دانشگاه صنعتی شریف

# جزوه درس ریاضی مهندسی

مدرس: دکتر باقرپور

فرهود رستم‌خانی
علی دلسوز
scientist mad bad a such

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۹۹ـ۰۰

# بخش اول

# PDE

## ۱.۰ سری و تبدیل فوریه

### مقدمه

در فصل ۱ هدف حل برخی از معادلات دیفرانسیل پاره ای است. برای این منظور سری و تبدیل فوریه به عنوان یک ابزار مهم استفاده می شوند. به همین دلیل، در این بخش ابتدا چند تعریف اساسی و مهم را در زمینه ی معادلات دیفرانسیل پاره ای ارائه می کنیم و سپس با سری و تبدیل فوریه آشنا می شویم. بعدا در بخش های ۲ و ۳ خواهیم دید که سری و تبدیل فوریه چگونه در حل برخی معادلات دیفرانسیل پاره ای به کار می روند.
تعریف ۱ : اگر $u:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی از متغیر های مستقل $x_1, ..., x_n$ باشد، یک معادله بین $u$ و $x_i$ ها و مشتقات جزئی $u$ نسبت به $x_i$ ها را یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا معادلات دیفرانسیل پاره ای می نامیم.
به عنوان نمونه

$$u + u_x + u_{xy} + uu_{yy} = x^2 y \tag{1}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2}$$

$$u_t = u_{xx} + uu_x \tag{3}$$

$$u_x + u_{xxy} = 0 \tag{4}$$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند.
تعریف ۲: مرتبه معادله دیفرانسیل پاره ای عبارت از بزرگترین مرتبه مشتق جزئی ظاهر شده در آن است. به عنوان نمونه معادله دیفرانسیل پاره ای (۴) یک معادله ی مرتبه ۳ است.
مرتبه نسبت به هر متغیر مستقل به طور مجزا نیز تعریف می شود. مثلا معادله ی (۴) نسبت به $x$ مرتبه ۲ و نسبت به $y$ مرتبه ۱ است.
تعریف ۳ : معادله دیفرانسیل پاره ای را همگن می گوییم اگر جمله ای که فقط وابسته به متغیر های متسقل است، نداشته باشد(برابر با صفر باشد).
معادله (۱) ناهمگن و معادلات (۲) ,(۳) ,(۴) همگن هستند.
تعریف ۴ : یک معادله دیفرانسیل پاره ای را خطی می گوییم اگر ضریب $u$ و مشتقات جزئی آن فقط تابعی از متغیر های مستقل باشند. معادلات (۲) و (۴) خطی و معادلات (۱) و (۳) به ترتیب به خاطر وجود جملات $uu_{yy}$ و $uu_x$ غیر خطی هستند.
در درس ریاضی مهندسی چند نمونه از معادلات خطی (ضریب ثابت) را بررسی می کنیم.
این معادلات عبارتند از :

۱. معادله حرارت : $u_t = \alpha u_{xx}$

۲. معادله موج (مدل سازی نوسان در یک طناب) : $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

۳. معادله ی لاپلاس (انتقال حرکت پایا در یک صفحه) : $u_{xx} + u_{yy} = ۰$

۴. معادله ی تیر : $u_{tt} = au_{xxxx}$

نکته : هر مساله ی PDE برای داشتن جواب یکتا، نسبت به متغیر به تعداد مرتبه آن شرط اولیه نیاز دارد.
به عنوان نمونه مسئله ی حرارت با داشتن یک شرط اولیه برای $t$ و دو شرط مرزی برای $x$ جواب یکتا دارد.
در ادامه ابتدا سری فوریه و سپس تبدیل فوریه را می بینیم.

## مدل سازی مسائل حرارت، لاپلاس و موج

### انتقال حرارت در یک میله ی فلزی

pic : todo

داریم

$$(KA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} - KA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x})\Delta t = mc_p(u(x,t+\Delta t) - u(x,t))$$

و

$$m = \rho\Delta v = \rho A\Delta x$$

پس

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}\Delta x \\ u(x,t+\Delta t) - u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \end{cases} \Rightarrow KA\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}\Delta x\Delta t = m\rho A\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t\Delta x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{m\rho}\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$$

پس اگر تعریف کنیم $\alpha := \frac{k}{m\rho}$ متوجه می ش ویم که

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

$$u(۰,t) = u(L,t) = ۰$$

$$u(x,۰) = f(x)$$

اگر هم این مسئله را در ۲ بعد بررسی کنیم، خواهیم داشت

pic : todo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲})$$

### معادله لاپلاس، انتقال حرارت پایا (steady state)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ۰$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲})$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$$

پس داریم

$$\begin{aligned}&u_{xx}+u_{yy}=0\\&u_x(0,y)=u_x(a,y)=0\\&u(x,0)=f(x)\\&u(x,b)=g(x)\end{aligned}$$

**موج (نوسان طناب)**

todo : pic

با توجه به اصل Hooke داریم

$$F=k[u(x+2\Delta x)-u(x+\Delta x)]-k[u(x+\Delta x)-u(x)]=ma=m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

pic : todo

داریم $L=n\Delta x$ و $M=nm$ و $K=\frac{k}{n}$ حال با توجه به رابطه قبلی داریم

$$\begin{aligned}k(u(x+2\Delta x,t)-2u(x+\Delta x,t)+u(x,t))&=m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ \Rightarrow u_{tt}&=\frac{k}{m}u_{xx}(\Delta x)^2\\ \Rightarrow u_{tt}&=\frac{k(\Delta x)^2}{m}u_{xx}\\ \Rightarrow u_{tt}&=\frac{nK\frac{L^2}{K^2}}{\frac{M}{n}}u_{xx}\\ \Rightarrow u_{tt}&=\frac{KL^2}{M}u_{xx}\end{aligned}$$

تعریف می کنیم $c^2=\frac{KL^2}{M}$ .

پس داریم

$$\begin{aligned}&u_{tt}=c^2u_{xx}\\&u(0,t)=u(L,t)=0\\&u(x,0)=f(x)\\&u_t(x,0)=g(x)\end{aligned}$$

اگر هم این مسئله را در ۲ بعد بررسی کنیم، خواهیم داشت

pic : todo

$$u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy})$$

## سری فوریه

۱) تابع پیوسته و متناوب $f$ با دوره تناوب $۲\pi$

اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته و متناوب با دوره ی تناوب $۲\pi$ باشد، ضرایب $a_k, a_۰$ و $b_k$ موجودند به طوری که به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم

$$f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_۰}{۲}dx+\sum_{k=۱}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}a_k cos(kx)dx+\sum_{k=۱}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}b_k sin(kx)dx \tag{۵}$$

همچنین داریم

$$a_۰=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \tag{۶}$$

$$a_k=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cos(kx)dx \tag{۷}$$

$$b_k=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sin(kx)dx \tag{۸}$$

اثبات ــ برای محاسبه ضریب $a_۰$ ، کافی است از طرفین (۵) در بازه ی $[-\pi,\pi]$ انتگرال بگیریم :

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_۰}{۲}dx+\sum_{k=۱}^{\infty}a_k int_{-\pi}^{\pi}cos(kx)dx+\sum_{k=۱}^{\infty}b_k int_{-\pi}^{\pi}sin(kx)dx$$

همچنین داریم :

$$\int_{-\pi}^{\pi}cos(kx)dx=\left.\frac{sin(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}=۰$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}sin(kx)dx=۰$$

دقت کنید که دلیل رابطه آخر این است که $sin(kx)$ تابعی فرد است و بازه انتگرال گیری متقارن است. بنابراین داریم

$$f(x)=\frac{a_۰}{۲}(۲\pi)+۰+۰\Rightarrow a_۰=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

حال برای محاسبه ضرایب $a_j$ ، ابتدا طرفین تساوی (۵) را در $cos(jx)$ ضرب می کنیم و سپس در بازه ی $[-\pi,\pi]$ انتگرال می گیریم :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(jx)dx \ &= \frac{a_۰}{۲}\int_{-pi}^{\pi} cos(jx)dx + \sum_{k=۱}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)cox(jx)dx \\ &+\sum_{k=۱}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)cox(jx)dx \\ &+\sum_{k=۱}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)sin(jx)dx\end{aligned}$$

از طرفی برای هر عدد صحیح $j \neq ۰$ داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(jx)dx = \left.\frac{sin(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} = ۰$$

وبرای هر $j,k$ صحیح، با توجه به فرد بودن تابع $sin(kx)cos(jx)$ داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin(kx)cos(jx)dx = ۰$$

و همچنین داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)cox(jx)dx = \begin{cases}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{۱}{۲}[cos((k+j)x)+cos((k-j)x)]if k\neq j \\ \int_{-\pi}^{\pi}\frac{۱+cos(۲jx)}{۲}dx if k=j\end{cases} = \begin{cases}۰ if k\neq j \\ \pi if k=j\end{cases}$$

و بنابراین متوجه می شویم که برای هر $j\in\mathbb{N}$ داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(jx)dx = ۰ + a_j\times\pi + ۰ \Rightarrow a_j = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(jx)dx$$

به طور مشابه با ضرب طرفین (۵) در $sin(jx)$ و انتگرال گیری در بازه $[[-\pi,\pi]$ می توان نشان داد که برای هر $j\in\mathbb{N}$ ، $b_j = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(jx)dx$ است.

مثال_ سیگنال مثلثی

$$f(x) = \begin{cases}\pi - x if ۰ \leq x \leq \pi \\ \pi + x if -\pi \leq x \leq ۰\end{cases} \quad , f(x+۲\pi) = f(x)$$

حل-

$$\begin{aligned}
a_{۰} &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{۱}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{۰} \pi - x\, dx + \int_{۰}^{\pi} \pi + x\, dx\right) \\
&= \frac{۱}{\pi}\left(\left.\frac{(\pi+x)^{۲}}{۲}\right|_{-\pi}^{۰} + \left.\frac{-(\pi-x)^{۲}}{۲}\right|_{۰}^{\pi}\right) \\
&= \frac{۱}{\pi}\left(\frac{\pi^{۲}}{۲} - ۰ + ۰ + \frac{\pi^{۲}}{۲}\right) = \pi \\
a_k &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx \\
&= \frac{۱}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{۰} (\pi+x)cos(kx)dx + \int_{۰}^{\pi} (\pi-x)cos(kx)dx\right) \\
&= \frac{۱}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{۰} xcos(kx)dx - \int_{۰}^{\pi} (xcos(kx)dx\right) + \int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)dx
\end{aligned}$$

که در آن

$$\int_{-\pi}^{۰} xcos(kx)dx = \left.\frac{xsin(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{۰} - \int_{-\pi}^{۰} \frac{sin(kx)}{k}dx = \frac{۱-(-۱)^k}{k^{۲}}$$

$$\int_{۰}^{\pi} xcos(kx)dx = \left.\frac{xsin(kx)}{k}\right|_{۰}^{\pi} - \int_{۰}^{\pi} \frac{sin(kx)}{k}dx = \frac{(-۱)^k-۱}{k^{۲}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)dx = ۰$$

بنابراین

$$a_k = \frac{۱}{\pi}\frac{۲}{k^{۲}}\left(۱-(-۱)^k\right) = \begin{cases} ۰ if k = ۲n \\ \frac{۴}{\pi(۲n-۱)^{۲}} if k = ۲n-۱ \end{cases}$$

و

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)dx \\
&= \frac{۱}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{۰} (\pi+x)sin(kx)dx + \int_{۰}^{\pi} (\pi-x)sin(kx)dx\right) \\
&= \frac{۱}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{۰} xsin(kx)dx - \int_{۰}^{\pi} xsin(kx)dx\right) + \int_{-\pi}^{\pi} sin(kx)dx
\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{۰} xsin(kx)dx = -\left.\frac{xcos(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{۰} + \int_{-\pi}^{۰} \frac{cos(kx)}{k}dx = \frac{\pi(-۱)^{k+۱}}{k} \\
&\int_{۰}^{\pi} xsin(kx)dx = -\left.\frac{xcos(kx)}{k}\right|_{۰}^{\pi} + \int_{۰}^{\pi} \frac{cos(kx)}{k}dx = \frac{\pi(-۱)^{k+۱}}{k} \\
&\int_{-\pi}^{\pi} sin(kx)dx = ۰
\end{aligned}$$

پس $b_k = ۰$ است. پس

$$f(x) = \frac{\pi}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴}{n(۲n-۱)^۲} cos(۲n-۱)x$$

*توجه : نمودار $f(x)$ در مثال ۱ بصورت todo است. بنابراین $f(x)$ تابعی زوج است و در رابطه (۸) از زوج بودن $f$ و فرد بودن تابع $sin(kx)$ نتیجه می شود که $b_k = ۰$. پس توجه به زوج یا فرد بودن سیگنال $f(x)$ محاسبات ضرایب سری فوریه را ساده می کند. بعدا در مورد این نکته مفصل صحبت می کنیم.

توجهـ اگر تابع $f(x)$ پیوسته و با دوره تناوب $۲\pi$ بوده و در نقطه ی $x_۰$ دارای ناپیوستگی نوع اول باشد، آنگاه سری فوریه ی $f$ در $x_۰$ به میانگین حد چپ و راست همگراست.

مثال۱ : سری فوریه ی تابع $(f(x))$ با ضابطه ی زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} ۰ if ۰ \leq x \leq \pi \\ \pi if -\pi \leq x \leq ۰ \end{cases} \quad , f(x+۲\pi) = f(x)$$

حلـ

$$a_۰ = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi} \pi dx = \pi$$
$$a_k = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi} \pi cos(kx)dx = ۰$$
$$b_k = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)dx = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi} \pi sin(kx)dx = \frac{۱-(-۱)^k}{k}$$