Master Mathématiques Appliquées pour l'Ingénierie et l'Innovation (MAII)

Modélisation numérique / Analyse numérique matricielle

Pr. Ahmed Toukmati

2023-2024

Département des Mathématiques
Faculté des Sciences et Thechniques - Al Hoceïma
Université Abd Elmalek Essadi

Table des matières

Chapitre 1

Analyse numérique matricielle

1.1 Rappel sur les matrices

1.1.1 Notations

Ce paragraphe a pour but de fixer les notations qui seront utilisées tout au long de ce cours.

- L'espace des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) à m lignes et n colonnes sera noté par $M_{nm}(\mathbb{K})$.
- Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{nm}(\mathbb{K})$; i est l'indice de lignes, et j et l'indice de colonnes.
- Si $a_{ij} = 0$ pour tous $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la matrice $A = (0)$ est appelée matrice nulle qu'on la note
$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$
- La matrice
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$
est appelée la matrice identité.
- La matrice ligne $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in M_{1m}(\mathbb{K})$.
- La matrice colonne $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{K})$.
- Si $m = n$ alors la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite matrice carrée, est l'ensemble des matrices carrée de taille n, sera noté par $M_n(\mathbb{K})$.
- Une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $j < i$ est on a :
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ est triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$ est on a :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est dite diagonal si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$ est on note :

$$D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1. *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \in M_{mn}(\mathbb{K})$. La **transposé** de A est la matrice notée A^T est définie par $A^T = (a_{ji})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$.*

Exemple 1.1. *1.* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2} & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$; $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Remarque 1.1. *Si $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, alors $A^T \in M_{nm}(\mathbb{K})$.*

Proposition 1.1. *Soient $A, B \in M_{mn}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :*
- $(AB)^T = B^T A^T$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Définition 1.2. *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \in M_{mn}(\mathbb{K})$. Le **conjugué** de A, est la matrice $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$.*

Exemple 1.2. *1.* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$.

2. $B = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 1+i & 1+2i \end{pmatrix}$; $\bar{B} = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 1-i & 1-2i \end{pmatrix}$.

Définition 1.3. *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \in M_{mn}(\mathbb{K})$. L'**adjoint** de A, est la matrice $A^* = \bar{A}^* = (\bar{a}_{ji})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$.*

Exemple 1.3. *1.* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$.

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$; $B^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.2. *Soient $A, B \in M_{mn}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :*
- $(AB)^* = B^* A^*$;

— $(A+B)^* = A^* + B^*$;
— $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$.

Définition 1.4. — *Une matrice carrée* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *est dite* ***inversible***, *s'il existe une matrice carrée* B *tel que* $AB = BA = I_n$.
— *L'ensemble des matrices carrée de* $M_{mn}(\mathbb{K})$, *sera noté* $GL_n(\mathbb{K})$.
— *Si* A *n'est pas inversible, on dit que* A *est* ***singulière***.

Exemple 1.4. 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 1.2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. *On rappel que* $\det(A) = ad - bc$. *Si* $\det(A) \neq 0$, *alors* A *est inversible et*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Alors* $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.3. *Soient* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ *deux matrices inversibles. Alors*
— $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
— $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$;
— $(A^{-1})^{-1} = A$;
— $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

1.1.2 Déterminant - Trace d'une matrice.

Définition 1.5. *Soit* A *une matrice carrée, le* ***déterminant*** *de* A, *qu'on le note* $\det(A)$ *ou encore* $|A|$, *est une forme multilinéaire alternée de colonnes de* A.

Exemple 1.5. 1. *On considère la matrice carrée suivant :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 15 - 6 - 4(6-3) = 15 - 6 - 24 + 12 = -3 \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi A *est inversible.*

2. *Soit la matrice carrée suivante :*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

après calcule on trouve $\det(B) = 0$. *D'où* B *est singulière.*

Proposition 1.4. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. $\det(A^T) = \det(A)$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. $\det \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) = \prod_{i=1}^n d_i$.
5. $\det(I_n) = 1$.

Proposition 1.5. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. A inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

Proposition 1.6. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible, alors* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Définition 1.6. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. Le réel* $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ *est appelé la **trace** de A.*

Exemple 1.6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \operatorname{Tr}(A) = 5.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ \operatorname{Tr}(B) = 10.$$

Proposition 1.7. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. $\operatorname{Tr}(A + B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$;
2. $\operatorname{Tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{Tr}(A)$.
3. $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Remarque 1.3. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, en générale* $\operatorname{Tr}(AB) \neq \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B)$.

1.1.3 Mineurs et cofacteurs

Définition 1.7. *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de $M_n(\mathbb{K})$.*

- *Le **mineur** de l'élément a_{ij} est le déterminant de la matrice obtenu après avoir retiré la i^{me} ligne et la j^{me} colonne de A qu'on le note :*

$$M_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- *Le **cofacteur** de l'élément $a_{i,j}$ noté $c_{i,j}$ est égale à :*

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}.$$

- *La **comatrice** de $A = (a_{i,j})$ est définie par $Com(A) = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.*

Exemple 1.7. *1. On considère la matrice suivante* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Alors :* $M_{1,1} = |4| = 4$, $M_{1,2} = |3| = 3$, $M_{2,1} = |2| = 2$ *et*

$$Com(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On considère la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} Com(B) &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -12 & -5 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposition 1.8. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$. *Alors*

- $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} c_{i,j}$.
- *Si* $\det(A) \neq 0$, *alors* $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Com(A)^T$.

Exemple 1.8. *On considère la matrice carrée de taille* $n = 3$ *suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (1 \times 0) - (0 \times 0) + 3 \times (4 + 1) = 15. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Com(A) &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Com(A)^T = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1.4 Matrices particulière

Matrice symétriques

Définition 1.8. *Soit A une matrice carrée de $M_n(\mathbb{K})$. Alors*

- *On dit que A est une matrice **symétrique** si $A = A^T$.*
- *On dit que A est une matrice **anti-symétrique** si $A = -A^T$.*

Remarque 1.4. *Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K})$, alors*

$$A \text{ est symétrique si et seulement si } a_{i,j} = a_{j,i}\ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Exemple 1.9.
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *;* $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*, ainsi A est symétrique.*
- $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ *;* $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$*, ainsi B est symétrique.*

Remarque 1.5. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice AA^T est symétrique. En effet : $(AA^T) = (A^T)^T A^T = AA^T$, d'où AA^T est symétrique.*

Remarque 1.6. *Si A et B sont deux matrice symétrique alors AB n'est pas forcément symétrique. En effet, considérant les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Clairement A et B sont symétrique tandis que AB n'est pas symétrique puisque $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Proposition 1.9. *Soient A et B deux matrices symétrique dans $M_n(\mathbb{K})$. Alors*

$$AB \text{ symétrique si et seulement si } AB = BA.$$

Matrice hermitienne

Définition 1.9. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice A est dite **hermitienne** si $A^* = A$.*

Exemple 1.10.
- *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a : $A^* = \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$, d'où A est hermitienne.*
- *Considérant la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$. On a $A^* = \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} = A$, d'où A est hermitienne.*

Remarque 1.7. *Si A et B sont deux matrice hermitienne, alors AB n'est pas forcément une matrice hermitienne.*

$$AB \text{ est hermitienne si et seulement si } AB = BA.$$

Ainsi les deux matrices suivantes ne sont pas hermitienne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

puisque

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = BA.$$

Matrice orthogonale

Définition 1.10. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est dite **orthogonal** si $AA^T = A^T A = I_n$.*

Exemple 1.11. *On considère la matrice A suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Clairement :

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } AA^T = A^T A = I_2 \text{ et } A \text{ orthogonale.}$$

Remarque 1.8. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

1. *A est orthogonal si et seulement si $A^{-1} = A^T$.*
2. *Si A est orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$. En effet,*

$$1 = \det(I_n) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2.$$

Théorème 1.1 (Caractérisation d'une matrice orthogonale)**.** *Une matrice est orthogonale si et seulement si, les colonnes (ou les lignes) de la matrice (vues comme des vecteurs) sont unitaires et deux-à-deux orthogonales.*

Exemple 1.12. *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On pose :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \; et \; Y = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On a $\|X\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, $\|Y\| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ *et* $\langle X, \rangle = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$. *Ainsi* A *est une matrice orthogonale.*

Exemple 1.13. *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

On pose :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \; et \; Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

On a $\|X\| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{4}{5} + \frac{1}{30}} = 1$, $\|Y\| = \sqrt{\frac{4}{6} + \frac{1}{5} + \frac{4}{30}} = 1$ *et* $\|Z\| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{5}{30}} = 1$ $\langle X, \rangle = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$. *Ainsi* A *est une matrice orthogonale. De même si on considère les vecteurs de lignes au lieu des vecteurs colonnes.*

Exemple 1.14. *Soit la matrice* A *de* $M_3(\mathbb{R})$ *définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Alors A *est une matrice orthogonale (Les détails sont laissés au lecteur à titre d'exercice).*

Proposition 1.10. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$. *Si est une matrice orthogonale, alors* $(AX)^T(AX) = X^TX$ *pour tout* $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Remarque 1.9. *Soit* $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. *Si on pose :* $\|X\| = X^TX$ *et si* A *est une matrice orthogonale alors* $\|AX\| = \|X\|$*(On dit que* A *conserve la norme).*

Proposition 1.11. *Si* A *et* B *deux matrices orthogonale, alors* AB *l'est aussi.*

Démonstration. Soient A et B deux matrices orthogonale de $M_n(\mathbb{K})$. Alors

$$AA^T = A^TA = I \text{ et } BB^T = B^TB = I.$$

Ainsi

$$(AB)(AB)^T = ABB^TA^T = AA^T = I \text{ et } (AB)^TAB = B^TA^TAB = B^TB = I,$$

d'où AB est orthogonale. ☐

Matrice unitaire

Définition 1.11. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est dite* ***unitaire*** *si $AA^* = A^*A = I$.*

Exemple 1.15. *1. $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; $A^* = \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Alors*

$$AA^* = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

et

$$A^*A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix},$$

d'où A est normale.

Remarque 1.10. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*
- *Si A est unitaire, alors A est normale.*
- *Si A est hermitienne, alors A est normale.*

1.2 Valeurs propres - Vecteurs propres

Définition 1.12. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*
- *$\lambda \in \mathbb{C}$ est une* ***valeur propre*** *de A, s'il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$.*
- *Le vecteur X est appelé* ***vecteur propre*** *de A associé à λ.*
- *L'ensemble des vecteurs propres de A associé à λ est noté par E_λ :*

$$E_\lambda = \{X \in \mathbb{K}^n \ / \ AX = \lambda X\}.$$

Exemple 1.16.
- *On considère la matrice et le vecteurs suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

X est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = -2$.

- *Cherchons les valeurs propres associé a la valeur propre $\lambda = 7$, c-à-d cherchons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que : $AX = 7X$. On a :*

$$\begin{aligned} AX = 7X \iff & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{cases} x + 3y + 3z = 7x \\ -2x + 11y - z = 7y \\ 8x - 7y + 6z = 7z \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} -6x + 3y + 3z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ 8x - 7y - z = 0 \end{cases} \\ \iff & x = y = z. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x = y = z \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (\dim E_\lambda = 1). \end{aligned}$$

Exemple 1.17. *Soit A la matrice donné par :*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

On a :

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1.*
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_2.*
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_3.*

Définition 1.13. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le* ***spectre*** *de A qu'on note $Sp(A)$:*

$$Sp(A) = \{\lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

Proposition 1.12. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors*

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff \det(A - \lambda_n) = 0.$$

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(A) &\iff \exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \text{ tel que } AX = \lambda X \\ &\iff \exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \text{ tel que } (A - \lambda I)(X) = 0 \\ &\iff A - \lambda \text{ n'est pas injective} \\ &\iff A - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I) = 0. \end{aligned}$$

□

Définition 1.14. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le* ***polynôme caractéristique*** *de A que l'on note $P_A(X)$ est donné par : $P_A(X) = \det(A - XI)$.*

Exemple 1.18. *1. Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Alors :*

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_2) \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 3 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(4-X) - 6 \\ &= 4 - X - 4X + X^2 - 6 \\ &= X^2 - 5X - 2. \end{aligned}$$

2. Soit A la matrice définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P_B(X) &= \det(A - XI_2) \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & 3 & 3 \\ -2 & 11-X & -2 \\ 8 & -7 & 6-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\begin{vmatrix} 11-X & -2 \\ -7 & 6-X \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 11-X & -2 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 11-X & -2 \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\big[(11-X)(6-X) - 14\big] + 2\big[3(6-X) + 21\big] + 8\big[-6 - 33 + 3X\big] \\ &= (1-X)(X^2 - 17X + 52) + 2(-3X + 39) + 8(3X - 39) \\ &= -X^3 + 18X^2 - 51X - 182 \\ &= -(X+2)(X-7)(X-13). \end{aligned}$$

Proposition 1.13. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$. *Alors*

$$\lambda \in Sp(A) \text{ si et seulement si } P_A(\lambda) = 0.$$

Ainsi $Sp(A) = \{$ *racines de* $P_A(X)\}$.

Remarque 1.11. *1. Si* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. *Alors*

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-X \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}-X)(a_{22}-X) - a_{21}a_{12} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{11}X - a_{22}X + X^2 - a_{21}a_{12} \\ &= X^2 - (a_{11}+a_{22})X + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ &= X^2 - Tr(A)X + \det(A). \end{aligned}$$

2. Si A est une matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_2) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-X & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-X \end{vmatrix} \\ &= -X^3 + Tr(A)X^2 - (A_{11}+A_{22}+A_{33})X + \det(A), \end{aligned}$$

où A_{ii} *est le cofacteur associé à* a_{ii} *(déterminant de la matrice* (i,i) *où on a enlevé la* i^{me} *ligne et* i^{me} *colonne. C'est-à-dire :*

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23},$$

et

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}.$$

Si $A \in M_4(\mathbb{K})$*.* $P_A(X) = X^4 - Tr(A)X^3 + \cdots + \det(A)$*.*

Si $A \in M_5(\mathbb{K})$*.* $P_A(X) = -X^5 - Tr(A)X^4 + \cdots + \det(A)$*.*

Remarque 1.12. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$*.* $P_A(X)$ *est un polynôme de degré* n*, à coefficients réels si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, et à coefficients complexes si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*. Il est toujours de la forme :*

$$P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} Tr(A) X^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

Exemple 1.19. *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

alors $P_A(X) = -X^3 + 6X^2 - 6X - 1$*.*

Remarque 1.13. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$*.*

- *La somme des valeurs propres de* A *est égale à* $Tr(A)$*.*
- *Le produit de valeurs propres de* A *est égale à* $\det(A)$*.*
- $\det(A) = P_A(0)$*.*

Exemple 1.20. *On considère la matrice* A *suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $P_A(X) = -X(X-1)(X-3)$ *et* $Sp(A) = \{0, 1, 3\}$*.*

Proposition 1.14. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$*. Alors*

- A *est inversible si et seulement si* $0 \notin Sp(A)$*.*
- *Si* A *est inversible alors* $Sp(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \ / \ \lambda \in Sp(A) \right\}$*.*

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{aligned} P_{A^{-1}}(X) &= \det(A^{-1} - XI) \\ &= \det(A^{-1} - A^{-1}AX) \\ &= \det(A^{-1})\det(I - AX) \\ &= \det(A^{-1}\det(-(AX - I)) \\ &= \det(A^{-1})\det\left(-X\left(A - \frac{1}{X}I\right)\right) \\ &= (-1)^n\det(A^{-1})\det\left(A - \frac{1}{X}I\right), \end{aligned}$$

d'où $P_{A^{-1}}(X) = \frac{(-X)^n}{\det(A)} P_A\left(\frac{1}{X}\right)$. Ainsi $P_{A^{-1}}(\lambda)$ si et seulement si $P_A\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$. □

Proposition 1.15. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A et A^T ont le même polynôme caractérisation, c'est -à-dire $P_A(X) = P_{A^T}(X)$.*

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{aligned} P_{A^T}(X) &= \det(A^T - XI) \\ &= \det\left((A - XI)^T\right) \\ &= \det(A - XI) \\ &= P_A(X). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.14. *Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Alors*

— $Sp(A + B) \neq Sp(A) + Sp(B)$.
— $Sp(AB) \neq Sp(A)Sp(B)$.

1.2.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique P_A de la matrice A, fournit une information supplémentaire sur A, en fait une relation sur certains puissances de A.

Théorème 1.2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, de polynôme caractéristique P_A. Alors :*

$$P_A(A) = 0.$$

Exemple 1.21. *(Applications : Calcul de puissance de A) Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$. Alors $P_A(X) = X^2 - Tr(A)X + \det(A)$. Donc $P_A(A) = A^2 - Tr(A)A + \det(A)I_2 = 0$, d'où*

$$A^2 = Tr(A)A - \det(A)I_2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A^3 = AA^2 &= A\left(Tr(A)A - \det(A)I_2\right) \\ &= Tr(A)A^2 - \det(A)A \\ &= Tr(A)\left[Tr(A)A - \det(A)I_2\right] - \det(A)A \\ &= Tr(A)^2A - Tr(A)\det(A)I_2 - \det(A)A \\ &= \left(Tr(A)^2 - \det(A)\right)A - Tr(A)\det(A)I_2. \end{aligned}$$

De la même manière on peut calculer $A^4, A^5, \dots, A^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.15. *Soient* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *et* $p \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$Sp(A^p) = \left\{\lambda^p \ / \ \lambda \in Sp(A)\right\}.$$

Définition 1.15. *On dit d'une matrice* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *est* ***nilpotent*** *s'il existe* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $A^m = 0$.

Exercice 1.1. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer* $Tr(A)$ *et* $\det(A)$.
2. *Déterminer le polynôme caractéristique de* A.
3. *Calculer* A^3, A^4 *et* A^5.
4. *Déterminer* A^{-1} *en fonction de* A.

Exercice 1.2. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Donner* $P_A(X)$.
2. *Déterminer* $Sp(A)$.
3. *En déduire* $\det(A)$.
4. *Calculer* A^{-1} *en fonction de* A.
5. *Calculer* $(A - 2I)(A - 4I)$.
6. *En déduire* A^2 *en fonction de* A.
7. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$A^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2^n + 1 & -3(2^n - 1) & 2(2^n - 1) \\ -2^n + 1 & 3 \times 2^n - 1 & -2(2^n - 1) \\ -2^n + 1 & 3(2^n - 1) & 4 - 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.22. *(Application 2 : Calcul de l'inverse d'une matrice). Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice inversible, c-à-dire* $\det(A) \neq 0$. *On a*

$$P_A(X) = (-1)^nX^n + (-1)^{n-1}Tr(A)X^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

Appliquons le Théorème de Cayley-Hamilton on trouve que :

$$(-1)^nA^n + (-1)^{n-1}Tr(A)A^{n-1} + \cdots + \det(A)I_n = 0.$$

Donc

$$(-1)^n A^n + (-1)^{n-1} Tr(A) A^{n-1} + \cdots + A = -\det(A) I_n.$$

Ainsi

$$\frac{-1}{\det(A)} \left[(-1)^n A^n + (-1)^{n-1} Tr(A) A^{n-1} + \cdots + pI_n\right] A = I_n,$$

d'où

$$A^{-1} = \frac{-1}{\det(A)} \left[(-1)^n A^{n-1} + (-1)^{n-1} Tr(A) A^{n-2} + \cdots + pI_n\right].$$

Exemple 1.23. *On considère la suivante définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que* $P_A(X) = -X^3 - X^2 + 10X - 8 = -(X-2)(X-1)(X+4)$.
2. *Déterminer* $Sp(A)$.
3. *Calculer* A^{-1} *en fonction de* A.

On termine ce paragraphe, en posant la question suivante. Est-ce que n'importe quel polynôme peut être un polynôme caractéristique d'une matrice ? La réponse est **oui**. En effet : Soit $P(X) = X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$ un polynôme. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Alors : $P_A(X) = (-1)^n P(X)$.

Exemple 1.24. *On considère le polynôme suivant :* $P(X) = X^2 + 3X + 2$ *et soit* A *une matrice définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On aura :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & -2 \\ 1 & -3-X \end{vmatrix} = -X(-3-X) + 2 = 3X + X^2 + 2 = P(X).$$

Exemple 1.25. *On considère le polynôme suivant :* $P(X) = -X^3 - X^2 + 10X - 8$ *et soit* A *une matrice définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi : $P_A(X) = -X^3 - X^2 + 10X - 8 = P(X)$.

Différentes méthodes pour déterminer le polynôme caractéristiques d'une matrice.

Remarque 1.16. 1. *Soit* $A \in M_2(\mathbb{C})$. *Alors :* $P_A(X) = \det(A - XI_2) = X^2 - Tr(A)X + \det(A)$. *Si* $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, *alors* $P_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$.

2. *Soit* $A \in M_3(\mathbb{C})$, *alors :*

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = -X^3 + Tr(A)X^2 - (M_{11} + M_{22} + M_{33})X + \det(A).$$

Si $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, *alors*

$$P_A(X) = -(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3) \text{ et } M_{11} + M_{22} + M_{33} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3.$$

3. *Cas des matrices triangulaires supérieurs. Soit* A *une matrice carré triangulaire supérieur définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - X & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} - X \end{vmatrix} = (a_{11} - X)(a_{22} - X)(a_{33} - X) \cdots (a_{nn} - X),$$

donc $Sp(A) = \{$ *les termes diagonaux de* $A\}$. *Même chose dans le cas d'une matrice diagonale.*

1.2.2 Cas des matrices diagonales par blocs - Triangulaire par blocs

Proposition 1.16. *Soit* M *une matrice de* $M_{n+p}(\mathbb{K})$ *c'est-à-dire* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *avec* $A \in M_n(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $C \in M_p(\mathbb{K})$. *Alors*

$$\det(M) = \det(A)\det(C).$$

Remarque 1.17. *Cas général qui intervient dans les calcules de sciences de l'ingénieur. Soit* A, B, C *et* D *des matrices carrées de* $M_n(\mathbb{K})$ *telle que :* $DC = CD$. *Soit* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$. *Si* D *est inversible, alors :*

$$\det(M) = \det(AD + BC).$$

Le résultat reste vrai même si D *n'est pas inversible.*

Exemple 1.26. *Considérons la matrice* M *définie par :*

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \end{array}\right).$$

Alors :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (-2) \times (-2) = 4.$$

Proposition 1.17. *Soit A une matrice triangulaire par block telle que :*

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & * \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_p} \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$P_A(X) = P_{A_1}(X)P_{A_2}(X)\cdots P_{A_p}(X),$$

et

$$Sp(A) = Sp(A_1) \cup Sp(A_2) \cup \cdots \cup Sp(A_p).$$

Exemple 1.27. *On considère la matrice par block suivante :*

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \end{array}\right),$$

ici $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. *Alors :*

$$\begin{aligned} P_A(X) &= P_{A_1}(X)P_{A_2}(X) \\ &= (X^2 - 5X - 2)(X^2 - 13X - 2) \\ &= X^4 - 18X^3 + 16X^2 + 36X + 4. \end{aligned}$$

Détermination du polynôme caractéristique

Méthode de Le Verrier

Soit A une matrice carrée de $M_n(\mathbb{C})$. Alors on a :

$$P_A(X) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=1}^{n} a_k X^{n-k} \right).$$

Les coefficients a_k avec $k \in \{11, \dots, n\}$ sont déterminées de la manière suivante :
On pose $S_k = Tr(A^k)$ pour $k = 1, \dots, n$. Les coefficients a_k sont donnés par :

- $a_1 = S_1 = Tr(A)$.
- $2a_2 = S_2 - a_1 S_1$.
- $3a_3 = S_3 - a_1 S_2 - a_2 S_1$.
- $4a_4 = S_4 - a_1 S_3 - a_2 S_2 - a_3 S_1$.

  $\vdots$
- $na_n = S_n - a_1 S_{n-1} - a_2 S_{n-2} - \cdots - a_{n-1} S_1$.

Exemple 1.28.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *alors* $P_A(X) = X^2 - 5X - 2$.
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 5 & 6 & 4 \\ 10 & 10 & 9 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -11 & -12 & -13 \\ 19 & 20 & 13 \\ 38 & 38 & 27 \end{pmatrix}$. *Ainsi* $P_B(X) = -X^3 + 6X^2 - 11X + 6$.

Méthode de Krylov

Soit A une matrice carrée de $M_n(\mathbb{C})$. Alors

$$P_A(X) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=1}^{n} a_k X^{n-k} \right).$$

Déterminons les coefficients : $a_{11}, \ldots, a_{nn}$. D'après le Théorème de Cayley-Hamilton on trouve : $A^n = \sum_{k=1}^{n} A^{n-k}$. Choisissons $x_0 \neq 0$ et posons $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et soit B la matrice donnée par :

$$B = \left(A^{n-1}x_0 | A^{n-2}x_0 | \cdots | A^{n-1}x_0 | x_0 \right).$$

Donc

$$Ba = a_1 A^{n-1} x_0 + a_2 A^{n-2} x_0 + \cdots + a_n x_0.$$

Ainsi déterminer les a_k revient à résoudre l'équation : $Ba = A^n x_0$.

Remarque 1.18. *Si B est inversible, alors $a = B^{-1} A^n x_0$ (sinon on change x_0).*

Exemple 1.29. 1. *Soit la matrice A définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

Ainsi : $P_A(X) = X^2 - 5X - 2$.

2. *Considérons la matrice A définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

alors $P_A(X) = -X^3 + 6X^2 - 11X + 6$.

Méthode de Faddeev

Soit A une matrice carrée de $M_n(\mathbb{C})$. On a :

$$P_A(X) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=1}^{n} a_k X^{n-k} \right).$$

On pose :

$$\begin{cases} A_1 = A \\ A_k = (A_{k-A} - a_{k_n} I)A, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

Les coefficients a_k sont donnés par $a_k = \frac{1}{k} Tr(A_k)$.

Exemple 1.30. *!!!!!!*

1. *Soit la matrice A définie par*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
alors
$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$
Ainsi : $P_A(X) = X^2 - 5X - 2.$
2. *Considérons ma matrice A définie par :*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
alors $P_A(X) = -X^3 + 6X^2 - 11X + 6.$

1.3 Diagonalisation-Trigonalisation d'une matrice

1.3.1 Les matrices semblables

Remarque 1.19. *Dans l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), les matrices diagonales sont surement les plus simples. Même si $A \in M_n(\mathbb{K})$ n'est pas diagonale, on peut être s'y ramener.*

Définition 1.16. *Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont* ***semblable*** *si il existe une matrice $p \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que :*
$$A = PBP^{-1}.$$

Remarque 1.20. *Si A et B sont semblable alors il existe une matrice P inversible telle que : $A = PBP^{-1}$, d'où $AP = PB$.*

Exemple 1.31. *Considérons les matrices suivantes :*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On a : $A = PBP^{-1}.$

Proposition 1.18. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Alors il existe P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. De plus :*
1. $A = PBP^{-1} \iff AP = PB \iff B = P^{-1}AP.$
2. $\det(A) = \det(B).$
3. $Tr(A) = Tr(B).$
4. $A^n = PB^nP^{-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}.$
5. $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}.$

Remarque 1.21. *Si l'une des propriétés de la proposition précédente est vérifiée, cela ne signifie pas nécessairement que les deux matrices en question sont semblables. En effet, soient A et B deux matrices définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a : $\det(A) = 1$ *et* $\det(B) = 1$, *mais* $Tr(A) = 1$ *et* $Tr(B) = 3$. *Donc A et B ne sont pas semblables.*

Proposition 1.19. *Si A et B sont deux matrices semblable, alors $P_A = P_B$. En particulier, $Sp(A) = Sp(B)$.*

Démonstration. Supposons que les deux matrices A et B sont semblable, alors il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$, et on a :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI) \\ &= \det(PBP^{-1} - XPP^{-1}) \\ &= \det(P(B - xI)P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(B - XI)\det(P^{-1}) \\ &= \det(B - XI) \\ &= P_B(X). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.22. *Si $Sp(A) = Sp(B)$, alors cela n'implique pas que A et B sont semblable. En effet : soient A et B deux matrices définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a : $P_A(X) = X^2$, $P_B(X) = X^2$ et $Sp(A) = Sp(B)$ mais A et B ne sont pas semblables.

Proposition 1.20. *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si A et B sont semblables, alors $A + \lambda I$ et $B + \lambda I$ le sont également.*

Démonstration. Supposons que A et B sont semblables, alors il existe une matrice P inversible telle que : $A = PBP^{-1}$. On a : $A + \lambda I = PBP^{-1} + \lambda PP^{-1} = P(B + \lambda I)P^{-1}$. Donc $A + \lambda I$ et $B + \lambda I$ sont semblables. □

Exemple 1.32. *Soient A et B deux matrices données par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a : $\det(A) = 1$, $\det(B) = 1$, $Tr(A) = 3$ *et* $Tr(B) = 3$. *Prenons $\lambda = -1$, alors :*

$$A+\lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\det(A-I) = 0$ *et* $\det(B-I) = 1$, *donc ne sont pas semblables, d'où* A *et* B *ne sont pas semblables.*

1.3.2 Diagonalisation

Définition 1.17. *Une matrice carrée* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *est* ***diagonalisable*** *si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Remarque 1.23. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$. *Alors : si* A *est diagonalisable, donc il existe une matrice inversible* P *et une matrice* $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ *tel que :*

$$A = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

- $Tr(A) = Tr(D) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.
- $\det(A) = \det(D) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
- $\forall m \in \mathbb{N},\ A^m = PD^mP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix} P^{-1}$.
- *Si* A *est inversible, alors* $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$.
- $Sp(A) = Sp(D) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.
- $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = P \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$.

Exemple 1.33. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable car :*

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.18. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$. *On appelle* ***multiplicité*** *de la valeur propre* λ *de* A, *qu'on notera* m_λ, *l'ordre de multiplicité de* λ *comme racine du polynôme caractéristique.*

$$P_A(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{m_{\lambda_1}} (X-\lambda_2)^{m_{\lambda_2}} \cdots (X-\lambda_n)^{m_{\lambda_n}}.$$

Exemple 1.34. *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors $P_A(X) = (X+1)^2(2-X)$.

Proposition 1.21. *Soit λ une valeur propre d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda.$$

Définition 1.19. *Un polynôme P est dite* ***scindé*** *sur $\mathbb{K}$, s'il s'écrit sous la forme :*

$$P(X) = a(X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_p)^{m_p},$$

avec $a \in \mathbb{K}$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,p\}$.

Remarque 1.24. *Si λ est une valeur propre simple, alors* $\dim E_\lambda = 1$.

Exemple 1.35.
1. *$P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-2)(X-1)^2$. P est un polynôme sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.*
2. *$P(X) = X^2+1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ mais il est scindé sur $\mathbb{C}$, car $P(X) = X^2+1 = (X-i)(X+i)$.*

Théorème 1.3. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$A \text{ est diagonalisable sur } K \text{ si et seulement si } \begin{cases} P_A \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \dim E_\lambda = m_\lambda \quad \forall \lambda \in Sp(A). \end{cases}$$

Corollaire 1.1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si P_A est scindé et si les racines sont simples, alors A est diagonalisable.*

Exemple 1.36. *On considère la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, alors $P_A(X) = (5-X)(2-X) - 4 = (X-1)(X-6)$ et $Sp(A) = \{1; 6\}$.*

Déterminons E_1

On a :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; \begin{cases} 5x + 4y = x \\ x + 2y = y \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; \begin{cases} 4x = -4y \\ x = -y \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; x = -y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \;:\; x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi $\dim E_1 = 1$.

Déterminons E_6

On a :

$$\begin{aligned}
E_6 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{cases} 5x + 4y = 6x \\ x + 2y = 6y \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{cases} 4y = x \\ x = 4y \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 4y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 4y \\ y \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,
\end{aligned}$$

d'où $\dim E_6 = 1$. Donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Exemple 1.37. *Soit A la matrice donnée par :* $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$*, ainsi* $P_A(X) = \begin{vmatrix} 3 - X & -5 \\ 2 & -3 - X \end{vmatrix} = (3 - X)(-3 - X) + 10 = X^2 + 1$*. Donc $P_A(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, ainsi A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais il est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.*

Exemple 1.38. *Soit A la matrice donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a : $P_A(X) = -(X - A)(X + 2)^2$ et $Sp(A) = \{1, -2\}$.

- $E_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, *et* $\dim E_{-2} = 2$.
- $E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Exemple 1.39. *Considérons la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors $P_A(X) = -(X - 4)^2(X - 2)$ et

$$E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Soient P et D deux matrices données par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.3 Trigonalisation

Définition 1.20. *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** dans $M_n(\mathbb{K})$ si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire il existe une matrice inversible P est une matrice triangulaire supérieure T, telle que :*

$$A = PTP^{-1}.$$

Théorème 1.4. *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si, son polynôme caractéristique P_A est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 1.22. *Tout matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.*

Comment trigonaliser une matrice (cas d'une matrice de 3×3

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$; $P_A(X) = \det(A - XI_3)$.

- Si P_A n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, alors A n'est pas trigonalisable (on s'arrête).
- Si P_A est scindé, on factorise P_A : Il y a 3 cas à distingué :
  1^{ere} **Cas :** Si P_A, admet 3 racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ simples 2 à 2 disjoints alors : $E_{\lambda_1} = \langle e_1 \rangle$, $E_{\lambda_2} = \langle e_2 \rangle$ et $E_{\lambda_3} = \langle e_3 \rangle$. Donc $P = (e_1|e_2|e_3)$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Ainsi $A = PDP^{-1}$.
  2^{eme} **Cas :** Si P_A admet une racine simple λ_1 et une racine double λ_2. On a : $\dim E_{\lambda_1} = 1 \Rightarrow E_{\lambda_1} = \langle e_1 \rangle$.
- Si $\dim E_{\lambda_2} = 2 \Rightarrow E_{\lambda_2} = \langle e_2, e_3 \rangle$, alors A est diagonalisable.

$$P = (e_1|e_2|e_3) \ \ et \ \ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

  ainsi $A = PDP^{-1}$.
- Si $\dim E_{\lambda_2} = 1 \Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable, mais A est trigonalisable puisque $\dim E_{\lambda_2} = 1 \Rightarrow E_{\lambda_2} = \langle e_2 \rangle$. On complète (e_1, e_2) en une base (e_1, e_2, e_3). Donc

$$P = (e_1, e_2, e_3) \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

  Comment déterminer e_3 ?

  Si on pose : $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donc $A = PTP^{-1} \iff APPT$. Si on prend $a = 0$ et $b = 1$, $Ae_3 =$

$be_2 + \lambda_2 e_3 = e_3 + \lambda_2 e_3$ si et seulement $(A - \lambda_2 I)e_3 = e_2$. Si e_3 solution de $(A - \lambda_2 I)X = e_2$.
2^{eme} **Cas :** Si P_A admet une seul racine λ_1 avec $m_{\lambda_1} = 3$. C'est-à-dire : $P_A(X) = -(X - \lambda_1)^3$. On a :

$$1 \leq \dim E_{\lambda_1} \leq 3.$$

3 cas interviennn :

- Si $\dim E_{\lambda_1} = 3 \Rightarrow A$ est diagonalisable et $E_{\lambda_1} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ donc :

$$P = (e_1|e_2|e_3) \quad et \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 I_3.$$

Par suite : $A = PDP^{-1} = P\lambda_1 I_3 P^{-1} = \lambda I_3$.

- Si $\dim E_{\lambda_1} = 2 \Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable. $E_{\lambda_1} = \langle e_1 \rangle$, on complète (e_1) en une base (e_1, e_2, e_3). Donc

$$P = (e_1|e_2|e_3) \quad et \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_1 & c \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

  - e_1 donnée.
  - e_2 vérifie : $Ae_2 = ae_1 + \lambda_1 e_3$.
  - e_3 vérifie : $Ae_3 = be_1 + +ce_2 + \lambda_1 e_3$.

Remarque 1.25. $A = PTP^{-1} \iff AP = PT$.

Exemple 1.40. *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors $P_A(X) = -(X - A)^3$ *et* $E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.