دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ ریاضی

ساختمان‌داده‌ها

بهار ۱۴۰۰

استاد: حسین بومری
گردآورنده:علی سرائر

جلسهٔ پنجم

مرور جلسه قبل

در جلسه قبل عبارات زیر تعریف شدند:
- حد بالا: O
- حد پایین: Ω
- هم‌رده: θ
- حدّبالای‌اکید: o

دوباره تعریف $o(B)$ را مرور می‌کنیم:

$$\forall C_1 \,\&\, C_2 > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow C_1 A(n) + C_2 < B(n)$$

عبارت بالا به این معنی است که می‌توان با ضرب یک عدد ثابت در تابع A، و یا با جمع آن با یک عدد ثابت ، مقدار آن در هر نقطه را می‌توان از مقدار تابع B در آن نقطه کمتر کرد.

مثال:

$$n^a \in o(n^{a+4})$$

برای جلوگیری از یک سوءتفاهم. بیایید O و o را با هم مقایسه کنیم. اگر داشته باشیم:

$$A \in o(B)$$

به این معنی است که رشد تابع A پس از یک n مشخصی، همواره اکیدا کمتر از رشد تابع B است.
اما اگر داشته باشیم:

$$A \in O(B)$$

به این معنی است که رشد تابع A پس از یک n مشخصی، همواره کمتر و یا مساوی رشد تابع B است.

مثال:

$$n^2 \in O(n^2) \quad \& \quad n^2 \notin o(n^2)$$
$$n^2 \in O(n^3) \quad \& \quad n^2 \in o(n^3)$$

برای جا افتادن بیشتر مطالب جلسه قبل چند قضیه زیر را برای مثال می‌آوریم:

- اگر

$$F \in O(G)$$

داریم:

$$F + G \in O(G)$$

- اگر

$$F \in o(G)$$

داریم:

$$F + G \in O(G)$$
$$F + G \notin o(G)$$
$$F + G \in \Omega(F)$$
$$F \notin \Omega(G)$$

- اگر

$$F \in O(G)$$

داریم:

$$F - G \in O(G)$$

اما نمی توان به راحتی در مورد $\Omega(F)$ نظر داد. مثلا به ازای $F = ۳n^۲ \,\&\, G = ۲n^۲$ داریم

$$F - G \in \Omega(F)$$

اما اگر قرار دهیم $F = G = n$

$$F - G = ۰ \notin \Omega(F = n)$$

از قضایای بالا می‌توان عبارت زیر را به راحتی نشان داد:

$$n^d + n^{d-\epsilon} + n^{d-\alpha} \in \begin{cases} O(n^d) \\ \Omega(n^d) \end{cases} \Rightarrow n^d + n^{d-\epsilon} + n^{d-\alpha} \in \theta(n^d)$$

رشد توابع لگاریتمی:

می‌دانیم:

$$۱ < logn \Rightarrow ۱ \in o(logn)$$

همچنین داریم:

$$\begin{cases} \frac{d}{dn}(logn) = \frac{۱}{n} \\ \frac{d}{dn}(n^\epsilon) = \epsilon n^{\epsilon-۱} \geq \frac{۱}{n} \end{cases} \Rightarrow log\, n \in O(n^\epsilon) \quad (۱)$$

عبارت فوق برای هر ϵ درست است، بنابراین هر چقدر که اپسیلون را به صفر نزدیک کنیم، باز هم عبارت بالا درست است. بنابراین می‌توان به این نتیجه رسید که رشد تابع لگاریتمی از هر توانی از n اکیدا کمتر است. در نتیجه می‌توان گفت:

$$log\, n \in o(n^\epsilon)$$

یک سوال:
اگر داشته باشیم $b < a$ آیا $\frac{log_a n}{log_b n} \in O(۱)$ ؟

جواب: خیر.
می‌دانیم

$$\frac{log_b n}{log_b a} = log_a n = clog_b n \quad c = \frac{1}{log_b a}$$

نتیجه: اختلاف پایهٔ دو لگاریتم، در حدَ یک ضریب اثرگذار است.
تا اینجا می‌توان به نتیجه زیر رسید:

$$log\, n < n^d < n$$

حال می‌خواهیم نشان دهیم

$$n^d < n^d log\, n < n$$

قضیه:
ضرب دو تابع : F, G

$$F, G \in O(F \times G)$$

و اگر داشته باشیم $1 \in o(F) \quad \& \quad 1 \in o(G)$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$F, G \in o(F \times G)$$

با استفاده از این قضیه عبارت بالا بدیهتا درست است. بنابراین:

$$log\, n < log^2 n < n^d < n^d log\, n < n^{d+\epsilon}$$

حال می‌خواهیم این توابع را با تابع 2^n مقایسه کنیم. 2^n از همهٔ این‌ها بزرگ‌تر است. راه اثبات آن نیز مانند $log\, n$ است، اگر از آن در مقایسه با توابع دیگر مشتق بگیریم، می توانیم به این نتیجه برسیم که از یک جایی مشتق مرتبه‌های بالاتر 2^n از همهٔ مشتقات دیگر بزرگ‌تر می‌شود.
برای $n!$ نیز داریم:

$$(2^{n+1} = 2 \times 2^n)$$
$$(n+1)! = (n+1)n!$$

از آنجا که برای n های بزرگ تر از یک جایی $2 < n + 1$ یا برای هر ثابت دیگری مانند a نیز داریم $a < n + 1$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$2^n < n! \quad \& \quad a^n < n! \tag{2}$$

حالا می‌توانیم تابع n^n را نیز در نظر بگیریم. داریم:

$$\begin{cases} n^n = n \times n \times \cdots \times n \\ n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 \end{cases} \Rightarrow n! < n^n$$

بنابراین تا اینجا،همهٔ نتایج در کنار هم به صورت زیر در می‌آیند:

$$log\, n < log^2 n < n^d < n^d log\, n < n^{d+\epsilon} < 2^n < n! < n^n$$

دو قاعده

- قاعدهٔ ضرب:

$$\begin{cases} F_1 \in O(F_2) \\ G_1 \in O(G_2) \end{cases} \Rightarrow F_1 \times G_1 \in O(F_1 \times G_2)$$

- ترکیب توابع:
سوالی که اینجا می‌توان مطرح کرد این است که آیا قاعده‌ای مانند قاعدهٔ ضرب در ترکیب توابع برقرار است؟
یعنی آیا می‌توان گذاره زیر را بیان کرد؟

$$F \in o(G) \overset{?}{\Rightarrow} log\, F \in o(log\, G)$$

جواب این سؤال منفی است. به عنوان مثال می‌توان $F = n^۲$ و $G = n^۳$ را امتحان کرد و به تناقض رسید.

یک مثال
قبل از خاتمهٔ این جلسه، یک مثال دیگر را با هم بررسی می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} & n! < n^n \\ & \rightarrow log\, n! \in O(nlog\, n) \\ & \rightarrow log\, n! \in \Omega(n) \end{aligned} \tag{۳}$$

همچنین داریم:

$$\begin{cases} (\frac{n}{۲})^{\frac{n}{۲}} = \overbrace{\frac{n}{۲} \times \frac{n}{۲} \times \cdots \times \frac{n}{۲}}^{\frac{n}{۲}} \\ n! = ۱ \times ۲ \times \cdots \times \frac{n}{۲} \times \underbrace{\frac{n+۲}{۲} \times \cdots \times \frac{۲n}{۲}}_{\frac{n}{۲}} \end{cases} \Rightarrow (\frac{n}{۲})^{\frac{n}{۲}} < n!$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow (\frac{n}{۲})^{\frac{n}{۲}} \in O(n!) \\ & \Rightarrow \frac{n}{۲} log\, \frac{n}{۲} \in O(log\, n!) \end{aligned}$$

از آنجا که $\frac{n}{۲} log\, \frac{n}{۲} \in \theta(nlog\, n)$ داریم:

$$\begin{aligned} & n\, log\, n \in O(log\, n!) \\ & \Rightarrow log\, n! \in \Omega(nlog\, n) \end{aligned} \tag{۴}$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$\xRightarrow{(۳)\,\&\,(۴)} log\, n! \in \theta(nlog\, n) \tag{۵}$$