \rightarrow y_0^-} f(x, y) = \varphi(x)$ 关于 $x \in [a, b]$ 是一致的。

若不然, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in (y_0 - \delta, y_0), \exists x \in [a, b]:$

$$|f(x, y) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0.$$

依次取 $\delta_1 = 1, \exists y_1 \in (y_0 - \delta_1, y_0), \exists x_1 \in [a, b]: |f(x_1, y_1) - \varphi(x_1)| \geq \varepsilon_0;$

$$\delta_2 = \min \left\{ \frac{1}{2}, y_0 - y_1 \right\}, \exists y_2 \in (y_0 - \delta_2, y_0), \exists x_2 \in [a, b], |f(x_2, y_2) - \varphi(x_2)| \geq \varepsilon_0;$$

.....

$$\delta_n = \min \left\{ \frac{1}{n}, y_0 - y_{n-1} \right\}, \exists y_n \in (y_0 - \delta_n, y_0), \exists x_n \in [a, b], |f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \geq \varepsilon_0;$$

.....

由此得到两列数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 。由于 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 有界, 由 Bolzano-Weierstrass 定理, 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$, 为叙述方便, 仍记这两个子列为 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 其中 $\{y_n\}$ 是递增的, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ 。设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 。

由 $f(\xi, y) \rightarrow \varphi(\xi) (y \rightarrow y_0^-)$, 可知 $\exists \delta > 0, \forall y (-\delta < y - y_0 < 0):$

$$|f(\xi, y) - \varphi(\xi)| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

注意, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$, 取足够大的 K 使得 $-\delta < y_K - y_0 < 0$, 从而

$$|f(\xi, y_K) - \varphi(\xi)| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

又 $f(x, y_K) - \varphi(x)$ 在 $x = \xi$ 点连续以及 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$|(f(x_n, y_K) - \varphi(x_n)) - (f(\xi, y_K) - \varphi(\xi))| < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

于是

$$|f(x_n, y_K) - \varphi(x_n)| < \varepsilon_0.$$

但是对固定的 x_n , 当 $y \rightarrow y_0^-$ 时, $f(x_n, y)$ 关于 y 单调递增地趋于 $\varphi(x_n)$, 所以当 $n > \max\{N, K\}$ 时, 成立

$$|f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \leq |f(x_n, y_K) - \varphi(x_n)| < \varepsilon_0,$$

这与 $|f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \geq \varepsilon_0 (n = 1, 2, \dots)$ 矛盾。

3. 用交换积分顺序的方法计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx (b > a > 0);$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \sin x}{1-a \sin x \sin x} \frac{dx}{\sin x} (1>a>0)。$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx &= \int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) dx \int_a^b x^y dy \\ &= \int_a^b dy \int_0^1 x^y \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) dx, \\ \int_0^1 x^y \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) dx &= \frac{1}{y+1} x^{y+1} \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{y+1} \int_0^1 x^y \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{y+1} \int_0^1 x^y \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{(y+1)^2} x^{y+1} \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{(y+1)^2} \int_0^1 x^y \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) dx, \end{aligned}$$

于是

$$\int_0^1 x^y \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{1+(y+1)^2},$$

所以

$$\int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_a^b \frac{dy}{1+(y+1)^2} = \arctan(1+b) - \arctan(1+a)。$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \sin x}{1-a \sin x \sin x} \frac{dx}{\sin x} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^a \frac{dy}{1-y^2 \sin^2 x} \\ &= 2 \int_0^a dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-y^2 \sin^2 x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-y^2 \sin^2 x} &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \cot x}{\cot^2 x + 1 - y^2} = - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \arctan \frac{\cot x}{\sqrt{1-y^2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2 \sqrt{1-y^2}}, \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \sin x}{1-a \sin x \sin x} \frac{dx}{\sin x} = \pi \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi \arcsin a。$$

4. 求下列函数的导数:

$$(1) I(y) = \int_y^{y^2} e^{-x^2} dx;$$

$$(2) I(y) = \int_y^{y^2} \frac{\cos xy}{x} dx;$$

$$(3) F(t) = \int_0^t dx \int_{x-t}^{x+t} \sin(x^2 + y^2 - t^2) dy。$$

解 (1) $I'(y) = 2ye^{-y^5} - e^{-y^3} - \int_y^2 x^2 e^{-x^2} dx$ 。

(2) $I'(y) = \frac{2\cos y^3 - \cos y^2}{y} - \int_y^2 \sin(xy) dx = \frac{3\cos y^3 - 2\cos y^2}{y}$ 。

(3) 设 $g(x, t) = \int_{x-t}^{x+t} \sin(x^2 + y^2 - t^2) dy$, 则

$$g_t(x, t) = -2t \int_{x-t}^{x+t} \cos(x^2 + y^2 - t^2) dy + \sin(2x^2 + 2xt) + \sin(2x^2 - 2xt),$$

所以

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^{t^2} g_t(x, t) dx + 2tg(t^2, t) \\ &= -2t \int_0^{t^2} dx \int_{x-t}^{x+t} \cos(x^2 + y^2 - t^2) dy + 2 \int_0^{t^2} \sin 2x^2 \cos 2xt dx \\ &\quad + 2t \int_{t^2-t}^{t^2+t} \sin(t^4 - t^2 + y^2) dy. \end{aligned}$$

5. 设 $I(y) = \int_0^y (x+y)f(x) dx$, 其中 f 为可微函数, 求 $I''(y)$ 。

解 $I'(y) = 2yf(y) + \int_0^y f(x) dx$,

$$I''(y) = 3f(y) + 2yf'(y)$$

6. 设 $F(y) = \int_a^b f(x) |y-x| dx$ ($a < b$), 其中 $f(x)$ 为可微函数, 求 $F''(y)$ 。

解 当 $y \leq a$ 时, $F(y) = \int_a^b f(x)(y-x) dx$, 于是

$$F'(y) = - \int_a^b f(x) dx, F''(y) = 0;$$

当 $y \geq b$ 时, $F(y) = \int_a^b f(x)(y-x) dx$, 于是

$$F'(y) = \int_a^b f(x) dx, F''(y) = 0;$$

当 $a < y < b$ 时, $F(y) = \int_a^y f(x)(y-x) dx + \int_y^b f(x)(x-y) dx$, 于是

$$F'(y) = \int_a^y f(x) dx - \int_y^b f(x) dx, F''(y) = 2f(y)$$

7. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $F(x)$ 是可导的, 证明函数

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(y) dy$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

以及初始条件 $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x)$ 。

证 直接计算, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} [-af'(x-at) + af'(x+at)] + \frac{1}{2a} [aF(x+at) + aF(x-at)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{2} [f''(x-at) + f''(x+at)] + \frac{a}{2} [F'(x+at) - F'(x-at)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} [f'(x-at) + f'(x+at)] + \frac{1}{2a} [F(x+at) - F(x-at)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} [f''(x-at) + f''(x+at)] + \frac{1}{2a} [F'(x+at) - F'(x-at)],$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

且显然成立 $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x)$ 。

8. 利用积分号下求导法计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx \quad (a > 1);$$

$$(2) \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx \quad (|\alpha| < 1);$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx.$$

解 (1) 设 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx$, 则

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 \cot^2 x + a^2 - 1} d\cot x \\ &= - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \arctan \frac{a \cot x}{\sqrt{a^2 - 1}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}, \end{aligned}$$

于是

$$I(a) = \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) + C.$$

令 $a \rightarrow 1+$, 则

$$C = I(1) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = -\pi \ln 2,$$

所以

$$I(a) = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2}.$$

(2) 设 $I(a) = \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$, 则 $I(0) = 0$ 。设 $a \neq 0$, 由于

$$I'(a) = \int_0^\pi \frac{2a - 2\cos x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx,$$

作变换 $t = \tan \frac{x}{2}$, 得到

$$\begin{aligned} I'(a) &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{a - 1 + (a + 1)t^2}{[(1 - a)^2 + (1 + a)^2 t^2](1 + t^2)} dt \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} + 2 \left(a - \frac{1}{a} \right) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 - a)^2 + (1 + a)^2 t^2} \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} - \frac{2}{a} \int_0^{+\infty} \frac{d\left(\frac{1+a}{1-a}t\right)}{1 + \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2 t^2} = 0, \end{aligned}$$

所以 $I(a) = C$, 再由 $I(0) = 0$, 得到

$$I(a) = 0 \quad (|a| < 1).$$

(3) 设 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$, 且不妨设 $a > 0, b > 0$ 。

当 $a = b$ 时, $I(a) = \pi \ln |a|$ 。以下设 $a \neq b$ 。

由于

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx,$$

记

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx, B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx,$$

则

$$a^2 A + b^2 B = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} A + B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt \tan x}{a^2 \tan^2 x + b^2} \\ &= \frac{1}{ab} \arctan \frac{a}{b} \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2ab}. \end{aligned}$$

由此解得

$$A = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a(a + b)},$$



于是

$$I'(a) = \frac{\pi}{a+b},$$

积分后得到

$$I(a) = \pi \ln(a+b) + C.$$

由 $I(0) = \pi \ln \frac{b}{2}$, 得到 $C = -\pi \ln 2$, 从而 $I(a) = \pi \ln \frac{a+b}{2}$, 或者一般地有

$$I(a) = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}.$$

9. 证明: 第二类椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \quad (0 < k < 1)$$

满足微分方程

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1 - k^2} = 0.$$

证 直接计算, 有

$$\begin{aligned} E'(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-k \sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt, \\ E''(k) &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin^4 t}{(1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{(1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{k^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{k^2 (1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} dt, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} E''(k) &= \frac{1}{k^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} - \frac{1}{k^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} d\sin t \\ &= \frac{1}{k^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} - \frac{1}{k^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t d \frac{\sin t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \\ &= \frac{1}{k^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} - \frac{1}{k^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1 - k^2} &= \frac{1}{k^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} - \frac{1}{k^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(k^2 - 1) \sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt + \frac{E(k)}{1 - k^2} \\ &= \frac{1}{k^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} - \frac{1}{k^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(k^2 - 1) \sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt + \frac{E(k)}{1 - k^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt + \frac{E(k)}{1 - k^2} = 0.$$

10. 设函数 $f(u, v)$ 在 \mathbb{R}^2 上具有二阶连续偏导数。证明: 函数

$$w(x, y, z) = \int_0^{2\pi} f(x + z \cos \varphi, y + z \sin \varphi) d\varphi$$

满足偏微分方程

$$z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

证 由直接计算, 可得

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \int_0^{2\pi} f_u d\varphi, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \int_0^{2\pi} f_{uu} d\varphi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \int_0^{2\pi} f_v d\varphi, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \int_0^{2\pi} f_{vv} d\varphi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \int_0^{2\pi} (f_u \cos \varphi + f_v \sin \varphi) d\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \int_0^{2\pi} (f_{uu} \cos^2 \varphi + f_{uv} \sin 2\varphi + f_{vv} \sin^2 \varphi) d\varphi,$$

于是

$$z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = z \int_0^{2\pi} (f_{uu} \sin^2 \varphi - f_{uv} \sin 2\varphi + f_{vv} \cos^2 \varphi) d\varphi.$$

另一方面, 由分部积分可得

$$\int_0^{2\pi} f_u \cos \varphi d\varphi = - \int_0^{2\pi} [f_{uu} (-z \sin \varphi) + f_{uv} z \cos \varphi] \sin \varphi d\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi} f_v \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} [f_{vu} (-z \sin \varphi) + f_{vv} z \cos \varphi] \cos \varphi d\varphi,$$

所以

$$z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

11. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$ 。研究函数

$$I(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx$$

的连续性。

解 设 $y_0 \neq 0$, 由于 $\frac{yf(x)}{x^2 + y^2}$ 在 $[0, 1] \times \left[y_0 - \frac{|y_0|}{2}, y_0 + \frac{|y_0|}{2} \right]$ 上连续, 可知

$$I(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx \text{ 在 } y_0 \neq 0 \text{ 处连续。}$$

设 $y_0 = 0$, 则 $I(y_0) = I(0) = 0$ 。由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 所



以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值 $m > 0$, 当 $y > 0$ 时, 成立 $\frac{yf(x)}{x^2 + y^2} \geq \frac{my}{x^2 + y^2}$, 于是

$$I(y) \geq m \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx = m \arctan \frac{1}{y},$$

由 $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(m \arctan \frac{1}{y} \right) = \frac{m\pi}{2} > 0$, 可知 $\lim_{y \rightarrow 0^+} I(y) \neq 0 = I(0)$, 即 $I(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx$ 在 $y_0 = 0$ 处不连续。

注 在本题中可证明 $\lim_{y \rightarrow 0^+} I(y) = \frac{\pi}{2} f(0)$ 与 $\lim_{y \rightarrow 0^-} I(y) = -\frac{\pi}{2} f(0)$, 其中 $f(0) \neq 0$, 由此也说明了 $I(y)$ 在 $y = 0$ 点不连续。证明如下:

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\eta > 0$, 使得当 $0 < x < \eta$ 时, $|f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{\pi}$, 则

$$\left| \int_0^\eta \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx - \int_0^\eta \frac{yf(0)}{x^2 + y^2} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对固定的 $\eta > 0$, 取 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |y| < \delta$ 时, $\left| \int_\eta^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$,

于是

$$\left| \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx - \int_0^\eta \frac{yf(0)}{x^2 + y^2} dx \right| < \varepsilon.$$

分别令 $y \rightarrow 0^+$ 与 $y \rightarrow 0^-$, 由

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^\eta \frac{yf(0)}{x^2 + y^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0), \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_0^\eta \frac{yf(0)}{x^2 + y^2} dx = -\frac{\pi}{2} f(0)$$

和 ε 的任意性, 即可得到 $\lim_{y \rightarrow 0^+} I(y) = \frac{\pi}{2} f(0)$ 与 $\lim_{y \rightarrow 0^-} I(y) = -\frac{\pi}{2} f(0)$ 。

§ 2 含参变量的反常积分

1. 证明下列含参变量反常积分在指定区间上一致收敛:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + y^2} dx, y \geq a > 0;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x + a} e^{-ax} dx, 0 \leq a \leq a_0;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} x \sin x^4 \cos ax dx, a \leq a \leq b.$$

解 (1) 因为 $\left| \frac{\cos xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{x^2 + a^2}$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx$ 收敛, 所以由 Weierstrass 判别法, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + y^2} dx$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛。

(2) $\left| \int_0^A \sin 2x dx \right| \leq 1$, 即 $\int_0^A \sin 2x dx$ 关于 $\alpha \in [0, \alpha_0]$ 一致有界; $\frac{e^{-\alpha x}}{x + \alpha}$ 关于 x 单调, 且由 $\left| \frac{e^{-\alpha x}}{x + \alpha} \right| \leq \frac{1}{x}$, 可知当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{e^{-\alpha x}}{x + \alpha}$ 关于 $\alpha \in [0, \alpha_0]$ 一致趋于零。于是由 Dirichlet 判别法, 可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x + \alpha} e^{-\alpha x} dx$ 在 $\alpha \in [0, \alpha_0]$ 上一致收敛。

(3) 由分部积分法,

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} x \sin x^4 \cos ax dx &= -\frac{1}{4} \int_A^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2} d(\cos x^4) \\ &= -\frac{\cos ax \cos x^4}{4x^2} \Big|_A^{+\infty} - \frac{1}{4} \int_A^{+\infty} \frac{a \sin ax \cos x^4}{x^2} dx - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos ax \cos x^4}{x^3} dx, \end{aligned}$$

其中

$$\left| \frac{\cos ax \cos x^4}{x^2} \right|_A^{+\infty} \leq \frac{1}{A^2};$$

再由 $\left| \frac{a \sin ax \cos x^4}{x^2} \right| \leq \frac{\max(|a|, |b|)}{x^2}$ 及 $\left| \frac{\cos ax \cos x^4}{x^3} \right| \leq \frac{1}{x^3}$, 可得到

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{a \sin ax \cos x^4}{x^2} dx \right| \leq \max(|a|, |b|) \int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{\max(|a|, |b|)}{A}$$

与

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\cos ax \cos x^4}{x^3} dx \right| \leq \int_A^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2A^2}.$$

当 $A \rightarrow +\infty$ 时, 上述三式关于 α 在 $[a, b]$ 上一致趋于零, 所以原积分关于 α 在 $[a, b]$ 上一致收敛。

2. 说明下列含参变量反常积分在指定区间上非一致收敛:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{\alpha(1+x^2)} dx, 0 < \alpha < +\infty;$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin \frac{1}{x} dx, 0 < \alpha < 2.$$

解 (1) 取 $\epsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{18} > 0$, $\forall A_0 > 0$, 取 $A' = \frac{n\pi}{4} > A_0$, $A'' = \frac{3n\pi}{4}$, $\alpha = \alpha_n = \frac{1}{n}$,

则当 n 充分大时,

$$\left| \int_{A'}^{A''} \frac{x \sin \alpha x}{\alpha(1+x^2)} dx \right| = \int_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3n\pi}{4}} \frac{x \sin \alpha_n x}{\alpha_n(1+x^2)} dx \geq \frac{\sqrt{2} n^2 \pi^2}{16 \left(1 + \left(\frac{3n\pi}{4} \right)^2 \right)} > \frac{\sqrt{2}}{18} = \epsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则, $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{\alpha(1+x^2)} dx$ 在 $\alpha \in (0, +\infty)$ 上不一致收敛。

(2) 作变量代换 $x = \frac{1}{t}$, 则



$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2-\alpha}} \sin \frac{1}{t} dt.$$

取 $\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi > 0$, $\forall A_0 > 0$, 取 $A' = 2n\pi + \frac{\pi}{4} > A_0$, $A'' = 2n\pi + \frac{3\pi}{4}$, $\alpha = \alpha_n = 2 - \frac{1}{n}$, 则当 n 充分大时,

$$\left| \int_{A'}^{A''} \frac{1}{t^{2-\alpha}} \sin t dt \right| = \int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \frac{1}{t^{2-\alpha}} \sin t dt \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{4 \left(2n\pi + \frac{3\pi}{4} \right)^{\frac{1}{n}}} > \frac{\sqrt{2}}{8}\pi = \varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则, $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin \frac{1}{x} dx$ 在 $\alpha \in (0, 2)$ 上不一致收敛。

3. 设 $f(t)$ 在 $t > 0$ 上连续, 反常积分 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 当 $\lambda = a$ 与 $\lambda = b$ 时都收敛, 证明 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 关于 λ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。

证 将反常积分 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 写成

$$\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt = \int_0^1 t^{\lambda-a} [t^a f(t)] dt + \int_1^{+\infty} t^{\lambda-b} [t^b f(t)] dt.$$

对于 $\int_0^1 t^{\lambda-a} [t^a f(t)] dt$, 因为 $\int_0^1 t^a f(t) dt$ 收敛, 从而关于 λ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, $t^{\lambda-a}$ 是 t 的单调函数, 且 $|t^{\lambda-a}| \leq 1$, 即 $t^{\lambda-a}$ 在 $t \in [0, 1]$ 上关于 $\lambda \in [a, b]$ 一致有界, 由 Abel 判别法, 可知 $\int_0^1 t^{\lambda-a} [t^a f(t)] dt$ 关于 λ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。

对于 $\int_1^{+\infty} t^{\lambda-b} [t^b f(t)] dt$, 因为 $\int_1^{+\infty} t^b f(t) dt$ 收敛, 从而关于 λ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, $t^{\lambda-b}$ 是 t 的单调函数, 且 $|t^{\lambda-b}| \leq 1$, 即 $t^{\lambda-b}$ 在 $t \in [1, +\infty)$ 上关于 $\lambda \in [a, b]$ 一致有界, 由 Abel 判别法, 可知 $\int_1^{+\infty} t^{\lambda-b} [t^b f(t)] dt$ 关于 λ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。

所以 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 关于 λ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。

4. 讨论下列含参变量反常积分的一致收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x}} dx, \text{ 在 } y \geq y_0 > 0;$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx, \text{ 在 (i) } a < a < b; \text{ (ii) } -\infty < a < +\infty;$$

$$(3) \int_0^1 x^{p-1} \ln^2 x dx, \text{ 在 (i) } p \geq p_0 > 0; \text{ (ii) } p > 0;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx, \text{ 在 (i) } \alpha \geq \alpha_0 > 0; \text{ (ii) } \alpha > 0.$$

$$\text{解 (1)} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\cos xy}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x}} dx.$$

对于 $\int_0^1 \frac{\cos xy}{\sqrt{x}} dx$, 由于 $\left| \frac{\cos xy}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法,

可知 $\int_0^1 \frac{\cos xy}{\sqrt{x}} dx$ 关于 y 一致收敛。

对于 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x}} dx$, 由于 $\left| \int_1^A \cos xy dx \right| \leq \frac{2}{y_0}$, 即 $\int_1^A \cos xy dx$ 关于 $y \in [y_0, +\infty)$ 一致有界, 以及 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 单调, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 关于 $y \in [y_0, +\infty)$ 一致趋于零, 由 Dirichlet 判别法, 可知 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x}} dx$ 关于 $y \in [y_0, +\infty)$ 一致收敛,

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x}} dx$ 关于 $y \in [y_0, +\infty)$ 一致收敛。

(2) (i) 当 $a < \alpha < b$, 取 $A > 0$, 使 $(a, b) \subset [-A, A]$, 则 $\forall |x| \geq A$, $|e^{-(x-a)^2}| \leq e^{-(|x|-A)^2}$, 而 $\int_{-\infty}^{-A} e^{-(|x|-A)^2} dx$ 与 $\int_A^{+\infty} e^{-(|x|-A)^2} dx$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法的证明, 可知反常积分 $\int_{-\infty}^0 e^{-(x-a)^2} dx$ 与 $\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 在 $\alpha \in (a, b)$ 上一致收敛。所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 在 $\alpha \in (a, b)$ 上一致收敛。

(ii) 当 $-\infty < \alpha < +\infty$, 对于 $\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$, 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{e} > 0$, $\forall A_0 > 0$, 取 $A' = n > A_0$, $A'' = n+1$, $\alpha = \alpha_n = n$, 则当 n 充分大时,

$$\left| \int_{A'}^{A''} e^{-(x-a)^2} dx \right| = \int_n^{n+1} e^{-(x-a_n)^2} dx = \int_0^1 e^{-t^2} dt > \frac{1}{e} = \varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则, $\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 在 $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛。同理 $\int_{-\infty}^0 e^{-(x-a)^2} dx$ 在 $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ 上也不一致收敛。所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 在 $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛。

(3) (i) 当 $p \geq p_0 > 0$, $|x^{p-1} \ln^2 x| \leq x^{p_0-1} \ln^2 x$, 而 $\int_0^1 x^{p_0-1} \ln^2 x dx$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $\int_0^1 x^{p-1} \ln^2 x dx$ 在 $p \in [p_0, +\infty)$ 上一致收敛。



(ii) 当 $p > 0$, 取 $p_n = \frac{1}{n} > 0$, 由于

$$\left| \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} x^{p_n-1} \ln^2 x dx \right| \geq \ln^2 \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}-1} dx = n \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} - \sqrt[n]{\frac{1}{2n}} \right) \ln^2 \frac{1}{n} \rightarrow +\infty (p \rightarrow 0+),$$

由 Cauchy 收敛准则, 可知 $\int_0^1 x^{p-1} \ln^2 x dx$ 在 $p \in (0, +\infty)$ 上不一致收敛。

(4) (i) 当 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$, $|e^{-\alpha x} \sin x| \leq e^{-\alpha_0 x}$ ($x \geq 0$), 而 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} dx$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$ 在 $\alpha \in [\alpha_0, +\infty)$ 上一致收敛。

(ii) 当 $\alpha > 0$, 取 $\epsilon_0 = 2e^{-\alpha}$, $\forall A > 0$, 取 $A' = n\pi > A$, $A'' = (n+1)\pi$, $\alpha = \alpha_n = \frac{1}{n+1}$, 则当 n 充分大时,

$$\left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\alpha_n x} \sin x dx \right| \geq 2e^{-\alpha} = \epsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$ 在 $\alpha \in (0, +\infty)$ 上不一致收敛。

5. 证明函数 $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。

证 任取 $[a, b] \subset (0, +\infty)$, $\left| \int_1^A \cos x dx \right| \leq 2$, 即 $\int_1^A \cos x dx$ 关于 $\alpha \in [a, b]$ 一致有界; $\frac{1}{x^\alpha}$ 关于 x 单调, 且 $\forall \alpha \in [a, b]$ 成立 $\frac{1}{x^a} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^b}$, 所以当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x^\alpha}$ 关于 $\alpha \in [a, b]$ 一致趋于零。由 Dirichlet 判别法, 可知 $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ 在 $\alpha \in [a, b]$ 上一致收敛, 从而 $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ 在 $[a, b]$ 上连续, 由 a, b 的任意性, 即知 $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。

6. 确定函数 $F(y) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^y (\pi - x)^{2-y}} dx$ 的连续范围。

解 函数 $F(y) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^y (\pi - x)^{2-y}} dx$ 的定义域为 $(0, 2)$ 。下面我们证明 $F(y) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^y (\pi - x)^{2-y}} dx$ 在 $(0, 2)$ 上内闭一致收敛, 即 $\forall \eta > 0$, $F(y) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^y (\pi - x)^{2-y}} dx$ 在 $y \in [\eta, 2 - \eta]$ 上一致收敛, 从而得到 $F(y)$ 在 $(0, 2)$ 上的连

续性。

由于积分有两个奇点, 所以将 $F(y) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}} dx$ 写成 $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}} dx = F_1(y) + F_2(y)$ 。

当 $x \in (0, 1), y \leq 2 - \eta$ 时, $\left| \frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}} \right| \leq \frac{\sin x}{x^{2-\eta}}$, 而 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{2-\eta}} dx$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法的证明, 可知反常积分 $F_1(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}} dx$ 在 $y \in [\eta, 2 - \eta]$ 上一致收敛。

当 $x \in (\pi - 1, \pi), y \geq \eta$ 时, $\left| \frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}} \right| \leq \frac{\sin x}{(\pi-x)^{2-\eta}}$, 而 $\int_{\pi-1}^\pi \frac{\sin x}{(\pi-x)^{2-\eta}} dx$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法的证明, 可知反常积分 $F_2(y) = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}} dx$ 在 $y \in [\eta, 2 - \eta]$ 上一致收敛。

所以 $F(y) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}} dx$ 在 $y \in [\eta, 2 - \eta]$ 上一致收敛。

7. 设 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 存在。证明 $f(x)$ 的 Laplace 变换 $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续。

证 由于 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛即关于 s 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛, e^{-sx} 关于 x 单调, 且 $|e^{-sx}| \leq 1$, 即 e^{-sx} 在 $x \in [0, +\infty), s \in [0, +\infty)$ 上一致有界, 由 Abel 判别法, $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$ 在 $s \in [0, +\infty)$ 上一致收敛, 从而 $F(s)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续。

8. 证明函数 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x+t)^2} dx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可微。

证 首先反常积分 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x+t)^2} dx$ 对任意 $t \in (-\infty, +\infty)$ 收敛。其次有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\cos x}{1 + (x+t)^2} \right] dx = - \int_0^{+\infty} \frac{2(x+t)}{[1 + (x+t)^2]^2} \cos x dx.$$

任取 $[a, b], \forall A > 0$, $\left| \int_0^A \cos x dx \right| \leq 2$, 即 $\int_0^A \cos x dx$ 关于 $t \in [a, b]$ 一致有界; 记 $c = \max\{|a|, |b|\}$, 当 $x > c, t \in [a, b]$ 时, $\frac{2(x+t)}{[1 + (x+t)^2]^2}$ 关于 x 单调,

且 $\left| \frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2} \right| \leq \frac{1}{1+(x-c)^2}$, 即当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}$ 关于 $t \in [a, b]$ 一致趋于零。由 Dirichlet 判别法, 可知 $-\int_0^{+\infty} \frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2} \cos x dx$ 在 $t \in [a, b]$ 上一致收敛, 所以 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+t)^2} dx$ 在 $t \in [a, b]$ 上可微, 且有

$$I'(t) = - \int_0^{+\infty} \frac{2(x+t) \cos x}{[1+(x+t)^2]^2} dx.$$

由 a, b 的任意性, 即知 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+t)^2} dx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可微。

9. 利用 $\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$, 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ ($b > a > 0$)。

解 当 $y \in [a, b]$ 时, $|e^{-xy}| \leq e^{-ay}$, 而 $\int_0^{+\infty} e^{-ay} dx$ 收敛, 所以 $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ 关于 $y \in [a, b]$ 一致收敛, 由积分次序交换定理,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy} dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a}.$$

10. 利用 $\frac{\sin bx - \sin ax}{x} = \int_a^b \cos xy dy$, 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-px} \frac{\sin bx - \sin ax}{x} dx$ ($p > 0, b > a > 0$)。

解 当 $y \in [a, b]$ 时, $\left| \int_0^A \cos xy dx \right| \leq \frac{2}{a}$, 即 $\int_0^A \cos xy dx$ 关于 $y \in [a, b]$ 一致有界; e^{-px} 关于 x 单调, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, e^{-px} 关于 y 一致趋于零。由 Dirichlet 判别法, $\int_0^{+\infty} e^{-px} \cos xy dx$ 关于 $y \in [a, b]$ 一致收敛, 由积分次序交换定理,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-px} \frac{\sin bx - \sin ax}{x} dx &= \int_0^{+\infty} e^{-px} dx \int_a^b \cos(xy) dy \\ &= \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-px} \cos(xy) dx. \end{aligned}$$

利用分部积分,

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \cos(xy) dx = \frac{p}{p^2 + y^2},$$

于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \frac{\sin bx - \sin ax}{x} dx = \int_a^b \frac{p}{p^2 + y^2} dy = \arctan \frac{b}{p} - \arctan \frac{a}{p}.$$

11. 利用 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ ($a > 0$), 计算 $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}$ (n 为正整

数)。

解 由于 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2}$ 对一切 $a \in (0, +\infty)$ 收敛, $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{a+x^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{-dx}{(a+x^2)^2}$ 关于 a 在 $(0, +\infty)$ 上内闭一致收敛, 因此 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2}$ 在 $a \in (0, +\infty)$ 上可微且成立

$$\frac{d}{da} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{a+x^2} \right) dx = - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^2},$$

所以

$$I_2 = - \frac{d}{da} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}} \right).$$

同理上述积分仍可在积分号下求导, 并可不断进行下去。由

$$\frac{d^n}{da^n} (a^{-\frac{1}{2}}) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n} a^{-\frac{1}{2} - n}$$

与

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n} \left(\frac{1}{a+x^2} \right) = \frac{(-1)^n n!}{(a+x^2)^{n+1}},$$

即可得到

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!} a^{-\frac{2n+1}{2}} \pi.$$

12. 计算 $g(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx$ 。

$$\text{解 } g(a) = \int_1^{+\infty} \arctan ax d\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a - \int_1^{+\infty} \frac{\alpha \sqrt{x^2-1}}{x(1+\alpha^2 x^2)} dx.$$

在最后一个积分中, 令 $t = \sqrt{x^2-1}$, 则

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a - \int_0^{+\infty} \frac{\alpha t^2}{(1+t^2)(1+\alpha^2 t^2)} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a - \alpha \int_0^{+\infty} \left(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2 t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \cdot [|\alpha| + 1 - \sqrt{1+\alpha^2}]. \end{aligned}$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a, b > 0).$$

证 设 $A'' > A' > 0$,

$$\int_{A'}^{A''} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{A'}^{A''} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{A'}^{A''} \frac{f(bx)}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{aA'}^{aA''} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{bA'}^{bA''} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{aA'}^{bA'} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{aA'}^{bA''} \frac{f(bx)}{x} dx \\
 &= [f(\xi_1) - f(\xi_2)] \ln \frac{b}{a},
 \end{aligned}$$

最后一个等式利用了积分中值定理, 其中 ξ_1 在 aA' 与 bA' 之间, ξ_2 在 aA'' 与 bA'' 之间。令 $A' \rightarrow +0, A'' \rightarrow +\infty$, 则 $\xi_1 \rightarrow 0, \xi_2 \rightarrow +\infty$, 由 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

14. (1) 利用 $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 推出 $L(c) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c} (c > 0)$;

(2) 利用积分号下求导的方法引出 $\frac{dL}{dc} = -2L$, 以此推出与(1)同样的结果,

并计算 $\int_0^{+\infty} e^{-ay^2 - \frac{b}{y^2}} dy (a > 0, b > 0)$ 。

解 (1) 令 $y = \frac{c}{t}$, 则

$$\begin{aligned}
 L(c) &= \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} dy = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{c^2}{t^2}} \frac{c}{t^2} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} \frac{c}{y^2} dy,
 \end{aligned}$$

于是

$$2L(c) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} \left(1 + \frac{c}{y^2}\right) dy = \int_0^{+\infty} e^{-\left(y - \frac{c}{y}\right)^2 - 2c} d\left(y - \frac{c}{y}\right).$$

再令 $y - \frac{c}{y} = x$, 得到

$$L(c) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} dy = \frac{e^{-2c}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c}.$$

(2) 利用积分号下求导,

$$\frac{dL}{dc} = -2c \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} dy = -2L,$$

于是

$$\frac{dL}{L} = -2dc,$$

对等式两边积分, 得到

$$L(c) = L_0 e^{-2c},$$

注意到 $L(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 所以

$$L(c) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c}.$$

令 $t = \sqrt{a}y$, 得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-ay^2 - \frac{b}{y^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{ab}{t^2}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}.$$

15. 利用 $\int_0^{+\infty} e^{-t(a^2+x^2)} dt = \frac{1}{a^2+x^2}$, 计算 $J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{a^2+x^2} dx$ ($a>0$)。

解 首先有

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{a^2+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \cos \beta x dx \int_0^{+\infty} e^{-t(a^2+x^2)} dt \\ &= \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t(a^2+x^2)} \cos \beta x dx. \end{aligned}$$

利用例 15.2.8 的结果

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos 2xt dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2},$$

可得

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos \beta x dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos \left(2 \frac{\beta}{2\sqrt{t}} \sqrt{t}x\right) d(\sqrt{t}x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{\beta^2}{4t}},$$

于是

$$J = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\left(a^2 + \frac{\beta^2}{4t}\right)} d\sqrt{t} = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\beta|},$$

其中最后一个等式利用了上题的结论。

§3 Euler 积分

1. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx;$$

$$(2) \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}};$$

$$(3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^n}} (n>0);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx (n>m>0);$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx;$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{\frac{1}{2}} x dx;$$

$$(7) \int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx (m, n>0); \quad (8) \int_0^1 x^{p-1} (1-x^q)^{q-1} dx (p, q, n>0).$$

$$\text{解 } (1) \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx = B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{1}{8} \Gamma^2 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{8} \circ$$

(2) 作变换 $\sqrt{t} = \frac{1 - \cos x}{2}$, 则

$$x = 2 \arcsin t^{\frac{1}{4}}, dx = \frac{dt}{2t^{\frac{3}{4}}\sqrt{1-t^{\frac{1}{2}}}}, 3 - \cos x = 2(1 + t^{\frac{1}{2}}),$$

于是

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3 - \cos x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 t^{-\frac{3}{4}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \circ$$

(3) 作变换 $t = x^n$, 则

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{-\frac{1}{n}} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}} \circ$$

(4) 作变换 $x^{\frac{n}{2}} = \tan \theta$, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{2}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{2m}{n}-1} \theta d\theta = \frac{2}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2m}{n}-1} \theta \cos^{\frac{1}{n}-\frac{2m}{n}} \theta d\theta,$$

再作变换 $t = \sin^2 \theta$, 得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{m}{n}-1} (1-t)^{-\frac{m}{n}} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{m}{n}, 1 - \frac{m}{n}\right) = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} \circ$$

(5) 作变换 $t = \frac{x}{1+x}$, 则

$$x = \frac{t}{1-t}, dx = \frac{1}{(1-t)^2} dt,$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{(1+x)^2} dx &= \int_0^1 t^{\frac{1}{4}} (1-t)^{-\frac{1}{4}} dt = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{4 \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \circ \end{aligned}$$

(6) 作变换 $t = \sin^2 x$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \cos^{\frac{1}{2}} x dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^3 (1-t)^{-\frac{1}{4}} dt = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(4) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(4 + \frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{3!}{2 \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{256}{1155} \circ \end{aligned}$$

(7) 作变换 $t = x^n$, 则

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)。$$

(8) 作变换 $t = x^n$, 则

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x^n)^{q-1} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{p}{n}-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{p}{n}, q\right)。$$

2. 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ (n 为正整数), 并推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = 1$ 。

证 令 $t = x^n$, 则

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)。$$

利用 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ 以及 Γ 函数的连续性, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \Gamma(1) = 1。$$

3. 证明 $\Gamma(s)$ 在 $s > 0$ 上可导, 且 $\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x dx$ 。进一步证明

$$\Gamma^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} (\ln x)^n dx \quad (n \geq 1)。$$

证 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} (x^{s-1} e^{-x}) dx = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x dx$ 。任意取 $0 < s_0 < S_0 < +\infty$ 。

当 $s \geq s_0$, $x \in (0, 1]$ 时, $|x^{s-1} e^{-x} \ln x| \leq x^{s_0-1} |\ln x|$, 而 $\int_0^1 x^{s_0-1} |\ln x| dx$ 收敛, 所以 $\int_0^1 x^{s-1} e^{-x} \ln x dx$ 在 $s \geq s_0$ 上一致收敛;

当 $s \leq S_0$, $x \in [1, +\infty)$ 时, $|x^{s-1} e^{-x} \ln x| \leq x^{s_0} e^{-s}$, 而 $\int_1^{+\infty} x^{s_0} e^{-s} dx$ 收敛, 所以 $\int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x dx$ 在 $s \leq S_0$ 上一致收敛。

这说明 $\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x dx$ 关于 s 在 $(0, +\infty)$ 上内闭一致收敛。于是 $\Gamma(s)$ 在 $s > 0$ 上可导, 且 $\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x dx$ 。

进一步, 若 $\Gamma^{(n-1)}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} (\ln x)^{n-1} dx$, 类似于上述的论证过程, 可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} [x^{s-1} e^{-x} (\ln x)^{n-1}] dx = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} (\ln x)^n dx$ 在 $(0, +\infty)$ 上内闭一致收敛, 故 $\Gamma^{(n-1)}(s)$ 在 $s > 0$ 上可导, 且 $\Gamma^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} (\ln x)^n dx$ 。

4. 证明 $\lim_{s \rightarrow +\infty} \Gamma(s) = +\infty$ 。

证 首先易知 $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ 。由于 $\Gamma(s)$ 在 $s > 0$ 上可导, 由 Rolle 定理, 可知 $\exists x_0 \in (1, 2)$, 使 $\Gamma'(x_0) = 0$ 。

由上题, $\Gamma''(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln^2 x dx > 0$, 于是在 $(x_0, +\infty)$ 上 $\Gamma'(s) > 0$, 因此 $\Gamma(s)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调增加。再由 $\Gamma([s]) \leq \Gamma(s) \leq \Gamma([s] + 1)$, ($s > x_0$) 以及 $\Gamma(n+1) = n! \rightarrow +\infty$, 得到

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \Gamma(s) = +\infty.$$

5. 计算 $\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx$ 。

解 作变换 $x = 1 - t$, 则

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \int_0^1 \ln \Gamma(1-t) dt = \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) dx,$$

相加后利用余元公式, 即得到

$$2 \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \int_0^1 \ln [\Gamma(x)\Gamma(1-x)] dx = \int_0^1 (\ln \pi - \ln \sin \pi x) dx.$$

再由

$$\int_0^1 \ln \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln \sin u du = -\ln 2,$$

得到

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \ln \sqrt{2\pi}.$$

6. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 。确定正数 p , 使得反常重积分

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$$

收敛。并在收敛时, 计算 I 的值

解 利用球坐标变换, 可得

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^p} = 4\pi \int_0^1 \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^p}.$$

由此可知当 $p < 1$ 时, 反常重积分 $I = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$ 收敛。且当 $p < 1$ 时,

$$I = 2\pi \int_0^1 \frac{r dr^2}{(1-r^2)^p} = 2\pi \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-p} dt = 2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right).$$

7. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ 。确定正数 α, β, γ , 使得反常重积分

$$I = \iiint_D \frac{dx dy dz}{1 + x^\alpha + y^\beta + z^\gamma}$$

收敛。并在收敛时,计算 I 的值。

解 作变换 $\begin{cases} x = u^{\frac{2}{\alpha}}, \\ y = v^{\frac{2}{\beta}}, \\ z = w^{\frac{2}{\gamma}}, \end{cases}$ 则

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \iiint_D \frac{u^{\frac{2}{\alpha}-1} v^{\frac{2}{\beta}-1} w^{\frac{2}{\gamma}-1}}{1 + u^2 + v^2 + w^2} du dv dw,$$

其中 $\Omega' = \{(u, v, w) \mid u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0\}$ 。

再令 $\begin{cases} u = r \sin \varphi \cos \theta, \\ v = r \sin \varphi \sin \theta, \\ w = r \cos \varphi, \end{cases}$ 则

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{\beta}-1} \theta \cos^{\frac{2}{\alpha}-1} \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 1} \varphi \cos^{\frac{2}{\gamma}-1} \varphi d\varphi \int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1}}{1 + r^2} dr.$$

对于上式中所包含的前两个积分,有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{\beta}-1} \theta \cos^{\frac{2}{\alpha}-1} \theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^{\frac{1}{\beta}-1} \theta (\cos^2 \theta)^{\frac{1}{\alpha}-1} \theta d\sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{\beta}-1} (1-t)^{\frac{1}{\alpha}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right); \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 1} \varphi \cos^{\frac{2}{\gamma}-1} \varphi d\varphi &= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right). \end{aligned}$$

对于第三个积分,有

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1}}{1 + r^2} dr = \int_0^1 \frac{r^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1}}{1 + r^2} dr + \int_1^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1}}{1 + r^2} dr.$$

因为 $\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1 > -1$, 所以积分 $\int_0^1 \frac{r^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1}}{1 + r^2} dr$ 收敛, 而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1}}{1 + r^2} dr$ 当且仅当 $\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1 < 1$ 即 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 1$ 时收敛。所以

当 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 1$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1}}{1 + r^2} dr$ 收敛, 从而原积分收敛。

这时作变量代换 $r^2 = t$, 得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1}}{1 + r^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - 1}}{1 + t} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, 1 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\right).$$

所以 $I = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) B\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right) B\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, 1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)$

$$= \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right).$$

注 对积分 $\int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1}}{1 + r^2} dr$, 也可令 $r = \tan \theta$, 同样得到

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1}}{1 + r^2} dr &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan \theta)^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} - 1} (\cos \theta)^{1 - \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta} - \frac{2}{\gamma}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, 1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right). \end{aligned}$$

8. 计算

$$I = \iint_D x^{m-1} y^{n-1} (1-x-y)^{p-1} dx dy,$$

其中 D 是由三条直线 $x=0, y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的闭区域, m, n, p 均为大于 0 的正数。

解 作变换 $\begin{cases} u = x+y, \\ v = \frac{y}{x+y}, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x = u(1-v), \\ y = uv, \end{cases}$ 且 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = u$, 这变换将区域 D

映照成正方形:

$$\{(u, v) | 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}.$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 u^{m+n-1} (1-u)^{p-1} du \int_0^1 v^{n-1} (1-v)^{m-1} dv = B(m+n, p) B(n, m) \\ &= \frac{\Gamma(m) \Gamma(n) \Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}. \end{aligned}$$

注 当 $p > 1$ 时也可以有如下解法:

将积分化成

$$I = (p-1) \iiint_{\Omega} x^{m-1} y^{n-1} z^{p-2} dx dy dz,$$

其中 Ω 是由平面 $x=0, y=0, z=0$ 与 $x+y+z=1$ 所围的区域。

再令 $\begin{cases} x = u^2, \\ y = v^2, \\ z = w^2 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} u = r \sin \varphi \cos \theta, \\ v = r \sin \varphi \sin \theta, \\ w = r \cos \varphi \end{cases}$ 就得到

$$I = 8(p-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} \theta \cos^{2m-1} \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2n-1} \varphi \cos^{2p-3} \varphi d\varphi \int_0^1 r^{2m+2n+2p-3} dr.$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} \theta \cos^{2m-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^{n-1} (1 - \sin^2 \theta)^{m-1} d\sin^2 \theta$$

$$= \frac{1}{2} B(n, m),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2n-1} \varphi \cos^{2p-3} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \varphi)^{m+n-1} (1 - \sin^2 \varphi)^{p-2} d\sin^2 \varphi$$

$$= \frac{1}{2} B(m+n, p-1),$$

$$\int_0^1 r^{2m+2n+2p-3} dr = \frac{1}{2(m+n+p-1)},$$

于是

$$I = \frac{p-1}{m+n+p-1} B(n, m) B(m+n, p-1) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n) \Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}.$$

9. 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\alpha} x dx = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\alpha \pi}{2}}$ ($|\alpha| < 1$).

证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\alpha} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha} x \cos^{-\alpha} x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\alpha+1}{2} \pi} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\alpha \pi}{2}}.$$

10. 证明

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \right)^{\alpha-1} \frac{d\varphi}{1 + k \cos \varphi} = \frac{1}{1+k} \left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \right)^{\alpha} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha}{2} \pi}$$

$$(0 < \alpha < 2, 0 < k < 1).$$

证 作变量代换 $t = \tan \frac{\varphi}{2}$, 则

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \right)^{\alpha-1} \frac{d\varphi}{1 + k \cos \varphi} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} dt}{(1+k) + (1-k)t^2},$$

再作变量代换 $\sqrt{\frac{1-k}{1+k}} t = \tan \theta$, 则

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} dt}{(1+k) + (1-k)t^2} = \frac{2}{1+k} \left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \right)^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\alpha-1} \theta d\theta$$

$$= \frac{2}{1+k} \left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \right)^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} \theta \cos^{1-\alpha} \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{1+k} \left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \right)^{\alpha} B\left(\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1+k} \left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \right)^{\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{1+k} \left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \right)^{\alpha} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha}{2}\pi},
 \end{aligned}$$

这里最后一个等式利用了余元公式。所以

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin \varphi}{1+\cos \varphi} \right)^{\alpha-1} \frac{d\varphi}{1+k \cos \varphi} = \frac{1}{1+k} \left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \right)^{\alpha} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha}{2}\pi}.$$

11. 设 $0 \leq h < 1$, 正整数 $n \geq 3$ 。证明

$$\int_0^h (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} h.$$

证 作变量代换 $t = hu$, 则

$$\int_0^h (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt = h \int_0^1 (1-h^2 u^2)^{\frac{n-3}{2}} du \geq h \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du,$$

再作变量代换 $u = \sin \theta$, 得到

$$\begin{aligned}
 h \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du &= h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} \theta d\theta = \frac{h}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) \\
 &= \frac{h}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} h.
 \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^h (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} h.$$

第十六章 Fourier 级数

§ 1

函数的 Fourier 级数展开

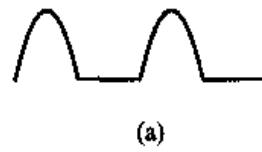
1. 设交流电的变化规律为 $E(t) = A \sin \omega t$, 将它转变为直流电的整流过程有两种类型:

(1) 半波整流(图 16.1.5(a))

$$f_1(t) = \frac{A}{2} (\sin \omega t + |\sin \omega t|);$$

(2) 全波整流(图 16.1.5(b))

$$f_2(t) = A |\sin \omega t|;$$



(a)

现取 $\omega = 1$, 试将 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 展开为 Fourier 级数。

解 (1) $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) dx = \frac{2A}{\pi},$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \cos nx dx$$

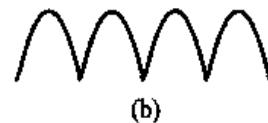


图 16.1.5

$$= - \frac{2A}{\pi(n^2 - 1)} \quad (n = 2, 4, 6, \dots),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \cos nx dx = 0 \quad (n = 1, 3, 5, \dots);$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \sin x dx = \frac{A}{2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \sin nx dx = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

$$f_1(x) \sim \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin x - \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}.$$

(2) $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) dx = \frac{4A}{\pi},$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) \cos nx dx = - \frac{4A}{\pi(n^2 - 1)} \quad (n = 2, 4, 6, \dots),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 3, 5, \dots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$f_2(x) \sim \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}.$$

2. 将下列函数在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成 Fourier 级数:

$$(1) f(x) = \operatorname{sgn} x; \quad (2) f(x) = |\cos x|;$$

$$(3) f(x) = \frac{x^2}{2} - \pi^2; \quad (4) f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x \in [0, \pi); \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} ax, & x \in [-\pi, 0), \\ bx, & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

解 (1) $f(x)$ 为奇函数, 所以 $a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2(1 - \cos(n\pi))}{n\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

(2) $f(x)$ 为偶函数, 所以 $b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = -\frac{4(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi(n^2 - 1)} \quad (n = 2, 4, 6, \dots)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} \cos 2kx.$$

(3) $f(x)$ 为偶函数, 所以 $b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = -\frac{5}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2(-1)^n}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$f(x) \sim -\frac{5}{6}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

$$(4) a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = -\frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = -\frac{\cos(n\pi)}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$



$$f(x) \sim -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

$$(5) a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi(b-a)}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{(a-b)(1-(-1)^n)}{\pi n^2} \quad (n=1,2,3,\dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = -\frac{(a+b)\cos(n\pi)}{n} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

$$f(x) \sim -\frac{(a-b)\pi}{4} + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

3. 将下列函数展开成正弦级数:

$$(1) f(x) = \pi + x, x \in [0, \pi]; \quad (2) f(x) = e^{-2x}, x \in [0, \pi];$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \pi, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & x \in [0, 1), \\ 0, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

$$\text{解 } (1) b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = 2 \cdot \frac{1-2(-1)^n}{n} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2(-1)^n}{n} \sin nx.$$

$$(2) b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2n[1-(-1)^n e^{-2\pi}]}{\pi(4+n^2)} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[1-(-1)^n e^{-2\pi}]}{n^2+4} \sin nx.$$

$$(3) b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{-2 \left[n\pi(-1)^n - 2\sin \frac{n\pi}{2} \right]}{\pi n^2} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \sin nx.$$

$$(4) b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = \frac{1}{\pi},$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2 \left(n - \sin \frac{n\pi}{2} \right)}{\pi(n^2-1)} \quad (n=2,3,4,\dots).$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2-1} \sin \frac{n\pi}{2} x.$$

4. 将下列函数展开成余弦级数:

第十六章 Fourier 级数

$$(1) f(x) = x(\pi - x), x \in [0, \pi]; \quad (2) f(x) = e^x, x \in [0, \pi];$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right), \\ 1, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]; \end{cases} \quad (4) f(x) = x - \frac{\pi}{2} + \left|x - \frac{\pi}{2}\right|, x \in [0, \pi].$$

$$\text{解 } (1) a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = -\frac{2(1 + (-1)^n)}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k^2}.$$

$$(2) a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} (e^\pi - 1),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2[e^\pi(-1)^n - 1]}{\pi(1 + n^2)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} (e^\pi - 1) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n e^\pi - 1]}{n^2 + 1} \cos nx.$$

$$(3) a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2 + \pi}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2x dx = -\frac{1}{\pi},$$

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nx dx = \frac{2}{\pi(n^2 - 1)n} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - n \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

$$f(x) \sim \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \cos 2x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \cos 2nx.$$

$$(4) a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{4 \left[(-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right]}{\pi n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[(-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right]}{n^2} \cos nx.$$

5. 求定义在任意一个长度为 2π 的区间 $[a, a + 2\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数及其系数的计算公式。

解 设 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \cos mx dx = \int_a^{a+2\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos mx dx$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_a^{a+2\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^{a+2\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_a^{a+2\pi} \sin nx \cos mx dx \right)$$

$$= a_m \pi \quad (m=0,1,2,\dots),$$

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \sin mx dx = \int_a^{a+2\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \sin mx dx$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_a^{a+2\pi} \sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^{a+2\pi} \cos nx \sin mx dx + b_n \int_a^{a+2\pi} \sin nx \sin mx dx \right)$$

$$= b_m \pi \quad (m=1,2,\dots),$$

所以

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n=0,1,2,\dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1,2,\dots).$$

6. 将下列函数在指定区间展开成 Fourier 级数：

$$(1) f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in [0, 2\pi]; \quad (2) f(x) = x^2, x \in [0, 2\pi];$$

$$(3) f(x) = x, x \in [0, 1]; \quad (4) f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \in [-1, 0), \\ 0, & x \in [0, 1); \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} C, & x \in [-T, 0) \\ 0, & x \in [0, T) \end{cases} \quad (C \text{ 是常数}).$$

解 (1) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \quad (n=0,1,2,\dots),$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{n} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

$$(2) a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{8}{3} \pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{4}{n^2} \quad (n=1,2,3,\dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = -\frac{4\pi}{n} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

$$f(x) \sim \frac{4}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cos nx - \frac{\pi}{n} \sin nx \right).$$

$$(3) a_0 = 2 \int_0^1 f(x) dx = 1,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi nx dx = 0 \quad (n=1,2,3,\dots),$$

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin 2\pi n x dx = -\frac{1}{n\pi} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2\pi n x.$$

$$(4) a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} (1 - e^{-3}),$$

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos \pi n x dx = \frac{3}{9 + n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n e^{-3}] \quad (n=1,2,3,\dots),$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin \pi n x dx = \frac{n\pi}{9 + n^2 \pi^2} [-1 + (-1)^n e^{-3}] \quad (n=1,2,3,\dots).$$

$$f(x) \sim \frac{1}{6} (1 - e^{-3}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3(1 - (-1)^n e^{-3})}{n^2 \pi^2 + 9} \cos n\pi x - \frac{n\pi(1 - (-1)^n e^{-3})}{n^2 \pi^2 + 9} \sin n\pi x \right].$$

$$(5) a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) dx = C,$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos \frac{\pi n x}{T} dx = 0 \quad (n=1,2,3,\dots),$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{\pi n x}{T} dx = \frac{C}{n\pi} [-1 + (-1)^n] \quad (n=1,2,3,\dots).$$

$$f(x) \sim \frac{C}{2} - \frac{2C}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{T} x.$$

7. 某可控硅控制电路中的负载电流为

$$I(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T_0, \\ 5 \sin \omega t, & T_0 \leq t < T, \end{cases}$$

其中 ω 为圆频率, 周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。现设初始导通时间为

$$T_0 = \frac{T}{8} \quad (\text{见图 16.1.6}), \text{求 } I(t) \text{ 在 } [0, T] \text{ 上的 Fourier 级数。}$$

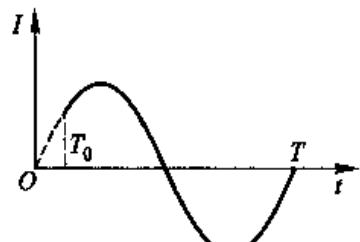


图 16.1.6

$$\text{解 } a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx = \frac{5(\sqrt{2}-2)}{2\pi},$$

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi x}{T} dx = -\frac{5}{4\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T} dx$$

$$= \frac{5}{2\pi} \left[\frac{1}{n+1} \cos \frac{(n+1)\pi}{4} - \frac{1}{n-1} \cos \frac{(n-1)\pi}{4} + \frac{2}{n^2-1} \right]$$

$$(n=2,3,4,\dots),$$

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi x}{T} dx = \frac{5(7\pi+2)}{8\pi},$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx = \frac{5}{2\pi} \left[\frac{1}{n+1} \sin \frac{(n+1)\pi}{4} - \frac{1}{n-1} \sin \frac{(n-1)\pi}{4} \right]$$

$$(n=2,3,4,\dots).$$

$$f(x) \sim -\frac{5}{4\pi}(2-\sqrt{2}) - \frac{5}{4\pi} \cos \omega t + \left(\frac{5}{4\pi} + \frac{35}{8} \right) \sin \omega t$$

$$+ \frac{5}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} \cos \frac{(n+1)\pi}{4} - \frac{1}{n-1} \cos \frac{(n-1)\pi}{4} + \frac{2}{n^2-1} \right] \cos n\omega t$$

$$+ \frac{5}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} \sin \frac{(n+1)\pi}{4} - \frac{1}{n-1} \sin \frac{(n-1)\pi}{4} \right] \sin n\omega t.$$

8. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积或绝对可积, 证明:

- (1) 若对于任意 $x \in [-\pi, \pi]$, 成立 $f(x) = f(x + \pi)$, 则 $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$;
- (2) 若对于任意 $x \in [-\pi, \pi]$, 成立 $f(x) = -f(x + \pi)$, 则 $a_{2n} = b_{2n} = 0$.

证 (1) $a_{2n-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2n-1)x dx$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos(2n-1)x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2n-1)x dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos[(2n-1)t - (2n-1)\pi] dt +$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2n-1)x dx \quad (t=x+\pi)$$

$$= 0, (n=1,2,3,\dots),$$

$$b_{2n-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2n-1)x dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin(2n-1)x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(2n-1)x dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin[(2n-1)t - (2n-1)\pi] dt +$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(2n-1)x dx \quad (t=x+\pi)$$

$$= 0 \quad (n=1,2,3,\dots).$$

(2) $a_{2n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2nx) dx$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos(2nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -f(t) \cos(2nt - 2n\pi) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2nx) dx \quad (t=x+\pi)$$

$$\begin{aligned}
 &= 0 \quad (n=1,2,3,\cdots), \\
 b_{2n} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin(2nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(2nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -f(t) \sin(2nt - 2n\pi) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(2nx) dx \quad (t=x+\pi) \\
 &= 0 \quad (n=1,2,3,\cdots).
 \end{aligned}$$

9. 设 $f(x)$ 在 $(0, \pi/2)$ 上可积或绝对可积, 应分别对它进行怎样的延拓, 才能使它在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 级数的形式为

$$(1) f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x; \quad (2) f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx.$$

解 (1) 显然, $f(x)$ 为偶函数, 而且

$$\begin{aligned}
 a_{2n} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \cos(2nx) dx \quad (\text{令 } t=\pi-x) \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-t) \cos(2nt) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(\pi-x)] \cos(2nx) dx = 0,
 \end{aligned}$$

所以

$$f(x) + f(\pi-x) = 0,$$

于是 $f(x)$ 可以按下面方式进行延拓

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -f(\pi+x), & x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \\ f(-x), & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \\ f(x), & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ -f(\pi-x), & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

(2) 显然, $f(x)$ 为奇函数, 而且

$$\begin{aligned}
 b_{2n-1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin[(2n-1)x] dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin[(2n-1)x] dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \sin[(2n-1)x] dx \quad (\text{令 } t=\pi-x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin[(2n-1)x] dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-t) \sin[(2n-1)t] dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(\pi-x)] \sin[(2n-1)x] dx = 0,
 \end{aligned}$$

所以

$$f(x) + f(\pi-x) = 0,$$

于是 $f(x)$ 可以按下面方式进行延拓

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(\pi+x), & x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \\ -f(-x), & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \\ f(x), & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ -f(\pi-x), & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

10. 设周期为 2π 的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 系数为 a_n 和 b_n , 求下列函数的 Fourier 系数 \tilde{a}_n 和 \tilde{b}_n :

$$(1) g(x) = f(-x); \quad (2) h(x) = f(x+C) (C \text{ 是常数});$$

$$(3) F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x-t) dt \quad (\text{假定积分顺序可以交换})。$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad (1) \quad \tilde{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) \cos nx dx \quad (\text{令 } t = -x) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dx,
 \end{aligned}$$

所以

$$\tilde{a}_n = a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{b}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) \sin nx dx \quad (\text{令 } t = -x) \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dx,
 \end{aligned}$$

所以

$$\tilde{b}_n = -b_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(2) 因为 $x+C \in [-\pi, \pi]$, 所以 $x \in [-\pi-C, \pi-C]$.

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-C}^{\pi-C} h(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-C}^{\pi-C} f(x+C) \cos nx dx \quad (\text{令 } t = x+C) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t+C) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \cos nC dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \sin nC dx \\
 &= a_n \cos nC + b_n \sin nC \quad (n=0,1,2,\dots), \\
 \tilde{b}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-C}^{\pi-C} h(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-C}^{\pi-C} f(x+C) \sin nx dx \quad (\text{令 } t=x+C) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin n(t-C) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \cos nC dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \sin nC dx \\
 &= b_n \cos nC - a_n \sin nC \quad (n=1,2,\dots). \\
 (3) \quad \tilde{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x-t) dt \right] \cos nx dx \\
 &\quad (\text{交换次序}) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cos nx dx \right] f(t) dt.
 \end{aligned}$$

当 $n=0$ 时,

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) dx \right] f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 f(t) dt = a_0^2,$$

当 $n>0$ 时,

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) [\cos n(x-t) \cos nt - \sin n(x-t) \sin nt] dx \right] f(t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nt - b_n \sin nt) f(t) dt = a_n^2 - b_n^2, \quad (n=1,2,\dots). \\
 \tilde{b}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x-t) dt \right] \sin nx dx \quad (\text{交换次序}) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \sin nx dx \right] f(t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) [\sin n(x-t) \cos nt + \cos n(x-t) \sin nt] dx \right] f(t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (b_n \cos nt + a_n \sin nt) f(t) dt = 2a_n b_n \quad (n=1,2,\dots).
 \end{aligned}$$

§ 2

Fourier 级数的收敛判别法

1. 设 $\psi(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且单调, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0$, 证明

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \psi(x) \sin px dx = 0.$$

证 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0$, 所以存在 $N > 0$, 使得当 $x \geq N$ 时, $|\psi(x)| < 1$ 。利用积分第二中值定理可得

$$\begin{aligned} \left| \int_N^A \psi(x) \sin px dx \right| &= \left| \psi(N) \int_N^{\xi} \sin px dx + \psi(A) \int_{\xi}^A \sin px dx \right| \\ &< \left| \int_N^{\xi} \sin px dx \right| + \left| \int_{\xi}^A \sin px dx \right| \leq \frac{4}{p} \quad (\forall A > N), \end{aligned}$$

因此 $\left| \int_N^{+\infty} \psi(x) \sin px dx \right| \leq \frac{4}{p}$, 从而

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_N^{+\infty} \psi(x) \sin px dx = 0.$$

而由 Riemann 引理,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^N \psi(x) \sin px dx = 0.$$

因此

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \psi(x) \sin px dx = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^N \psi(x) \sin px dx + \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_N^{+\infty} \psi(x) \sin px dx = 0.$$

2. 设函数 $\psi(u)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积或绝对可积, 在 $u=0$ 点连续且有单侧导数, 证明

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(u) \frac{\cos \frac{u}{2} - \cos pu}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\psi(u) - \psi(-u)] \cot \frac{u}{2} du.$$

$$\text{证} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \psi(u) \frac{\cos \frac{u}{2} - \cos pu}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \int_0^{\pi} [\psi(u) - \psi(-u)] \frac{\cos \frac{u}{2} - \cos pu}{2 \sin \frac{u}{2}} du.$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\psi(u) - \psi(-u)}{2 \sin \frac{u}{2}} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\psi(u) - \psi(0) - [\psi(-u) - \psi(0)]}{u} \frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \\ &= \psi'_+(0) + \psi'_-(0), \end{aligned}$$

可知函数 $\frac{\psi(u) - \psi(-u)}{2 \sin \frac{u}{2}}$ 在 $[0, \pi]$ 上可积或绝对可积, 由 Riemann 引理可得

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\psi(u) - \psi(-u)] \frac{\cos pu}{\sin \frac{u}{2}} du = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \psi(u) \frac{\cos \frac{u}{2} - \cos pu}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\psi(u) - \psi(-u)] \cot \frac{u}{2} du \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\psi(u) - \psi(-u)] \frac{\cos pu}{\sin \frac{u}{2}} du \rightarrow 0, (p \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

3. 设函数 $\psi(u)$ 在 $[-\delta, \delta]$ 上单调, 证明

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \psi(u) - \frac{1}{2} [\psi(0+) + \psi(0-)] \right\} \frac{\sin pu}{u} du = 0.$$

证

$$\begin{aligned} & \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \psi(u) - \frac{1}{2} [\psi(0+) + \psi(0-)] \right\} \frac{\sin pu}{u} du \\ & = \int_0^{\delta} \left\{ [\psi(u) - \psi(0+)] + [\psi(-u) - \psi(0-)] \right\} \frac{\sin pu}{u} du \\ & = \int_0^{\delta} [\psi(u) - \psi(0+)] \frac{\sin pu}{u} du + \int_0^{\delta} [\psi(-u) - \psi(0-)] \frac{\sin pu}{u} du, \end{aligned}$$

因为 $\psi(u)$ 在 $[-\delta, \delta]$ 上单调, 所以 $\psi(u) - \psi(0+)$ 和 $\psi(-u) - \psi(0-)$ 都在 $[0, \delta]$ 上单调, 利用 Dirichlet 引理即得结论。

4. 证明 Dirichlet 引理对 $\psi(u)$ 是分段单调有界函数的情况依然成立。

证 由于 $\psi(u)$ 在 $[0, \delta]$ 分段单调, 所以存在 $\delta_1 \in (0, \delta)$, 使得 $\psi(u)$ 在 $[0, \delta_1]$ 上单调, 从而满足 Dirichlet 引理条件。由于在 $[\delta_1, \delta]$ 上 $\psi(u)$ 分段单调有界, 所以 $\frac{\psi(u) - \psi(0+)}{u}$ 在 $[\delta_1, \delta]$ 上满足 Riemann 引理条件。于是

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\psi(u) - \psi(0+)}{u} \sin pu du \\ & = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\delta_1} \frac{\psi(u) - \psi(0+)}{u} \sin pu du + \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{\psi(u) - \psi(0+)}{u} \sin pu du = 0. \end{aligned}$$

5. 证明 Lipschitz 判别法的推论。

证 取 $\alpha = 1$ 。设 $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} = A$, 则存在 $\delta_1 > 0$, 当 $0 < u < \delta_1$ 时, 成立

$$\left| \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} - A \right| \leq 1,$$

令 $L_1 = |A| + 1$, 则有

$$|f(x+u) - f(x+)| \leq L_1 |u|.$$

同理存在 $\delta_2 > 0$ 与 $L_2 > 0$, 当 $0 < u < \delta_2$ 时, 有

$$|f(x-u) - f(x-)| \leq L_2 |u|.$$

于是令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $L = \max\{L_1, L_2\}$, 当 $0 < u < \delta$ 时, 有

$$|f(x \pm u) - f(x \mp u)| \leq L|u|,$$

所以 $f(x)$ 满足 Lipschitz 判别法的条件, 推论成立。

6. 对 § 16.1 的习题 2、3、4、6 中的函数, 验证它们的 Fourier 级数满足收敛判别法的条件, 并分别写出这些 Fourier 级数的和函数。

解 容易验证这些函数都是分段单调有界, 因而可积或绝对可积, 所以满足 Dirichlet – Jordan 判别法的条件。

习题 2 各函数 Fourier 级数的和函数为

$$(1) \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x = 0, \pm \pi, \\ -1, & x \in (-\pi, 0). \end{cases} \quad (2) |\cos x|, x \in [-\pi, \pi].$$

$$(3) \frac{x^2}{2} - \pi^2, x \in [-\pi, \pi].$$

$$(4) \begin{cases} 0, & x \in [0, \pi), \\ -\frac{\pi}{2}, & x = \pm \pi, \\ x, & x \in (-\pi, 0). \end{cases} \quad (5) \begin{cases} bx, & x \in [0, \pi), \\ (b-a)\frac{\pi}{2}, & x = \pm \pi, \\ ax, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

习题 3 各函数 Fourier 级数的和函数为

$$(1) \begin{cases} x + \pi, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x = 0, \pm \pi, \\ x - \pi, & x \in (-\pi, 0). \end{cases} \quad (2) \begin{cases} e^{-2x}, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x = 0, \pm \pi, \\ -e^{2x}, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x = \pm \pi, \\ \pi, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \\ -\pi, & x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & x \in (0, 1), \\ 0, & x = 0, x \in [1, 2] \cup [-2, -1], \\ -\cos \frac{\pi x}{2}, & x \in (-1, 0). \end{cases}$$

习题 4 各函数 Fourier 级数的和函数为

$$(1) \pi|x| - x^2, x \in [-\pi, \pi].$$

$$(2) e^{|x|}, x \in [-\pi, \pi].$$



第十六章 Fourier 级数

$$(3) \begin{cases} \sin 2|x|, & x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \\ 1, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

$$(4) |x| - \frac{\pi}{2} + \left| |x| - \frac{\pi}{2} \right|, x \in [-\pi, \pi].$$

习题 6 各函数 Fourier 级数的和函数为

$$(1) \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & x \in (0, 2\pi), \\ 0, & x = 0, 2\pi. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2, & x \in (0, 2\pi), \\ 2\pi^2, & x = 0, 2\pi. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x, & x \in (0, 1), \\ \frac{1}{2}, & x = 0, 1. \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} e^{3x}, & x \in (-1, 0), \\ 0, & x \in (0, 1), \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ \frac{e^{-3}}{2}, & x = \pm 1. \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} C, & x \in (-T, 0), \\ 0, & x \in (0, T), \\ \frac{C}{2}, & x = 0, \pm C. \end{cases}$$

7. 利用 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 证明:

$$(1) 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}; \quad (2) 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

证 (1) 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{\pi^2}{24},$$

所以

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$(2) 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

8. 求 $\sin x$ 全部非零零点的倒数的平方和。

解 $\sin x$ 全部非零零点为 $\{\pm \pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi, \dots\}$, 所以其倒数的平方和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n\pi)^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{3}.$$

9. 证明下列关系式:

(1) 对 $0 < x < 2\pi$ 且 $a \neq 0$, 有

$$\pi e^{ax} = (e^{2ax} - 1) \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cos nx - n \sin nx}{a^2 + n^2} \right];$$

(2) 对 $0 < x < 2\pi$ 且 a 不是自然数, 有

$$\pi \cos ax = \frac{\sin 2a\pi}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \sin 2a\pi \cos nx + n(\cos 2a\pi - 1) \sin nx}{a^2 - n^2};$$

(3) 对(2), 令 $x = \pi$, 有

$$\frac{a\pi}{\sin a\pi} = 1 + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}.$$

证 (1) $f(x) = \pi e^{ax}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上单调连续有界, 所以它在 $[0, 2\pi]$ 上的 Fourier 级数在 $(0, 2\pi)$ 上收敛到自身。由

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{a(e^{2ax} - 1)}{a^2 + n^2}, (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = -\frac{n(e^{2ax} - 1)}{a^2 + n^2}, (n = 1, 2, 3, \dots),$$

可知(1)式成立。

(2) $f(x) = \pi \cos ax$ 在 $(0, 2\pi)$ 上单调连续有界, 所以它在 $[0, 2\pi]$ 上的 Fourier 级数在 $(0, 2\pi)$ 上收敛到自身。由

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{a \sin 2a\pi}{a^2 - n^2}, (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{n(\cos 2a\pi - 1)}{a^2 - n^2}, (n = 1, 2, 3, \dots),$$

可知(2)式成立。

(3) 对(2), 令 $x = \pi$, 利用 $\sin 2a\pi = 2\sin a\pi \cos a\pi$, 有

$$\begin{aligned} \pi \cos a\pi &= \frac{\sin 2a\pi}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \sin 2a\pi \cos n\pi}{a^2 - n^2} \\ &= \frac{\sin a\pi \cos a\pi}{a} \left[1 + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \right], \end{aligned}$$

所以(3)式也成立。

10. (1) 验证函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0, \\ \ln \frac{|x|}{2\pi}, & x = 0 \end{cases}$$

满足 Dirichlet - Jordan 判别法条件而不满足 Dini - Lipschitz 判别法条件。

(2) 验证函数



$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

满足 Dini-Lipschitz 判别法条件(今后会学到, 它不满足 Dirichlet-Jordan 判别法条件, 在此从略)。

证 (1) $f(x)$ 是偶函数, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 且当 $x > 0$ 时, $f'(x) = -\frac{1}{(\ln \frac{|x|}{2\pi})^2} \cdot \frac{1}{x} < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是分段单调的连续函数, 满足

Dirichlet-Jordan 判别法条件。但对于任意的 $\alpha \in (0, 1]$, 由于 $\lim_{u \rightarrow 0^+} u^\alpha \ln \frac{u}{2\pi} = 0$, 所以

$$\frac{|f(0+u) - f(0+)|}{u^\alpha} = \frac{1}{u^\alpha \left| \ln \frac{u}{2\pi} \right|}$$

无界, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不满足 Dini-Lipschitz 判别法条件。

(2) 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \cos \frac{\pi}{2x} + \frac{\pi}{2x} \sin \frac{\pi}{2x}$, 导数存在; 在 $x=0$, 成立

$$|f(0 \pm u) - f(0 \pm)| = |x \cos \frac{\pi}{2x}| \leq |x|,$$

即满足 Lipschitz 条件, 所以 $f(x)$ 满足 Dini-Lipschitz 判别法条件。今后会学到, 对任意的 $\delta > 0$, $f(x)$ 在区间 $[-\delta, \delta]$ 上不是有界变差函数, 所以不能写成两个单调有界函数之差。

§ 3 Fourier 级数的性质

1. 由例 16.1.2 的结果

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

用逐项积分法求 x^2 和 x^3 的 Fourier 级数。

解 由于 x 在 $[-\pi, \pi]$ 有界可积, 其 Fourier 级数可以逐项积分,

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 \int_0^x t dt = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt dt \\ &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (\cos nx - 1) \\ &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (\text{习题 16.2.7(1)}) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, x \in [-\pi, \pi].$$

对 $3x^2$ 的 Fourier 级数逐项积分,

$$\begin{aligned} x^3 &= 3 \int_0^x t^2 dt = 3 \int_0^x \frac{\pi^2}{3} dt + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt dt \\ &= \pi^2 x + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin nx \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6 - \pi^2 n^2)}{n^3} \sin nx, x \in (-\pi, \pi). \end{aligned}$$

2. 证明定理 16.3.2 的推论 16.3.1: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 是某个可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ 收敛。

证 设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

令

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt.$$

根据定理 16.3.2 的证明过程, $F(x)$ 满足 Dini-Lipschitz 判别法的推论的条件, $F(x)$ 可展开为收敛的 Fourier 级数

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx \right), x \in [-\pi, \pi],$$

令 $x = 0$, 得到 $F(0) = \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$, 这就说明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ 收敛。

3. 说明级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln \ln n}$ 点点收敛, 但不可能是任何可积或绝对可积函数的 Fourier 级数。

解 对于任意固定的 x , $\left\{ \frac{1}{\ln n} \right\}$, $\left\{ \frac{1}{\ln \ln n} \right\}$ 单调趋于 0, $\left\{ \sum_{k=1}^n \sin kx \right\}$ 有界,

根据 Dirichlet 判别法, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln \ln n}$ 收敛。

因为 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln \ln n}$ 都是发散的, 所以这两个级数不可能是可积或绝对可积函数的 Fourier 级数。

4. 利用例 16.1.1 的结果



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x \in [0, \pi) \end{cases} \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

和 Parseval 等式, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ 。

证 因为 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 可积且平方可积, 由 Parseval 等式,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(2n-1)} \right)^2,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. 利用例 16.1.2 的结果

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi), \\ -x, & x \in [-\pi, 0) \end{cases} \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx,$$

和 Parseval 等式, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ 。

解 因为 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 可积且平方可积, 由 Parseval 等式,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2 = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{\pi(2n-1)^2} \right]^2,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \left(\frac{2}{3} \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{\pi^4}{96}.$$

6. 利用

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, x \in (-\pi, \pi)$$

和 Parseval 等式, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 。

解 因为 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 可积且平方可积, 由 Parseval 等式,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{5} \pi^4 = 2 \left(\frac{\pi^2}{3} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \right)^2,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \left(\frac{2}{5} \pi^4 - \frac{2}{9} \pi^4 \right) \frac{1}{16} = \frac{\pi^4}{90}.$$

7. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上以 2π 为周期, 且具有二阶连续导数的函数, 记

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad b''_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \sin nx dx.$$

证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b''_n$ 绝对收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|b_n|} < \frac{1}{2} \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n''| \right)。$$

证 利用分部积分法,

$$\begin{aligned} b_n'' &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[f'(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - n \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx \right] \\ &= -\frac{n}{\pi} \left[f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right] = -n^2 b_n, \end{aligned}$$

由于

$$\sqrt{|b_n|} = \frac{1}{n} \sqrt{|n^2 b_n|} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |b_n''| \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |b_n''| \right) \quad (n=1,2,\dots),$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|b_n|} &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n''| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n''| \right) < \frac{1}{2} \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n''| \right)。 \end{aligned}$$

8. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的以 2π 为周期的连续函数。证明: 若 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为零, 则 $f(x) \equiv 0$ 。

证 由于 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为零, 利用 Parseval 等式, 可知 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = 0$ 。再由 $f(x)$ 为连续函数, 即可得到 $f(x) \equiv 0$ 。

9. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的任意一个连续函数, 证明对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在三角多项式

$$\psi_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx + B_k \sin kx),$$

使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \psi_n(x)| dx < \epsilon。$$

证 设 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)。$$

因为 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数, 由 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

可知 $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \frac{\epsilon^2}{2\pi^2}$ 。令

$$\psi_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n > N),$$

则由定理 16.3.3,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \frac{\epsilon^2}{2\pi^2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \psi_n(x)| dx &\leq \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx} \\ &= \sqrt{2\pi^2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx} < \epsilon. \end{aligned}$$

§ 4 Fourier 变换和 Fourier 积分

1. 求下列定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的函数的 Fourier 变换:

$$(1) f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < \delta, \\ 0, & \text{其它;} \end{cases} \quad (2) f(x) = e^{-a|x|}, a > 0;$$

$$(3) f(x) = e^{-ax^2}, a > 0; \quad (4) f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} A \cos \omega_0 x, & |x| \leq \delta, \\ 0, & |x| > \delta, \end{cases} \quad \omega_0 \neq 0 \text{ 是常数, } \delta = \frac{\pi}{\omega_0}.$$

$$\text{解 } (1) \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_0^{\delta} A e^{-i\omega x} dx = \frac{A}{i\omega} (1 - e^{-i\omega\delta}).$$

$$\begin{aligned} (2) \tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)x} dx \\ &= \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos \omega x dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos \frac{\omega t}{\sqrt{a}} dt \quad (\text{利用例 15.2.8 的结果}) \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\left(\frac{\omega}{\sqrt{a}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

$$(4) \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(2+i\omega)x} dx = \frac{1}{2+i\omega}.$$

$$(5) \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\delta}^{\delta} A \cos \omega_0 x e^{-i\omega x} dx$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\delta}^{\delta} A \cos \omega_0 x \cos \omega x dx \quad (\text{虚部为奇函数, 积分为 0}) \\
 &= \frac{A}{2} \int_{-\delta}^{\delta} [\cos(\omega_0 - \omega)x + \cos(\omega_0 + \omega)x] dx \\
 &= A \left[\frac{\sin(\omega - \omega_0)\delta}{(\omega - \omega_0)} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)\delta}{(\omega + \omega_0)} \right].
 \end{aligned}$$

2. 求 $f(x) = e^{-ax}$ ($x \in [0, +\infty)$, $a > 0$) 的正弦变换和余弦变换。

解 正弦变换:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin \omega x dx = \frac{\omega}{a^2 + \omega^2},$$

余弦变换:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos \omega x dx = \frac{a}{a^2 + \omega^2}.$$

3. 设 $f_1(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$, 求 $f_1 * f_2(x)$ 。

解 记 $F(x) = f_1 * f_2(x) = f_2 * f_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) f_1(x-t) dt$, 考虑 $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

当 $x \leq 0$ 时, $f_1(x-t) = 0$, 所以 $F(x) = 0$;

当 $x > \frac{\pi}{2}$ 时, $f_1(x-t) = e^{-(x-t)}$, 所以

$$F(x) = e^{-x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin(t) dt = \frac{1}{2} e^{-x} (1 + e^{\frac{\pi}{2}});$$

当 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $f_1(x-t) = \begin{cases} e^{-(x-t)}, & x > t, \\ 0, & x \leq t, \end{cases}$ 所以

$$F(x) = e^{-x} \int_0^x e^t \sin(t) dt = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x + e^{-x}).$$

于是

$$f_1 * f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2} (\sin x - \cos x + e^{-x}), & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} e^{-x} (1 + e^{\frac{\pi}{2}}), & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

§ 5 快速 Fourier 变换

1. 说明离散 Fourier 变换 $X(j) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi i \frac{nj}{N}}$ 可以看成 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

的离散近似形式的推广。

解 假设 $\omega > 0$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \frac{\omega x}{2\pi}} dx \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta x) e^{-2\pi i \left(\frac{\omega \Delta x}{2\pi}\right)} \Delta x,$$

取 Δx 使 $\frac{\omega \Delta x}{2\pi} = \frac{1}{N}$, 记 $W = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$, 则 k 为整数时, $W^{kN+n} = W^n$ 。于是

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} W^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f((kN+n)\Delta x) \Delta x,$$

记 $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f((kN+n)\Delta x) \Delta x$, 所以

$$X(j) = \hat{f}(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} W^n x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi i \frac{nj}{N}}.$$

2. 证明正交关系式

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{nj}{N}} e^{2\pi i \frac{nk}{N}} = \delta_{j,k}.$$

解 显然, $j = k$ 时, $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{nj}{N}} e^{2\pi i \frac{nk}{N}} = 1$ 。

下面考虑 $j \neq k$, 不妨设 $j < k$ 。根据当 $\xi \neq 1$ 是方程 $x^N = 1$ 的一个根时, 有

$\sum_{n=0}^{N-1} \xi^n = 0$, 令 $\xi = e^{2\pi i \frac{(k-j)}{N}} \neq 1$, 则 $\xi^N = e^{2\pi i (k-j)} = 1$ 。于是

$$\sum_{n=0}^{N-1} \xi^n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{nj}{N}} e^{2\pi i \frac{nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{n(k-j)}{N}} = 0.$$

3. 设 $N = pq$ ($p, q \in \mathbb{N}$), 构造只需 $O((p+q)N)$ 次运算的 Fourier 变换算法。

解 令 $W = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$, 则 k 为整数时, $W^{kN+n} = W^n$ 。假设

$$j = j_1 q + j_0, j_1 = 0, 1, \dots, p-1, j_0 = 0, 1, \dots, q-1,$$

$$n = n_1 p + n_0, n_1 = 0, 1, \dots, q-1, n_0 = 0, 1, \dots, p-1.$$

$$X(j) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi i \frac{nj}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^n$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n_0=0}^{p-1} \sum_{n_1=0}^{q-1} x(n_1 p + n_0) W^{j(n_1 p + n_0)} \\
 &= \sum_{n_0=0}^{p-1} W^{jn_0} \sum_{n_1=0}^{q-1} x(n_1 p + n_0) W^{n_1 j_0 p}.
 \end{aligned}$$

固定 j , 计算 $\sum_{n_1=0}^{q-1} x(n_1 p + n_0) W^{n_1 j_0 p}$ 需要 $q-1$ 次乘法 ($n_1 = 0$ 不需要做乘法), 对于相同的 j_0 , $\sum_{n_1=0}^{q-1} x(n_1 p + n_0) W^{n_1 j_0 p}$ 是相同的, 无需重复计算, 所有此类和式共需 $q(q-1)$ 次乘法。对 n_0 求和需要 $(p-1)N$ 次乘法, 所以, 总共需要 $q(q-1) + (p-1)N = O((p+q)N)$ 次乘法。

4. 对 $N=2^3$, 具体写出以 2 为底的 FFT 的计算流程。

解 记 $W = e^{-\frac{2\pi j}{8}} = e^{-\frac{\pi j}{4}}$, 则 $W^4 = -1$, $W^8 = 1$ 。可得计算公式

$$\begin{aligned}
 X(j) &= \sum_{n=0}^7 x(n) W^{jn}, j = 0, 1, \dots, 7. \\
 &= [x(0) + (-1)^j x(4)] + W^j [x(1) + (-1)^j x(5)] \\
 &\quad + W^{2j} [x(2) + (-1)^j x(6)] + W^{3j} [x(3) + (-1)^j x(7)]。
 \end{aligned}$$

计算流程

第一步:

$$\begin{aligned}
 x_1(i) &= x(i) + x(i+4), \\
 x_1(i+4) &= W^i [x(i) - x(i+4)], i = 0, 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

第二步:

$$\begin{aligned}
 x_2(i) &= x_1(i) + x_1(i+2), \\
 x_2(i+2) &= W^{2i} [x_1(i) - x_1(i+2)], i = 0, 1, 4, 5.
 \end{aligned}$$

第三步:

$$\begin{aligned}
 X(i) &= x_2(i) + x_2(i+1), \\
 X(i+4) &= x_2(i) - x_2(i+1), i = 0, 2, \\
 X(i) &= x_2(i+3) + x_2(i+4), \\
 X(i+4) &= x_2(i+3) - x_2(i+4), i = 1, 3.
 \end{aligned}$$

计算实习题

(在教师的指导下, 编制程序在电子计算机上实际计算)

1. 利用现成的数学通用软件(如 MATLAB、Mathematica、Maple 等), 对于 $N=32, 64, 128$,

(1) 生成实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$;



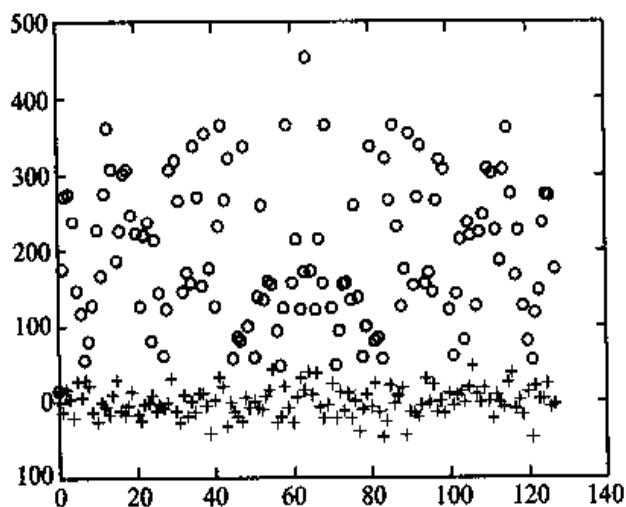
第十六章 Fourier 级数

- (2) 用 FFT 计算 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 的离散 Fourier 变换序列 $\{X(j)\}_{j=0}^{N-1}$;
- (3) 作出 $\{x(k)\}$ 和 $\{|X(j)|\}$ 的图并进行分析(参见图 16.5.4);
- (4) 设定 $\delta_0 > 0$, 将 $\{|X(j)|\}$ 中满足 $|X(j)| < \delta_0$ 的数据全部置为零, 再进行离散 Fourier 逆变换, 将得到的数据与 $\{x(k)\}$ 比较;
- (5) 改变 δ_0 的值, 重复(4), 分析不同的 δ_0 对逆变换所得到的数据的影响。

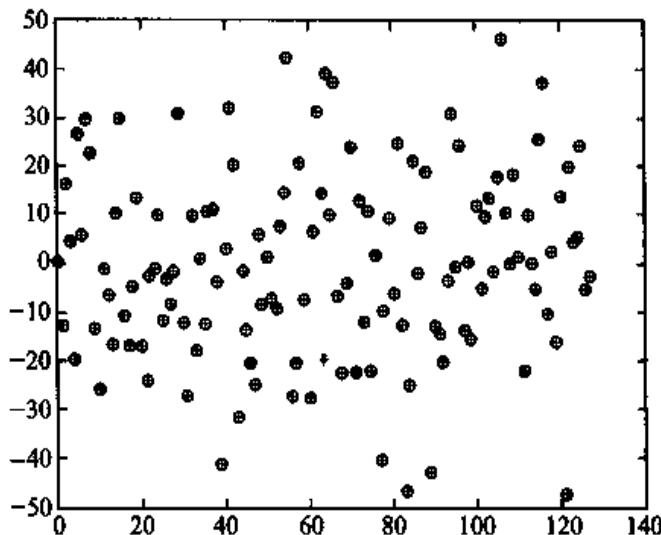
解 源程序为

```
function ex1601(N)
t=0:N-1;
x=randn(N,1)*20;%randn
y=fft(x,N);
z=abs(y);
plot(t,x,'+',t,z,'o')
%
delta=input('请输入误差');
for i=0:N-1
    if z(i+1)<delta
        y(i+1)=0;
    end
end
z=real(ifft(y));
plot(t,x,'+',t,z,'o')
```

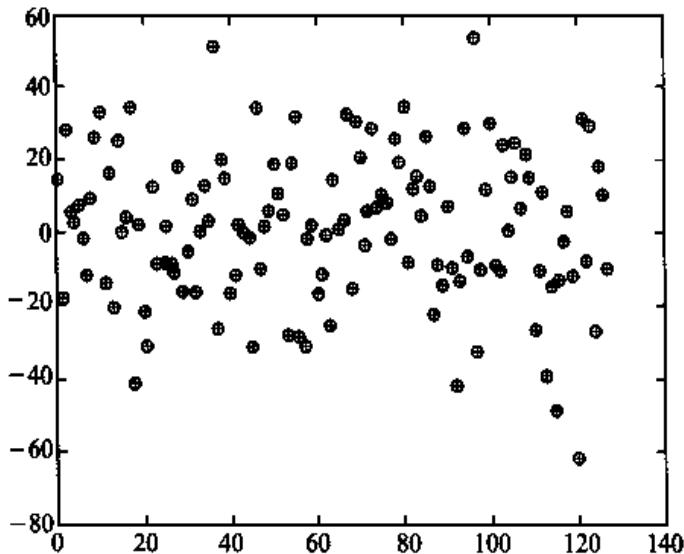
运行结果分析: 以 $N=128$ 为例。本程序数据是随机产生的, “+”为原始数据, “o”为变换后的模的数据。



取 $\delta_0 = 5$, 将 $\{|X(j)|\}$ 中满足 $|X(j)| < \delta_0$ 的数据全部置为零, 再进行离散 Fourier 逆变换。“+”为原始数据, “o”为置零后变换得到的数据, 与 $|x(k)|$ 比较几乎重合。



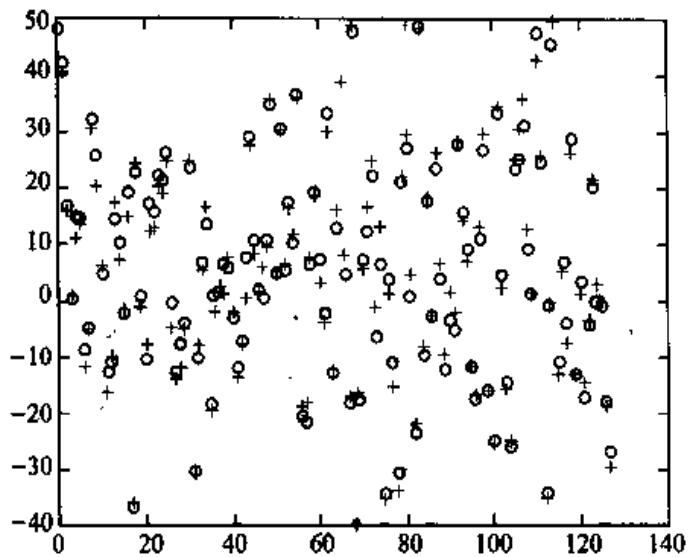
取 $\delta_0 = 50$, 同样处理后得到的数据, 与 $|x(k)|$ 比较有些小误差。



取 $\delta_0 = 100$, 同样处理后得到的数据, 与 $|x(k)|$ 比较误差清晰可见, 但不很大。由于数据源不同, 结果会有所差异。

2. 对于 $N = 32, 64, 128$,

- (1) 产生两个实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 和 $\{y(k)\}_{k=0}^{N-1}$;
- (2) 用直接方法计算 $\{x(k)\}$ 和 $\{y(k)\}$ 的卷积 $\{z(k)\}_{k=0}^{N-1}$;
- (3) 改用离散 Fourier 变换的思想, 用 FFT 计算 $\{z(k)\}$;
- (4) 结合 N 比较两种算法所用的时间。



解 源程序为

```
function t = ex1602(N)
x = randn(N,1) * 20; % randn
y = randn(N,1) * 20; % randn
tic % 启动秒表
for i=0:N-1
    z(i+1)=0;
    for j=0:i
        z(i+1) = z(i+1) + x(j+1) * y(i-j+1);
    end
    for j=i+1:N-1
        z(i+1) = z(i+1) + x(j+1) * y(N+i-j+1);
    end
end

t1 = toc; % 计时
tic;
x1 = fft(x,N);
y1 = fft(y,N);
z1 = ifft(x1.*y1);
t2 = toc;
t = [t1,t2];
分析:
```

计算所用时间与使用的计算机性能有关,由于计算机计时器的最小单位较大,对于较新的计算机,即使对于 $N=128$,所用时间几乎为 0。而且由于卷积采用代码解释执行速度较慢,Fourier 变换采用内部函数速度很快,用 FFT 计算速度要快得多。

3. 用 FFT 计算多项式 $\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 和 $\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ 的乘积,并与 $\frac{\sin 2x}{2}$ 的 Taylor 级数的相应项比较。

解 源程序为

```
function [z, maxerror] = ex1603(m);
% z: 乘积, maxerror; 最大误差, m: 阶数
len = 4 * m + 2;
a = zeros(len, 1); % 被乘式系数
a(2) = 1;
for i = 4:2:2 * m + 2
    a(i) = -1 * a(i - 2) / (i - 2) / (i - 1);
end
b = zeros(len, 1); % 乘式系数
b(1) = 1;
for i = 3:2:2 * m + 1
    b(i) = -1 * b(i - 2) / (i - 2) / (i - 1);
end
c = zeros(len, 1); % 乘积系数
c(2) = 1;
for i = 4:2:len
    c(i) = -4 * c(i - 2) / (i - 1) / (i - 2);
end
x = fft(a, len); % Fourier 变换
y = fft(b, len); % Fourier 变换
z1 = x .* y;
z = ifft(z1); % Fourier 逆变换
maxerror = 0;
for i = 1:len
    e = abs(z(i) - c(i));
    if e > maxerror
```