ساختمان داده‌ها (۲۲۸۲۲)

مدرس: حسین بومری

[زمستان ۹۹]

سوال ۸: دیکشنری نگارنده: آئیریا محمدی

الف) فرض کنیم تعداد اعضایی که نگهداری می‌کنیم n باشد.

دو حالت مرزی را بررسی می‌کنیم: این که n طوری باشد که تمام آرایه های به طول توان ۰ تا k از ۲ پر باشند.

و حالت دیگر این که تنها یک آرایه به طول $n = ۲^k$ پر باشد.

در حالت اول مرتبه زمانی برای می‌شود با $T(n) = \sum_{i=۱}^{k} log۲^i = \sum_{i=۱}^{k} i = O(k^۲)$

و چون $n = ۱ - ۲^{k+۱}$ داریم $\sum_{i=۱}^{k} ۲^i = ۲^{k+۱} - ۱ = n$ پس $k \in log(n)$ $T(n) = log^۲ n$

در حالت دوم نیز $T(n) = log۲^k = log(n)$

هر عدد دیگر هم یک نتیجه بینابین این دو T دارد (بعضی از آرایه ها از اندازه های کوچک پر است و بعضی از آرایه های بزرگ) و در بدترین حالت مرتبه زمانی از $log^۲ n$ می‌باشد.

ب)

بدترین حالت بدترین حالت زمانی رخ می‌دهد که $n = ۲^k - ۱$. در این حالت تمام آرایه ها پر است و با اضافه شدن عضو جدید (آرایه به طول یک) به طور زنجیری آرایه ها با هم ادغام می‌شوند تا آرایه به طول ۲^k تشکیل شود. هزینه ادغام هر دو آرایه با اندازه یکسان از مرتبه اندازه‌شان است و اندازه هر آرایه هم توانی از دو است پس خواهیم داشت:

$$T(n) = \sum_{i=۰}^{k-۱} ۲^i = ۲^k - ۱ = n \in O(n)$$

تحلیل سرشکن عدد $M = ۲^k$ را نزدیک ترین عدد به N در نظر بگیریم که $N < M$.

می‌دانیم با اضافه کردن آخرین (M امین) عضو در اخرین مرحله ادغام‌های زنجیری آرایه ها باید دو آرایه به اندازه $۲^{k-۱}$ با هم در مرتبه اندازه شان (۲^k) ادغام شوند. از طرفی می‌دانیم برای شکل گرفتن هر کدام از این دو آرایه به اندازه $۲^{k-۱}$ باید دو آرایه با اندازه $۲^{k-۲}$ در مرتبه $۲^{k-۱}$ با هم ادغام شوند . پس برای دو آرایه ادغام شونده به ۲^k جمعا $۲^k = ۲^{k-۱} * ۲$ هزینه می‌شود. برای ساختن خود آرایه های اندازه کوچک تر نیز به طریق مشابه خواهد بود که مرتبه هزینه ادغام نصف اما تعداد آرایه ها به آن اندازه دوبرابر می‌شود و در نتیجه هزینه کل برابر خواهد بود با

$$T(N) \leq T(M) = \sum_{i=۰}^{k} ۲^k = k \cdot ۲^k \xrightarrow{k=logM} MlogM$$

هزینه سرشکن نیز برای اضافه کردن هر یک از M عضو برابر با $\frac{MlogM}{M} = logM$ خواهد بود . اضافه کردن N عضو از مرتبه مشابهی خواهد بود .