Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Пермская государственная сельскохозяйственная академия
имени академика Д. Н. Прянишникова»

Н. В. Деменева

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Учебное пособие

Пермь
ИПЦ «Прокростъ»
2017

УДК 511.11
ББК 22.141
Д-30

Рецензенты:

И. К. Березин, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ИМСС УрО РАН;

В. И. Карпова, кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой математических и естественнонаучных дисциплин Пермского института железнодорожного транспорта – филиала ФГБОУ ВО «Уральский государственный университет путей сообщения» в г. Перми.

Д-30 **Деменева, Н. В.**
Комплексные числа : учебное пособие / Н. В. Деменева; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего образования «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д. Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2017. – 112 с.
ISBN 978-5-94279-353-1

В пособии доступно и в то же время основательно рассмотрены понятие комплексного числа, его геометрическое представление, формы записи, возможные действия. Изложение сопровождается разнообразными примерами и заданиями, дифференцированными по трём уровням сложности, что позволяет реализовать индивидуальный подход в обучении.

Пособие предназначено для организации аудиторной и самостоятельной работы студентов направлений подготовки: 35.03.06 Агроинженерия, 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 20.03.01 Техносферная безопасность, 08.03.01 Строительство, 09.03.02 Информационные системы и технологии, 09.03.03 Прикладная информатика, 09.03.04 Программная инженерия, 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 38.03.01 Экономика.

УДК 511.11
ББК 22.141

Печатается по решению методического совета Пермской государственной сельскохозяйственной академии имени академика Д.Н. Прянишникова (протокол № 7 от 19.06.2017 г.).

Учебное издание

Деменева Надежда Валерьевна

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Учебное пособие

Подписано в печать 29.06.2017 г. Формат 60×80 $^1/_8$
Усл. печ. л. 14. Тираж 50 экз. Заказ №88.

ИПЦ *«ПрокростЪ»*
Пермской государственной сельскохозяйственной академии
имени академика Д.Н. Прянишникова
614990, Россия, г. Пермь, ул. Петропавловская, 23
Тел. (342) 210-35-34

ISBN 978-5-94279-353-1

Содержание

Введение

До 16 века при решении некоторых квадратных уравнений $x^2 + +px + q = 0$ математики получали выражение вида $A + \sqrt{B}$, где $B < 0$ и показывали, что в этом случае уравнение не имеет положительных и отрицательных решений, а также нулевого решения и, поэтому, $\sqrt{B}$ при $B < 0$ не имеет смысла.

В 16 веке выражение вида $A + \sqrt{B}$, где $B < 0$ появлялось в случае трёх действительных корней при решении кубического уравнения $x^3 + +px + q = 0$ по формуле итальянского математика Д. Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \text{ где } D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

По этой причине математики вынуждены были изучать выражение вида $A + \sqrt{B}$, где $B < 0$. Так появились мнимые числа.

Термин «мнимые числа» был предложен в 17 веке французским математиком Р. Декартом. В 18 веке для обозначения мнимой единицы $\sqrt{-1}$ швейцарский математик Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire*. Термин «комплексные числа» появился в 19 веке благодаря немецкому математику К. Гауссу. В переводе с латинского *complexus* обозначает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений.

Появление комплексного числа позволило решить важные алгебраические вопросы. Один из вопросов состоял в количестве корней алгебраического уравнений n-й степени: $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + +a_n = 0$. На множестве комплексных чисел это уравнение имеет n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. Другой вопрос состоял в представлении многочлена с действительными коэффициентами в виде произведения многочленов не выше второй степени и тоже с действительными коэффициентами. Многие считали, что это невозможно. С помощью комплексных чисел вопрос был решён положительно.

В 18 веке математики пришли к выводу, что колебательные процессы описываются дифференциальным уравнением: $\frac{d^n u}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}} + + \cdots + a_{n-1}\frac{du}{dt} + a_n u = 0$, где $u = u(t)$ – искомая функция. При решении этого уравнения надо знать корни алгебраического уравнения: $z^n + +a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$, при этом нужны действительные и комплексные корни.

С помощью комплексных чисел решались не только алгебраические вопросы, но и геометрические. Например, К. Гаусс с помощью комплексных чисел нашёл, при каких натуральных значениях n можно построить циркулем и линейкой правильный n-угольник. Благодаря новым числам были доказаны некоторые классические теоремы геометрии. В терминах комплексных чисел была построена аналитическая геометрия прямых и окружностей.

Долгое время после появления комплексных чисел учёные искали связь между новыми числами и геометрическими образами. Этим вопросом занимался английский математик Дж. Валлис, который в 1685 году заметил, что мнимое число задаётся двумя действительными числами a и b ($z = a + b \cdot \sqrt{-1}$) и точка на координатной плоскости задаётся двумя числами. К этому вопросу обращались также Л. Эйлер, К. Ф. Гаусс, русский учёный Г. Кюн, датчанин К. Вессель, швейцарец Ж. Арган, француз М. Бюэ, англичанин Дж. Уоррен.

Новые числа стали использовать не только в алгебре и геометрии, но и в теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории чисел, теории функций, теории поверхностей, вычислительной математике. Комплексные числа применялись в картографии французским математиком Ж. Л. Лагранжем. Эти числа нашли применение в гидродинамике, теории фильтрации почв, экономике. В конце 19 века американский электротехник И. П. Штейнмец предложил метод расчёта электрических цепей переменного тока, полностью основанный на комплексных числах.

На основе комплексных чисел развивалась теория функций комплексного переменного, основы которой заложил французский математик О. Л. Коши. Для развития комплексного анализа большое значение имели работы русских математиков Н. И. Лобачевского, Ю. В. Сохоцкого, немецких математиков Б. Римана, К. Вейрштрасса, Ф. Клейна, П. Кебе, французского математика А. Пуанкаре, советских математиков М. А. Лаврентьева, В. С. Владимирова.

В 20 веке комплексные числа и комплексные функции применялись в аэродинамике русскими и советскими математиками и механиками Н. Е. Жуковским, С. А. Чаплыгиным, М. В. Келдышем. Комплексные функции впервые использовали советские математики Г. В. Колосов и Н. И. Мусхелишвили в теории упругости. Советскими учёными Н. Н. Боголюбовым и В. С. Владимировым комплексные переменные использовались в теоретической физике.

Большое значение комплексные числа имели при изучении движения естественных и искусственных небесных тел. Важные задачи из этой области были решены на основе применения комплексных чисел советскими учёными Е. П. Аксёновым, Е. А. Гребениковым, В. Г. Дёминым.

Комплексные числа являются обобщением множества действительных чисел. После того как была разработана теория новых чисел, математики занялись поиском их обобщений. Так появились кватернионы: числа вида $a + bi + cj + dk$, где i, j, k – мнимые единицы, то есть кватернионы представляют собой четвёрку действительных чисел a, b, c, d, расположенных в указанном порядке. Отсюда произошло название кватернионов от латинского слова *quaterni*, что означает «по четыре». Открытие кватернионов принадлежит ирландскому математику У. Р. Гамильтону. Независимо от У. Р. Гамильтона аналогичную теорию построил венгерский математик Я. Больяи.

Немецким математиком А. Гурвицем, советскими математиками Б. А. Венковым и Ю. В. Линником была разработана теория целых кватернионов. С помощью этой теории были выявлены свойства натуральных чисел. На основе теории кватернионов появилось векторное исчисление, теория матриц, многомерная геометрия. С помощью кватернионов Дж. К. Максвелл записал уравнения, ставшие основой электромагнетизма. Кватернионы являются удобным аппаратом для специальной теории относительности.

Кватернионы, как и комплексные числа, получили обобщение. Этим обобщением является клиффордова алгебра, разработанная английским математиком У. К. Клиффордом под влиянием идей У. Р. Гамильтона и Г. Грасмана, построившего линейную алгебру (гиперкомплексную систему чисел), где числа представлялись в виде упорядоченных строк по n действительных чисел в каждой.

На этом учёные не остановились и в 1858 году А. Кэли построил числа новой природы – матрицы, представляющие прямоугольные таблицы действительных чисел и являющиеся новым обобщением понятия числа. Матрицы получили широкое применение в теоретических и прикладных областях.

Всё сказанное о комплексных числах и их обобщениях говорит о необходимости изучения этих чисел в курсе математики, что повысит математическую культуру студентов, позволит им освоить последующие темы курса, а также быть готовыми к изучению специальных дисциплин.

Данное пособие познакомит читателей с теоретическими основами комплексных чисел, поможет получить практические умения и навыки в процессе выполнения представленных заданий, в том числе индивидуальных заданий, и завершить изучение темы контролем полученных умений, решая приведённые тесты.

Пособие состоит из четырёх разделов. В первом разделе представлена теория комплексных чисел, во втором – практикум, в третьем – индивидуальные задания, в четвёртом – тесты.

В первом разделе дано определение комплексного числа, его геометрическое представление, рассмотрены формы записи и действия над комплексными числами. Раздел теории содержит 14 примеров, сопровождающихся пояснительными рисунками (23 рисунка). В конце раздела приведены контрольные вопросы.

Второй раздел состоит из трёх частей, различающихся по уровню сложности. Каждая часть содержит примеры с подробным решением, причём в большинстве примеров приведены разнообразные случаи в зависимости от расположения комплексного числа в какой-либо четверти или на границе четвертей. После каждого примера приведено задание для самостоятельной работы. В конце пособия указаны ответы к заданиям. Раздел практикума содержит 20 примеров и 20 заданий, сопровождающихся пояснительными рисунками (85 рисунков).

Первая часть практикума содержит простые задания на распознавание действительной и мнимой частей комплексного числа; нахождение степени мнимой единицы; нахождение сопряжённого числа; изображение комплексного числа; нахождение модуля и аргумента комплексного числа; представление комплексного числа в тригонометрической и показательной формах; нахождение суммы, разности, произведения и частного комплексных чисел в алгебраической форме; решение квадратных уравнений на множестве комплексных чисел.

Вторая часть практикума содержит более сложные задания на выполнение отдельных действий над комплексными числами, таких как произведение и частное в тригонометрической форме, возведение в степень, извлечение корня; на решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел; на нахождение расстояния между точками в комплексной плоскости.

Третья часть практикума содержит сложные задания на преобразование выражений в алгебраической и тригонометрической формах, требующих одновременного выполнения нескольких действий; задания на решение биквадратных уравнений на множестве комплексных чисел, построение областей в комплексной плоскости по заданным условиям, разные задачи повышенной сложности.

В третьем разделе индивидуальные задания дифференцированы, как и раздел практикума, по трём уровням сложности. Задания этого раздела приведены в соответствии с заданиями раздела практикума и рассчитаны на 36 типовых вариантов.

Четвёртый раздел включает 2 варианта тестов, каждый из которых, как раздел практикума и индивидуальных заданий, разделён на 3 части в зависимости от уровня сложности и согласуется с заданиями раздела практикума. Каждый вариант теста содержит 20 заданий. В конце пособия к каждому варианту приведены ответы.

Нумерация примеров, заданий и рисунков ведётся в пределах одного раздела.

Трёхуровневая структура разделов пособия позволяет преподавателю использовать учебный материал при обучении студентов разной степени математической подготовки. Например, при работе со студентами невысокой степени подготовки можно ограничиться заданиями первого уровня, с более высокой – заданиями первого и второго уровней, с высокой – можно использовать задания всех трёх уровней, то есть трёхуровневая структура позволяет реализовать индивидуальный подход в обучении математике. Такая структура поможет преподавателю объективно оценить работу студента в зависимости от уровня выполненных им заданий, а студенту поэтапно получать умения и навыки, двигаясь от простых заданий к более сложным.

Пособие предназначено для организации аудиторной и самостоятельной работы студентов направлений подготовки: 35.03.06 Агроинженерия, 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 20.03.01 Техносферная безопасность, 08.03.01 Строительство, 09.03.02 Информационные системы и технологии, 09.03.03 Прикладная информатика, 09.03.04 Программная инженерия, 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 38.03.01 Экономика.

Раздел 1.Теория

В данном разделе используется следующая нумерация примеров (заданий, рисунков): a.b, где первая цифра "a"обозначает номер раздела, вторая цифра "b" обозначает номер примера (задания, рисунка). Например: 1.14 обозначает первый раздел, четырнадцатый пример (задание, рисунок).

1.1. Определение комплексного числа

Определение. *Комплексным числом* z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа; i – *мнимая единица*, определяемая как $i = \sqrt{-1}$ и соответственно $i^2 = -1$. Число x называется *действительной частью* комплексного числа, y – *мнимой частью*. Обозначение: $x = Re\, z, y = Im\, z$.

Если $x = 0$, то число $z = 0 + ib = ib$ называется *чисто мнимым*; если $y = 0$, то число $z = x + i \cdot 0 = x$ называется действительным, то есть множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающихся только знаком мнимой части, называются *сопряжёнными*.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда его действительная и мнимая части равны нулю: $x = y = 0$.

1.2. Геометрическое представление комплексного числа

Комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить в плоскости Oxy точкой $M(x; y)$ (рис. 1.1). И наоборот, каждой точке $M(x; y)$ плоскости Oxy соответствует комплексное число $z = x + iy$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

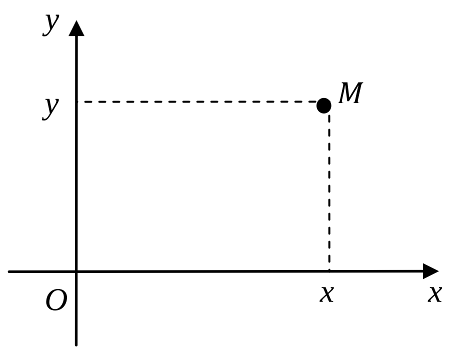


Рис. 1.1. Геометрическое представление комплексного числа

Точкам, лежащим на оси Ox, соответствуют действительные числа ($y = 0$). Точкам, лежащим на оси Oy, соответствуют чисто мнимые числа ($x = 0$). Поэтому при изображении комплексных чисел ось Ox называют действительной осью, ось Oy – мнимой осью.

Соединив точку $M(x; y)$ с началом координат, получим вектор $\overline{OM}$, который называют радиус-вектором точки M. В некоторых случаях удобно считать геометрическим представлением комплексного числа вектор $\overline{OM}$ (рис. 1.2).

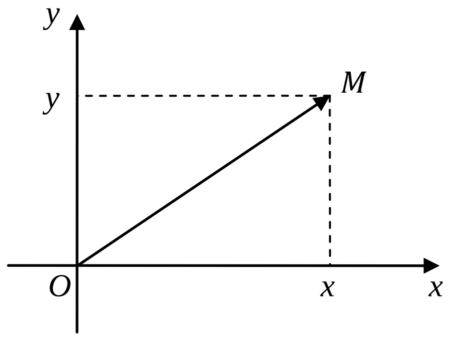


Рис. 1.2. Геометрическое представление комплексного числа

<u>Пример1.1.</u> Изобразить комплексные числа в комплексной плоскости: 1) $z = -\sqrt{3} + i$; 2) $z = 4$; 3) $z = -2i$.

<u>Решение.</u>

1) Числу $z = -\sqrt{3} + i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M\left(-\sqrt{3}; 1\right)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 1.3).

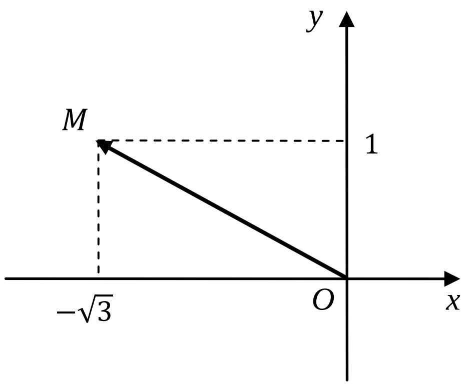


Рис. 1.3. Геометрическое представление комплексного числа $z = -\sqrt{3} + i$

2) Числу $z = 4$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(4; 0)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 1.4).

3) Числу $z = -2i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(0; -2)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 1.5).

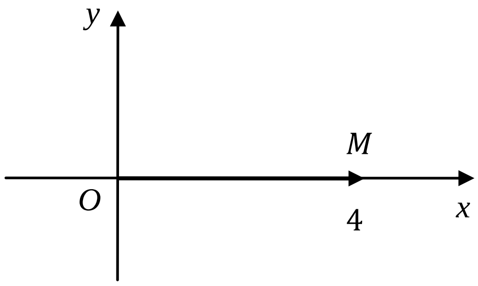


Рис. 1.4. Геометрическое представление комплексного числа $z = 4$

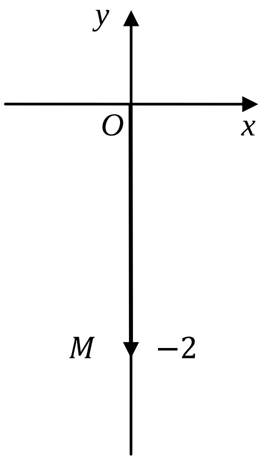


Рис. 1.5. Геометрическое представление комплексного числа $z = -2i$

1.3. Формы записи комплексного числа

1.3.1. Алгебраическая форма записи комплексного числа

Запись $z = x + iy$, используемая в определении комплексного числа, называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

1.3.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Обратимся к геометрическому представлению комплексного числа. Длина вектора $\overline{OM}$ называется модулем комплексного числа и обозначается $|z|$ или r (рис. 1.6). Угол между вектором $\overline{OM}$ и положительным направлением оси Ox называется аргументом комплексного числа и обозначается $Arg\ z$ или φ (рис. 1.6).

Выразим из прямоугольного треугольника координаты точки M через модуль и аргумент комплексного числа:

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \Rightarrow y = rsin\,\varphi,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow x = rcos\varphi.$$

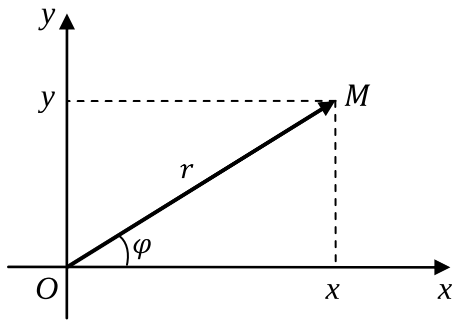


Рис. 1.6. Модуль и аргумент комплексного числа

В алгебраическую форму комплексного числа подставим вместо x и y их выражения:

$z = x + iy = rcos\varphi + i\, rsin\,\varphi = r(cos\varphi + i\, sin\,\varphi)$.

Полученная запись

$$z = r(cos\varphi + i\, sin\,\varphi)$$

называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Получим формулы для нахождения r и φ.

Модуль найдём из прямоугольного треугольника (рис. 1.6):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого $2\pi k, k \in Z$: $Arg\, z = arg\, z + 2\pi k$, где $arg\, z$ – главное значение аргумента, заключённое в промежутке $(-\pi;\ \pi]$ или $[0; 2\pi)$. Для определения главного значения аргумента пользуются следующей формулой $(-\pi < arg\, z \leq \pi)$:

$$arg\, z = \begin{cases} arctg\ \frac{y}{x},\ z \in I\ или\ IV\ четвертям, \\ \pi + arctg\ \frac{y}{x},\ z \in II\ четверти, \\ -\pi + arctg\ \frac{y}{x},\ z \in III\ четверти. \end{cases}$$

Пример 1.2. Представить комплексные числа в тригонометрической форме: 1) $z = -\sqrt{3} - i$; 2) $z = -2$; 3) $z = 2i$.

Решение.

1) Найдём модуль комплексного числа $z = -\sqrt{3} - i$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2.$$

Числу $z = -\sqrt{3} - i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M\left(-\sqrt{3};\ -1\right)$ (рис. 1.7).

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в III четверти:

$$\varphi = -\pi + arctg\ \frac{y}{x} = -\pi + arctg\ \frac{-1}{-\sqrt{3}} = -\pi + arctg\ \frac{1}{\sqrt{3}} = -\pi +$$

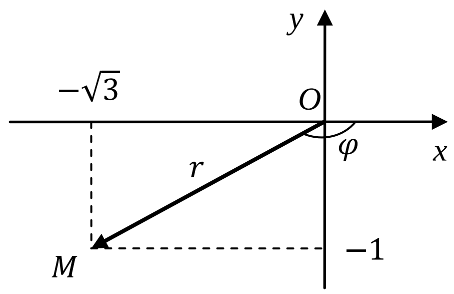


Рис. 1.7. Геометрическое представление комплексного числа $z = -\sqrt{3} - i$

$+arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$.

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = -\sqrt{3} - i$:

$z = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

2) Найдём модуль комплексного числа $z = -2$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = 2$.

Числу $z = -2$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-2;\ 0)$ (рис. 1.8).

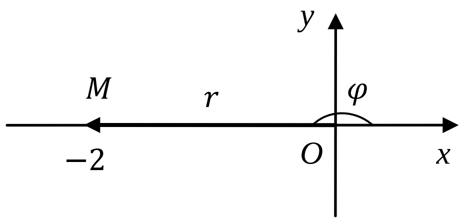


Рис. 1.8. Геометрическое представление комплексного числа $z = -2$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на отрицательной части оси Ox: $\varphi = \pi$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = -2$:

$z = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

3) Найдём модуль комплексного числа $z = 2i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$.

Числу $z = 2i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(0;\ 2)$ (рис. 1.9).

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на положительной части оси Oy: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = 2i$:

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: 1) $z = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$; 2) $z = 2(\cos\pi +$ $+i\sin\pi)$; 3) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

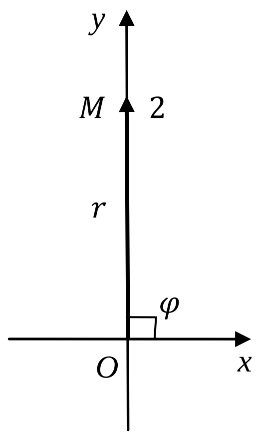


Рис. 1.9. Геометрическое представление комплексного числа $z = 2i$

1.3.3. Показательная форма записи комплексного числа

Используя формулу Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i sin\,\varphi$, комплексное число $z = r(cos\varphi + i\ sin\ \varphi)$ можно записать в виде:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Полученную формулу называют *показательной формой* записи комплексного числа.

<u>Пример 1.3.</u> Представить комплексное число $z = 4\sqrt{3} - 4i$ в показательной форме.

<u>Решение.</u>

Найдём модуль комплексного числа $z = 4\sqrt{3} - 4i$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{64} = 8.$$

Числу $z = 4\sqrt{3} - 4i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M\left(4\sqrt{3};\ -4\right)$ (рис. 1.10).

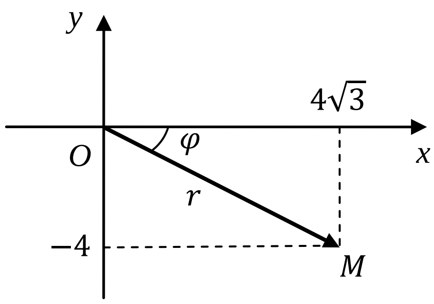


Рис. 1.10. Геометрическое представление комплексного числа $z = 4\sqrt{3} - 4i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в IV четверти:

$$\varphi = arctg\ \frac{y}{x} = arctg\ \frac{-4}{4\sqrt{3}} = -arctg\ \frac{1}{\sqrt{3}} = -arctg\ \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

Тогда показательная форма комплексного числа $z = 4\sqrt{3} - 4i$:

$$z = 8e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

Ответ: $z = 8e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

1.4. Действия над комплексными числами

1.4.1. Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Полученное равенство означает, что при сложении комплексных чисел складывают действительные и мнимые части. Полученное равенство также показывает, что сложение комплексных чисел, изображённых векторами, производится по правилу сложения векторов (рис. 1.11).

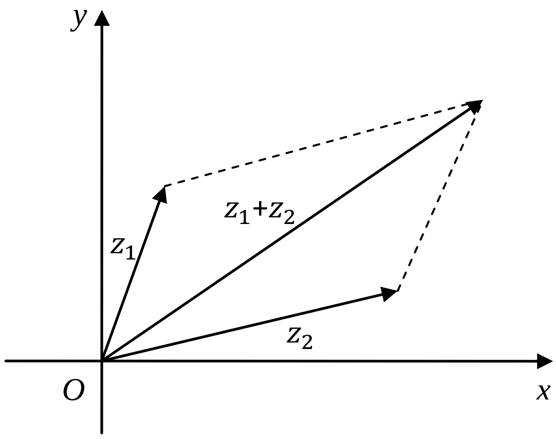


Рис. 1.11. Сложение комплексных чисел, изображённых векторами

Пример 1.4. Найти сумму двух комплексных чисел $z_1 = -8 + 5i$ и $z_2 = 2 + 3i$.

Решение.

$z_1 + z_2 = (-8 + 5i) + (2 + 3i\ ) = (-8 + 2) + i(5 + 3) = -6 +$
$+8i$.

Ответ: $z_1 + z_2 = -6 + 8i$.

1.4.2. Вычитание комплексных чисел

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Полученное равенство означает, что при вычитании комплексных чисел вычитают действительные и мнимые части. Полученное равенство также показывает, что вычитание комплексных чисел, изображённых векторами, производится по правилу вычитания векторов (рис. 1.12).

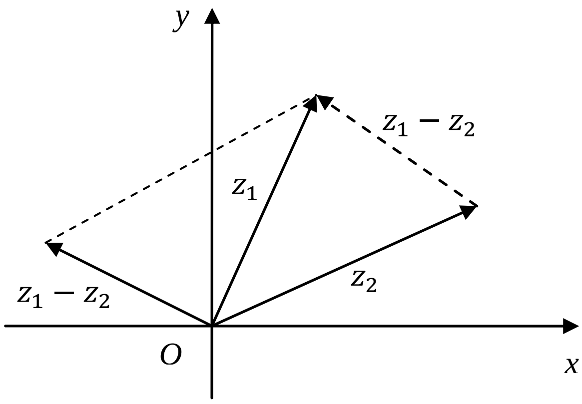


Рис. 1.12. Вычитание комплексных чисел, изображённых векторами

Из формулы вычитания комплексных чисел следует, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа:

$$d = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Этот факт используют при построении областей в комплексной плоскости.

Пример 1.5. Найти разность двух комплексных чисел $z_1 = -\sqrt{2} - i$ и $z_2 = 1 - 2i$.

Решение.

$z_1 - z_2 = \left(-\sqrt{2} - i\right) - (1 - 2i\,) = \left(-\sqrt{2} - 1\right) + i\left(-1 - (-2)\right) =$
$= \left(-\sqrt{2} - 1\right) + i.$

Ответ: $z_1 - z_2 = \left(-\sqrt{2} - 1\right) + i.$

Пример 1.6. Найти расстояние между точками $z_1 = 2 - 5i$ и $z_2 = -6 - 3i$.

Решение. $d = \sqrt{\left(2 - (-6)\right)^2 + \left(-5 - (-3)\right)^2} = \sqrt{8^2 + (-2)^2} =$
$= \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$

Ответ: $d = 2\sqrt{17}.$

Пример 1.7. В комплексной плоскости построить область, заданную неравенством: $|z + 5 - 3i| \leq 6.$

Решение. Заданное неравенство перепишем в виде:
$|z - (-5 + 3i)| \leq 6$. С учётом формулы расстояния между двумя точками данное неравенство можно интерпретировать как множество точек, удалённых от точки $z_0 = -5 + 3i$ на расстояние, не большее 6, то есть неравенство определяет круг с центром в точке $M(-5; 3)$ радиуса 6 (рис. 1.13).

1.4.3. Умножение комплексных чисел

Действие умножения рассмотрим в алгебраической и тригонометрической формах.

а) В алгебраической форме. *Произведением* комплексных чисел

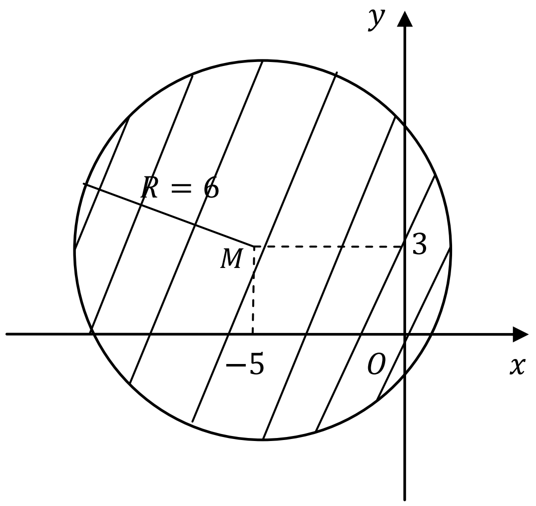


Рис. 1.13. Область, заданная неравенством $|z + 5 - 3i| \leq 6$

$z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, которое получается при умножении этих чисел как двучленов по правилам алгебры с учётом того, что $i^2 = -1$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot iy_2 + iy_1 \cdot x_2 + \\ +iy_1 \cdot iy_2 = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + \\ +(-1) \cdot y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

<u>Пример 1.8.</u> Найти произведение двух комплексных чисел $z_1 = 6 + 5i$ и $z_2 = -1 - 3i$ в алгебраической форме.

<u>Решение.</u>

$$z_1z_2 = (6 + 5i)(-1 - 3i) = -6 - 18i - 5i - 15i^2 = -6 - 23i - \\ -15 \cdot (-1) = 9 - 23i.$$

Ответ: $z_1z_2 = 9 - 23i.$

б) В тригонометрической форме.

Пусть комплексные числа даны в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(cos\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1), z_2 = r_2(cos\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2).$$

Найдём произведение этих чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = [r_1(cos\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1)] \cdot [r_2(cos\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2)] = \\ = r_1r_2(cos\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1)(cos\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2) = r_1r_2(cos\varphi_1cos\varphi_2 + \\ +cos\varphi_1 \cdot i\,sin\,\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_1 \cdot cos\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_1 \cdot i\,sin\,\varphi_2) = \\ = r_1r_2(cos\varphi_1cos\varphi_2 + icos\varphi_1sin\,\varphi_2 + isin\,\varphi_1cos\varphi_2 + i^2sin\,\varphi_1sin\,\varphi_2) = \\ = r_1r_2(cos\varphi_1cos\varphi_2 + icos\varphi_1sin\,\varphi_2 + isin\,\varphi_1cos\varphi_2 + \\ +(-1)sin\,\varphi_1sin\,\varphi_2) = r_1r_2[(cos\varphi_1cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ +i(cos\varphi_1sin\,\varphi_2 + sin\,\varphi_1cos\varphi_2)] = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \\ +i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Выпишем результат:

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Таким образом, произведением двух комплексных чисел является комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент равен сумме аргументов сомножителей. Кратко говоря, при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули умножают, а аргументы складывают.

Пример 1.9. Найти произведение двух комплексных чисел $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ и $z_2 = -\sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

Решение. Представим каждое число в тригонометрической форме. Для этого найдём их модуль и аргумент.

Найдём модуль первого числа $z_1 = -1 + \sqrt{3}$:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2.$$

Первому числу $z_1 = -1 + \sqrt{3}$ в координатной плоскости соответствует точка $M_1\left(-1;\ \sqrt{3}\right)$ (рис. 1.14).

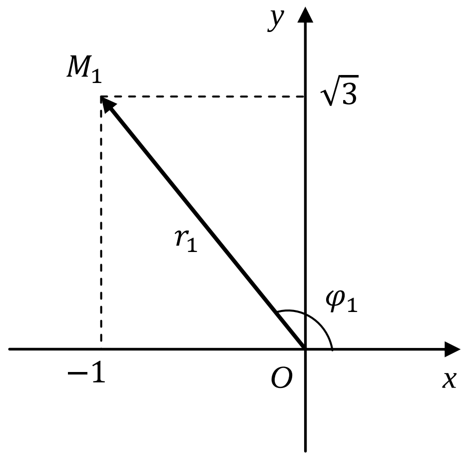


Рис. 1.14. Геометрическое представление комплексного числа $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$

Найдём аргумент первого числа, учитывая, что точка M_1 лежит во II четверти:

$$\varphi_1 = \pi + arctg\,\frac{y_1}{x_1} = \pi + arctg\,\frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi + arctg\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - arctg\,\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Тогда тригонометрическая форма первого числа $z_1 = -1 + \sqrt{3}$:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Найдём модуль второго числа $z_2 = -\sqrt{3} - i$:

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2.$$

Второму числу $z_2 = -\sqrt{3} - i$ в координатной плоскости соответствует точка $M_2\left(-\sqrt{3};\ -1\right)$ (рис. 1.15).

Найдём аргумент второго числа, учитывая, что точка M_2 лежит в III четверти:

$$\varphi_2 = -\pi + arctg\,\frac{y_2}{x_2} = -\pi + arctg\,\frac{-1}{-\sqrt{3}} = -\pi + arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = -\pi + arctg\,\frac{\sqrt{3}}{3} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$

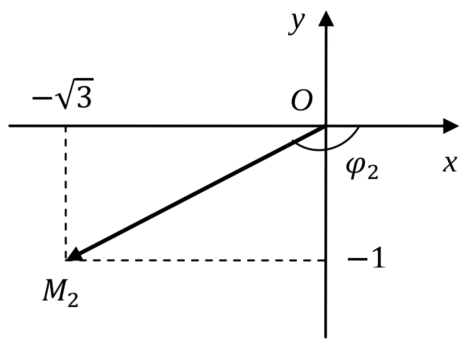


Рис. 1.15. Геометрическое представление комплексного числа $z_2 = -\sqrt{3} - i$

Тогда тригонометрическая форма второго числа $z_2 = -\sqrt{3} - i$:

$$z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Найдём произведение чисел:

$$z_1 z_2 = 2 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right) =$$

$$= 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Ответ: $z_1 z_2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$

1.4.4. Деление комплексных чисел

Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. Частным комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z, которое при умножении на число z_2 даёт число z_1, то есть если $\frac{z_1}{z_2} = z$, то $zz_2 = z_1$.

Деление, как и умножение, выполняется в алгебраической и тригонометрической формах.

а) В алгебраической форме. Даны два комплексных числа в алгебраической форме: $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Требуется найти такое комплексное число $z = x + iy$, что $zz_2 = z_1$. Тогда: $(x + iy)(x_2 + iy_2) = $ $= x_1 + iy_1$.

Выполним умножение чисел в правой части равенства:

$$xx_2 + xiy_2 + iyx_2 + i^2 yy_2 = x_1 + iy_1$$

$$xx_2 + xiy_2 + iyx_2 + (-1)yy_2 = x_1 + iy_1$$

$$(xx_2 - yy_2) + i(xy_2 + yx_2) = x_1 + iy_1.$$

Известно, что два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части. С учётом этого утверждения действительную и мнимую части числа z найдём из системы уравнений:

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решим полученную систему линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера относительно переменных x и y.

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = {x_2}^2 + {y_2}^2.$$

Вычислим определители Δ_1 и Δ_2:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & -y_2 \\ y_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix} = x_2y_1 - y_2x_1.$$

Найдём значения неизвестных x и y:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}, \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{x_2y_1-y_2x_1}{{x_2}^2+{y_2}^2}.$$

Таким образом, неизвестное число z принимает вид:

$$z = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2} + i\,\frac{x_2y_1-y_2x_1}{{x_2}^2+{y_2}^2}.$$

На практике деление комплексных чисел выполняется следующим образом. Для того чтобы разделить число z_1 на число z_2, числитель и знаменатель дроби умножают на число, сопряжённое знаменателю, то есть на число $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{x_1x_2+x_1\cdot(-iy_2)+iy_1x_2+iy_1\cdot(-iy_2)}{{x_2}^2-(iy_2)^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2-ix_1y_2+ix_2y_1-i^2y_1y_2}{{x_2}^2-i^2{y_2}^2} = \frac{x_1x_2-ix_1y_2+ix_2y_1+(-1)y_1y_2}{{x_2}^2-(-1){y_2}^2} =$$

$$= \frac{(x_1x_2-y_1y_2)+i(-x_1y_2+x_2y_1)}{{x_2}^2+{y_2}^2} = \frac{x_1x_2-y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2} + i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}.$$

Пример 1.10. Найти частное двух комплексных чисел $z_1 = 4 - 5i$ и $z_2 = -3 - 9i$ в алгебраической форме.

Решение.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-5i}{-3-9i} = \frac{(4-5i)(-3+9i)}{(-3-9i)(-3+9i)} = \frac{-12+36i+15i-45i^2}{(-3)^2-(9i)^2} = \frac{-12+51i-45\cdot(-1)}{9-81i^2} =$$

$$= \frac{33+51i}{9-81\cdot(-1)} = \frac{33+51i}{90} = \frac{33}{90} + \frac{51}{90}i = \frac{11}{30} + \frac{17}{30}i.$$

Ответ: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{11}{30} + \frac{17}{30}i.$

б) В тригонометрической форме.

Пусть комплексные числа даны в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(cos\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1), z_2 = r_2(cos\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2).$$

Найдём частное этих чисел, умножая числитель и знаменатель на число, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\varphi_1+i\,sin\,\varphi_1)}{r_2(cos\varphi_2+i\,sin\,\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{cos\varphi_1+i\,sin\,\varphi_1}{cos\varphi_2+i\,sin\,\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(cos\varphi_1+i\,sin\,\varphi_1)(cos\varphi_2-i\,sin\,\varphi_2)}{(cos\varphi_2+i\,sin\,\varphi_2)(cos\varphi_2-i\,sin\,\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{cos\varphi_1cos\varphi_2+cos\varphi_1\cdot(-i\,sin\,\varphi_2)+i\,sin\,\varphi_1cos\varphi_2+i\,sin\,\varphi_1\cdot(-i\,sin\,\varphi_2)}{(cos\varphi_2)^2-(i\,sin\,\varphi_2)^2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{cos\varphi_1cos\varphi_2-icos\varphi_1sin\,\varphi_2+i\,sin\,\varphi_1cos\varphi_2-i^2\,sin\,\varphi_1sin\,\varphi_2}{(cos\varphi_2)^2-i^2(sin\,\varphi_2)^2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{cos\varphi_1cos\varphi_2-icos\varphi_1sin\,\varphi_2+i\,sin\,\varphi_1cos\varphi_2-(-1)\,sin\,\varphi_1sin\,\varphi_2}{(cos\varphi_2)^2-(-1)(sin\,\varphi_2)^2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(cos\varphi_1 cos\varphi_2 + sin\,\varphi_1 sin\,\varphi_2) + i(-cos\varphi_1 sin\,\varphi_2 + sin\,\varphi_1 cos\varphi_2)}{(cos\varphi_2)^2 + (sin\,\varphi_2)^2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(cos\varphi_1 cos\varphi_2 + sin\,\varphi_1 sin\,\varphi_2) + i(sin\,\varphi_1 cos\varphi_2 - cos\varphi_1 sin\,\varphi_2)}{1} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,sin\,(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Выпишем результат:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,sin\,(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Таким образом, частным двух комплексных чисел является комплексное число, модуль которого равен частному модулей делимого и делителя; аргумент равен разности аргументов делимого и делителя. Кратко говоря, при делении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули делят, а аргументы вычитают.

Пример 1.11. Найти частное двух комплексных чисел $z_1 = 5 - 5i$ и $z_2 = -\sqrt{3} - 3i$ в тригонометрической форме.

Решение. Представим каждое число в тригонометрической форме. Для этого найдём их модуль и аргумент.

Найдём модуль первого числа $z_1 = 5 - 5i$:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}.$$

Первому числу $z_1 = 5 - 5i$ в координатной плоскости соответствует точка $M_1(5;\ -5)$ (рис. 1.16).

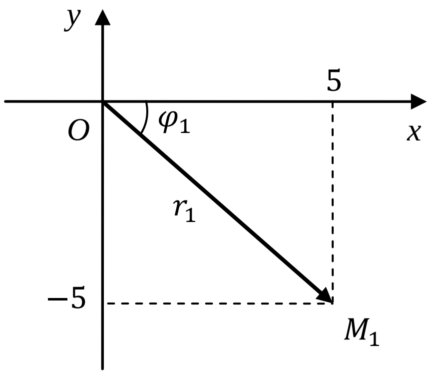


Рис. 1.16. Геометрическое представление комплексного числа $z_1 = 5 - 5i$

Найдём аргумент первого числа, учитывая, что точка M_1 лежит в IV четверти:

$$\varphi_1 = arctg\,\frac{y_1}{x_1} = arctg\,\frac{-5}{5} = arctg\,(-1) = -arctg\,1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма первого числа $z_1 = 5 - 5i$:

$$z_1 = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Найдём модуль второго числа $z_2 = -\sqrt{3} - 3i$:

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{3}.$$

Второму числу $z_2 = -\sqrt{3} - 3i$ в координатной плоскости соответствует точка $M_2\left(-\sqrt{3};\ -3\right)$ (рис. 1.17).

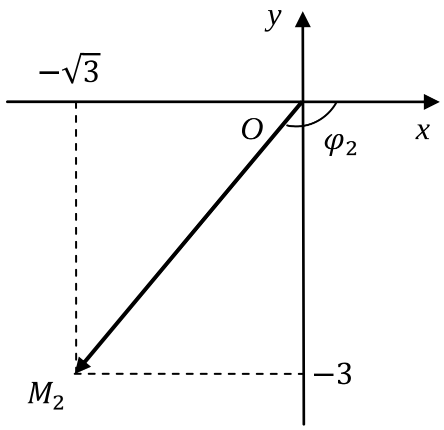


Рис. 1.17. Геометрическое представление комплексного числа $z_2 = -\sqrt{3} - 3i$

Найдём аргумент второго числа, учитывая, что точка M_2 лежит в III четверти:

$$\varphi_2 = -\pi + arctg\ \frac{y_2}{x_2} = -\pi + arctg\ \frac{-3}{-\sqrt{3}} = -\pi + arctg\ \sqrt{3} =$$
$$= -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

Тогда тригонометрическая форма второго числа $z_2 = -\sqrt{3} - 3i$:

$$z_2 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Найдём частное чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right) =$$
$$= \frac{5\sqrt{6}}{6}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Ответ: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\sqrt{6}}{6}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$

Замечание 1. В результате операций сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел снова получается комплексное число. Если правила действия над комплексными числами применить к действительным числам, рассматривая их как частный случай комплексных, то эти правила будут совпадать с обычными правилами действий, известными из арифметики.

Замечание 2. Если в выражениях суммы, разности, произведения и частного комплексных чисел заменить каждое комплексное число сопряжённым, то и результаты указанных действий заменяются сопряжёнными числами.

1.4.5. Возведение комплексного числа в целую положительную степень

Для получения формулы возведения комплексного числа в целую положительную степень рассмотрим частные случаи, используя формулу умножения комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z^2 = z \cdot z = \big(r(cos\varphi + i\ sin\ \varphi)\big)\big(r(cos\varphi + i\ sin\ \varphi)\big) =$$
$$= r \cdot r\big(\cos(\varphi + \varphi) + i\ sin\ (\varphi + \varphi)\big) = r^2(\cos 2\varphi + i\ sin\ 2\varphi);$$
$$z^3 = z^2 \cdot z = \big(r^2(\cos 2\varphi + i\ sin\ 2\varphi)\big)\big(r(cos\varphi + i\ sin\ \varphi)\big) =$$
$$= r^2 \cdot r\big(\cos(2\varphi + \varphi) + i\ sin\ (2\varphi + \varphi)\big) = r^3(\cos 3\varphi + i\ sin\ 3\varphi).$$

Применяя формулу произведения комплексных чисел n раз, получаем следующую формулу:

$$z^n = \big(r(cos\varphi + i\ sin\ \varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\ sin\ n\varphi).$$

Эта формула называется формулой *Муавра*.

Таким образом, при возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Пример 1.12. Выполнить возведение комплексного числа в степень по формуле Муавра: $\left(-\sqrt{3} + 3i\right)^7$.

Решение. Представим число $z = -\sqrt{3} + 3i$ в тригонометрической форме. Для этого найдём его модуль и аргумент.

Найдём модуль числа $z = -\sqrt{3} + 3i$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = 2\sqrt{3};$$

Числу $z = -\sqrt{3} + 3i$ в координатной плоскости соответствует точка $M\left(-\sqrt{3};\ 3\right)$ (рис. 1.18).

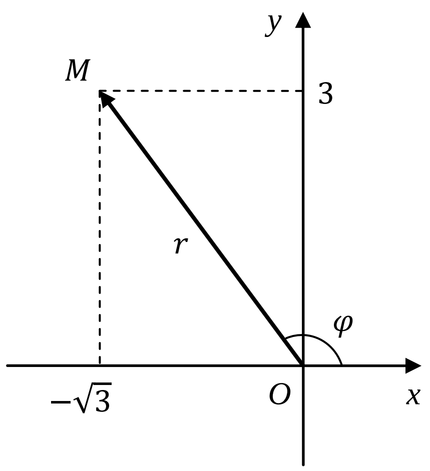


Рис. 1.18. Геометрическое представление комплексного числа $z = -\sqrt{3} + 3i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит во II четверти:

$$\varphi = \pi + arctg\frac{y}{x} = \pi + arctg\,\frac{3}{-\sqrt{3}} = \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Тогда тригонометрическая форма числа $z = -\sqrt{3} + 3i$:

$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Выполним возведение в степень по формуле Муавра:

$$\left(-\sqrt{3} + 3i\right)^7 = \left(2\sqrt{3}\right)^7\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 7\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 7\right)\right) =$$

$$= 3456\sqrt{3}\left(\cos\frac{14\pi}{3} + i\sin\frac{14\pi}{3}\right) = 3456\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 3456\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1728\sqrt{3} + 5184i.$$

Ответ: $-1728\sqrt{3} + 5184i$.

1.4.6. Извлечение корня из комплексного числа

Корнем n-й степени из комплексного числа называется такое комплексное число, n-я степень которого равна подкоренному числу, то есть если $\sqrt[n]{z} = w$, то $z = w^n$, где z и w – комплексные числа.

Пусть $z = r(cos\varphi + i\ sin\ \varphi)$, $w = \rho(\cos\psi + i\ sin\ \psi)$. Тогда:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(cos\varphi + i\ sin\ \varphi)} = \rho(\cos\psi + i\ sin\ \psi).$$

Возводя в степень n по формуле Муавра, получаем:

$$r(cos\varphi + i\ sin\ \varphi) = \rho^n(\cos n\psi + i\ sin\ n\psi).$$

Учитывая, что у равных комплексных чисел модули равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное 2π, получаем следующие уравнения для определения ρ и ψ:

$$\rho^n = r, n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in Z.$$

Отсюда получаем формулы для нахождения ρ и ψ:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, k \in Z,$$

где $\sqrt[n]{r}$ – арифметическое значение корня из положительного числа.

Придавая k значения $0, 1, 2, \dots, n-1$, получим n различных значений корня. Для других значений k аргументы будут отличаться от полученных на число, кратное 2π, и, следовательно, получатся значения корня, совпадающие с рассмотренными.

Окончательно, получаем следующую формулу для извлечения корня из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(cos\varphi + i\ sin\ \varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$k = \overline{0; n-1}$.

Пример 1.13. Найти все значения корня из комплексных чисел:

1) $\sqrt{-1}$; 2) $\sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}i}$.

Решение.

1) Для извлечения корня из комплексного числа $z = -1$ представим его в тригонометрической форме. Для этого найдём модуль и аргумент числа.

Найдём модуль числа $z = -1$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1.$

Числу $z = -1$ в координатной плоскости соответствует точка $M(-1;\ 0)$ (рис. 1.19).

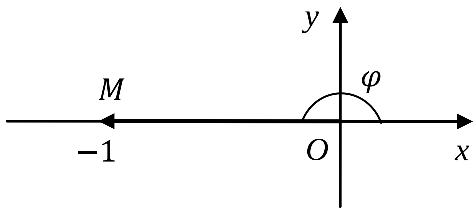


Рис. 1.19. Геометрическое представление комплексного числа $z = -1$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на отрицательной части оси Ox: $\varphi = \pi$.

Тогда тригонометрическая форма числа $z = -1$:

$z = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = \cos\pi + i\sin\pi.$

Выполним извлечение корня:

$\sqrt{-1} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right), k = 0, 1.$

Распишем все значения корня.

При $k = 0$: $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;$

при $k = 1$: $z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i.$

Найденные значения корня в комплексной плоскости представляют собой точки: $M_1(0;\ 1)$, $M_2(0;\ -1)$, лежащие на окружности радиуса 1 и расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 1.20).

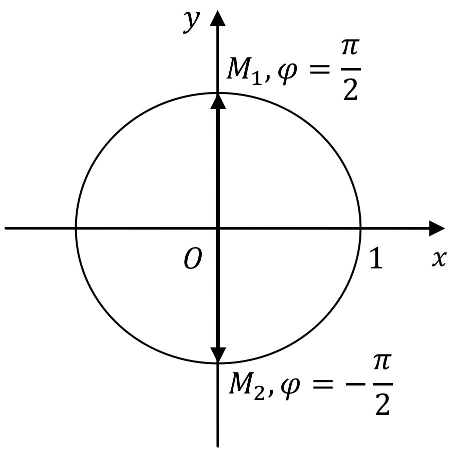


Рис. 1.20. Все значения $\sqrt{-1}$

2) Для извлечения корня из комплексного числа $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ представим его в тригонометрической форме. Для этого найдём модуль и аргумент числа.

Найдём модуль числа $z = -2 + 2\sqrt{3}i$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4.$$

Числу $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ в координатной плоскости соответствует точка $M\left(-2;\ 2\sqrt{3}\right)$ (рис. 1.21).

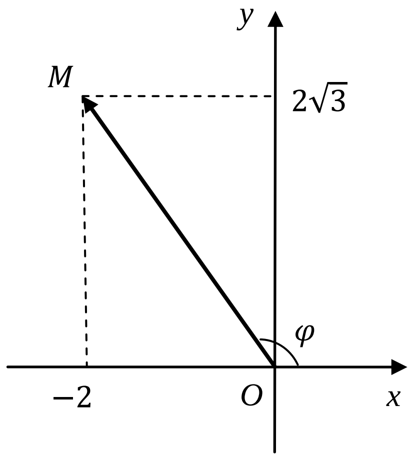


Рис. 1.21. Геометрическое представление комплексного числа $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит во II четверти:

$$\varphi = \pi + arctg\frac{y}{x} = \pi + arctg\frac{2\sqrt{3}}{-2} = \pi + arctg\left(-\sqrt{3}\right) =$$
$$= \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Тогда тригонометрическая форма числа $z = -2 + 2\sqrt{3}i$:

$$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Выполним извлечение корня:

$$\sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right), k = \overline{0, 3}.$$

Распишем все значения корня.

При $k = 0$: $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

при $k = 1$: $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$;

при $k = 2$: $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6} - 2\pi\right) +\right.$
$\left.+i\sin\left(\frac{7\pi}{6} - 2\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) =$
$= -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

при $k = 3$: $z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right) +\right.$
$\left.+i\sin\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}.$

Найденные значения корня в комплексной плоскости представляют собой точки:

$$M_1\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right),\ M_3\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right),$$

лежащие на окружности радиуса $\sqrt{2}$ и являющиеся вершинами квадрата (рис. 1.22).

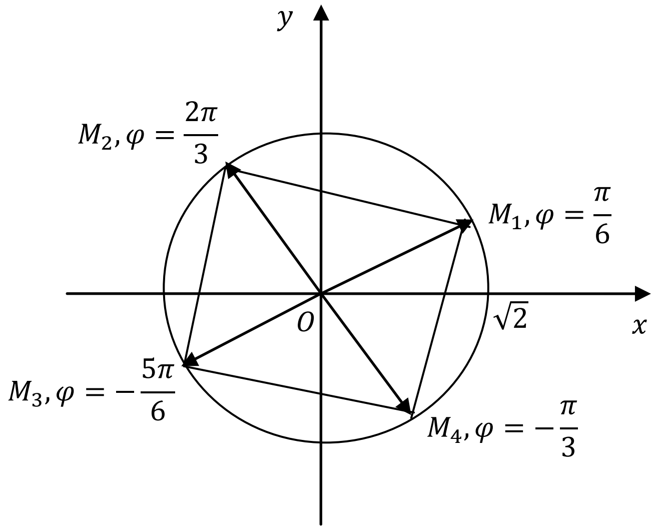


Рис. 1.22. Все значения $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$

Ответ: 1) $z_1=i,\ z_2=-i;$ 2) $z_1=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2},$

$z_3=-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}.$

Пример 1.14. Решить уравнения на множестве комплексных чисел: 1) $x^2+2x+5=0;$ 2) $x^6-64=0.$

Решение.

1) Найдём корни квадратного уравнения, учитывая, что $\sqrt{-1}=\pm i$:

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}}{2}=\frac{-2\pm4i}{2}=-1\pm2i.$

2) Выразим из уравнения x: $x=\sqrt[6]{64}$ и найдём все значения корня. Для этого представим число $z=64$ в тригонометрической форме. Найдём модуль и аргумент числа.

Найдём модуль числа $z=64$:

$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{64^2+0^2}=64.$

Числу $z=64$ в координатной плоскости соответствует точка $M(64;\ 0)$ (рис. 1.23).

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на положительной части оси Ox: $\varphi=0$.

Тогда тригонометрическая форма числа $z=64$:

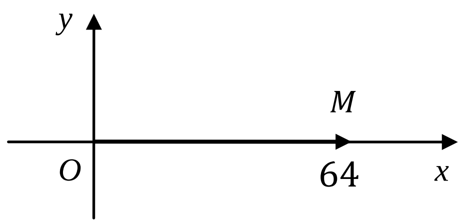


Рис. 1.23. Геометрическое представление комплексного числа $z = 64$

$z = 64(\cos 0 + i \sin 0)$.

По формуле извлечения корня из комплексного числа, получаем:

$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{6} + i\sin\frac{0+2\pi k}{6}\right), k = \overline{0,5}.$

Распишем все значения корня.

При $k = 0$: $x_1 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2(1 + i \cdot 0) = 2$;

при $k = 1$: $x_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$;

при $k = 2$: $x_3 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= -1 + i\sqrt{3}$;

при $k = 3$: $x_4 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2$;

при $k = 4$: $x_5 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right) +\right.$
$\left.+ i\sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= -1 - i\sqrt{3}$;

при $k = 5$: $x_6 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right) +\right.$
$\left.+ i\sin\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= 1 - i\sqrt{3}$.

Ответ: 1) $x_{1,2} = -1 \pm 2i$; 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 1 + i\sqrt{3}$, $x_3 = -1 + i\sqrt{3}$, $x_4 = -2$, $x_5 = -1 - i\sqrt{3}$, $x_6 = 1 - i\sqrt{3}$.

Контрольные вопросы

1. Что такое i?
2. Как комплексное число представляют геометрически?
3. Назовите формы записи комплексного числа.
4. Что такое модуль комплексного числа и как его находят?
5. Что такое аргумент комплексного числа и как его находят?
6. Как выполняют сложение комплексных чисел?
7. Как выполняют вычитание комплексных чисел?
8. Как выполняют умножение комплексных чисел?
9. Как выполняют деление комплексных чисел?
10. Как выполняют возведение комплексного числа в степень?
11. Как извлекают корень из комплексного числа?

Раздел 2. Практикум

В данном разделе используется следующая нумерация примеров и заданий: a.b, где первая цифра "a"обозначает номер раздела, вторая цифра "b" обозначает номер примера (задания, рисунка). Например: 2.9 обозначает второй раздел, девятый пример (задание, рисунок).

Часть I. Первый уровень сложности

2.1. Действительная и мнимая части комплексного числа

Пример 2.1. Указать действительную и мнимую части чисел:

1) $z = 3 + 4i$; 2) $z = 2 - 5i$; 3) $z = -5 - i$;
4) $z = -1 + 4i$; 5) $z = 3i$; 6) $z = -10i$;
7) $z = -3$; 8) $z = 5$; 9) $z = \sqrt{2}$;
10) $z = \sin 1$; 11) $z = i \ln 2$.

Решение. Все числа заданы в алгебраической форме $z = x + iy$, где x –действительная часть комплексного числа, y – мнимая часть. Тогда:

1) $Rez = 3, Imz = 4$; 2) $Rez = 2, Imz = -5$;
3) $Rez = -5, Imz = -1$; 4) $Rez = -1, Imz = 4$;
5) $Rez = 0, Imz = 3$; 6) $Rez = 0, Imz = -10$;
7) $Rez = -3, Imz = 0$; 8) $Rez = 5, Imz = 0$;
9) $Rez = \sqrt{2}, Imz = 0$; 10) $Rez = \sin 1\,, Imz = 0$;
11) $Rez = 0, Imz = \ln 2$.

Задание 2.1. Указать действительную и мнимую части чисел:

1) $z = -2 + 7i$; 2) $z = -\frac{3}{2} - 4i$; 3) $z = 3 + i$;
4) $z = 10 - i$; 5) $z = 4$; 6) $z = -1$;
7) $z = -\frac{1}{2}i$; 8) $z = \frac{3}{2}i$; 9) $z = \sqrt[3]{5}i$;
10) $z = (arccos\, 1)i$; 11) $z = tg\, \frac{\pi}{12}$.

2.2. Степень числа *i*

Пример 2.2. Найти степень числа i.

1) i^7; 2) i^{10}; 3) i^{15}; 4) i^{45}; 5) i^{111};
6) i^{200}.

Решение. Воспользуемся формулой $i^2 = -1$.

1) $i^7 = i^6 \cdot i = (i^2)^3 \cdot i = (-1)^3 \cdot i = -i$;
2) $i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$;
3) $i^{15} = i^{14} \cdot i = (i^2)^7 \cdot i = (-1)^7 \cdot i = -i$;
4) $i^{45} = i^{44} \cdot i = (i^2)^{22} \cdot i = (-1)^{22} \cdot i = i$;
5) $i^{111} = i^{110} \cdot i = (i^2)^{55} \cdot i = (-1)^{55} \cdot i = -i$;
6) $i^{200} = (i^2)^{100} = (-1)^{100} = 1$.

Ответ: 1) $-i$; 2) -1; 3) $-i$; 4) i; 5) $-i$; 6) 1.

Задание 2.2. Найти степень числа i:

1) i^3; 2) i^4; 3) i^{26}; 4) i^{43}; 5) i^{60};
6) i^{225}.

2.3. Сопряжённое комплексное число

Пример 2.3. Найти комплексные числа, сопряжённые данным числам:

1) $z = -3 + 2i$; 2) $z = -5 - 3i$; 3) $z = 4i$;
4) $z = 2$; 5) $z = 2 - \sqrt[3]{4}i$.

Решение. Сопряжённое число отличается от исходного знаком мнимой части, то есть для комплексного числа $z = x + iy$ сопряжённым является комплексное число $\bar{z} = x - iy$. С учётом этого:

1) $\bar{z} = -3 - 2i$; 2) $\bar{z} = -5 + 3i$; 3) $\bar{z} = -4i$;
4) $\bar{z} = 2$; 5) $\bar{z} = 2 + \sqrt[3]{4}i$.

Задание 2.3. Найти числа, сопряжённые данным числам:

1) $z = 6 - 7i$; 2) $z = 2 + 2i$; 3) $z = -3$;
4) $z = -3i$; 5) $z = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}$.

2.4. Геометрическое представление комплексного числа

Пример 2.4. Изобразить комплексные числа в комплексной плоскости:

1) $z = 2 - 2\sqrt{3}i$; 2) $z = -0{,}5 - 3i$; 3) $z = 4i$;
4) $z = -5$; 5) $z = -1 + i$; 6) $z = \sqrt{3} + i$;
7) $z = -2i$; 8) $z = 3$.

Решение.

1) Числу $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M\left(2; -2\sqrt{3}\right)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 2.1).

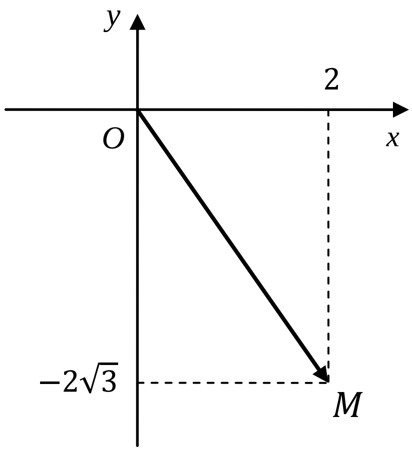


Рис. 2.1. Геометрическое представление комплексного числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$

2) Числу $z = -0{,}5 - 3i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-0{,}5; -3)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 2.2).

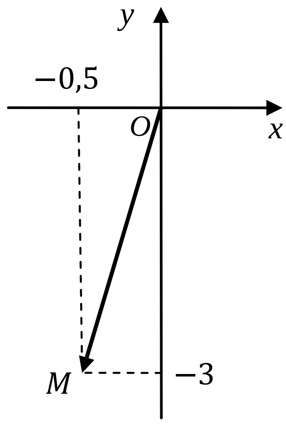


Рис. 2.2. Геометрическое представление комплексного числа $z = -0{,}5 - 3i$

3) Числу $z = 4i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(0; 4)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 2.3).

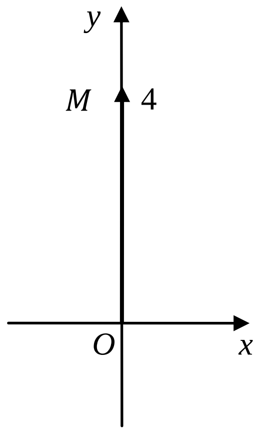


Рис. 2.3. Геометрическое представление комплексного числа $z = 4i$

4) Числу $z = -5$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-5; 0)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 2.4).

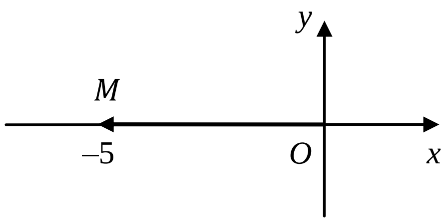


Рис. 2.4. Геометрическое представление комплексного числа $z = -5$

5) Числу $z = -1 + i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-1; 1)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 2.5).

6) Числу $z = \sqrt{3} + i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(\sqrt{3}; 1)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 2.6).

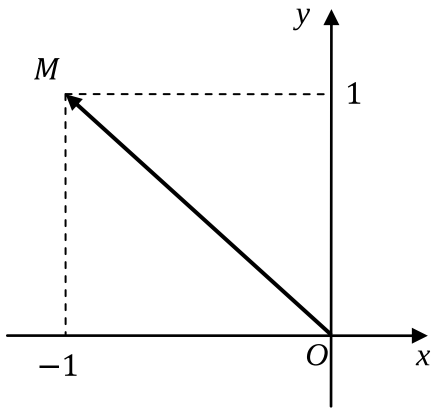


Рис. 2.5. Геометрическое представление комплексного числа $z = -1 + i$

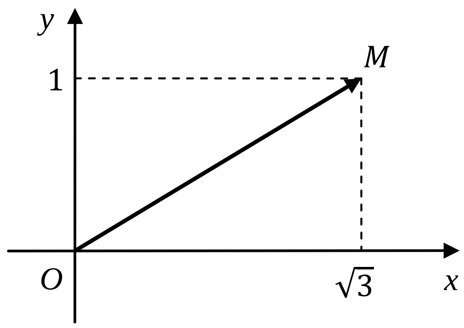


Рис. 2.6. Геометрическое представление комплексного числа $z = \sqrt{3} + i$

7) Числу $z = -2i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(0; -2)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 2.7).

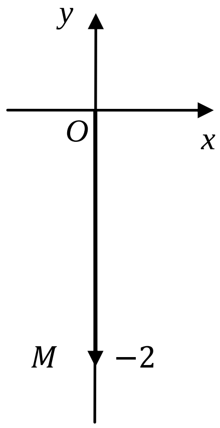


Рис. 2.7. Геометрическое представление комплексного числа $z = -2i$

8) Числу $z = 3$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(3; 0)$ или вектор $\overline{OM}$ (рис. 2.8).

Задание 2.4. Изобразить комплексные числа в комплексной плоскости:

1) $z = 5 - 7i$; 2) $z = -3i$; 3) $z = 5$;
4) $z = -3 + 3i$; 5) $z = -4 - 3i$; 6) $z = 5 + 5i$;

7) $z=-4$; 8) $z=3i$.

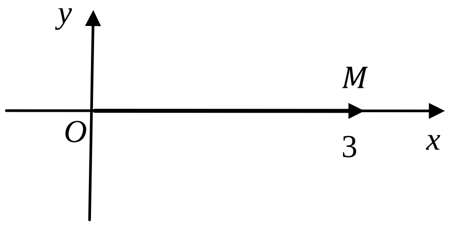


Рис. 2.8. Геометрическое представление комплексного числа $z=3$

2.5. Модуль комплексного числа

Пример 2.5. Найти модуль комплексных чисел:

1) $z=-3+4i$; 2) $z=4-2i$;
3) $z=3+5i$; 4) $z=-6-7i$;
5) $z=3$; 6) $z=-7$;
7) $z=\frac{1}{2}i$; 8) $z=-4i$;
9) $z=\cos 1+isin\,1$; 10) $z=\ln 2-2i$;

Решение. Для нахождения модуля комплексного числа $z=x+iy$ воспользуемся формулой: $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

1) Модуль числа $z=-3+4i$: $r=|z|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

2) Модуль числа $z=4-2i$: $r=|z|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=$ $=2\sqrt{5}$.

3) Модуль числа $z=3+5i$: $r=|z|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$.

4) Модуль числа $z=-6-7i$: $r=|z|=\sqrt{(-6)^2+(-7)^2}=\sqrt{85}$.

5) Модуль числа $z=3$: $r=|z|=\sqrt{3^2+0^2}=3$.

6) Модуль числа $z=-7$: $r=|z|=\sqrt{(-7)^2+0^2}=7$.

7) Модуль числа $z=\frac{1}{2}i$: $r=|z|=\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$.

8) Модуль числа $z=-4i$: $r=|z|=\sqrt{0^2+(-4)^2}=4$.

9) Модуль числа $z=\cos 1+isin\,1$:
$r=|z|=\sqrt{(\cos 1)^2+(sin\,1)^2}=1$.

10) Модуль числа $z=\ln 2-2i$: $r=|z|=\sqrt{(\ln 2)^2+(-2)^2}=$ $=\sqrt{ln^2 2+4}$.

Ответ: 1) $r=5$; 2) $r=2\sqrt{5}$; 3) $r=\sqrt{34}$; 4) $r=\sqrt{85}$; 5) $r=3$; 6) $r=7$; 7) $r=\frac{1}{2}$; 8) $r=4$; 9) $r=1$; 10) $r=\sqrt{ln^2 2+4}$.

Задание 2.5. Найти модуль комплексных чисел:

1) $z=4-3i$; 2) $z=-7+i$;
3) $z=5+2i$; 4) $z=-1-i$;
5) $z=-5i$; 6) $z=0{,}4$;

7) $z = -2$; 8) $z = 3i$;

9) $z = \sqrt{3} + i\sqrt{6}$; 10) $z = 1 + i(arcsin\, 2)$.

2.6. Аргумент комплексного числа

Пример 2.6. Найти аргумент комплексных чисел:

1) $z = -2 + 2i$; 2) $z = -3 - \sqrt{3}i$; 3) $z = \sqrt{3} + i$;

4) $z = 2 - 2\sqrt{3}i$; 5) $z = -2$; 6) $z = 3$;

7) $z = 5i$; 8) $z = -4i$; 9) $z = 1 + 2i$;

10) $z = -3 - 5i$.

Решение.

1) Числу $z = -2 + 2i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-2;\ 2)$ (рис. 2.9).

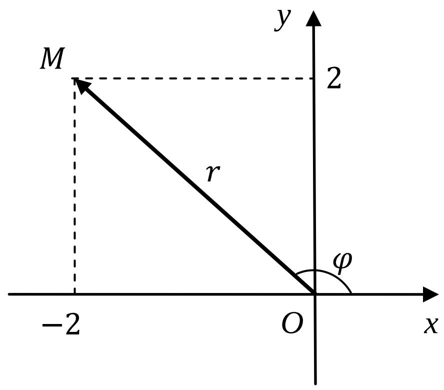


Рис. 2.9. Геометрическое представление комплексного числа $z = -2 + 2i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит во II четверти:

$$\varphi = \pi + arctg\,\frac{y}{x} = \pi + arctg\,\frac{2}{-2} = \pi - arctg\,1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

2) Числу $z = -3 - \sqrt{3}i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M\left(-3;\ -\sqrt{3}\right)$ (рис. 2.10).

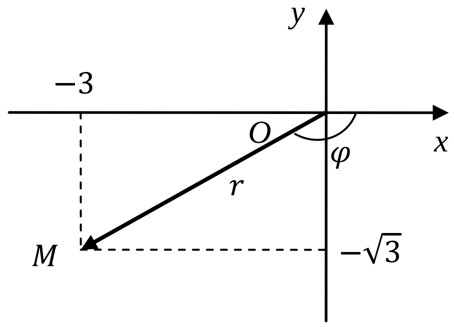


Рис. 2.10. Геометрическое представление комплексного числа $z = -3 - \sqrt{3}i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в III четверти:

$\varphi = -\pi + arctg\ \frac{y}{x} = -\pi + arctg\ \frac{-\sqrt{3}}{-3} = -\pi + arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = -\pi +$
$+\frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$

3) Числу $z = \sqrt{3} + i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(\sqrt{3}; 1)$ (рис. 2.11).

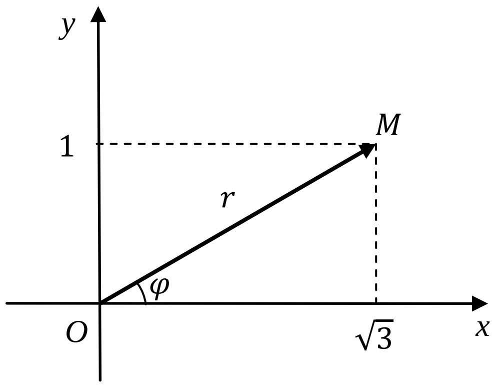


Рис. 2.11. Геометрическое представление комплексного числа $z = \sqrt{3} + i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в I четверти:

$$\varphi = arctg\ \frac{y}{x} = arctg\ \frac{1}{\sqrt{3}} = arctg\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

4) Числу $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(2;\ -2\sqrt{3})$ (рис. 2.12).

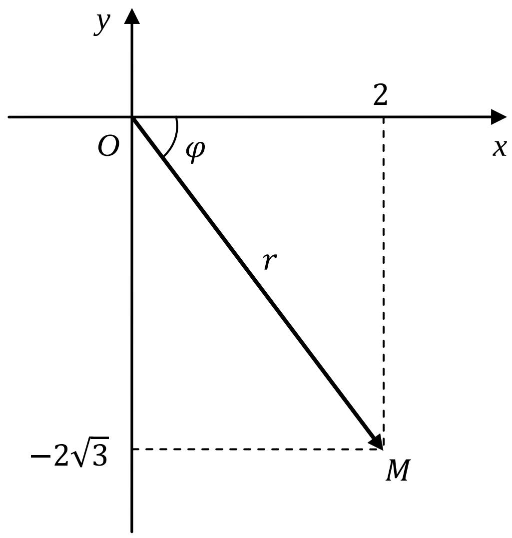


Рис. 2.12. Геометрическое представление комплексного числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в IV четверти:

$$\varphi = arctg\ \frac{y}{x} = arctg\ \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -arctg\ \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

5) Числу $z=-2$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-2;\ 0)$ (рис. 2.13).

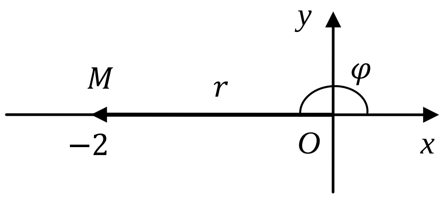


Рис. 2.13. Геометрическое представление комплексного числа $z=-2$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на отрицательной части оси Ox: $\varphi=\pi$.

6) Числу $z=3$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(3;\ 0)$ (рис. 2.14).

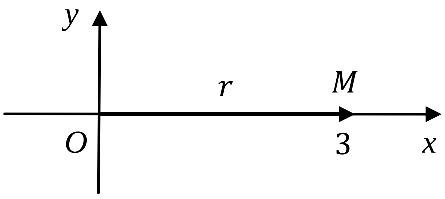


Рис. 2.14. Геометрическое представление комплексного числа $z=3$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на положительной части оси Ox: $\varphi=0$.

7) Числу $z=5i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(0;\ 5)$ (рис. 2.15).

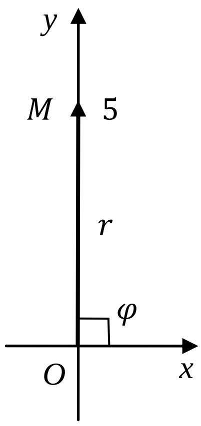


Рис. 2.15. Геометрическое представление комплексного числа $z=5i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на положительной части оси Oy: $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

8) Числу $z=-4i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(0;\ -4)$ (рис. 2.16).

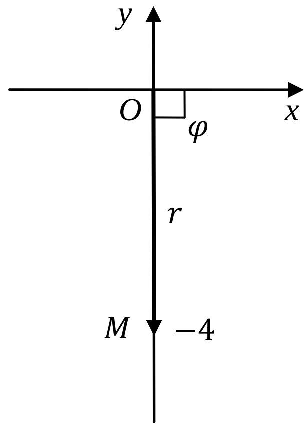


Рис. 2.16. Геометрическое представление комплексного числа $z = -4i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на отрицательной части оси Oy: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

9) Числу $z = 1 + 2i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(1; 2)$ (рис. 2.17).

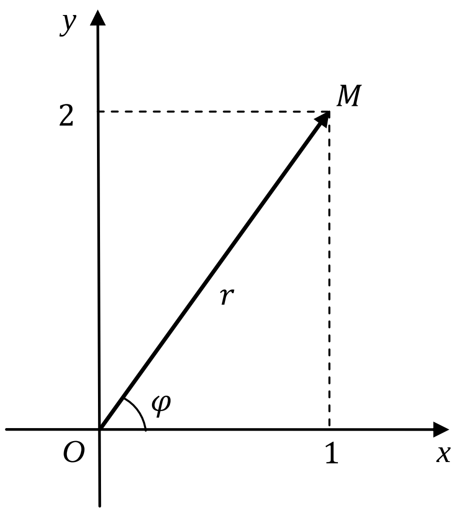


Рис. 2.17. Геометрическое представление комплексного числа $z = 1 + 2i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в I четверти:

$\varphi = arctg\,\frac{y}{x} = arctg\,\frac{2}{1} = arctg\,2.$

10) Числу $z = -3 - 5i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-3;\ -5)$ (рис. 2.18).

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в III четверти:

$\varphi = -\pi + arctg\,\frac{y}{x} = -\pi + arctg\,\frac{-5}{-3} = -\pi + arctg\,\frac{5}{3}.$

Ответ: 1) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; 2) $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$; 3) $\varphi = \frac{\pi}{6}$; 4) $\varphi = -\frac{\pi}{3}$; 5) $\varphi = \pi$; 6) $\varphi = 0$; 7) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 8) $\varphi = -\frac{\pi}{2}$; 9) $\varphi = arctg\,2$; 10) $\varphi = -\pi + arctg\,\frac{5}{3}$.

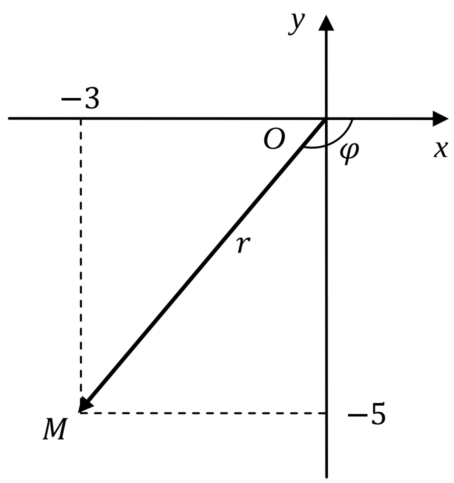


Рис. 2.18. Геометрическое представление комплексного числа $z = -3 - 5i$

Задание 2.6. Найти аргумент комплексных чисел:

1) $z = 1 - \sqrt{3}i$; 2) $z = -3 + 3i$; 3) $z = -4 - 4i$;
4) $z = 3 + \sqrt{3}i$; 5) $z = 1$; 6) $z = -2$;
7) $z = 7i$; 8) $z = -5i$; 9) $z = -3 + 4i$;
10) $z = -5 - \sqrt{3}i$.

2.7. Тригонометрическая форма комплексного числа

Пример 2.7. Представить комплексные числа в тригонометрической форме:

1) $z = -1 - \sqrt{3}i$; 2) $z = -5 + 5i$; 3) $z = 10$;
4) $z = -3i$; 5) $z = 3 - 3i$; 6) $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$;
7) $z = -2$; 8) $z = \frac{1}{2}i$; 9) $z = 2 + 4i$;
10) $z = -2 - 3i$.

Решение.

1) Найдём модуль комплексного числа $z = -1 - \sqrt{3}i$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2.$$

Числу $z = -1 - \sqrt{3}i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M\left(-1;\ -\sqrt{3}\right)$ (рис. 2.19).

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в III четверти:

$$\varphi = -\pi + arctg\,\frac{y}{x} = -\pi + arctg\,\frac{-\sqrt{3}}{-1} = -\pi + arctg\,\sqrt{3} = -\pi + \\ +\frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = -1 - \\ -\sqrt{3}i$:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

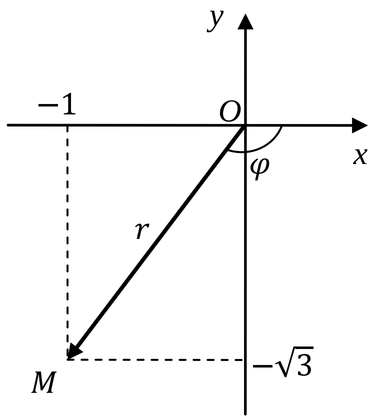


Рис. 2.19. Геометрическое представление комплексного числа $z = -1 - \sqrt{3}i$

2) Найдём модуль комплексного числа $z = -5 + 5i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$

Числу $z = -5 + 5i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-5;\ 5)$ (рис. 2.20).

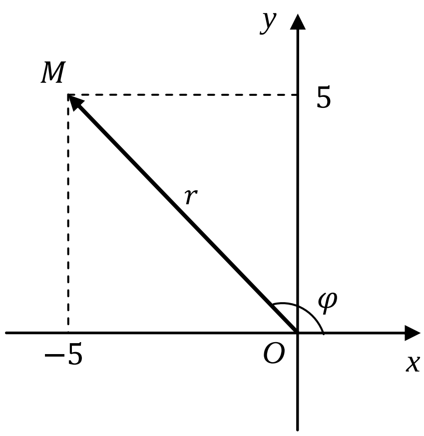


Рис. 2.20. Геометрическое представление комплексного числа $z = -5 + 5i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит во II четверти:

$$\varphi = \pi + arctg\ \frac{y}{x} = \pi + arctg\ \frac{5}{-5} = \pi - arctg\ 1 = \pi - \frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{3\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = -5 +$ $+5i$:

$z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$

3) Найдём модуль комплексного числа $z = 10$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10^2 + 0^2} = 10.$

Числу $z = 10$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(10;\ 0)$ (рис. 2.21).

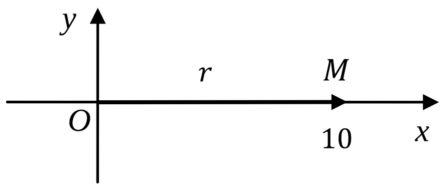


Рис. 2.21. Геометрическое представление комплексного числа $z = 10$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на положительной части оси Ox: $\varphi = 0$.

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = 10$:

$z = 10(\cos 0 + i \sin 0)$.

4) Найдём модуль комплексного числа $z = -3i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$.

Числу $z = -3i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(0;\ -3)$ (рис. 2.22).

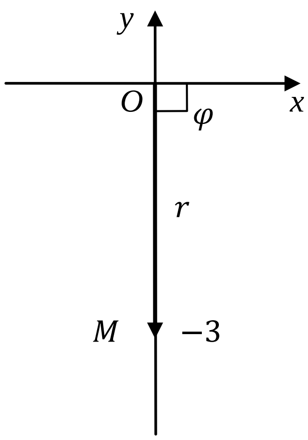


Рис. 2.22. Геометрическое представление комплексного числа $z = -3i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на отрицательной части оси Oy: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = -3i$:

$z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

5) Найдём модуль комплексного числа $z = 3 - 3i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$.

Числу $z = 3 - 3i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(3;\ -3)$ (рис. 2.23).

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в IV четверти:

$\varphi = arctg\ \frac{y}{x} = arctg\ \frac{-3}{3} = -arctg\ 1 = -\frac{\pi}{4}$.

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = 3 - 3i$:

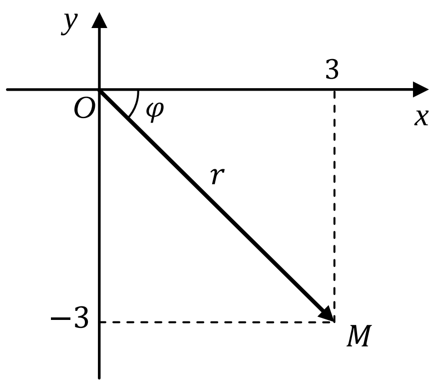


Рис. 2.23. Геометрическое представление комплексного числа $z = 3 - 3i$

$z = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$

6) Найдём модуль комплексного числа $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = 2\sqrt{2}.$

Числу $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M\left(\sqrt{2};\ \sqrt{6}\right)$ (рис. 2.24).

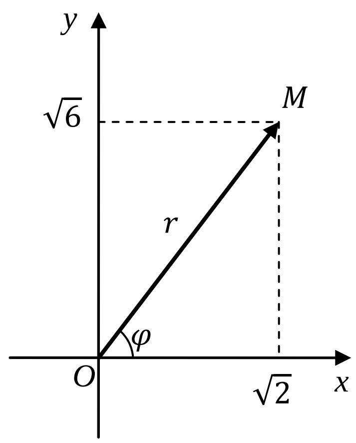


Рис. 2.24. Геометрическое представление комплексного числа $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в I четверти:

$\varphi = arctg\ \frac{y}{x} = arctg\ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = arctg\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = \sqrt{2} + {}$ $+\sqrt{6}i$:

$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

7) Найдём модуль комплексного числа $z = -2$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2.$

Числу $z = -2$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-2;\ 0)$ (рис. 2.25).

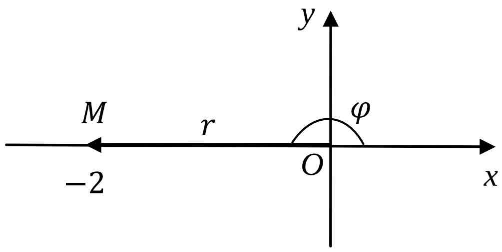


Рис. 2.25. Геометрическое представление комплексного числа $z = -2$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на отрицательной части оси Ox: $\varphi = \pi$.

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = -2$:

$z = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

8) Найдём модуль комплексного числа $z = \frac{1}{2}i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$.

Числу $z = \frac{1}{2}i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ (рис. 2.26).

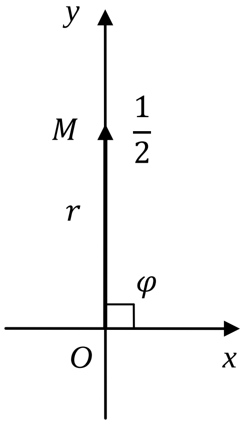


Рис. 2.26. Геометрическое представление комплексного числа $z = \frac{1}{2}i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на положительной части оси Oy: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = \frac{1}{2}i$:

$z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

9) Найдём модуль комплексного числа $z = 2 + 4i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

Числу $z = 2 + 4i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(2;\ 4)$ (рис. 2.27).

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в I четверти:

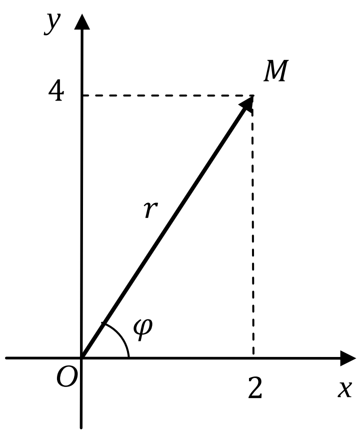


Рис. 2.27. Геометрическое представление комплексного числа $z = 2 + 4i$

$\varphi = arctg\ \frac{y}{x} = arctg\ \frac{4}{2} = arctg\ 2.$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = 2 + 4i$:

$z = 2\sqrt{5}(\cos(arctg\ 2) + i\sin(arctg\ 2)).$

10) Найдём модуль комплексного числа $z = -2 - 3i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}.$

Числу $z = -2 - 3i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-2;\ -3)$ (рис. 2.28).

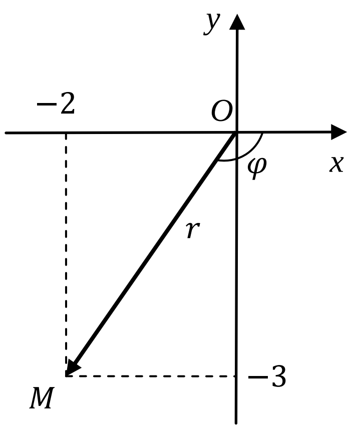


Рис. 2.28. Геометрическое представление комплексного числа $z = -2 - 3i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в III четверти:

$\varphi = -\pi + arctg\ \frac{y}{x} = -\pi + arctg\ \frac{-3}{-2} = -\pi + arctg\ \frac{3}{2}.$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = -2 - 3i$:

$z = \sqrt{13}\left(\cos\left(-\pi + arctg\ \frac{3}{2}\right) + i\sin\left(-\pi + arctg\ \frac{3}{2}\right)\right).$

Ответ:

1) $z = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$; 2) $z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

3) $z = 10(\cos 0 + i\sin 0)$; 4) $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$;

5) $z=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; 6) $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;
7) $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)$; 8) $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;
9) $z=2\sqrt{5}(\cos(arctg\ 2)+i\sin(arctg\ 2))$;
10) $z=\sqrt{13}\left(\cos\left(-\pi+arctg\ \frac{3}{2}\right)+i\sin\left(-\pi+arctg\ \frac{3}{2}\right)\right)$.

Задание 2.7. Представить комплексные числа в тригонометрической форме:

1) $z=2-2i$; 2) $z=3+\sqrt{3}i$; 3) $z=-6+6i$;
4) $z=-\sqrt{3}-i$; 5) $z=-12i$; 6) $z=4$;
7) $z=-3$; 8) $z=i$; 9) $z=7+8i$;
10) $z=-2+3i$.

2.8. Показательная форма комплексного числа

Пример 2.8. Представить комплексные числа в показательной форме:

1) $z=1$; 2) $z=-1+\sqrt{3}i$; 3) $z=3-3i$;
4) $z=10i$; 5) $z=4+4\sqrt{3}i$; 6) $z=-1-i$;
7) $z=-4$; 8) $z=-5i$; 9) $z=2+i$;
10) $z=-3-2i$.

Решение.

1) Найдём модуль комплексного числа $z=1$:
$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+0^2}=1$.

Числу $z=1$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(1;\ 0)$ (рис. 2.29).

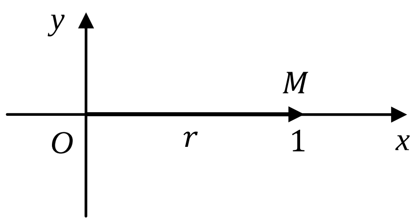


Рис. 2.29. Геометрическое представление комплексного числа $z=1$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на положительной части оси Ox: $\varphi=0$.

Тогда показательная форма комплексного числа $z=1$:
$z=e^{0i}$.

2) Найдём модуль комплексного числа $z=-1+\sqrt{3}i$:

$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$.

Числу $z=-1+\sqrt{3}i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M\left(-1;\ \sqrt{3}\right)$ (рис. 2.30).

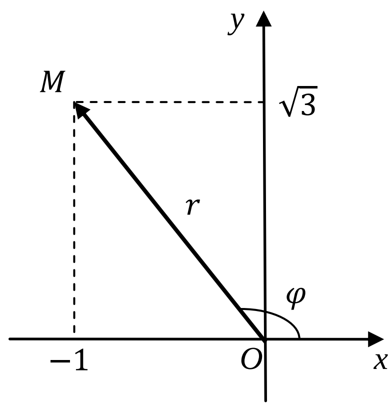


Рис. 2.30. Геометрическое представление комплексного числа $z = -1 + \sqrt{3}i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит во II четверти:

$$\varphi = \pi + arctg\,\frac{y}{x} = \pi + arctg\,\frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - arctg\,\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Тогда показательная форма комплексного числа $z = -1 + \sqrt{3}i$:

$$z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

3) Найдём модуль комплексного числа $z = 3 - 3i$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Числу $z = 3 - 3i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(3;\ -3)$ (рис. 2.31).

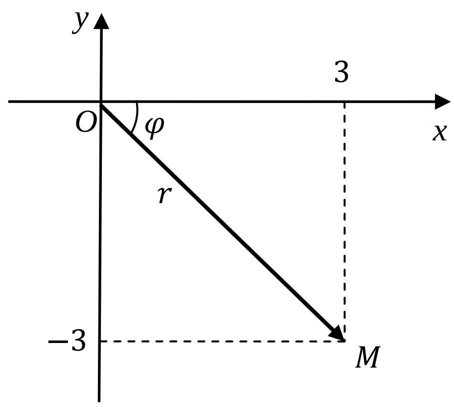


Рис. 2.31. Геометрическое представление комплексного числа $z = 3 - 3i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в IV четверти:

$$\varphi = arctg\,\frac{y}{x} = arctg\,\frac{-3}{3} = -arctg\,1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда показательная форма комплексного числа $z = 3 - 3i$:

$$z = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

4) Найдём модуль комплексного числа $z = 10i$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 10^2} = 10.$$

Числу $z = 10i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(0;\ 10)$ (рис. 2.32).

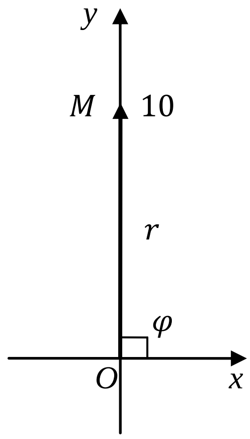


Рис. 2.32. Геометрическое представление комплексного числа $z = 10i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на положительной части оси Oy: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Тогда показательная форма комплексного числа $z = 10i$:

$z = 10e^{\frac{\pi}{2}i}$.

5) Найдём модуль комплексного числа $z = 4 + 4\sqrt{3}i$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 8.$$

Числу $z = 4 + 4\sqrt{3}i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M\left(4;\ 4\sqrt{3}\right)$ (рис. 2.33).

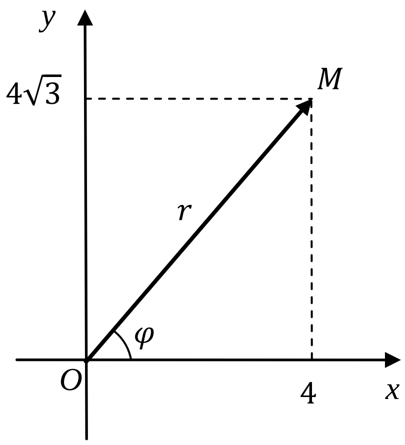


Рис. 2.33. Геометрическое представление комплексного числа $z = 4 + 4\sqrt{3}i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в I четверти:

$\varphi = arctg\ \frac{y}{x} = arctg\ \frac{4\sqrt{3}}{4} = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Тогда показательная форма комплексного числа $z = 4 + 4\sqrt{3}i$:

$z = 8e^{\frac{\pi}{3}i}$.

6) Найдём модуль комплексного числа $z = -1 - i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Числу $z = -1 - i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-1;\ -1)$ (рис. 2.34).

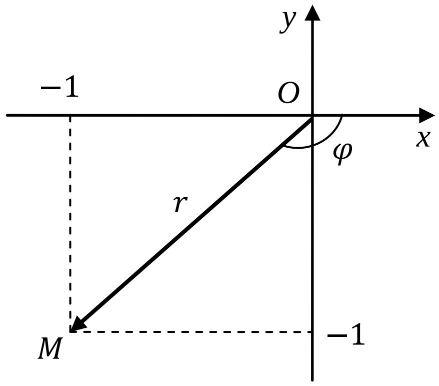


Рис. 2.34. Геометрическое представление комплексного числа $z = -1 - i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в III четверти:

$\varphi = -\pi + arctg\ \frac{y}{x} = -\pi + arctg\ \frac{-1}{-1} = -\pi + arctg1 = -\pi +$
$+\frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$.

Тогда показательная форма комплексного числа $z = -1 - i$:

$z = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

7) Найдём модуль комплексного числа $z = -4$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$.

Числу $z = -4$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-4;\ 0)$ (рис. 2.35).

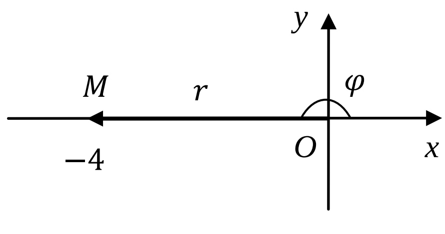


Рис. 2.35. Геометрическое представление комплексного числа $z = -4$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на отрицательной части оси Ox: $\varphi = \pi$.

Тогда показательная форма комплексного числа $z = -4$:

$z = 4e^{\pi i}$.

8) Найдём модуль комплексного числа $z = -5i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5.$

Числу $z = -5i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(0;\ -5)$ (рис. 2.36).

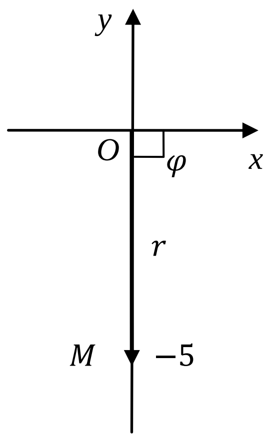


Рис. 2.36. Геометрическое представление комплексного числа $z = -5i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на отрицательной части оси Oy: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Тогда показательная форма комплексного числа $z = -5i$:

$z = 5e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

9) Найдём модуль комплексного числа $z = 2 + i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$

Числу $z = 2 + i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(2;\ 1)$ (рис. 2.37).

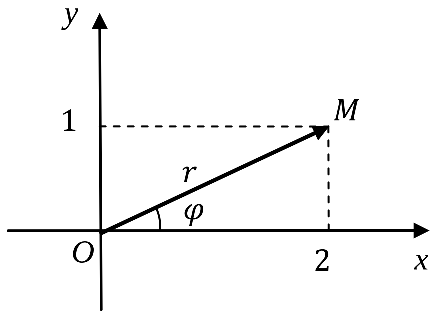


Рис. 2.37. Геометрическое представление комплексного числа $z = 2 + i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в I четверти:

$\varphi = arctg\ \frac{y}{x} = arctg\ \frac{1}{2}$.

Тогда показательная форма комплексного числа $z = 2 + i$:

$z = \sqrt{5}e^{iarctg\frac{1}{2}}$.

10) Найдём модуль комплексного числа $z = -3 - 2i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$

Числу $z = -3 - 2i$ в комплексной плоскости соответствует точка $M(-3;\ -2)$ (рис. 2.38).

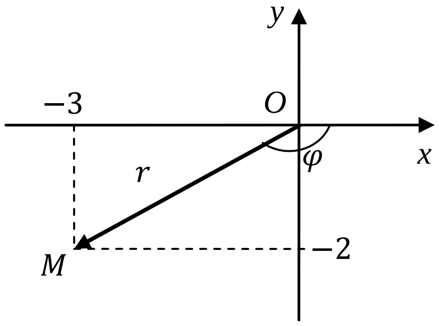


Рис. 2.38. Геометрическое представление комплексного числа $z = -3 - 2i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в III четверти:

$$\varphi = -\pi + arctg\ \frac{y}{x} = -\pi + arctg\ \frac{-2}{-3} = -\pi + arctg\ \frac{2}{3}.$$

Тогда показательная форма комплексного числа $z = -3 - 2i$:

$$z = \sqrt{13}e^{\left(-\pi + arctg\frac{2}{3}\right)i}.$$

Ответ: 1) $z = e^{0i}$; 2) $z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$; 3) $z = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; 4) $z = 10e^{\frac{\pi}{2}i}$; 5) $z = 8e^{\frac{\pi}{3}i}$; 6) $z = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$; 7) $z = 4e^{\pi i}$; 8) $z = 5e^{-\frac{\pi}{2}i}$; 9) $z = \sqrt{5}e^{iarctg\frac{1}{2}}$; 10) $z = \sqrt{13}e^{\left(-\pi + arctg\frac{2}{3}\right)i}$.

Задание 2.8. Представить комплексные числа в показательной форме:

1) $z = 6i$; 2) $z = -1$; 3) $z = 3 + \sqrt{3}i$;
4) $z = -6i$; 5) $z = \frac{3}{2}$; 6) $z = 1 - i$;
7) $z = -5 + 5i$; 8) $z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$; 9) $z = 1 + 3i$;
10) $z = -2 - 5i$.

2.9. Сумма, разность, произведение и частное комплексных чисел в алгебраической форме

Пример 2.9. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел в алгебраической форме:

1) $z_1 = -2 + 3i, z_2 = 5 + 4i$; 2) $z_1 = -5, z_2 = 3 - 7i$;
3) $z_1 = -5 - 6i, z_2 = -6i$.

Решение.

1) Найдём сумму чисел, учитывая, что при сложении складывают действительные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = (-2 + 3i) + (5 + 4i\ ) = (-2 + 5) + i(3 + 4) = 3 + 7i.$$

Найдём разность чисел, учитывая, что при вычитании вычитают действительные и мнимые части:

$$z_1 - z_2 = (-2 + 3i) - (5 + 4i\ ) = (-2 - 5) + i(3 - 4) = -7 - i.$$

Найдём произведение чисел, учитывая, что комплексные числа в алгебраической форме умножают как двучлены по правилам алгебры:

$z_1 z_2 = (-2+3i)(5+4i) = -10 - 8i + 15i + 12i^2 = -10 +$
$+7i + 12 \cdot (-1) = -22 + 7i.$

Найдём частное чисел, учитывая, что при делении комплексных чисел в алгебраической форме числитель и знаменатель умножают на число, сопряжённое знаменателю:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+3i}{5+4i} = \frac{(-2+3i)(5-4i)}{(5+4i)(5-4i)} = \frac{-10+8i+15i-12i^2}{5^2-(4i)^2} = \frac{-10+23i-12\cdot(-1)}{25-16i^2} =$
$= \frac{2+23i}{25-16\cdot(-1)} = \frac{2+23i}{41} = \frac{2}{41} + \frac{23}{41}i.$

2) $z_1 + z_2 = (-5) + (3-7i) = (-5+3) + (0-7)i = -2 - 7i;$

$z_1 - z_2 = (-5) - (3-7i) = (-5-3) + \big(0-(-7)\big)i = -8 + 7i;$

$z_1 z_2 = (-5)\cdot(3-7i) = -15 + 35i;$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-5}{3-7i} = \frac{-5(3+7i)}{(3-7i)(3+7i)} = \frac{-15-35i}{3^2-(7i)^2} = \frac{-15-35i}{9-49i^2} = \frac{-15-35i}{9-49\cdot(-1)} =$
$= \frac{-15-35i}{58} = -\frac{15}{58} - \frac{35}{58}i.$

3) $z_1 + z_2 = (-5-6i) + (-6i) = (-5+0) + (-6-6)i = -5 -$
$-12i;$

$z_1 - z_2 = (-5-6i) - (-6i) = (-5-0) + i\big(-6-(-6)\big) =$
$= -5 + 0i = -5;$

$z_1 z_2 = (-5-6i)\cdot(-6i) = 30i + 36i^2 = 30i + 36(-1) =$
$= -36 + 30i;$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-5-6i}{-6i} = \frac{(-5-6i)6i}{-6i\cdot 6i} = \frac{-30i-36i^2}{-36i^2} = \frac{-30i-36(-1)}{-36\cdot(-1)} = \frac{36-30i}{36} = \frac{36}{36} -$
$-\frac{30}{36}i = 1 - \frac{5}{6}i.$

Ответ:

1) $z_1 + z_2 = 3 + 7i$, $z_1 - z_2 = -7 - i$, $z_1 z_2 = -22 + 7i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{41} +$
$+\frac{23}{41}i;$

2) $z_1 + z_2 = -2 - 7i$, $z_1 - z_2 = -8 + 7i$, $z_1 z_2 = -15 + 35i$,
$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{15}{58} - \frac{35}{58}i;$

3) $z_1 + z_2 = -5 - 12i$, $z_1 - z_2 = -5$, $z_1 z_2 = -36 + 30i$, $\frac{z_1}{z_2} = 1 -$
$-\frac{5}{6}i.$

__**Задание 2.9.**__ Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел в алгебраической форме:

1) $z_1 = 5 + i, z_2 = 4 - 2i;$ 2) $z_1 = 3i, z_2 = 4 - 9i;$

3) $z_1 = -3 + 4i, z_2 = 6.$

2.10. Решение квадратных уравнений на множестве комплексных чисел

Пример 2.10. Решить уравнения на множестве комплексных чисел:
1) $x^2+4=0$;   2) $5x^2+3x+1=0$.

Решение.

1) Выразим x, учитывая, что $\sqrt{-1}=\pm i$:
$x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=\pm 2i.$

2) Найдём корни квадратного уравнения, учитывая, что $\sqrt{-1}=\pm i$:
$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{-11}}{10}=\frac{-3\pm\sqrt{11}\cdot\sqrt{-1}}{10}=\frac{-3\pm\sqrt{11}i}{10}=-\frac{3}{10}\pm\frac{\sqrt{11}}{10}i.$

Ответ: 1) $x_{1,2}=\pm 2i$;   2) $x_{1,2}=-\frac{3}{10}\pm\frac{\sqrt{11}}{10}i$.

Задание 2.10. Решить уравнения на множестве комплексных чисел:
1) $x^2+9=0$;   2) $4x^2+5x+2=0$.

Часть II. Второй уровень сложности

2.11. Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме

Пример 2.11. Найти произведение и частное двух комплексных чисел в тригонометрической форме:
1) $z_1=-\sqrt{3}-3i,\ z_2=-5+5i$;   2) $z_1=2i,\ z_2=-1+i$;
3) $z_1=4,\ z_2=\sqrt{3}-i$.

Решение.

1) Представим каждое число в тригонометрической форме.

Найдём модуль первого числа $z_1=-\sqrt{3}-3i$:

$$r_1=|z_1|=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-3)^2}=2\sqrt{3}.$$

Первому числу $z_1=-\sqrt{3}-3i$ в координатной плоскости соответствует точка $M_1\left(-\sqrt{3};\ -3\right)$ (рис. 2.39).

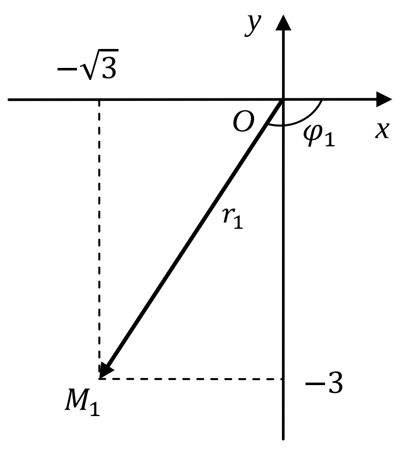


Рис. 2.39. Геометрическое представление комплексного числа $z_1=-\sqrt{3}-3i$

Найдём аргумент первого числа, учитывая, что точка M_1 лежит в III четверти:

$$\varphi_1 = -\pi + arctg\,\frac{y_1}{x_1} = -\pi + arctg\,\frac{-3}{-\sqrt{3}} = -\pi + arctg\,\sqrt{3} =$$
$$= -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

Тогда тригонометрическая форма первого числа $z_1 = -\sqrt{3} - 3i$:

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Найдём модуль второго числа $z_2 = -5 + 5i$:

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$$

Второму числу $z_2 = -5 + 5i$ в координатной плоскости соответствует точка $M_2(-5;\ 5)$ (рис. 2.40).

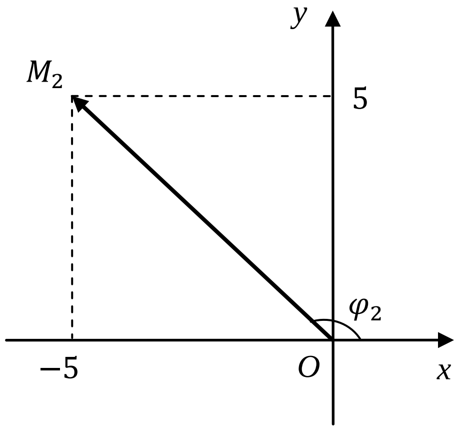


Рис. 2.40. Геометрическое представление комплексного числа $z_2 = -5 + 5i$

Найдём аргумент второго числа $z_2 = -5 + 5i$, учитывая, что точка M_2 лежит во II четверти:

$$\varphi_2 = \pi + arctg\,\frac{y_2}{x_2} = \pi + arctg\,\frac{5}{-5} = \pi - arctg\,1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма второго числа $z_2 = -5 + 5i$:

$$z_2 = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Найдём произведение чисел, учитывая, что при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули умножают, а аргументы складывают:

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 10\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Найдём частное чисел, учитывая, что при делении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули делят, а аргументы вычитают:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{6}}{5}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right) +\right.$$
$$\left.+ i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{6}}{5}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12} + 2\pi\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{12} + 2\pi\right)\right) =$$

$= \frac{\sqrt{6}}{5}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$

2) Представим каждое число в тригонометрической форме.

Найдём модуль первого числа $z_1 = 2i$:

$r_1 = |z_1| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2.$

Первому числу $z_1 = 2i$ в координатной плоскости соответствует точка $M_1(0;\ 2)$ (рис. 2.41).

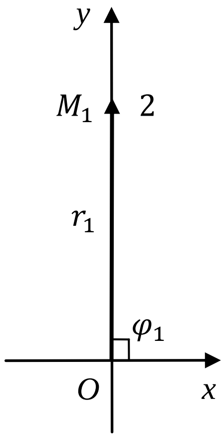


Рис. 2.41. Геометрическое представление комплексного числа $z_1 = 2i$

Найдём аргумент первого числа, учитывая, что точка M_1 лежит на положительной части оси Oy: $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

Тогда тригонометрическая форма первого числа $z_1 = 2i$:

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$

Найдём модуль второго числа $z_2 = -1 + i$:

$r_2 = |z_2| = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$

Второму числу $z_2 = -1 + i$ в координатной плоскости соответствует точка $M_2(-1;\ 1)$ (рис. 2.42).

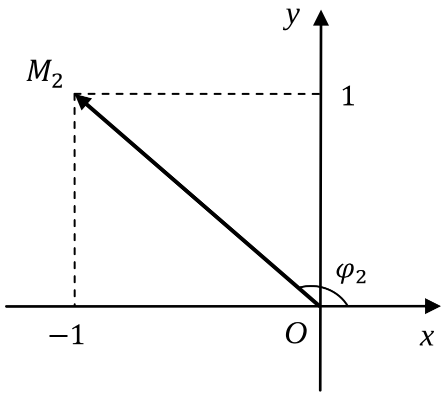


Рис. 2.42. Геометрическое представление комплексного числа $z_2 = -1 + i$

Найдём аргумент второго числа, учитывая, что точка M_2 лежит во II четверти:

$\varphi_2 = \pi + arctg\ \frac{y_2}{x_2} = \pi + arctg\ \frac{1}{-1} = \pi - arctg\ 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$

Тогда тригонометрическая форма второго числа $z_2 = -1 + i$:

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$

Найдём произведение чисел:

$z_1 z_2 = 2 \cdot \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} +\right.$
$\left. + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4} - 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} - 2\pi\right)\right) =$
$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$

Найдём частное чисел:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) +\right.$
$\left. + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$

3) Представим каждое число в тригонометрической форме.

Найдём модуль первого числа $z_1 = 4$:

$r_1 = |z_1| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4.$

Первому числу $z_1 = 4$ в координатной плоскости соответствует точка $M_1(4;\ 0)$ (рис. 2.43).

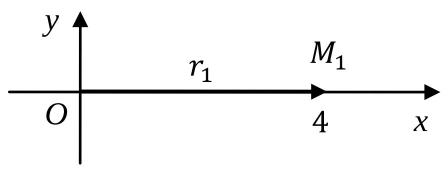


Рис. 2.43. Геометрическое представление комплексного числа $z_1 = 4$

Найдём аргумент первого числа, учитывая, что точка M_1 лежит на положительной части оси Ox: $\varphi_1 = 0$.

Тогда тригонометрическая форма первого числа $z_1 = 4$:

$z_1 = 4(\cos 0 + i\sin 0).$

Найдём модуль второго числа $z_2 = \sqrt{3} - i$:

$r_2 = |z_2| = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2.$

Второму числу $z_2 = \sqrt{3} - i$ в координатной плоскости соответствует точка $M_2\left(\sqrt{3};\ -1\right)$ (рис. 2.44).

Найдём аргумент второго числа, учитывая, что точка M_2 лежит в IV четверти:

$\varphi_2 = arctg\ \frac{y_2}{x_2} = arctg\ \frac{-1}{\sqrt{3}} = -arctg\ \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$

Тогда тригонометрическая форма второго числа $z_2 = \sqrt{3} - i$:

$z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$

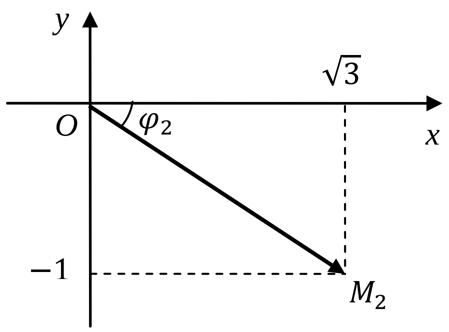


Рис. 2.44. Геометрическое представление комплексного числа $z_2 = \sqrt{3} - i$

Найдём произведение чисел:

$$z_1 z_2 = 4 \cdot 2\left(\cos\left(0 + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(0 + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) =$$
$$= 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Найдём частное чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}\left(\cos\left(0 - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(0 - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ:

1) $z_1 z_2 = 10\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}}{5}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

2) $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \right.$ $\left. + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

3) $z_1 z_2 = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $\frac{z_1}{z_2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Задание 2.11. Найти произведение и частное двух комплексных чисел в тригонометрической форме:

1) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$; 2) $z_1 = 2$, $z_2 = 5 - 5i$;
3) $z_1 = -3i$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$.

2.12. Возведение комплексного числа в степень

Пример 2.12. Выполнить возведение комплексного числа в степень по формуле Муавра: 1) $(-2 + 2i)^9$; 2) $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^{20}$.

Решение.

1) Представим комплексное число $z = -2 + 2i$ тригонометрической форме. Для этого найдём модуль и аргумент числа.

Найдём модуль числа $z = -2 + 2i$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Числу $z = -2 + 2i$ в координатной плоскости соответствует точка $M(-2;\ 2)$ (рис. 2.45).

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит во II четверти:

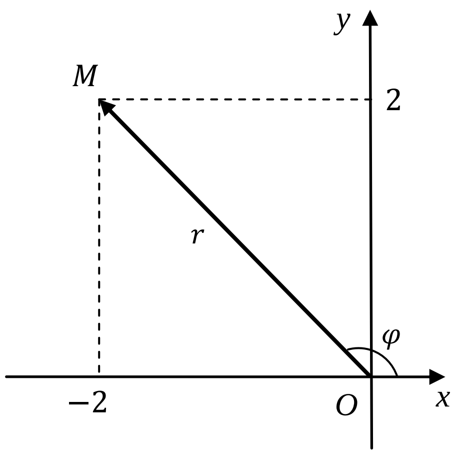


Рис. 2.45. Геометрическое представление комплексного числа $z = -2 + 2i$

$$\varphi = \pi + arctg\frac{y}{x} = \pi + arctg\frac{2}{-2} = \pi - arctg1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма числа $z = -2 + 2i$:

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Выполним возведение в степень по формуле Муавра:

$$(-2+2i)^9 = \left(2\sqrt{2}\right)^9\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 9\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 9\right)\right) =$$

$$= 8192\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{27\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{27\pi}{4}\right)\right) = 8192\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{27\pi}{4} - 6\pi\right) +\right.$$

$$\left.+ i\sin\left(\frac{27\pi}{4} - 6\pi\right)\right) = 8192\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 8192\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} +\right.$$

$$\left.+ i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -8192 + 8192i.$$

2) Представим комплексное число $z = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме. Для этого найдём модуль и аргумент числа.

Найдём модуль числа $z = 1 - \sqrt{3}i$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2.$$

Числу $z = 1 - \sqrt{3}i$ в координатной плоскости соответствует точка $M\left(1;\ -\sqrt{3}\right)$ (рис. 2.46).

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в IV четверти:

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{-\sqrt{3}}{1} = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Тогда тригонометрическая форма числа $z = 1 - \sqrt{3}i$:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Выполним возведение в степень по формуле Муавра:

$$\left(1 - \sqrt{3}i\right)^{20} = 2^7\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\cdot 20\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\cdot 20\right)\right) =$$

$$= 128\left(\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{20\pi}{3}\right)\right) = 128\left(\cos\left(-\frac{20\pi}{3} + 6\pi\right) +\right.$$

$$\left.+ i\sin\left(-\frac{20\pi}{3} + 6\pi\right)\right) = 128\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

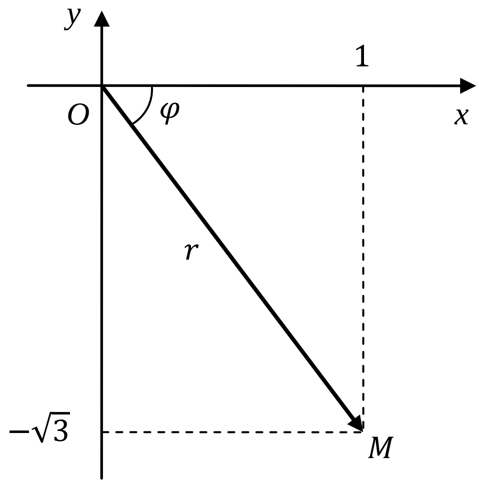


Рис. 2.46. Геометрическое представление комплексного числа $z = 1 - \sqrt{3}i$

$= 128\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -64 - 64\sqrt{3}i.$

Ответ: 1) $-8192 + 8192i$; 2) $-64 - 64\sqrt{3}i$.

Задание 2.12. Выполнить возведение комплексного числа в степень по формуле Муавра:

1) $(4 - 4i)^7$; 2) $\left(-\sqrt{3} - i\right)^{10}$.

2.13. Извлечение корня из комплексного числа

Пример 2.13. Найти все значения корня из комплексных чисел:

1) $\sqrt[4]{-2}$; 2) $\sqrt[5]{3i}$; 3) $\sqrt[7]{-3 - \sqrt{3}i}$.

Решение.

1) Для извлечения корня из комплексного числа $z = -2$ представим его в тригонометрической форме. Для этого найдём модуль и аргумент числа.

Найдём модуль числа $z = -2$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2.$

Числу $z = -2$ в координатной плоскости соответствует точка $M(-2;\ 0)$ (рис. 2.47).

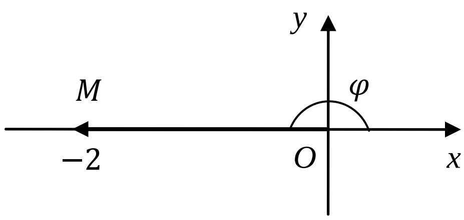


Рис. 2.47. Геометрическое представление комплексного числа $z = -2$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на отрицательной части оси Ox: $\varphi = \pi$.

Тогда тригонометрическая форма числа $z = -2$:

$z = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Выполним извлечение корня:

$\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), k = \overline{0,3}$.

Распишем все значения корня.

При $k = 0$: $z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$;

при $k = 1$: $z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$
$= -\frac{\sqrt[4]{8}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$;

при $k = 2$: $z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) +\right.$
$\left.+ i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt[4]{8}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$;

при $k = 3$: $z_4 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) +\right.$
$\left.+ i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$.

Найденные значения корня в комплексной плоскости представляют собой точки:

$M_1\left(\frac{\sqrt[4]{8}}{2}; \frac{\sqrt[4]{8}}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}; \frac{\sqrt[4]{8}}{2}\right)$, $M_3\left(-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}; -\frac{\sqrt[4]{8}}{2}\right)$, $M_4\left(\frac{\sqrt[4]{8}}{2}; -\frac{\sqrt[4]{8}}{2}\right)$.

Эти точки лежат на окружности радиуса $\sqrt[4]{2}$ и являются вершинами квадрата (рис. 2.48).

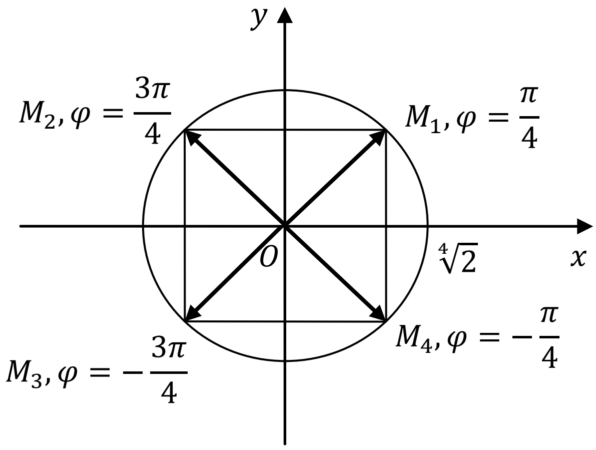


Рис. 2.48. Все значения $\sqrt[4]{-2}$.

2) Для извлечения корня из комплексного числа $z = 3i$ представим его в тригонометрической форме. Для этого найдём модуль и аргумент числа.

Найдём модуль числа $z = 3i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$.

Числу $z = 3i$ в координатной плоскости соответствует точка $M(0;\ 3)$ (рис. 2.49).

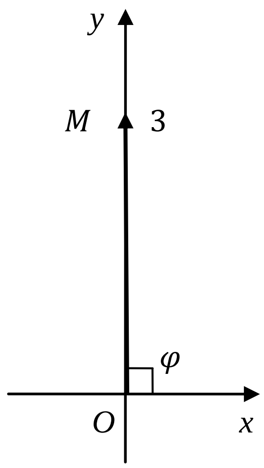


Рис. 2.49. Геометрическое представление комплексного числа $z = 3i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на положительной части оси Oy: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Тогда тригонометрическая форма числа $z = 3i$:

$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Выполним извлечение корня:

$\sqrt[5]{3i} = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{5}\right), k = \overline{0,4}$.

Распишем все значения корня.

При $k = 0$: $z_1 = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)$;

при $k = 1$: $z_2 = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{10} + i\sin\frac{5\pi}{10}\right) = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) =$
$= \sqrt[5]{3}i$;

при $k = 2$: $z_3 = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10}\right)$;

при $k = 3$: $z_4 = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{13\pi}{10} + i\sin\frac{13\pi}{10}\right) = \sqrt[5]{3}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{10} - 2\pi\right) +\right.$
$\left.+i\sin\left(\frac{13\pi}{10} - 2\pi\right)\right) = \sqrt[5]{3}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right)\right)$;

при $k = 4$: $z_5 = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{17\pi}{10} + i\sin\frac{17\pi}{10}\right) = \sqrt[5]{3}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{10} - 2\pi\right) +\right.$
$\left.+i\sin\left(\frac{17\pi}{10} - 2\pi\right)\right) = \sqrt[5]{3}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)\right)$.

Найденные значения корня в комплексной плоскости представляют собой точки:

$M_1\left(\sqrt[5]{3}\cos\frac{\pi}{10};\ \sqrt[5]{3}\sin\frac{\pi}{10}\right)$, $M_2\left(\sqrt[5]{3}\cos\frac{5\pi}{10};\ \sqrt[5]{3}\sin\frac{5\pi}{10}\right)$,
$M_3\left(\sqrt[5]{3}\cos\frac{9\pi}{10};\ \sqrt[5]{3}\sin\frac{9\pi}{10}\right)$, $M_4\left(\sqrt[5]{3}\cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right);\ \sqrt[5]{3}\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right)\right)$,
$M_5\left(\sqrt[5]{3}\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right);\ \sqrt[5]{3}\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)\right)$.

Эти точки лежат на окружности радиуса $\sqrt[5]{3}$ и являются вершинами правильного пятиугольника (рис. 2.50).

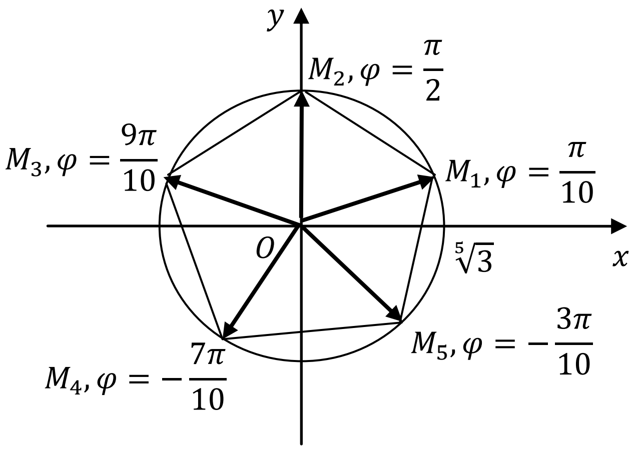


Рис. 2.50. Все значения $\sqrt[5]{3i}$

3) Для извлечения корня из комплексного числа $z = -3 - \sqrt{3}i$ представим его в тригонометрической форме. Для этого найдём модуль и аргумент числа.

Найдём модуль числа $z = -3 - \sqrt{3}i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{3}.$

Числу $z = -3 - \sqrt{3}i$ в координатной плоскости соответствует точка $M\left(-3;\ -\sqrt{3}\right)$ (рис. 2.51).

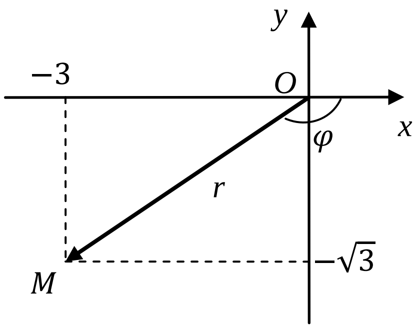


Рис. 2.51. Геометрическое представление комплексного числа $z = -3 - \sqrt{3}i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в III четверти:

$\varphi = -\pi + arctg\frac{y}{x} = -\pi + arctg\frac{-\sqrt{3}}{-3} = -\pi + arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = -\pi +$
$+\frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$

Тогда тригонометрическая форма числа $z = -3 - \sqrt{3}i$:

$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$

Выполним извлечение корня:

$\sqrt[7]{-3 - \sqrt{3}i} = \sqrt[7]{2\sqrt{3}}\left(\cos\frac{-\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{7} + i\sin\frac{-\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{7}\right), k = \overline{0,6}.$

Распишем все значения корня.

При $k=0$: $z_1 = \sqrt[14]{12}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{42}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{42}\right)\right)$;

при $k=1$: $z_2 = \sqrt[14]{12}\left(\cos\frac{7\pi}{42} + i\sin\frac{7\pi}{42}\right) = \sqrt[14]{12}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \right.$ $\left.+ i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[14]{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt[14]{12}}{2} + i\frac{\sqrt[14]{12}}{2}$.

при $k=2$: $z_3 = \sqrt[14]{12}\left(\cos\frac{19\pi}{42} + i\sin\frac{19\pi}{42}\right)$;

при $k=3$: $z_4 = \sqrt[14]{12}\left(\cos\frac{31\pi}{42} + i\sin\frac{31\pi}{42}\right)$;

при $k=4$: $z_5 = \sqrt[14]{12}\left(\cos\frac{43\pi}{42} + i\sin\frac{43\pi}{42}\right) = \sqrt[14]{12}\left(\cos\left(\frac{43\pi}{42} - \right.\right.$ $\left.\left.-2\pi\right) + i\sin\left(\frac{43\pi}{42} - 2\pi\right)\right) = \sqrt[14]{12}\left(\cos\left(-\frac{41\pi}{42}\right) + i\sin\left(-\frac{41\pi}{42}\right)\right)$;

при $k=5$: $z_6 = \sqrt[14]{12}\left(\cos\frac{55\pi}{42} + i\sin\frac{55\pi}{42}\right) = \sqrt[14]{12}\left(\cos\left(\frac{55\pi}{42} - \right.\right.$ $\left.\left.-2\pi\right) + i\sin\left(\frac{55\pi}{42} - 2\pi\right)\right) = \sqrt[14]{12}\left(\cos\left(-\frac{29\pi}{42}\right) + i\sin\left(-\frac{29\pi}{42}\right)\right)$;

при $k=6$: $z_7 = \sqrt[14]{12}\left(\cos\frac{67\pi}{42} + i\sin\frac{67\pi}{42}\right) = \sqrt[14]{12}\left(\cos\left(\frac{67\pi}{42} - \right.\right.$ $\left.\left.-2\pi\right) + i\sin\left(\frac{67\pi}{42} - 2\pi\right)\right) = \sqrt[14]{12}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{42}\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{42}\right)\right)$.

Найденные значения корня в комплексной плоскости представляют собой точки:

$M_1\left(\sqrt[14]{12}\,\cos\left(-\frac{5\pi}{42}\right);\ \sqrt[14]{12}\,\sin\left(-\frac{5\pi}{42}\right)\right)$,

$M_2\left(\sqrt[14]{12}\,\cos\frac{7\pi}{42};\ \sqrt[14]{12}\,\sin\frac{7\pi}{42}\right)$,

$M_3\left(\sqrt[14]{12}\,\cos\frac{19\pi}{42};\ \sqrt[14]{12}\,\sin\frac{19\pi}{42}\right)$,

$M_4\left(\sqrt[14]{12}\,\cos\frac{31\pi}{42};\ \sqrt[14]{12}\,\sin\frac{31\pi}{42}\right)$,

$M_5\left(\sqrt[14]{12}\,\cos\left(-\frac{41\pi}{42}\right);\ \sqrt[14]{12}\,\sin\left(-\frac{41\pi}{42}\right)\right)$,

$M_6\left(\sqrt[14]{12}\,\cos\left(-\frac{29\pi}{42}\right);\ \sqrt[14]{12}\,\sin\left(-\frac{29\pi}{42}\right)\right)$,

$M_7\left(\sqrt[14]{12}\,\cos\left(-\frac{17\pi}{42}\right);\ \sqrt[14]{12}\,\sin\left(-\frac{17\pi}{42}\right)\right)$.

Эти точки лежат на окружности радиуса $\sqrt[14]{12}$ и являются вершинами правильного семиугольника (рис. 2.52).

Ответ:

1) $z_1 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$; $z_2 = -\frac{\sqrt[4]{8}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$; $z_3 = -\frac{\sqrt[4]{8}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$; $z_4 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} -$ $-i\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$.

2) $z_1 = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)$, $z_2 = \sqrt[5]{3}i$, $z_3 = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{9\pi}{10} + \right.$ $\left.+i\sin\frac{9\pi}{10}\right)$, $z_4 = \sqrt[5]{3}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right)\right)$, $z_5 = \sqrt[5]{3}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right) + \right.$ $\left.+i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)\right)$.

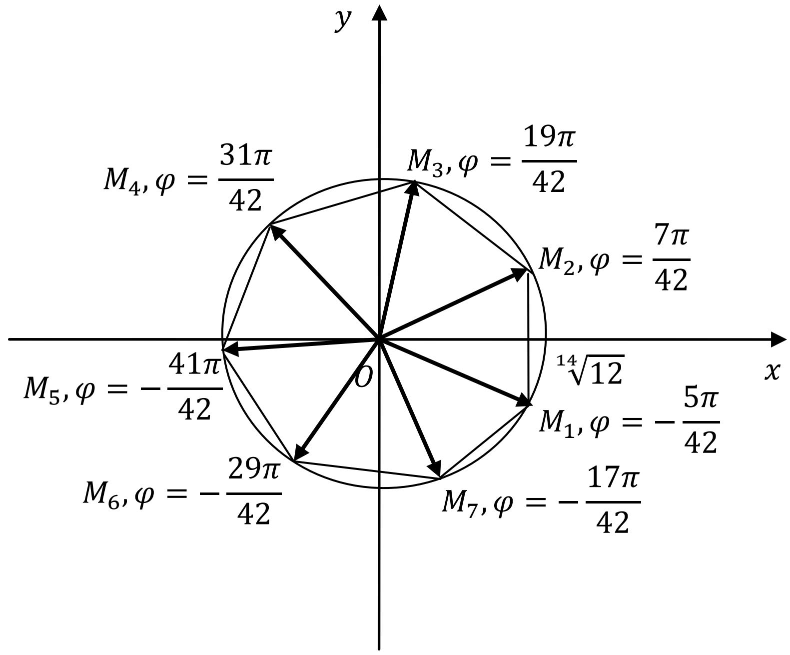


Рис. 2.52. Все значения $\sqrt[7]{-3-\sqrt{3}i}$

3) $z_1 = \sqrt[14]{12}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{42}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{42}\right)\right)$; $z_2 = \frac{\sqrt{3}\sqrt[14]{12}}{2} + i\frac{\sqrt[14]{12}}{2}$; $z_3 = \sqrt[14]{12}\left(\cos\frac{19\pi}{42} + i\sin\frac{19\pi}{42}\right)$; $z_4 = \sqrt[14]{12}\left(\cos\frac{31\pi}{42} + i\sin\frac{31\pi}{42}\right)$; $z_5 = \sqrt[14]{12}\left(\cos\left(-\frac{41\pi}{42}\right) + i\sin\left(-\frac{41\pi}{42}\right)\right)$; $z_6 = \sqrt[14]{12}\left(\cos\left(-\frac{29\pi}{42}\right) + \right.$ $\left. + i\sin\left(-\frac{29\pi}{42}\right)\right)$; $z_7 = \sqrt[14]{12}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{42}\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{42}\right)\right)$.

Задание 2.13. Найти все значения корня из комплексных чисел:
1) $\sqrt[5]{-32}$; 2) $\sqrt[8]{-5i}$; 3) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}-2i}$.

2.14. Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел

Пример 2.14. Решить уравнения на множестве комплексных чисел:
1) $x^6 - 1 = 0$; 2) $x^3 - 1 + i = 0$.

Решение.

1) Выразим из уравнения x: $x = \sqrt[6]{1}$ и найдём все значения корня. Для этого представим число $z = 1$ в тригонометрической форме. Найдём модуль и аргумент этого числа.

Найдём модуль числа $z = 1$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1.$

Числу $z = 1$ в координатной плоскости соответствует точка $M(1;\ 0)$ (рис. 2.53).

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит на положительной части оси Ox: $\varphi = 0$.

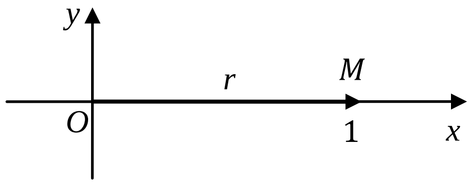


Рис. 2.53. Геометрическое представление комплексного числа $z = 1$

Тогда тригонометрическая форма числа $z = 1$:

$z = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$.

По формуле извлечения корня из комплексного числа, получаем:

$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{6} + i\sin\frac{0+2\pi k}{6}\right), k = \overline{0,5}.$

Распишем все значения корня:

при $k = 0$: $x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$;

при $k = 1$: $x_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

при $k = 2$: $x_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

при $k = 3$: $x_4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$;

при $k = 4$: $x_5 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

при $k = 5$: $x_6 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \cos\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Выразим из уравнения x: $x = \sqrt[3]{1 - i}$ и найдём все значения корня. Для этого представим число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме. Найдём модуль и аргумент этого числа.

Найдём модуль числа $z = 1 - i$:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Числу $z = 1 - i$ в координатной плоскости соответствует точка $M(1;\ -1)$ (рис. 2.54).

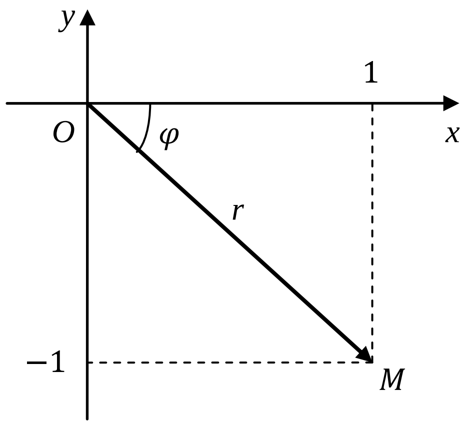


Рис. 2.54. Геометрическое представление комплексного числа $z = 1 - i$

Найдём аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в IV четверти:

$\varphi = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{-1}{1} = -arctg1 = -\frac{\pi}{4}$.

Тогда тригонометрическая форма числа $z = 1 - i$:

$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

По формуле извлечения корня из комплексного числа, получаем:

$\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right), k = \overline{0,2}$.

Распишем все значения корня:

при $k = 0$: $x_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$;

при $k = 1$: $x_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$;

при $k = 2$: $x_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \right.$ $\left. + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4} - 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} - 2\pi\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \right.$ $\left. + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt[12]{2}}{2} - \frac{\sqrt[12]{2}}{2}i$.

Ответ:

1) $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_4 = -1$; $x_5 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $x_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$, $x_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \right.$ $\left. + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$; $x_3 = -\frac{\sqrt[12]{2}}{2} - \frac{\sqrt[12]{2}}{2}i$.

Задание 2.14. Решить уравнения на множестве комплексных чисел:

1) $x^5 - 32 = 0$; 2) $x^4 - 2i + 2 = 0$.

2.15. Расстояние между точками в комплексной плоскости

Пример 2.15. Найти расстояние между точками:

1) $z_1 = -1 + 7i$, $z_2 = -5 - 3i$;

2) $z_1 = \sqrt{2} - 3i$, $z_2 = -1 + 4i$;

3) $z_1 = 2$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$;

4) $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 4i$.

Решение. Для нахождения расстояния между точками воспользуемся формулой: $d = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

1) $d = \sqrt{\left(-1-(-5)\right)^2 + \left(7-(-3)\right)^2} = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116} =$ $= 2\sqrt{29}$.

2) $d = \sqrt{\left(\sqrt{2}-(-1)\right)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2 + (-7)^2} =$

$= \sqrt{3 + 2\sqrt{2} + 49} = \sqrt{52 + 2\sqrt{2}}.$

3) $d = \sqrt{(2-1)^2 + \left(0 - \left(-\sqrt{3}\right)\right)^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2.$

4) $d = \sqrt{\left(\sqrt{3} - 0\right)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-5)^2} = \sqrt{3+25} =$
$= \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$

Задание 2.15. Найти расстояние между точками:

1) $z_1 = 4 - 5i,\ z_2 = -2i;$

2) $z_1 = -\sqrt{3} + i,\ z_2 = -\sqrt{3};$

3) $z_1 = 3 - 3i,\ z_2 = 5 + 4i;$

4) $z_1 = 1 - \sqrt{3}i,\ z_2 = \sqrt{2} + i.$

Часть III. Третий уровень сложности

2.16. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Пример 2.16. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме: $\frac{(-7-8i)i^7}{(4-5i)(-3+i)} - \frac{4+4i}{-2-5i}$.

Решение.

Найдём i^7: $i^7 = i^6 \cdot i = (i^2)^3 \cdot i = (-1)^3 \cdot i = -i.$

Найдём значение числителя первой дроби, выполнив умножение комплексных чисел:

$$(-7-8i)i^7 = (-7-8i)(-i) = 7i + 8i^2 = 7i + 8 \cdot (-1) = -8 + +7i.$$

Найдём значение знаменателя первой дроби, выполнив умножение комплексных чисел:

$$(4-5i)(-3+i) = -12 + 4i + 15i - 5i^2 = -12 + 19i - -5 \cdot (-1) = -7 + 19i.$$

Найдём значение первой дроби, выполнив действие деления комплексных чисел. Для этого умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{(-7-8i)i^7}{(4-5i)(-3+8i)} = \frac{-8+7i}{-7+19i} = \frac{(-8+7i)(-7-19i)}{(-7+19i)(-7-19i)} = \frac{56+152i-49i-133i^2}{(-7)^2-(19i)^2} =$$
$$= \frac{56+103i-133\cdot(-1)}{49-361i^2} = \frac{189+103i}{49-361\cdot(-1)} = \frac{189+103i}{410} = \frac{189}{410} + \frac{103}{410}i.$$

Найдём значение второй дроби, выполнив действие деления комплексных чисел. Для этого умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{4+4i}{-2-5i} = \frac{(4+4i)(-2+5i)}{(-2-5i)(-2+5i)} = \frac{-8+20i-8i+20i^2}{(-2)^2-(5i)^2} = \frac{-8+12i+20\cdot(-1)}{4-25i^2} =$$
$$= \frac{-28+12i}{4-25\cdot(-1)} = \frac{-28+12i}{29} = \frac{-28}{29} + \frac{12i}{29} = -\frac{28}{29} + \frac{12}{29}i.$$

Найдём значение данного выражения, выполнив действие вычитания комплексных чисел:

$$\frac{(-7-8i)i^7}{(4-5i)(-3+8i)} - \frac{4+4i}{-2-5i} = \left(\frac{189}{410} + \frac{103}{410}i\right) - \left(-\frac{28}{29} + \frac{12}{29}i\right) =$$

$$= \left(\frac{189}{410} - \left(-\frac{28}{29}\right)\right) + i\left(\frac{103}{410} - \frac{12}{29}\right) = \frac{16\,961}{11\,890} - \frac{1933}{11890}i \approx 1{,}426 - 0{,}163i.$$

Ответ: $\frac{16\,961}{11\,890} - \frac{1933}{11890}i \approx 1{,}426 - 0{,}163i.$

Задание 2.16. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме: $\frac{-3-i}{(1-9i)i^{12}} + \frac{(2+3i)(2+2i)}{-4+7i}$.

2.17. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Пример 2.17. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме: $\frac{\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^7 i^3}{\left(3+\sqrt{3}i\right)^4(-2+2i)^5}$.

Решение.

В данном примере используются операции возведения в степень, умножения и деления над четырьмя комплексными числами: $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 = i$, $z_3 = 3 + \sqrt{3}i$ и $z_4 = -2 + 2\,i$. Для выполнения перечисленных операций представим каждое число в тригонометрической форме.

Найдём модуль первого числа $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4.$$

Первому числу $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$ в координатной плоскости соответствует точка $M_1\left(-2\sqrt{3};\ 2\right)$ (рис. 2.55).

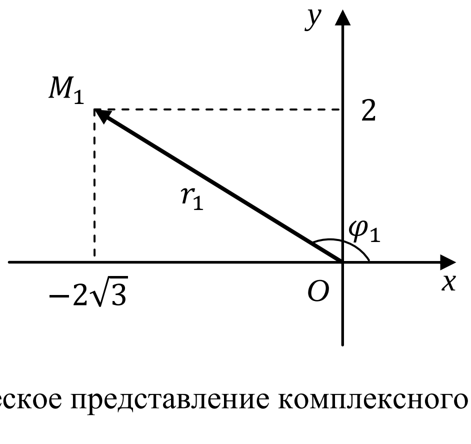


Рис. 2.55. Геометрическое представление комплексного числа $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$

Найдём аргумент первого числа, учитывая, что точка M_1 лежит во II четверти:

$$\varphi_1 = \pi + arctg\frac{y_1}{x_1} = \pi + arctg\frac{2}{-2\sqrt{3}} = \pi - arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Тогда тригонометрическая форма первого числа $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$:

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Найдём модуль второго числа $z_2 = i$:

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

Второму числу $z_2 = i$ в координатной плоскости соответствует точка $M_2(0;\ 1)$ (рис. 2.56).

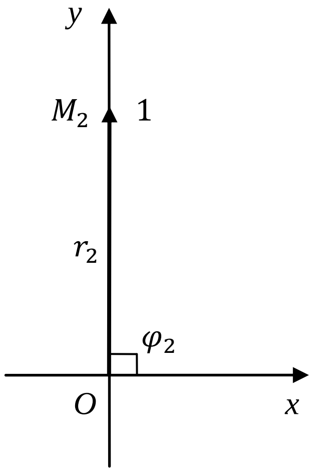


Рис. 2.56. Геометрическое представление комплексного числа $z_2 = i$

Найдём аргумент второго числа, учитывая, что точка M_2 лежит на положительной части оси Oy: $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Тогда тригонометрическая форма второго числа $z_2 = i$:

$$z_2 = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Найдём модуль третьего числа $z_3 = 3 + \sqrt{3}i$:

$$r_3 = |z_3| = \sqrt{{x_3}^2 + {y_3}^2} = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{3}.$$

Третьему числу $z_3 = 3 + \sqrt{3}i$ в координатной плоскости соответствует точка $M_3\left(3;\ \sqrt{3}\right)$ (рис. 2.57).

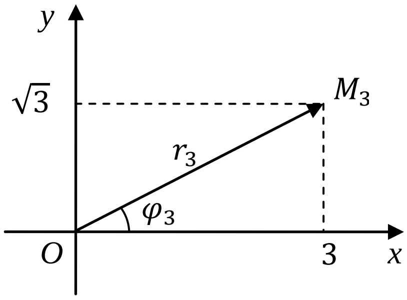


Рис. 2.57. Геометрическое представление комплексного числа $z_3 = 3 + \sqrt{3}i$

Найдём аргумент третьего числа, учитывая, что точка M_3 лежит в I четверти:

$$\varphi_3 = arctg\frac{y_1}{x_1} = arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Тогда тригонометрическая форма третьего числа $z_3 = 3 + \sqrt{3}i$:

$z_3 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Найдём модуль четвёртого числа $z_4 = -2 + 2\,i$:

$r_4 = |z_4| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Четвёртому числу $z_4 = -2 + 2\,i$ в координатной плоскости соответствует точка $M_4(-2;\ 2)$ (рис. 2.58).

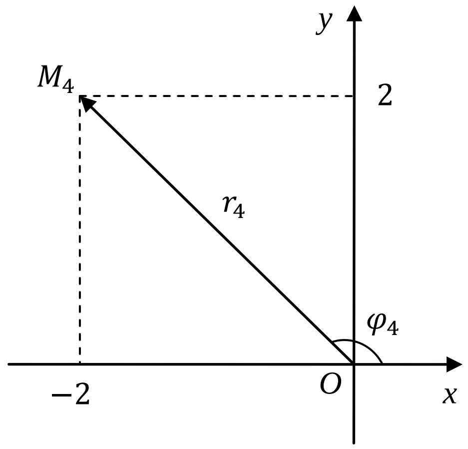


Рис. 2.58. Геометрическое представление комплексного числа $z_4 = -2 + 2\,i$.

Найдём аргумент четвёртого числа, учитывая, что точка M_4 лежит во II четверти:

$$\varphi_4 = \pi + arctg\frac{y_4}{x_4} = \pi + arctg\frac{2}{-2} = \pi - arctg1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма четвёртого числа $z_4 = -2 + 2\,i$:

$z_4 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Далее выполним возведение в степень по формуле Муавра:

$$ {z_1}^7 = 4^7\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\cdot 7\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\cdot 7\right)\right) = 4^7\left(\cos\frac{35\pi}{6} + i\sin\frac{35\pi}{6}\right) = $$
$$ = 4^7\left(\cos\left(\frac{35\pi}{6} - 6\pi\right) + i\sin\left(\frac{35\pi}{6} - 6\pi\right)\right) = 4^7\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \right.$$
$$\left. + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right);$$

$$ {z_2}^3 = 1^3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)\right) = 1\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = $$
$$ = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right)\right) = 1\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right);$$

$$ {z_3}^4 = \left(2\sqrt{3}\right)^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 4\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 4\right)\right) = 2^4 3^2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \right.$$
$$\left. + i\sin\frac{2\pi}{3}\right);$$

$$ {z_4}^5 = \left(2\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 5\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 5\right)\right) = 2^5 2^2\sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{4} + \right.$$
$$\left. + i\sin\frac{15\pi}{4}\right) = 2^5 2^2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{4} - 4\pi\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{4} - 4\pi\right)\right) = $$
$$ = 2^7\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Найдём значение числителя данной дроби, используя правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z_1{}^7 \cdot z_2{}^3 = 4^7 \cdot 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) =$$
$$= 4^7\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Найдём значение знаменателя данной дроби, используя правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z_3{}^4 \cdot z_4{}^5 = (2^4 3^2) \cdot \left(2^7\sqrt{2}\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = 3^2 2^{11}\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Найдём значение данной дроби, используя правило деления комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1{}^7 \cdot z_2{}^3}{z_3{}^4 \cdot z_4{}^5} = \frac{4^7}{3^2 2^{11}\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12}\right)\right) =$$
$$= \frac{2^{14}}{9 \cdot 2^{11}\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right) = \frac{8}{9\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12} + 2\pi\right) +\right.$$
$$\left.+ i\sin\left(-\frac{13\pi}{12} + 2\pi\right)\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \approx$$
$$\approx 0{,}629(-0{,}966 + 0{,}259i) \approx -0{,}608 + 0{,}163i.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{9}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \approx -0{,}608 + 0{,}163i.$

Задание 2.17. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме: $\frac{(4-4i)^5\left(-\sqrt{3}-i\right)^{13}}{i^9\left(-5+5\sqrt{3}i\right)^7}$.

2.18. Решение биквадратных уравнений на множестве комплексных чисел

Пример 2.18. Решить биквадратное уравнение на множестве комплексных чисел: $x^4 - 14x^2 + 58 = 0$.

Решение.

Обозначим x^2 через a. Получаем квадратное уравнение:

$a^2 - 14a + 58 = 0$.

Корни уравнения: $a_{1,2} = 7 \pm \sqrt{-9} = 7 \pm 3i$ или $x^2 = 7 \pm 3i$.

1) Решим уравнение $x^2 = 7 + 3i$, учитывая, что комплексное число x имеет вид $x = u + vi$, где u и v – действительные числа.

С учётом этого: $(u + vi)^2 = 7 + 3i$.

Тогда: $u^2 + 2uvi - v^2 = 7 + 3i$.

Учитывая, что комплексные числа равны, если равны их действительные и мнимые части, получаем систему уравнений: $\begin{cases} u^2 - v^2 = 7, \\ 2uv = 3. \end{cases}$

Отсюда:

$$\begin{cases} u = \frac{3}{2v}, \\ \frac{9}{4v^2} - v^2 = 7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{3}{2v}, \\ 4v^4 + 28v^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Обозначим v^2 через t. Получаем квадратное уравнение:

$4t^2 + 28t - 9 = 0.$

Корни уравнения:

$t_{1,2} = \frac{-14\pm\sqrt{232}}{4} = \frac{-14\pm2\sqrt{58}}{4} = \frac{-7\pm\sqrt{58}}{2}.$

Тогда: $v^2 = \frac{-7\pm\sqrt{58}}{2}.$

Учитывая, что v – действительное число, оставляем положительное значение: $v^2 = \frac{-7+\sqrt{58}}{2}$ и, следовательно:

$$v_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-7+\sqrt{58}}{2}},\ u_{1,2} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{-7+\sqrt{58}}} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2(\sqrt{58}+7)}{(-7+\sqrt{58})(\sqrt{58}+7)}} =$$

$$= \pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2(\sqrt{58}+7)}{(\sqrt{58})^2-7^2}} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2(\sqrt{58}+7)}{9}} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}}.$$

Соответственно корни уравнения:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}}\,i,\ x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}}\,i.$$

2) Решим уравнение $x^2 = 7 - 3i$, учитывая, что комплексное число x имеет вид: $x = u + vi$, где u и v – действительные числа.

С учётом этого: $(u + vi)^2 = 7 - 3i.$

Тогда:

$u^2 + 2uvi - v^2 = 7 - 3i.$

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 7, \\ 2uv = -3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = -\frac{3}{2v}, \\ \frac{9}{4v^2} - v^2 = 7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = -\frac{3}{2v}, \\ 4v^4 + 28v^2 - 9 = 0, \end{cases}$$

Обозначим v^2 через t. Получаем квадратное уравнение:

$4t^2 + 28t - 9 = 0.$

Корни уравнения:

$t_{1,2} = \frac{-14\pm\sqrt{232}}{4} = \frac{-14\pm2\sqrt{58}}{4} = \frac{-7\pm\sqrt{58}}{2}.$

Отсюда: $v^2 = \frac{-7\pm\sqrt{58}}{2}.$

Учитывая, что v – действительное число, оставляем положительное значение: $v^2 = \frac{-7+\sqrt{58}}{2}$ и, следовательно:

$$v_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-7+\sqrt{58}}{2}},\ u_{3,4} = \mp\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{-7+\sqrt{58}}} = \mp\sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}}.$$

Соответственно корни уравнения:

$$x_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}}i,\ x_4 = -\sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}}i.$$

Ответ:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}}i,\ x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}}i,$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}}i,\ x_4 = -\sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}}i.$$

Задание 2.18. Решить биквадратное уравнение на множестве комплексных чисел: $x^4 - 10x^2 + 29 = 0$.

2.19. Построение областей в комплексной плоскости

Пример 2.19. В комплексной плоскости построить область, заданную условиями:

1) $|z| = 3$;
2) $|z| < 3$;
3) $|z| > 3$;
4) $|z-1| = 2$;
5) $|z-1| < 2$;
6) $|z-1| > 2$;
7) $|z-i| = 4$;
8) $|z-i| < 4$;
9) $|z-i| > 4$;
10) $|z-2+3i| = 2$;
11) $|z-2+3i| < 2$;
12) $|z-2+3i| > 2$;
13) $\arg z = \frac{5\pi}{6}$;
14) $\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{5\pi}{6}$;
15) $-\frac{3\pi}{4} \le \arg z < -\frac{\pi}{6}$;
16) $|\arg z| \le \frac{\pi}{4}$.
17) $Rez = 2$;
18) $Rez < 2$;
19) $Rez > 2$;
20) $Imz = 2$;
21) $Imz < 2$;
22) $Imz > 2$;
23) $|z-4| \le 2,\ Rez > 4$;
24) $|z-4| \ge 2,\ Imz < 0$;
25) $3 \le |z| < 5,\ Rez \ge 0$;
26) $|z-3+6i| \le 6,\ Imz \ge -6$.

Решение.

1) $|z| = 3$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0 = 0$ на расстояние 3, то есть определяет окружность радиуса 3 с центром в точке $(0;\ 0)$ (рис. 2.59).

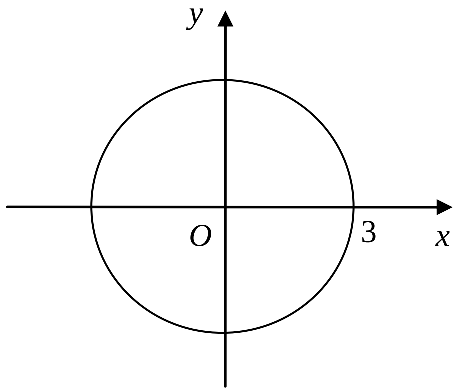


Рис. 2.59. Линия, заданная условием $|z| = 3$

2) $|z| < 3$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0 = 0$ на расстояние, меньшее 3, то есть определяет внутреннюю часть круга с центром в точке $(0;\ 0)$ радиуса 3 (рис. 2.60).

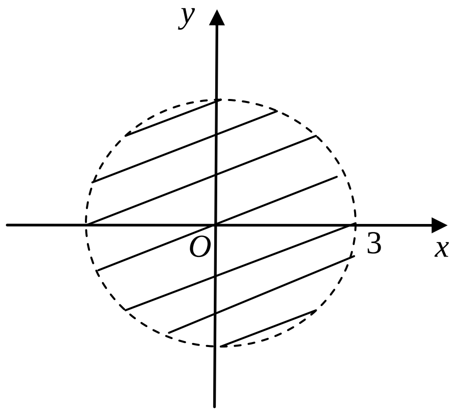


Рис. 2.60. Область, заданная условием $|z| < 3$

3) $|z| > 3$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0 = 0$ на расстояние, большее 3, то есть определяет область, расположенную вне круга с центром в точке $(0;\ 0)$ радиуса 3 (рис. 2.61).

4) $|z - 1| = 2$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0 = 1$ на расстояние 2, то есть определяет окружность радиуса 2 с центром в точке $(1;\ 0)$ (рис. 2.62).

5) $|z - 1| < 2$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0 = 1$ на расстояние, меньшее 2, то есть определяет внутреннюю часть круга с центром в точке $(1;\ 0)$ радиуса 2 (рис. 2.63).

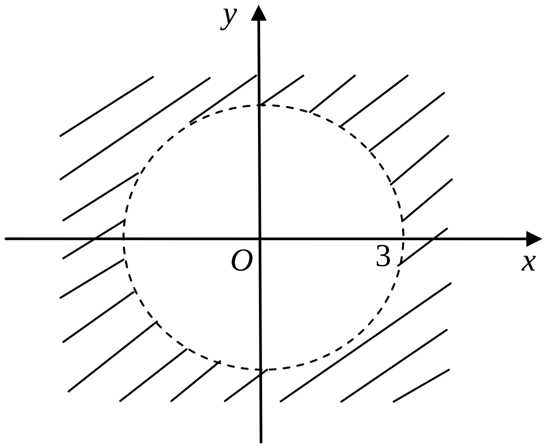


Рис. 2.61. Область, заданная условием $|z| > 3$

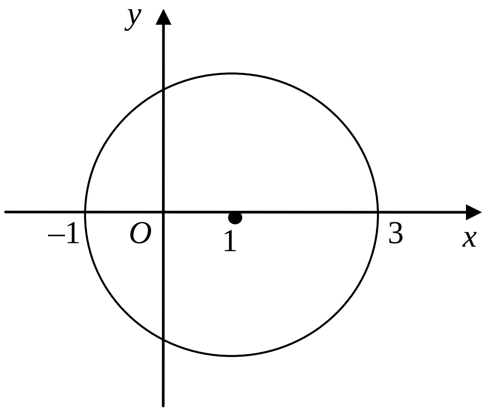


Рис. 2.62. Линия, заданная условием $|z - 1| = 2$

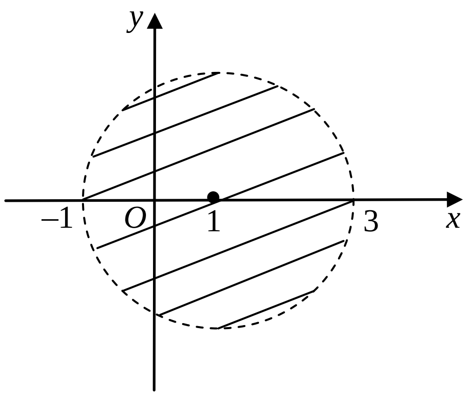


Рис. 2.63. Область, заданная условием $|z - 1| < 2$

6) $|z - 1| > 2$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0 = 1$ на расстояние, большее 2, то есть определяет область, расположенную вне круга с центром в точке $(1;\ 0)$ радиуса 2 (рис. 2.64).

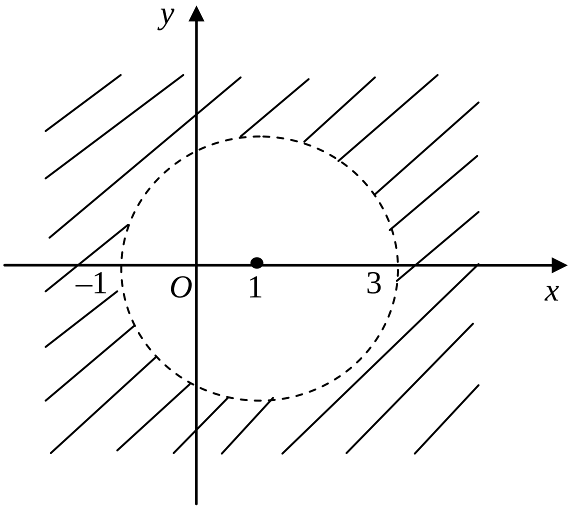


Рис. 2.64. Область, заданная условием $|z-1|>2$

7) $|z-i|=4$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0=i$ на расстояние 4, то есть определяет окружность с центром в точке $(0;\ 1)$ радиуса 4 (рис. 2.65).

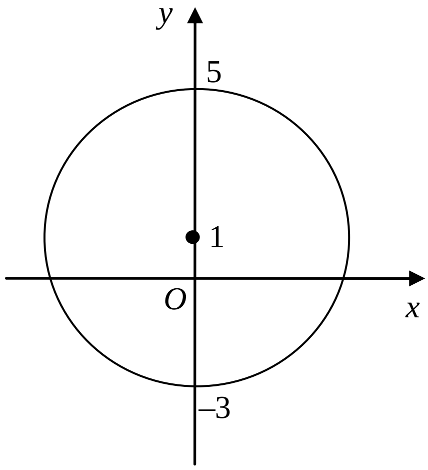


Рис. 2.65. Линия, заданная условием $|z-i|=4$

8) $|z-i|<4$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0=i$ на расстояние, меньшее 4, то есть определяет внутреннюю часть круга с центром в точке $(0;\ 1)$ радиуса 4 (рис. 2.66).

9) $|z-i|>4$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0=i$ на расстояние, большее 4, то есть определяет область, расположенную вне круга с центром в точке $(0;\ 1)$ радиуса 4 (рис. 2.67).

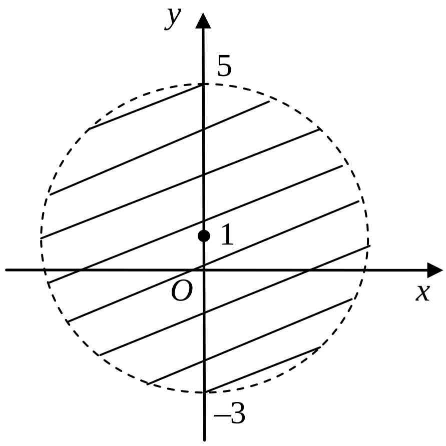


Рис. 2.66. Область, заданная условием $|z - i| < 4$

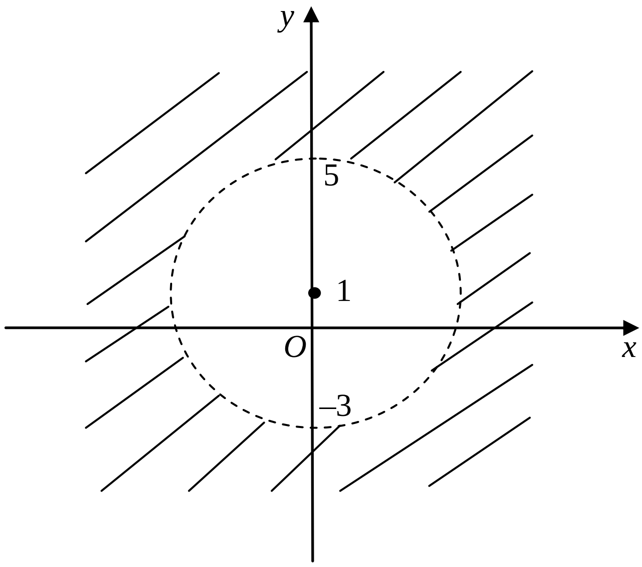


Рис. 2.67. Область, заданная условием $|z - i| > 4$

10) $|z - 2 + 3i| = 2$. Перепишем условие в виде $|z - (2 - 3i)| = 2$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0 = 2 - 3i$ на расстояние 2, то есть определяет окружность радиуса 2 с центром в точке $(2;\ 3)$ (рис. 2.68).

11) $|z - 2 + 3i| < 2$. Перепишем условие в виде $|z - (2 - 3i)| < 2$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0 = 2 - 3i$ на расстояние, меньшее 2, то есть определяет внутреннюю часть круга с центром в точке $(2;\ 3)$ радиуса 2 (рис. 2.69).

12) $|z - 2 + 3i| > 2$. Перепишем условие в виде $|z - (2 - 3i)| > 2$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество

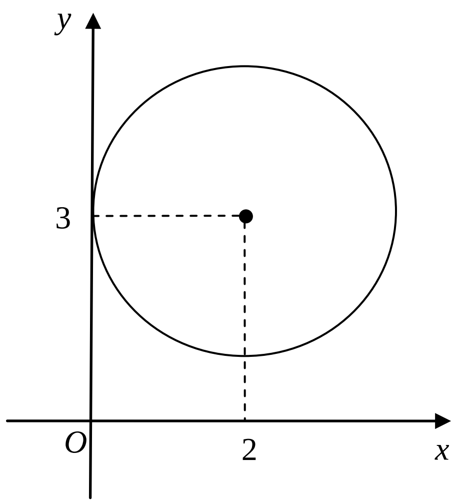


Рис. 2.68. Линия, заданная условием $|z - 2 + 3i| = 2$

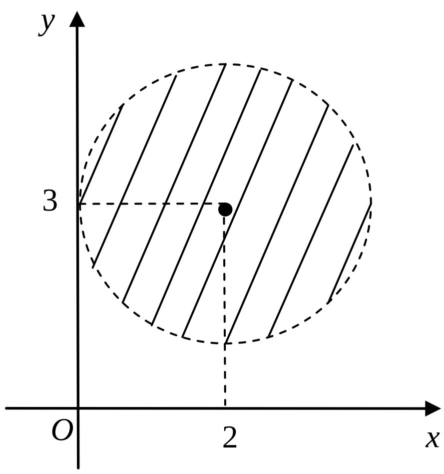


Рис. 2.69. Область, заданная условием $|z - 2 + 3i| < 2$

точек, удалённых от точки $z_0 = 2 - 3i$ на расстояние, большее 2, то есть определяет область, расположенную вне круга с центром в точке $(2;\ 3)$ радиуса 2 (рис. 2.70).

13) $arg\, z = \frac{5\pi}{6}$. Данное условие определяет множество точек, расположенных на луче $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ (рис. 2.71).

14) $\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{5\pi}{6}$. Данное условие определяет множество точек, расположенных между лучами $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и $\varphi = \frac{5\pi}{6}$, исключая точки, расположенные на этих лучах (рис. 2.72).

15) $-\frac{3\pi}{4} \leq \arg z < -\frac{\pi}{6}$.Данное условие определяет множество точек, расположенных между лучами $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, включая точки луча $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ и исключая точки луча $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ (рис. 2.73).

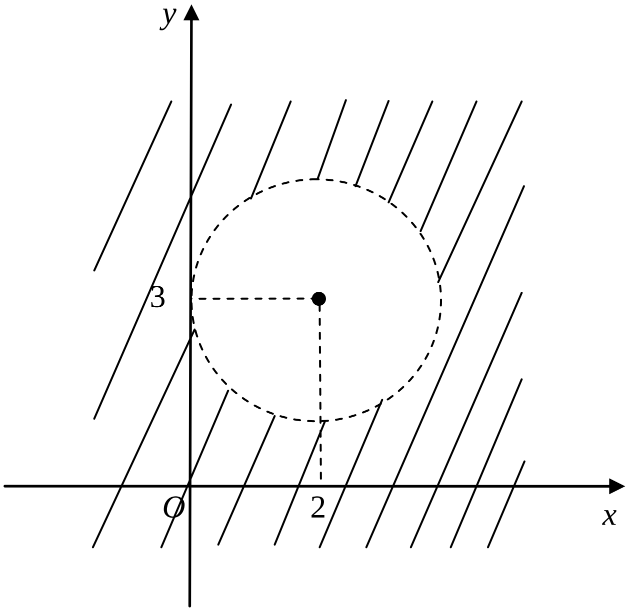


Рис. 2.70. Область, заданная условием $|z - 2 + 3i| > 2$

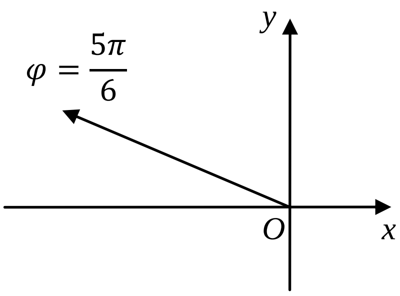


Рис. 2.71. Линия, заданная условием $arg\, z = \frac{5\pi}{6}$

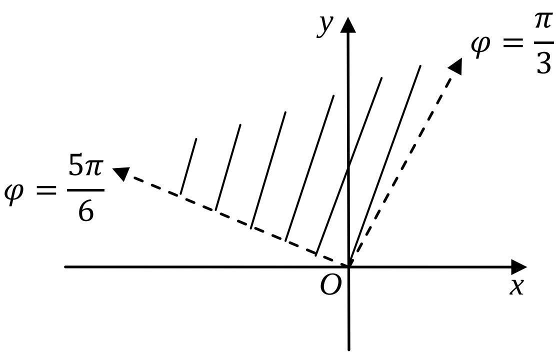


Рис. 2.72. Область, заданная условием $\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{5\pi}{6}$

16) $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$. Данное условие равносильно двойному неравенству $-\frac{\pi}{4} \leq arg\, z \leq \frac{\pi}{4}$, которое определяет множество точек, расположенных между лучами $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$, включая точки, расположенные на этих

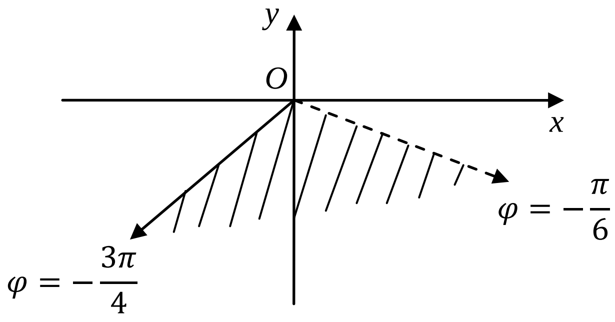


Рис. 2.73. Область, заданная условием $-\frac{3\pi}{4} \leq \arg z < -\frac{\pi}{6}$

лучах (рис. 2.74).

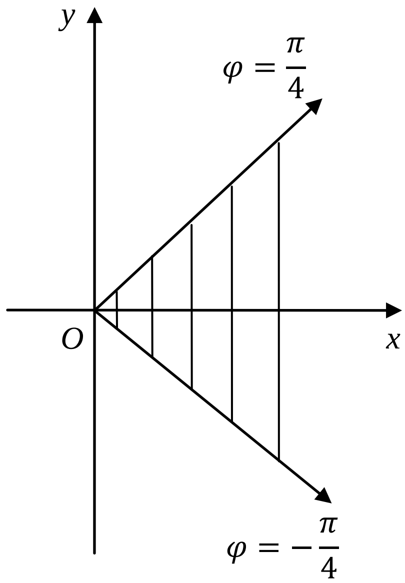


Рис. 2.74. Область, заданная условием $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$

17) $Rez = 2$. Данное условие определяет множество точек, абсциссы которых равны 2, то есть прямую, заданную уравнением $x = 2$ (рис. 2.75).

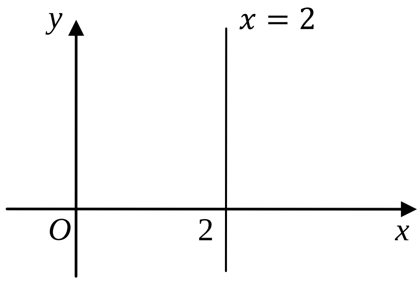


Рис. 2.75. Линия, заданная условием $Rez = 2$

18) $Rez < 2$. Данное условие определяет множество точек, абсциссы которых меньше 2, то есть область, расположенную левее прямой, заданной уравнением $x = 2$, исключая точки самой прямой (рис. 2.76).

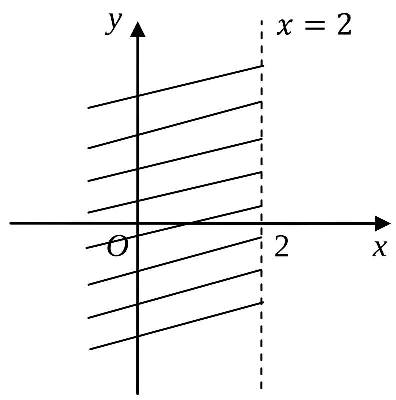


Рис. 2.76. Область, заданная условием $Rez < 2$

19) $Rez > 2.$ Данное условие определяет множество точек, абсциссы которых больше 2, то есть область, расположенную правее прямой, заданной уравнением $x = 2,$ исключая точки самой прямой (рис. 2.77).

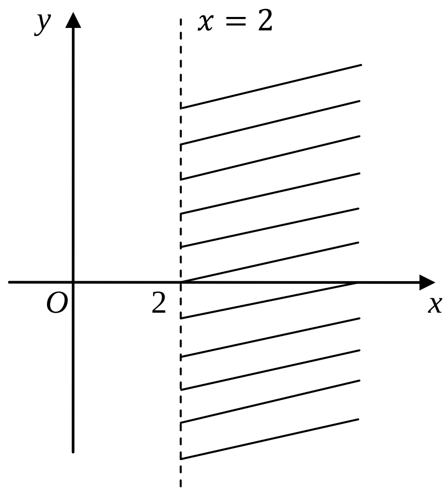


Рис. 2.77. Область, заданная условием $Rez > 2$

20) $Imz = 2.$ Данное условие определяет множество точек, ординаты которых равны 2, то есть прямую, заданную уравнением $y = 2$ (рис. 2.78).

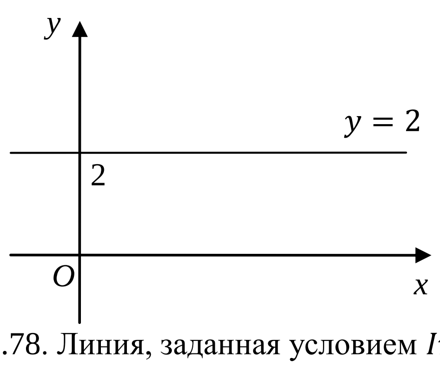


Рис. 2.78. Линия, заданная условием $Imz = 2$

21) $Imz < 2$. Данное условие определяет множество точек, ординаты которых меньше 2, то есть область, расположенную ниже прямой, заданной уравнением $y = 2$, исключая точки самой прямой (рис. 2.79).

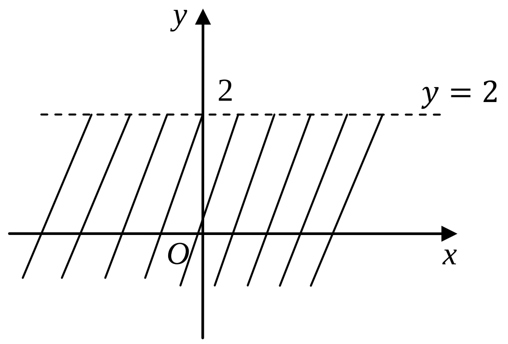


Рис. 2.79. Область, заданная условием $Imz < 2$

22) $Imz > 2$. Данное условие определяет множество точек, ординаты которых больше 2, то есть область, расположенную выше прямой, заданной уравнением $y = 2$, исключая точки самой прямой (рис. 2.80).

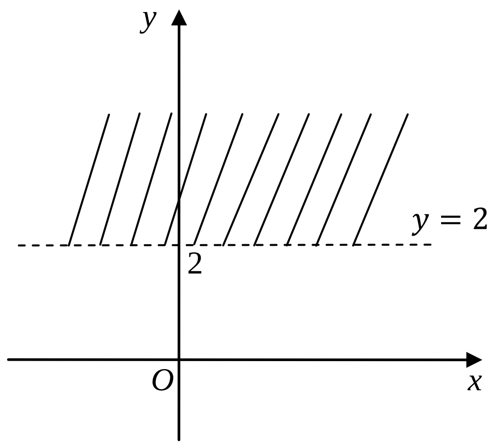


Рис. 2.80. Область, заданная условием $Imz > 2$

23) $|z - 4| \leq 2,\ Rez > 4$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, первое условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0 = 4$ на расстояние, не большее 2, то есть определяет круг с центром в точке $(4;\ 0)$ радиуса 2.

Второе условие определяет множество точек, абсциссы которых больше 4, то есть область, расположенную правее прямой, заданной уравнением $x = 4$, исключая точки самой прямой.

Окончательно, заданная область представляет правую половину круга радиуса 2 с центром в точке $(4;\ 0)$, исключая точки прямой $x = 4$ (рис. 2.81).

24) $|z - 4| \geq 2,\ Imz < 0$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, первое

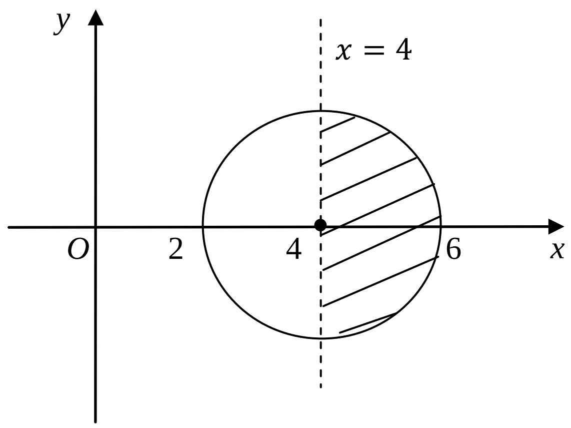


Рис. 2.81. Область, заданная условиями $|z-4| \leq 2$, $Rez > 4$

условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0 = 4$ на расстояние, не меньшее 2, то есть определяет область, расположенную вне круга радиуса 2 с центром в точке $(4;\ 0)$, включая границу круга.

Второе условие определяет множество точек, ординаты которых отрицательны, то есть область, расположенную ниже оси Ox.

Окончательно, заданная область представляет собой область, расположенную ниже оси Ox, исключая нижнюю половину круга радиуса 2 с центром в точке $(4;\ 0)$ с включением границы полукруга (рис. 2.82).

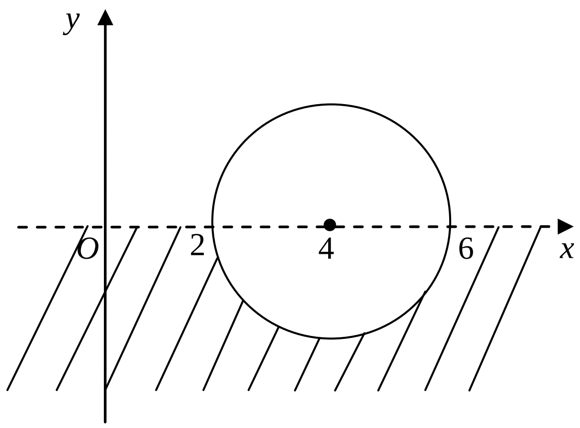


Рис. 2.82. Область, заданная условиями $|z-4| \geq 2$, $Imz < 0$

25) $3 \leq |z| < 5$, $Rez \geq 0$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, первое условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0 = 0$ на расстояние, не меньшее 3 и меньшее 5, то есть определяет кольцо, расположенное между двумя окружностями с центрами в начале координат радиусов 3 и 5, при этом точки окружности радиуса 3 включаем, а радиуса 5 исключаем.

Второе условие определяет множество точек, абсциссы которых неотрицательны, то есть область, расположенную левее оси Oy, включая точки оси Oy.

Окончательно, заданная область представляет полукольцо, расположенное между правыми половинами окружностей с центрами в начале координат радиусов 3 и 5, включая точки окружности радиуса 3 и исключая точки окружности радиуса 5. (рис. 2.83).

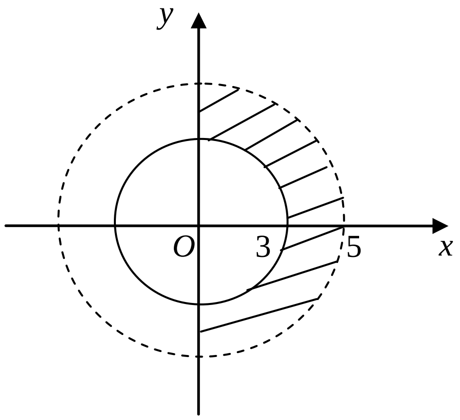


Рис. 2.83. Область, заданная условиями $3 \leq |z| < 5$, $Rez \geq 0$

26) $|z - 3 + 6i| \leq 6$, $Imz \geq -6$. Перепишем первое условие в виде $|z - (3 - 6i)| \leq 6$. На основании формулы расстояния между двумя точками, изображающими комплексные числа на плоскости, данное условие определяет множество точек, удалённых от точки $z_0 = 3 - 6i$ на расстояние, не большее 6, то есть определяет круг с центром в точке $(3; -6)$ радиуса 6, включая границу круга.

Второе условие определяет множество точек, ординаты которых не меньше
–6, то есть область, расположенную не ниже прямой, заданной уравнением $y = -6$.

Окончательно, заданная область представляет верхнюю половину круга с центром в точке $(3;\ -6)$ радиуса 6, расположенную не ниже прямой $y = -6$ (рис. 2.84).

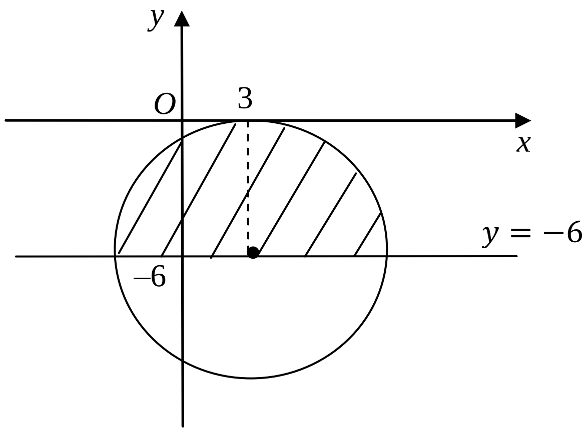


Рис. 2.84. Область, заданная условиями $|z - 3 + 6i| \leq 6$, $Imz \geq -6$

<u>Задание 2.19.</u> В комплексной плоскости построить область, заданную условиями:

1) $|z| \le 3, \frac{\pi}{6} \le argz \le \frac{5\pi}{6}$; 2) $|z-2i| \le 2, Rez \ge 0$;

3) $|z-3| < 3, Imz < 2$; 4) $|z-4| > 4, Rez > 3$;

5) $|z-2+5i| \le 2, Imz \le -6$;

6) $|z+3-3i| \ge 3, \frac{2\pi}{3} \le argz \le \frac{3\pi}{4}$.

2.20. Разные задачи повышенной сложности

<u>Пример 2.20.</u>

1) Вычислить $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2525}$.

<u>Решение.</u> Данное выражение представляет собой сумму элементов геометрической прогрессии со знаменателем $q=i$. Напомним формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, где b_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии. Учитывая, что $n = 2526$, получаем:

$$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2525} = \frac{1\left(i^{2526}-1\right)}{i-1} = \frac{(i^2)^{1263}-1}{i-1} = \frac{-2}{i-1} =$$

$$= \frac{-2(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \frac{-2(i+1)}{-2} = 1+i.$$

Ответ: $1+i$.

2) Решить уравнение $5z^2 - 8|z| + 3 = 0$.

<u>Решение.</u> Воспользуемся алгебраической формой записи комплексного числа: $z = x+iy$. Тогда уравнение принимает вид:

$$5(x+iy)^2 - 8\sqrt{x^2+y^2} + 3 = 0$$

Раскроем квадрат и сгруппируем действительные и мнимые слагаемые:

$$\left(5x^2 - 5y^2 - 8\sqrt{x^2+y^2} + 3\right) + 10ixy = 0.$$

Далее запишем систему уравнений, учитывая, что комплексное число обращается в ноль, если обращаются в ноль его действительная и мнимая части:

$$\begin{cases} 5x^2 - 5y^2 - 8\sqrt{x^2+y^2} + 3 = 0, \\ 10xy = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ 5x^2 - 5y^2 - 8\sqrt{x^2+y^2} + 3 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ 5x^2 - 5y^2 - 8\sqrt{x^2+y^2} + 3 = 0. \end{cases} \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ 5|y|^2 + 8|y| - 3 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ 5|x|^2 - 8|x| + 3 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим первое уравнение, учитывая, что $|y| \geq 0$: $|y| = \frac{-4+\sqrt{31}}{5}$. Тогда $y = \pm\frac{-4+\sqrt{31}}{5}$ и решением первой системы являются числа: $\frac{-4+\sqrt{31}}{5}i$ и $\frac{4-\sqrt{31}}{5}i$.

Решим второе уравнение: $|x| = 1$, $|x| = \frac{3}{5}$. Тогда $x = 1$, $x = -1$, $x = \frac{3}{5}$, $x = -\frac{3}{5}$ и решением второй системы являются числа: $1; -1; \frac{3}{5}; -\frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{-4+\sqrt{31}}{5}; \frac{4-\sqrt{31}}{5}i; 1; -1; \frac{3}{5}; -\frac{3}{5}$.

3) Представить в тригонометрической форме число $-2\left(sin\frac{7\pi}{4} + \right.$ $\left.+icos\ \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Исходное число надо привести к виду $r(\cos\varphi + isin\ \varphi)$. Для этого внесём в скобки множитель -1 и воспользуемся формулами приведения:

$$-2\left(sin\frac{7\pi}{4} + icos\ \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(-sin\frac{7\pi}{4} - icos\ \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(-sin\left(2\pi - \right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\pi}{4}\right) - icos\ \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(sin\frac{\pi}{4} - icos\ \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - isin\ \left(\frac{\pi}{2} - \right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - isin\ \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\ \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Ответ: $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\ \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

4) Найти площадь фигуры, ограниченной линией, заданной на плоскости уравнением $Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$.

Решение. Преобразуем исходное равенство, используя алгебраическую форму комплексного числа $z = x + iy$: $Im\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \frac{1}{2}$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряжённое знаменателю: $Im\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{2}$.

Возьмём мнимую часть: $\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$.

Преобразуем:

$x^2 + y^2 + 2y = 0$

$x^2 + (y + 1)^2 = 1$.

Полученное равенство определяет окружность с центром в точке $C(0;\ -1)$ радиуса $R = 1$, поэтому данная фигура представляет круг площади 2π.

Ответ: 2π.

5) Изобразить на плоскости множество чисел z таких, что $\frac{|z+3-i|}{|z-7+i|} > 1$.

Решение. Учитывая понятие расстояния между точками комплексной плоскости, данное неравенство определяет множество точек $z(x;y)$, расстояние от каждой из которых до точки $A(-3;1)$ больше расстояния до точки $B(7;\ -1)$, при этом $z-7+i\neq 0$.

Вычислим указанные расстояния:

$AM=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}$, $BM=\sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}$.

Так как по условию $AM>BM$, то $AM^2>BM^2$ и можно записать:

$(x+3)^2+(y-1)^2>(x-7)^2+(y+1)^2$.

Преобразуем:

$20x-4y-40>0$

или

$y<5x-10$.

Таким образом, исходное неравенство определяет полуплоскость, расположенную ниже прямой $y=5x-10$, исключая точку $B(7;\ -1)$ (рис. 2.85).

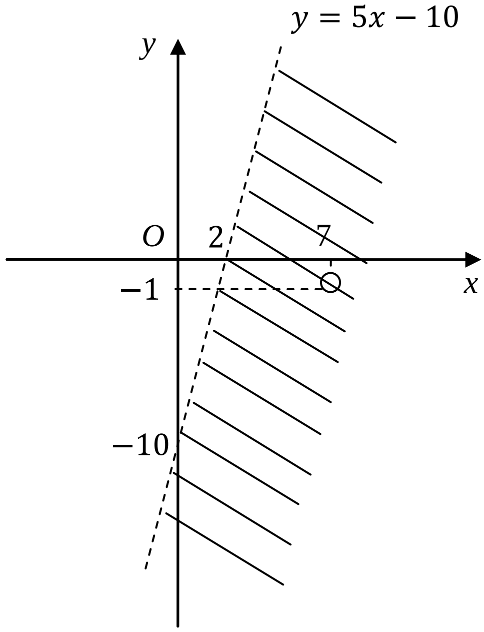


Рис. 2.85. Область, заданная неравенством $\frac{|z+3-i|}{|z-7+i|}>1$

Задание 2.20.

1) Вычислить $i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}+i^{53}$.

2) Решить уравнение $4z^2+9|z|+5=0$.

3) Представить в тригонометрической форме число $-3\left(\cos\frac{\pi}{7}-\right.$ $\left.-i\sin\frac{\pi}{7}\right)$

4) Найти длину линии, заданной уравнением $Re\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{6}$.

5) Изобразить на плоскости множество чисел z таких, что $\frac{|z-5+4i|}{|z+7-2i|}=1$.

Раздел 3. Индивидуальные задания

В данном разделе используется следующая нумерация заданий: a.b.c, где первая цифра "a"обозначает номер раздела, вторая цифра "b" обозначает номер задания и третья цифра "c" обозначает номер варианта. Например: 3.4.17 обозначает третий раздел, четвёртое задание, семнадцатый вариант.

Часть 1. Первый уровень сложности

3.1. Действительная и мнимая части комплексного числа

Задание 3.1. Указать действительную и мнимую части комплексного числа.

3.1.1. $z = 4 - 5i.$
3.1.2. $z = \sqrt{3} + 3i.$
3.1.3. $z = 1 - 2i.$
3.1.4. $z = -9 + 3i.$
3.1.5. $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$
3.1.6. $z = -8 - 6i.$
3.1.7. $z = 3 - 7i.$
3.1.8. $z = -2 + 3i.$
3.1.9. $z = 4 + 9i.$
3.1.10. $z = 3 - 8i.$
3.1.11. $z = -3 - i.$
3.1.12. $z = 5 + 7i.$
3.1.13. $z = 3 + i,$
3.1.14. $z = 6 + i.$
3.1.15. $z = 5 - 9i.$
3.1.16. $z = -1 - 2i.$
3.1.17. $z = 6 + 3i.$
3.1.18. $z = 7 + i.$
3.1.19. $z = 8 - 4i.$
3.1.20. $z = 4 - 8i.$
3.1.21. $z = 1 + 7i.$
3.1.22. $z = 4 + 5i.$
3.1.23. $z = 8 - 3i.$
3.1.24. $z = 4 + i.$
3.1.25. $z = 7 - 9i.$
3.1.26. $z = -1 + i.$
3.1.27. $z = 5 + 3i.$
3.1.28. $z = 4 + 6i.$
3.1.29. $z = 7 - 4i,$
3.1.30. $z = 3 + 2i.$
3.1.31. $z = 7 - 3i.$
3.1.32. $z = 7 + 8i.$
3.1.33. $z = 1 + 3i.$
3.1.34. $z = 4 - i.$
3.1.35. $z = 5 - 2i,$
3.1.36. $z = 3 - 5i.$

3.2. Степень числа *i*

Задание 3.2. Найти степень числа i.

3.2.1. i^{17}.
3.2.2. i^{71}.
3.2.3. i^{151}.
3.2.4. i^{143}.
3.2.5. i^{19}.
3.2.6. i^{201}.
3.2.7. i^{195}
3.2.8. i^{14}.
3.2.9. i^{18}.
3.2.10. i^{37}.
3.2.11. i^{41}
3.2.12. i^{52}.
3.2.13. i^{21}.
3.2.14. i^{29}.
3.2.15. i^{87}
3.2.16. i^{95}.
3.2.17. i^{58}.
3.2.18. i^{67}.
3.2.19. i^{154}
3.2.20. i^{129}.
3.2.21. i^{46}.
3.2.22. i^{76}.
3.2.23. i^{98}
3.2.24. i^{25}.

3.2.25. i^{62}. **3.2.26.** i^{89}. **3.2.27.** i^{107}
3.2.28. i^{13}. **3.2.29.** i^{39}. **3.2.30.** i^{43}.
3.2.31 i^{79} **3.2.32.** i^{8}. **3.2.33.** i^{93}.
3.2.34. i^{80}. **3.2.35.** i^{9}. **3.2.36.** i^{48}.

3.3. Сопряжённое комплексное число

Задание 3.3. Найти комплексное число, сопряжённое данному числу.

3.3.1. $z = -5 - 9i$. **3.3.2.** $z = 8 - 6i$.
3.3.3. $z = 5 + i$. **3.3.4.** $z = -7i$.
3.3.5. $z = -5 + 3i$. **3.3.6.** $z = -9 - i$.
3.3.7. $z = 4 - 3i$. **3.3.8.** $z = -2 - 4i$.
3.3.9. $z = 5$. **3.3.10.** $z = 8 + 4i$.
3.3.11. $z = -3 + 5i$. **3.3.12.** $z = i$.
3.3.13. $z = -1$. **3.3.14.** $z = 2 - 3i$.
3.3.15. $z = 8 - 7i$. **3.3.16.** $z = 6 - 7i$.
3.3.17. $z = 5 + 5i$. **3.3.18.** $z = -4 - 2i$.
3.3.19. $z = -4i$. **3.3.20.** $z = -4 + i$.
3.3.21. $z = 1 - 6i$. **3.3.22.** $z = 8 - 3i$.
3.3.23. $z = -9 + 2i$. **3.3.24.** $z = 1$.
3.3.25. $z = -3 - 4i$. **3.3.26.** $z = -5 - 8i$.
3.3.27. $z = 4 + 2i$. **3.3.28.** $z = 3 - 2i$.
3.3.29. $z = -9$. **3.3.30.** $z = -7 - 7i$.
3.3.31. $z = 9 + 4i$. **3.3.32.** $z = -i$.
3.3.33. $z = -8 + 4i$. **3.3.34.** $z = 7 - 3i$.
3.3.35. $z = -8i$. **3.3.36.** $z = -4 + i$.

3.4. Геометрическое представление комплексного числа

Задание 3.4. Изобразить комплексное число в комплексной плоскости.

3.4.1. $z = -5\sqrt{3} - 5i$. **3.4.2.** $z = -2 + 2i$.
3.4.3. $z = 2 + i$. **3.4.4.** $z = 2i$.
3.4.5. $z = -3 - 3i$. **3.4.6.** $z = -9$.
3.4.7. $z = -3i$. **3.4.8.** $z = 5 - 3i$.
3.4.9. $z = -5i$. **3.4.10.** $z = -4 - 3i$.
3.4.11. $z = -3\sqrt{3} + 3i$. **3.4.12.** $z = 4i$.
3.4.13. $z = 4$. **3.4.14.** $z = 2 - 2\sqrt{3}i$.
3.4.15. $z = 7 + 7i$. **3.4.16.** $z = 1 + 2i$.
3.4.17. $z = 5i$. **3.4.18.** $z = -4$.
3.4.19. $z = 4 - 4i$. **3.4.20.** $z = -2 - 2i$.
3.4.21. $z = -4 + 6i$. **3.4.22.** $z = -3i$.
3.4.23. $z = 8 + 8i$. **3.4.24.** $z = 4$.
3.4.25. $z = 6 - 6i$. **3.4.26.** $z = -4 - i$.

3.4.27. $z = 3 - 2i$.

3.4.28. $z = -1 + 2i$.

3.4.29. $z = 8$.

3.4.30. $z = -2 - 3i$.

3.4.31. $z = 9\sqrt{3} + 9i$.

3.4.32. $z = -2i$.

3.4.33. $z = 3 + 4i$.

3.4.34. $z = -1 - 3i$.

3.4.35. $z = -6i$.

3.4.36. $z = -4 - i$.

3.5. Модуль комплексного числа

<u>Задание 3.5.</u> Найти модуль комплексного числа.

3.5.1. $z = -2i$.

3.5.2. $z = 8$.

3.5.3. $z = -3 + i$.

3.5.4. $z = 4i$.

3.5.5. $z = 2 + 2i$.

3.5.6. $z = -i$.

3.5.7. $z = -6 - 3i$.

3.5.8. $z = -1 - i$.

3.5.9. $z = 5 + 5i$.

3.5.10. $z = 7$.

3.5.11. $z = -6 - 6i$.

3.5.12. $z = -1 + 2i$.

3.5.13. $z = -1 - 4i$.

3.5.14. $z = -2$.

3.5.15. $z = -4 + 3i$.

3.5.16. $z = 6 + 4i$.

3.5.17. $z = -5i$.

3.5.18. $z = -1 + 3i$.

3.5.19. $z = -8 + 2i$.

3.5.20. $z = -3 + 3i$.

3.5.21. $z = 1$.

3.5.22. $z = -4 + 2i$.

3.5.23. $z = -2i$.

3.5.24. $z = 2 - 2i$.

3.5.25. $z = 3 - 4i$.

3.5.26. $z = -5 + 5i$.

3.5.27. $z = -4$.

3.5.28. $z = -7 - 2i$.

3.5.29. $z = 2 + \sqrt{5}i$.

3.5.30. $z = -3 + 5i$.

3.5.31. $z = 3 + 4i$.

3.5.32. $z = -2i$.

3.5.33. $z = -8$.

3.5.34. $z = 3 - 3i$.

3.5.35. $z = -1 - i$.

3.5.36. $z = -4i$.

3.6. Аргумент комплексного числа

<u>Задание 3.6.</u> Найти аргумент комплексного числа.

3.6.1. $z = -\sqrt{3} - 3i$.

3.6.2. $z = \sqrt{3} - 3i$.

3.6.3. $z = 5i$.

3.6.4. $z = -\sqrt{3} + 3i$.

3.6.5. $z = \sqrt{3} + 3i$.

3.6.6. $z = -6\sqrt{3}i$.

3.6.7. $z = -\sqrt{6} + 3\sqrt{2}i$.

3.6.8. $z = \sqrt{6} + 3\sqrt{2}i$.

3.6.9. $z = -3i$.

3.6.10. $z = -\sqrt{6} - 3\sqrt{2}i$.

3.6.11. $z = \sqrt{6} - 3\sqrt{2}i$.

3.6.12. $z = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$.

3.6.13. $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$.

3.6.14. $z = 6$.

3.6.15. $z = -\sqrt{2} - \sqrt{6}i$.

3.6.16. $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$.

3.6.17. $z = -4\sqrt{3} + 4i$.

3.6.18. $z = 4\sqrt{3} - 4i$.

3.6.19. $z = 4\sqrt{3} + 4i$.

3.6.20. $z = -4\sqrt{3} - 4i$.

3.6.21. $z = -6$.

3.6.22. $z = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i$.

3.6.23. $z = \sqrt{6} + \sqrt{2}i$.

3.6.24. $z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$.

3.6.25. $z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i.$ **3.6.26.** $z = -6\sqrt{3}i.$
3.6.27. $z = 3 + 3i.$ **3.6.28.** $z = -3 - 3i.$
3.6.29. $z = -3 + 3i.$ **3.6.30.** $z = 3 - 3i.$
3.6.31. $z = -5i.$ **3.6.32.** $z = -3\sqrt{2} + 6i.$
3.6.33. $z = -3\sqrt{2} - 6i.$ **3.6.34.** $z = 3\sqrt{2} + 6i.$
3.6.35. $z = 3\sqrt{2} - 6i.$ **3.6.36.** $z = 3i.$

3.7. Тригонометрическая форма комплексного числа

<u>**Задание 3.7.**</u> Представить комплексное число в тригонометрической форме.

3.7.1. $z = 2 + 2i.$ **3.7.2.** $z = 2 - 2i.$
3.7.3. $z = -2 + 2i.$ **3.7.4.** $z = -2 - 2i.$
3.7.5. $z = 2 + 2\sqrt{3}\, i.$ **3.7.6.** $z = 2 - 2\sqrt{3}\, i.$
3.7.7. $z = -2 + 2\sqrt{3}\, i.$ **3.7.8.** $z = -2 - 2\sqrt{3}\, i.$
3.7.9. $z = 2\sqrt{3} + 2i.$ **3.7.10.** $z = 2\sqrt{3} - 2i.$
3.7.11. $z = -2\sqrt{3} + 2i.$ **3.7.12.** $z = -2\sqrt{3} - 2i.$
3.7.13. $z = 3 + 3i.$ **3.7.14.** $z = 3 - 3i.$
3.7.15. $z = -3 + 3i.$ **3.7.16.** $z = -3 - 3i.$
3.7.17. $z = 3 + \sqrt{3}\, i.$ **3.7.18.** $z = 3 - \sqrt{3}\, i.$
3.7.19. $z = -3 + \sqrt{3}\, i.$ **3.7.20.** $z = -3 - \sqrt{3}\, i.$
3.7.21. $z = \sqrt{3} + 3i.$ **3.7.22.** $z = \sqrt{3} - 3\, i.$
3.7.23. $z = -\sqrt{3} + 3\, i.$ **3.7.24.** $z = -\sqrt{3} - 3i.$
3.7.25. $z = 1 + \ i.$ **3.7.26.** $z = 1 - \ i.$
3.7.27. $z = -1 + i.$ **3.7.28.** $z = -1 - \ i.$
3.7.29. $z = 1 + \sqrt{3}\, i.$ **3.7.30.** $z = 1 - \sqrt{3}i\ .$
3.7.31.$z = -1 + \sqrt{3}\, i.$ **3.7.32.** $z = -1 - \sqrt{3}\, i.$
3.7.33. $z = \sqrt{3} + i\ .$ **3.7.34.** $z = \sqrt{3} - \ i.$
3.7.35. $z = -\sqrt{3} + \ i.$ **3.7.36.** $z = -\sqrt{3} - i\ .$

3.8. Показательная форма комплексного числа

<u>**Задание 3.8.**</u> Представить комплексное число в показательной форме.

3.8.1. $z = 2\sqrt{3} + 2i.$ **3.8.2.** $z = 2\sqrt{3} - 2i.$
3.8.3. $z = -2\sqrt{3} + 2i.$ **3.8.4.** $z = -2\sqrt{3} - 2i.$
3.8.5. $z = 1 + \sqrt{3}\, i.$ **3.8.6.** $z = 1 - \sqrt{3}i\ .$
3.8.7. $z = -1 + \sqrt{3}\, i.$ **3.8.8.** $z = -1 - \sqrt{3}\, i.$
3.8.9. $z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i.$ **3.8.10.** $z = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i.$
3.8.11. $z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i.$ **3.8.12.** $z = \sqrt{6} + \sqrt{2}i.$
3.8.13. $z = 2 + 2\sqrt{3}\, i.$ **3.8.14.** $z = 2 - 2\sqrt{3}\, i.$
3.8.15. $z = -2 + 2\sqrt{3}\, i.$ **3.8.16.** $z = -2 - 2\sqrt{3}\, i.$
3.8.17. $z = 4 + 4i.$ **3.8.18.** $z = 4 - 4i.$

3.8.19. $z = -4 + 4i.$

3.8.20. $z = -4 - 4i.$

3.8.21. $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$.

3.8.22. $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}\, i.$

3.8.23. $z = -\sqrt{2} + \sqrt{6}\, i.$

3.8.24. $z = -\sqrt{2} - \sqrt{6}i$.

3.8.25. $z = 6 + 2\sqrt{3}\, i.$

3.8.26. $z = 6 - 2\sqrt{3}\, i.$

3.8.27. $z = -6 + 2\sqrt{3}\, i.$

3.8.28. $z = -6 - 2\sqrt{3}\, i.$

3.8.29. $z = \sqrt{3} + 3i.$

3.8.30. $z = \sqrt{3} - 3\, i.$

3.8.31. $z = -\sqrt{3} + 3\, i.$

3.8.32. $z = -\sqrt{3} - 3i.$

3.8.33. $z = 5 + 5\, i.$

3.8.34. $z = 5 - 5\, i.$

3.8.35. $z = -5 + 5i.$

3.8.36. $z = -5 - 5\, i.$

3.9. Сумма, разность, произведение и частное комплексных чисел в алгебраической форме

<u>Задание 3.9.</u> Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел в алгебраической форме.

3.9.1. $z_1 = 2 + 3i, \qquad z_2 = 1 + i.$

3.9.2. $z_1 = 3 + 4i, \qquad z_2 = 1 - i.$

3.9.3. $z_1 = 1 - 2i, \qquad z_2 = -1 + i.$

3.9.4. $z_1 = 2 + 5i, \qquad z_2 = -1 - i.$

3.9.5. $z_1 = 3 - 8i, \qquad z_2 = 2 + i.$

3.9.6. $z_1 = 3 - 7i, \qquad z_2 = 2 - i.$

3.9.7. $z_1 = 2 + 6i, \qquad z_2 = -2 + i.$

3.9.8. $z_1 = 4 + 2i, \qquad z_2 = -2 - i.$

3.9.9. $z_1 = 5 + 3i, \qquad z_2 = 3 + i.$

3.9.10. $z_1 = 6 - 2i, \qquad z_2 = 3 - i.$

3.9.11. $z_1 = 7 + 9i, \qquad z_2 = -3 + i.$

3.9.12. $z_1 = 3 - 7i, \qquad z_2 = -3 - i.$

3.9.13. $z_1 = 4 + 3i, \qquad z_2 = 4 + i.$

3.9.14. $z_1 = 8 + 3i, \qquad z_2 = 4 - i.$

3.9.15. $z_1 = 8 - 2i, \qquad z_2 = -4 + i.$

3.9.16. $z_1 = 9 + 2i, \qquad z_2 = -4 - i.$

3.9.17. $z_1 = 7 + 3i, \qquad z_2 = 5 + i.$

3.9.18. $z_1 = 6 - 4i, \qquad z_2 = 5 - i.$

3.9.19. $z_1 = 5 + 4i, \qquad z_2 = -5 + i.$

3.9.20. $z_1 = 3 + 7i, \qquad z_2 = -5 - i.$

3.9.21. $z_1 = 2 - 4i, \qquad z_2 = 6 + i.$

3.9.22. $z_1 = 3 + 5i, \qquad z_2 = 6 - i.$

3.9.23. $z_1 = 6 + 5i, \qquad z_2 = -6 + i.$

3.9.24. $z_1 = 7 + 2i, \qquad z_2 = -6 - i.$

3.9.25. $z_1 = 8 + 3i, \qquad z_2 = 7 + i.$

3.9.26. $z_1 = 9 - 2i, \qquad z_2 = 7 - i.$

3.9.27. $z_1 = 5 + 6i, \qquad z_2 = -7 + i.$

3.9.28. $z_1 = -3 + 2i, \qquad z_2 = -7 - i.$

3.9.29. $z_1 = 6 + 2i$, $z_2 = 8 + i$.
3.9.30. $z_1 = -6 + 7i$, $z_2 = 8 - i$.
3.9.31. $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = -8 - i$.
3.9.32. $z_1 = 8 + 3i$, $z_2 = 9 + i$.
3.9.33. $z_1 = -7 - 2i$, $z_2 = 9 - i$.
3.9.34. $z_1 = 5 + 8i$, $z_2 = -9 + i$.
3.9.35. $z_1 = -2 + 4i$, $z_2 = -9 - i$.
3.9.36. $z_1 = -5 - 4i$, $z_2 = 10 + i$.

3.10. Решение квадратных уравнений на множестве комплексных чисел

<u>Задание 3.10.</u> Решить уравнения на множестве комплексных чисел.
3.10.1. а) $x^2 + 1 = 0$. б) $x^2 + 3x + 4 = 0$.
3.10.2. а) $x^2 + 2 = 0$. б) $x^2 - 2x + 3 = 0$.
3.10.3. а) $x^2 + 3 = 0$. б) $x^2 - 5x + 7 = 0$.
3.10.4. а) $x^2 + 4 = 0$. б) $x^2 + x + 2 = 0$.
3.10.5. а) $x^2 + 5 = 0$. б) $x^2 + 3x + 3 = 0$.
3.10.6. а) $x^2 + 6 = 0$. б) $x^2 + x + 1 = 0$.
3.10.7. а) $x^2 + 7 = 0$. б) $x^2 + 4x + 5 = 0$.
3.10.8. а) $x^2 + 8 = 0$. б) $x^2 - 2x + 2 = 0$.
3.10.9. а) $x^2 + 9 = 0$. б) $3x^2 - x + 1 = 0$.
3.10.10. а) $2x^2 + 1 = 0$. б) $2x^2 + 2x + 1 = 0$.
3.10.11. а) $3x^2 + 1 = 0$. б) $x^2 + 2x + 9 = 0$.
3.10.12. а) $4x^2 + 1 = 0$. б) $x^2 - 3x + 5 = 0$.
3.10.13. а) $5x^2 + 1 = 0$. б) $x^2 + x + 6 = 0$.
3.10.14. а) $6x^2 + 1 = 0$. б) $3x^2 + x + 2 = 0$.
3.10.15. а) $7x^2 + 1 = 0$. б) $2x^2 - 5x + 4 = 0$.
3.10.16. а) $8x^2 + 1 = 0$. б) $x^2 + x + 3 = 0$.
3.10.17. а) $9x^2 + 1 = 0$. б) $5x^2 - x + 1 = 0$.
3.10.18. а) $2x^2 + 3 = 0$. б) $4x^2 + 2x + 1 = 0$.
3.10.19. а) $2x^2 + 5 = 0$. б) $x^2 + 2x + 5 = 0$.
3.10.20. а) $2x^2 + 7 = 0$. б) $x^2 - 3x + 6 = 0$.
3.10.21. а) $2x^2 + 9 = 0$. б) $7x^2 + x + 1 = 0$.
3.10.22. а) $3x^2 + 2 = 0$. б) $4x^2 - x + 1 = 0$.
3.10.23. а) $3x^2 + 4 = 0$. б) $3x^2 + x + 2 = 0$.
3.10.24. а) $3x^2 + 5 = 0$. б) $5x^2 + 2x + 1 = 0$.
3.10.25. а) $3x^2 + 7 = 0$. б) $2x^2 - 3x + 2 = 0$.
3.10.26. а) $3x^2 + 8 = 0$. б) $3x^2 + 2x + 1 = 0$.
3.10.27. а) $4x^2 + 1 = 0$. б) $4x^2 + 3x + 1 = 0$.
3.10.28. а) $4x^2 + 3 = 0$. б) $5x^2 - 2x + 1 = 0$.
3.10.29. а) $4x^2 + 5 = 0$. б) $6x^2 - 3x + 1 = 0$.
3.10.30. а) $4x^2 + 7 = 0$. б) $x^2 + 2x + 5 = 0$.

3.10.31. а) $4x^2 + 9 = 0$. б) $2x^2 - x + 1 = 0$.
3.10.32. а) $5x^2 + 1 = 0$. б) $3x^2 - x + 2 = 0$.
3.10.33. а) $5x^2 + 2 = 0$. б) $2x^2 + x + 2 = 0$.
3.10.34. а) $5x^2 + 3 = 0$. б) $4x^2 + x + 3 = 0$.
3.10.35. а) $5x^2 + 4 = 0$. б) $x^2 - x + 2 = 0$.
3.10.36. а) $5x^2 + 6 = 0$. б) $5x^2 + x + 2 = 0$.

Часть II. Второй уровень сложности

3.11. Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме

Задание 3.11. Найти произведение и частное двух комплексных чисел в тригонометрической форме.

3.11.1. $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = -5\sqrt{3} - 5i$.
3.11.2. $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = -5\sqrt{3} + 5i$.
3.11.3. $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = 5\sqrt{3} - 5i$.
3.11.4. $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = 5\sqrt{3} + 5i$.
3.11.5. $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -5 - 5\sqrt{3}\,i$.
3.11.6. $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -5 + 5\sqrt{3}\,i$.
3.11.7. $z_1 = -2 + 2i$, $z_2 = 5 - 5\sqrt{3}\,i$.
3.11.8. $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 5 + 5\sqrt{3}\,i$.
3.11.9. $z_1 = 3 + \sqrt{3}\,i$, $z_2 = -7\sqrt{3} - 7\,i$.
3.11.10. $z_1 = 3 - \sqrt{3}\,i$, $z_2 = -7\sqrt{3} + 7\,i$.
3.11.11. $z_1 = -3 + \sqrt{3}\,i$, $z_2 = 7\sqrt{3} - 7\,i$.
3.11.12. $z_1 = -3 - \sqrt{3}\,i$, $z_2 = 7\sqrt{3} + 7\,i$.
3.11.13. $z_1 = 2\sqrt{3} + 2\,i$, $z_2 = -6 - 6\sqrt{3}\,i$.
3.11.14. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2\,i$, $z_2 = -6 + 6\sqrt{3}\,i$.
3.11.15. $z_1 = -2\sqrt{3} + 2\,i$, $z_2 = 6 - 6\sqrt{3}\,i$.
3.11.16. $z_1 = -2\sqrt{3} - 2\,i$, $z_2 = 6 + 6\sqrt{3}\,i$.
3.11.17. $z_1 = \sqrt{3} + 3\,i$, $z_2 = -7 - 7\,i$.
3.11.18. $z_1 = \sqrt{3} - 3\,i$, $z_2 = -7 + 7\,i$.
3.11.19. $z_1 = -\sqrt{3} + 3\,i$, $z_2 = 7 - 7\,i$.
3.11.20. $z_1 = -\sqrt{3} - 3\,i$, $z_2 = 7 + 7\,i$.
3.11.21. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\,i$.
3.11.22. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -8 + 8\sqrt{3}\,i$.
3.11.23. $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 8 - 8\sqrt{3}\,i$.
3.11.24. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 8 + 8\sqrt{3}\,i$.
3.11.25. $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$, $z_2 = -8\sqrt{3} - 8\,i$.
3.11.26. $z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$, $z_2 = -8\sqrt{3} + 8\,i$.

3.11.27. $z_1 = -1 + \sqrt{3}\, i,$ $\quad z_2 = 8\sqrt{3} - 8\, i.$
3.11.28. $z_1 = -1 - \sqrt{3}\, i,$ $\quad z_2 = 8\sqrt{3} + 8\, i.$
3.11.29. $z_1 = 3 + 3\, i,$ $\quad z_2 = -7 - 7\sqrt{3}\, i.$
3.11.30. $z_1 = 3 - 3\, i,$ $\quad z_2 = -7 + 7\sqrt{3}\, i.$
3.11.31. $z_1 = -3 + 3\, i,$ $\quad z_2 = 7 - 7\sqrt{3}\, i.$
3.11.32. $z_1 = -3 - 3\, i,$ $\quad z_2 = 7 + 7\sqrt{3}\, i.$
3.11.33. $z_1 = \sqrt{3} + i,$ $\quad z_2 = -8 - 8\, i.$
3.11.34. $z_1 = \sqrt{3} - i,$ $\quad z_2 = -8 + 8\, i.$
3.11.35. $z_1 = -\sqrt{3} + i,$ $\quad z_2 = 8 - 8\, i.$
3.11.36. $z_1 = -\sqrt{3} - i,$ $\quad z_2 = 8 + 8\, i.$

3.12. Возведение комплексного числа в степень

Задание 3.12. Выполнить возведение комплексного числа в степень по формуле Муавра.

3.12.1. $(6 - 6i)^3.$
3.12.2. $(-6 + 6i)^3.$
3.12.3. $(-6 - 6i)^3.$
3.12.4. $(6 + 6i)^3.$
3.12.5. $\left(-1 - \sqrt{3}\, i\right)^6.$
3.12.6. $\left(1 + \sqrt{3}\, i\right)^6.$
3.12.7. $\left(-1 + \sqrt{3}\, i\right)^6.$
3.12.8. $\left(1 - \sqrt{3}\, i\right)^6.$
3.12.9. $\left(5\sqrt{3} - 5i\right)^3.$
3.12.10. $\left(5\sqrt{3} + 5i\right)^3.$
3.12.11. $\left(-5\sqrt{3} + 5i\right)^3.$
3.12.12. $\left(-5\sqrt{3} - 5i\right)^3.$
3.12.13. $(-4 + 4i)^4.$
3.12.14. $(-4 - 4i)^4.$
3.12.15. $(4 + 4i)^4.$
3.12.16. $(4 - 4i)^4.$
3.12.17. $(-2 - 2i)^4.$
3.12.18. $(2 - 2i)^4.$
3.12.19. $(2 + 2i)^4.$
3.12.20. $(-2 + 2i)^4.$
3.12.21. $(-1 - i)^6.$
3.12.22. $(1 - i)^6.$
3.12.23. $(-1 + i)^6.$
3.12.24. $(1 + i)^6.$
3.12.25. $(7 - 7i)^3.$
3.12.26. $(-7 + 7i)^3.$
3.12.27. $(-7 - 7i)^3.$
3.12.28. $(7 + 7i)^3.$
3.12.29. $(3 + 3i)^4.$
3.12.30. $(-3 + 3i)^4.$
3.12.31. $(-3 - 3i)^4.$
3.12.32. $(3 - 3i)^4.$
3.12.33. $\left(\sqrt{3} + i\right)^6.$
3.12.34. $\left(\sqrt{3} - i\right)^6.$
3.12.35. $\left(-\sqrt{3} - i\right)^6.$
3.12.36. $\left(-\sqrt{3} + i\right)^6.$

3.13. Извлечение корня из комплексного числа

Задание 3.13. Найти все значения корня из комплексного числа.

3.13.1. $\sqrt[3]{6 + 6i}.$
3.13.2. $\sqrt[3]{-6 - 6i}.$
3.13.3. $\sqrt[3]{6 - 6i}.$
3.13.4. $\sqrt[3]{-6 + 6i}.$
3.13.5. $\sqrt[3]{-7 + 7i}.$
3.13.6. $\sqrt[3]{-7 - 7i}.$

3.13.7. $\sqrt[3]{7+7i}$.

3.13.8. $\sqrt[3]{7-7i}$.

3.13.9. $\sqrt{-8+8i}$.

3.13.10. $\sqrt{-8-8i}$.

3.13.11. $\sqrt{8+8i}$.

3.13.12. $\sqrt{8-8i}$.

3.13.13. $\sqrt[4]{4-4i}$.

3.13.14. $\sqrt[4]{-4-4i}$.

3.13.15. $\sqrt[4]{-4+4i}$.

3.13.16. $\sqrt[4]{4+4i}$.

3.13.17. $\sqrt{9+9i}$.

3.13.18. $\sqrt{-9+9i}$.

3.13.19. $\sqrt{9-9i}$.

3.13.20. $\sqrt{-9-9i}$.

3.13.21. $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$.

3.13.22. $\sqrt{-2-2\sqrt{3}i}$.

3.13.23. $\sqrt{2+2\sqrt{3}i}$.

3.13.24. $\sqrt{-2+2\sqrt{3}i}$.

3.13.25. $\sqrt[4]{3-3i}$.

3.13.26. $\sqrt[4]{-3+3i}$.

3.13.27. $\sqrt[4]{-3-3i}$.

3.13.28. $\sqrt[4]{3+3i}$.

3.13.29. $\sqrt[4]{2-2i}$.

3.13.30. $\sqrt[4]{-2+2i}$.

3.13.31. $\sqrt[4]{2+2i}$.

3.13.32. $\sqrt[4]{-2-2i}$.

3.13.33. $\sqrt[3]{5-5i}$.

3.13.34. $\sqrt[3]{-5-5i}$.

3.13.35. $\sqrt[3]{5+5i}$.

3.13.36. $\sqrt[3]{-5+5i}$.

3.14. Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел

Задание3.14. Решить уравнения на множестве комплексных чисел.

3.14.1. $x^6+1=0$.

3.14.2. $x^6-1=0$.

3.14.3. $x^6+64=0$.

3.14.4. $x^6-64=0$.

3.14.5. $x^5+1=0$.

3.14.6. $x^5-1=0$.

3.14.7. $x^5+32=0$.

3.14.8. $x^5-32=0$.

3.14.9. $x^4+1=0$.

3.14.10. $x^4-1=0$.

3.14.11. $x^4+64=0$.

3.14.12. $x^4-64=0$.

3.14.13. $x^3+1=0$.

3.14.14. $x^3-1=0$.

3.14.15. $x^3+8=0$.

3.14.16. $x^3-8=0$.

3.14.17. $x^7+1=0$.

3.14.18. $x^7-1=0$.

3.14.19. $x^7+128=0$.

3.14.20. $x^7-128=0$.

3.14.21. $x^8+1=0$.

3.14.22. $x^8-1=0$.

3.14.23. $32x^5+1=0$.

3.14.24. $32x^5-1=0$.

3.14.25. $64x^6+1=0$.

3.14.26. $64x^6-1=0$.

3.14.27. $16x^4+1=0$.

3.14.28. $16x^4-1=0$.

3.14.29. $8x^3+1=0$.

3.14.30. $8x^3-1=0$.

3.14.31. $128x^7-1=0$.

3.14.32. $128x^7+1=0$.

3.14.33. $2x^4+1=0$.

3.14.34. $2x^4-1=0$.

3.14.35. $4x^4+1=0$.

3.14.36. $4x^4-1=0$.

3.15. Расстояние между точками на комплексной плоскости

<u>**Задание 3.15.**</u> Найти расстояние между точками.

3.15.1. $z_1 = -1 + 4i, \quad z_2 = 5 - 3i.$

3.15.2. $z_1 = 6 + i, \quad z_2 = -2i.$

3.15.3. $z_1 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -2 - 3i.$

3.15.4. $z_1 = 8 + 2i, \quad z_2 = 5.$

3.15.5. $z_1 = -2 - 7i, \quad z_2 = -3 + 2i.$

3.15.6. $z_1 = -8i, \quad z_2 = 4 + 6i.$

3.15.7. $z_1 = -1, \quad z_2 = -2 - 4i.$

3.15.8. $z_1 = -5 - 3i, \quad z_2 = 2 - 9i.$

3.15.9. $z_1 = -9i, \quad z_2 = 10.$

3.15.10. $z_1 = 2 + 9i, \quad z_2 = -3 - 3i.$

3.15.11. $z_1 = 8 - 6i, \quad z_2 = -4 + 9i.$

3.15.12. $z_1 = 8i, \quad z_2 = -4 - i.$

3.15.13. $z_1 = -5 + 3i, \quad z_2 = 9 + 2i.$

3.15.14. $z_1 = -1 - 3i, \quad z_2 = 4.$

3.15.15. $z_1 = -5 + 4i, \quad z_2 = 6 - 3i.$

3.15.16. $z_1 = -7 - 5i, \quad z_2 = -2i.$

3.15.17. $z_1 = 9 + 7i, \quad z_2 = -6 - i.$

3.15.18. $z_1 = 8 - 3i, \quad z_2 = -3 - 4i.$

3.15.19. $z_1 = \sqrt{3} + 4i, \quad z_2 = \sqrt{3} + 8i.$

3.15.20. $z_1 = -3, \quad z_2 = -4 + 2i.$

3.15.21. $z_1 = -4 + 4i, \quad z_2 = 8 + 3i.$

3.15.22. $z_1 = 2 + 7i, \quad z_2 = -8 - i.$

3.15.24. $z_1 = -1 + \sqrt{2}i, \quad z_2 = 5 - 3\sqrt{2}i.$

3.15.25. $z_1 = -\sqrt{5} - 3i, \quad z_2 = 3\sqrt{5} + 4i.$

3.15.26. $z_1 = 4i, \quad z_2 = -6 + 2i.$

3.15.27. $z_1 = -8 + 6i, \quad z_2 = -1 - 2i.$

3.15.28. $z_1 = 2 + 4i, \quad z_2 = -3 - i.$

3.15.29. $z_1 = -9 - 7i, \quad z_2 = 1 - 2i.$

3.15.30. $z_1 = 4 - 3i, \quad z_2 = 1 - 2i.$

3.15.31. $z_1 = 6 + 2i, \quad z_2 = -1 - 5i.$

3.15.32. $z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = 6 + i.$

3.15.33. $z_1 = -2 + 6i, \quad z_2 = -1 - 4i.$

3.15.34. $z_1 = 8 + 4i, \quad z_2 = -1 - 7i.$

3.15.35. $z_1 = -4, \quad z_2 = -3i.$

3.15.36. $z_1 = -1 + 2i, \quad z_2 = 5 + 8i.$

Часть III. Третий уровень сложности

3.16. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Задание 3.16. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме.

3.16.1. $\frac{5-8i}{(1+9i)(5+7i)}-\frac{8-4i}{1-5i}$.

3.16.2. $\frac{(-2+8i)(3+8i)}{-5-i}+\frac{-2+9i}{1-3i}$.

3.16.3. $\frac{-4-3i}{(1-8i)(5+7i)}-\frac{4-4i}{-1-8i}$.

3.16.4. $\frac{(1-7i)(4+9i)}{2-i}+\frac{3-3i}{-4+6i}$.

3.16.5. $\frac{(4+9i)(-1-7i)}{6-5i}+\frac{-2-5i}{-2-3i}$.

3.16.6. $\frac{-2+8i}{(1-3i)(-7-7i)}-\frac{1-4i}{-3-9i}$.

3.16.7. $\frac{(-6+3i)(-8-4i)}{1-i}+\frac{-4-6i}{3+2i}$.

3.16.8. $\frac{(1-3i)(2-2i)}{5-3i}+\frac{3-7i}{8-2i}$.

3.16.9. $\frac{-9-5i}{(1-4i)(1-7i)}-\frac{2-3i}{-5-6i}$.

3.16.10. $\frac{-2+3i}{(2-5i)(-3+5i)}-\frac{2+i}{3-6i}$.

3.16.11. $\frac{(1-8i)(4+9i)}{-3-i}+\frac{8+7i}{1+5i}$.

3.16.12. $\frac{(-7+6i)(-1-7i)}{-4-5i}+\frac{1-2i}{1-8i}$.

3.16.13. $\frac{9+7i}{(1-4i)(9-7i)}-\frac{2-5i}{9-8i}$.

3.16.14. $\frac{(7-2i)(4-4i)}{-6-i}+\frac{9-2i}{-1+2i}$.

3.16.15. $\frac{(1+4i)(7-5i)}{3-8i}+\frac{-2-7i}{3-2i}$.

3.16.16. $\frac{1+5i}{1-6i}+\frac{-6+7i}{(2+5i)(-6-8i)}$.

3.16.17. $\frac{-2+5i}{3-5i}-\frac{-4-3i}{(9+5i)(-2-8i)}$.

3.16.18. $\frac{-2+5i}{(1-5i)(2-7i)}-\frac{1-3i}{-6-4i}$.

3.16.19. $\frac{(-3-5i)(2+9i)}{5-i}+\frac{7-2i}{-3+5i}$.

3.16.20. $\frac{8-i}{3-8i}+\frac{-2-7i}{(-5+4i)(6-2i)}$.

3.16.21. $\frac{6-9i}{4-5i}-\frac{5+9i}{(1-4i)(-6-7i)}$.

3.16.22. $\frac{1-9i}{(-2-6i)(8+3i)}-\frac{-7+i}{6-9i}$.

3.16.23. $\frac{(2-3i)(-6+5i)}{1-i}+\frac{8-7i}{6+8i}$.

3.16.24. $\frac{7-i}{4+3i}+\frac{1-8i}{(6+5i)(-1+7i)}$.

3.16.25. $\frac{3+7i}{-8-5i}-\frac{(-8+4i)(-1-7i)}{6+2i}$.

3.16.26. $\frac{-1+7i}{(2-4i)(-3-8i)}-\frac{2-3i}{9+4i}$.

3.16.27. $\frac{(1-4i)(3+8i)}{6-i}+\frac{8+3i}{7+5i}$.

3.16.28. $\frac{-5-i}{4+5i}+\frac{(-5+4i)(6-2i)}{5+3i}$.

3.16.29. $\frac{1+6i}{2+8i}-\frac{-8+3i}{(1-i)(-3-4i)}$.

3.16.30. $\frac{-8+5i}{(-2-6i)(8-3i)}-\frac{-7-i}{1-4i}$.

3.16.31. $\frac{8-6i}{6-i}+\frac{(2-4i)(-3+5i)}{-9+7i}$.

3.16.32. $\frac{2-i}{4-7i}+\frac{-3+8i}{(-6+4i)(1-3i)}$.

3.16.33. $\frac{8-6i}{-6-5i}-\frac{5+9i}{(5-3i)(-4-3i)}$.

3.16.34. $\frac{2-6i}{(-3-6i)(4+3i)}-\frac{9+i}{6+5i}$.

3.16.35. $\frac{-2+5i}{-1-5i}+\frac{(-6-5i)(1+7i)}{-8+7i}$.

3.16.36. $\frac{5-i}{-6-7i}+\frac{-5+3i}{(-7+3i)(-4-8i)}$.

3.17. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Задание 3.17. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

3.17.1. $\frac{(3+3i)^4\, i^3}{(2-2i)^2\left(3+\sqrt{3}\, i\right)^4}$.

3.17.2. $\frac{(1-i)^2\, i^5}{(2+2i)^3\left(1+\sqrt{3}\, i\right)}$.

3.17.3. $\frac{(4-4i)^2\, i^7}{\left(2+2\sqrt{3}\, i\right)^3(1+i)}$.

3.17.4. $\frac{(5-5i)^2\, i^5}{(1+i)^3\left(1+\sqrt{3}\, i\right)^2}$.

3.17.5. $\frac{\left(5\sqrt{3}-5i\right)^4 i^3}{\left(3+\sqrt{3}\,i\right)^3\left(2+2\sqrt{3}\,i\right)^2}$.

3.17.6. $\frac{(6-6i)^4\, i^5}{(-7-7i)^3\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3}$.

3.17.7. $\frac{(5+5i)^4\, i^4}{(7-7i)^3\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^3}$.

3.17.8. $\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^4 i^8}{(4-4i)^3(1+i)^3}$.

3.17.9. $\frac{\left(-2-2\sqrt{3}\,i\right)^7 i^4}{(-8-8i)^3\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^3}$.

3.17.10. $\frac{(-1-i)^4\, i^5}{(2-2i)^3\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3}$.

3.17.11. $\frac{\left(8\sqrt{3}-8i\right)^5 i^4}{(7-7i)^5\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^2}$.

3.17.12. $\frac{(6+6i)^3\, i^5}{(9-9i)^2\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^4}$.

3.17.13. $\frac{(1-i)^4\,(5+5i)^5}{i^2\left(6+6\sqrt{3}\,i\right)^4}$.

3.17.14. $\frac{(1+i)^3\,(5-5i)^2}{i^3\left(6+6\sqrt{3}\,i\right)^2}$.

3.17.15. $\frac{(2-2i)^4\,(1-i)^2}{i^6\left(-2+2\sqrt{3}\,i\right)^5}$.

3.17.16. $\frac{(-9+9i)^3\,(-5-5i)^2}{i^8\left(3\sqrt{3}+3i\right)^7}$.

3.17.17. $\frac{(-2+2i)^6\,(-3-3i)^3}{i^9\left(6-6\sqrt{3}\,i\right)^5}$.

3.17.18. $\frac{(-3+3i)^7\,(5\sqrt{3}-5i)^2}{i^4(5+5i)^6}$.

3.17.19. $\frac{(-1+i)^4\,(1-\sqrt{3}\,i)^3}{i^3\left(6+6\sqrt{3}\,i\right)^3}$.

3.17.20. $\frac{(-2+2i)^9\,(1+\sqrt{3}\,i)^2}{i^4(7-7i)^4}$.

3.17.21. $\frac{(-3-3i)^5\,(-1-\sqrt{3}\,i)^3}{i^7\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}}$

3.17.22. $\frac{(1-i)^4\,(1-\sqrt{3}\,i)^5}{i^8\left(\sqrt{3}+3\,i\right)^5}$.

3.17.23. $\frac{(1+i)^8\,(2-2\sqrt{3}\,i)^4}{i^7\left(-\sqrt{3}+3i\right)^5}$.

3.17.24. $\frac{(-1+i)^5\,(2-2\sqrt{3}\,i)^3}{i^5\left(-\sqrt{3}-i\right)^5}$.

3.17.25. $\frac{(3-3i)^4\,(-1-\sqrt{3}\,i)^3}{i^9\left(-\sqrt{3}+3i\right)^4}$.

3.17.26. $\frac{\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^5\,(-\sqrt{3}-i)^3}{i^5(1+i)^4}$.

3.17.27. $\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^7\,(-1-\sqrt{3}\,i)^6}{i^4(-4+4i)^4}$.

3.17.28. $\frac{(3-3i)^4\,(1-\sqrt{3}\,i)^3}{i^7\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^5}$.

3.17.29. $\frac{(-3+3i)^4\,(1-\sqrt{3}\,i)^3}{i^8\left(-\sqrt{3}+i\right)^7}$.

3.17.30. $\frac{(1-i)^4\,(1-\sqrt{3}\,i)^3}{i^9\left(-\sqrt{3}+3i\right)^6}$.

3.17.31. $\frac{(3+3i)^2\,(1+\sqrt{3}\,i)^3}{i^8\left(-\sqrt{3}+i\right)^4}$.

3.17.32. $\frac{(-2+2i)^3\,(1-\sqrt{3}\,i)^5}{i^8\left(-\sqrt{3}-3i\right)^4}$.

3.17.33. $\frac{(1-i)^5\,(-2+2\sqrt{3}\,i)^3}{i^5\left(-\sqrt{3}+i\right)^7}$.

3.17.34. $\frac{(1-i)^4\,(1-\sqrt{3}\,i)^8}{i^9\left(-\sqrt{3}-3\,i\right)^5}$.

3.17.35. $\frac{(-2+2i)^6\,(-\sqrt{3}-i)^4}{i^6\left(-\sqrt{3}+3\,i\right)^5}$.

3.17.36. $\frac{(2-2i)^5\,(1-\sqrt{3}\,i)^4}{i^4\left(-\sqrt{3}+i\right)^7}$.

3.18. Решение биквадратных уравнений на множестве комплексных чисел

__Задание 3.18.__ Решить уравнения на множестве комплексных чисел.

3.18.1. $x^4-4x^2+5=0$.

3.18.2. $x^4+4x^2+8=0$.

3.18.3. $x^4+4x^2+20=0$.

3.18.4. $x^4-4x^2+29=0$.

3.18.5. $x^4+6x^2+10=0$.

3.18.6. $x^4-6x^2+13=0$.

3.18.7. $x^4+6x^2+18=0$.

3.18.8. $x^4+6x^2+25=0$.

3.18.9. $x^4-2x^2+2=0$.

3.18.10. $x^4+2x^2+5=0$.

3.18.11. $x^4-2x^2+10=0$.

3.18.12. $x^4+2x^2+17=0$.

3.18.13. $x^4 + 8x^2 + 17 = 0.$
3.18.14. $x^4 - 8x^2 + 20 = 0.$
3.18.15. $x^4 - 8x^2 + 25 = 0.$
3.18.16. $x^4 + 8x^2 + 32 = 0.$
3.18.17. $x^4 - 10x^2 + 26 = 0.$
3.18.18. $x^4 + 10x^2 + 29 = 0.$
3.18.19. $x^4 - 10x^2 + 34 = 0.$
3.18.20. $x^4 + 10x^2 + 41 = 0.$
3.18.21. $x^4 + 10x^2 + 50 = 0.$
3.18.22. $x^4 + 10x^2 + 61 = 0.$
3.18.23. $x^4 - 4x^2 + 40 = 0.$
3.18.24. $x^4 + 4x^2 + 53 = 0.$
3.18.25. $x^4 + 6x^2 + 34 = 0.$
3.18.26. $x^4 - 6x^2 + 45 = 0.$
3.18.27. $x^4 + 6x^2 + 58 = 0.$
3.18.28. $x^4 + 2x^2 + 26 = 0.$
3.18.29. $x^4 - 2x^2 + 37 = 0.$
3.18.30. $x^4 + 2x^2 + 50 = 0.$
3.18.31. $x^4 + 8x^2 + 41 = 0.$
3.18.32. $x^4 - 8x^2 + 65 = 0.$
3.18.33. $x^4 + 12x^2 + 37 = 0.$
3.18.34. $x^4 - 12x^2 + 40 = 0.$
3.18.35. $x^4 + 12x^2 + 45 = 0.$
3.18.36. $x^4 + 12x^2 + 52 = 0.$

3.19. Построение областей в комплексной плоскости

Задание 3.19. В комплексной плоскости построить область, заданную условиями.

3.19.1. $|z - i| \leq 1.$
3.19.2. $|z + 1| \geq 1, Rez \geq -1.$
3.19.3. $|z + i| \leq 2.$
3.19.4. $|z - 2| \leq 1, Imz \geq 0.$
3.19.5. $|Rez| \leq 3.$
3.19.6. $|Rez| \leq 1, |Imz| \leq 1.$
3.19.7. $|z| \leq 2, Rez \geq 0.$
3.19.8. $|argz| \leq \frac{\pi}{4}.$
3.19.9. $|z + i| \geq 1.$
3.19.10. $|z + 2| \geq 3.$
3.19.11. $|argz| \leq \frac{\pi}{6}.$
3.19.12. $|z - 3| \geq 1, Imz \geq 0.$
3.19.13. $|z| = 5, |argz| \leq \frac{\pi}{3}.$
3.19.14. $|z - 1| \leq 1.$
3.19.15. $|z| \leq 1, Rez \geq 0.$
3.19.16. $|z - 1 - i| \leq 1, Rez \geq 1.$
3.19.17. $|z - 2| \leq 1, Imz \leq 0.$
3.19.18. $|z + 1| \geq 1, Rez \leq -1.$
3.19.19. $|z + 2| \leq 2, Imz \leq 0.$
3.19.20. $|z + i| \geq 1, Rez \geq 0.$
3.19.21. $|z + i| \geq 1, Rez \leq 0.$
3.19.22. $|z - 3| \leq 1, Rez \geq 3.$
3.19.23. $|z + i| \leq 1, Imz \geq -1.$
3.19.24. $|z - 1| \leq 2, Rez \geq 2.$
3.19.25. $|z - 3| \leq 3, Imz \leq 0.$

3.19.26. $|z+1-i| \leq 1, Imz \geq 1.$

3.19.27. $\frac{\pi}{4} \leq argz \leq \frac{\pi}{2}.$

3.19.28. $|z+i| \leq 1, Imz \leq -1.$

3.19.29. $|z-i| \geq 1, Imz \geq 1.$

3.19.30. $|z| \geq 2, \frac{\pi}{2} \leq argz \leq \pi.$

3.19.31. $Rez \geq 1, Imz \geq 1.$

3.19.32. $|z+i| \geq 1, Imz \geq -1.$

3.19.33. $|z-1| \leq 2, Rez \leq 2.$

3.19.34. $|z| = 2, |argz| \leq \frac{\pi}{2}.$

3.19.35. $|z+3| \leq 1, Rez \leq -3.$

3.19.36. $|z+i| \geq 1, Imz \leq -1.$

2.20. Разные задачи повышенной сложности

Задание 2.20.

3.20.1. Вычислить $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}.$

3.20.2. Вычислить $\frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{1023}}.$

3.20.3. Вычислить $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{1526}.$

3.20.4. Вычислить $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{259}.$

3.20.5. Вычислить $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{100}.$

3.20.6. Решить уравнение $z^2 - 6|z| + 8 = 0.$

3.20.7. Решить уравнение $z^2 + 8|z| - 9 = 0.$

3.20.8. Решить уравнение $|z| - 3z = -12i.$

3.20.9. Решить уравнение $z^2 + |z| = 0.$

3.20.10. Решить уравнение $(z+1)^n = z^n.$

3.20.11. Решить уравнение $\left(\frac{2}{z} - 1\right)^n = 1.$

3.20.12. Решить уравнение $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$

3.20.13. Решить уравнение $32z^5 + 16z^4 + 8z^3 + 4z^2 + 2z + 1 = 0.$

3.20.14. Представить в тригонометрической форме число $\cos\frac{\pi}{3} - -isin\,\frac{\pi}{3}.$

3.20.15. Представить в тригонометрической форме число $\cos\frac{\pi}{6} + +isin\,\frac{7\pi}{6}.$

3.20.16. Представить в тригонометрической форме число $\cos\frac{\pi}{3} + +isin\,\frac{\pi}{6}.$

3.20.17. Представить в тригонометрической форме число $4\cos\frac{3\pi}{4} - -\left(5sin\,\frac{3\pi}{4}\right)i.$

3.20.18. Представить в тригонометрической форме число $\cos\frac{2\pi}{3} -$ $-isin\ \frac{2\pi}{3}$.

3.20.19. Представить в тригонометрической форме число $\cos\frac{3\pi}{2} -$ $-isin\ \frac{3\pi}{2}$.

3.20.20. Представить в тригонометрической форме число $\sin\frac{\pi}{5} -$ $-icos\ \frac{\pi}{5}$.

3.20.21. Представить в тригонометрической форме число $1 + \sin\alpha +$ $+icos\ \alpha$.

3.20.22. Представить в тригонометрической форме число $\sin 1^0 +$ $+icos 1^0$.

3.20.23. Вычислить суммы $A = \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cdots +$ $+\cos 99\alpha$, $B = \sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \cdots + \sin 99\alpha$.

3.20.24. Вычислить сумму $A = 1 - \cos 2\alpha + \cos 4\alpha - \cos 6\alpha +$ $\cdots + \cos 40\alpha$.

3.20.25. Вычислить суммы $A = \cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \cdots +$ $+\cos(2n-1)\alpha$, $B = \sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \cdots + \sin(2n -)\alpha$.

3.20.26. Найти наименьшее значение $|z|$, если $z = 2\sin\alpha + icos\ \alpha$.

3.20.27. Найти число с наибольшим модулем среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z + 3 - 4i| = 3$.

3.20.28. Как изменится модуль и аргумент комплексного числа в результате умножения этого числа на $2i$.

3.20.29. Представить число $z = \sqrt{3}e^{\frac{2\pi}{3}i}$ в алгебраической форме.

3.20.30. Вычислить приближённо с точностью до сотых $\cos 5i$.

3.20.31. Изобразить на комплексной плоскости множество чисел z таких, что $|z + 3| \le |z - 7|$.

3.20.32. Изобразить на комплексной плоскости множество чисел z таких, что $\frac{|z+5|}{|z-7|} \le 1$.

3.20.33. Изобразить на комплексной плоскости множество чисел z таких, что $Re\left(\frac{1}{z}\right) \le \frac{1}{6}$.

3.20.34. Изобразить на комплексной плоскости множество чисел z таких, что $-\frac{1}{4} < Im\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) < \frac{1}{2}$.

3.20.35. Изобразить на комплексной плоскости множество чисел z таких, что $-\frac{1}{4} \le Re\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) - Im\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \le -\frac{1}{8}$.

3.20.36. Изобразить на комплексной плоскости множество чисел z таких, что $Im\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2}$.

Раздел 4. Тесты

Вариант 1

Часть 1. Первый уровень сложности.

1. Действительная часть числа $z = -2 + 3i$ равна:

1) 3 2) –3 3) 2 4) –2 5) 0

2. Мнимая часть числа $z = -5i$ равна:

1) i 2) $-i$ 3) 5 4) –5 5) 0

3. Степень i^{12} равна:

1) 1 2) 0 3) i 4) $-i$ 5) –1

4. Комплексное число, сопряжённое числу $z = -3 - 4i$, имеет вид:

1) $\bar{z} = 3 - 4i$ 2) $\bar{z} = 3 + 4i$ 3) $\bar{z} = -4i$
4) $\bar{z} = -3$ 5) $\bar{z} = -3 + 4i$

5. Комплексному числу $z = -2 + 3i$ на комплексной плоскости соответствует точка:

1) $M(-3; 2)$ 2) $M(-2; -3)$ 3) $M(3; -2)$
4) $M(-2; 3i)$ 5) $M(-2; 3)$

6. Модуль комплексного числа $z = -3 + i$ равен:

1) 10 2) $\sqrt{10}$ 3) 4 4) –2 5) 2

7. Аргумент комплексного числа $z = -4 - 4\sqrt{3}i$ равен:

1) $\frac{2\pi}{3}$ 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $-\frac{2\pi}{3}$ 4) $-\frac{5\pi}{6}$ 5) $\frac{5\pi}{6}$

8. Тригонометрическая форма комплексного числа $z = -5i$ имеет вид:

1) $5\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 2) $5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$
3) $5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 4) $5e^{-\frac{\pi}{2}}$ 5) $5e^{\frac{\pi}{2}}$

9. Показательная форма комплексного числа $z = -\sqrt{3} + 3i$ имеет вид:

1) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ 2) $2\sqrt{3}e^{-\frac{2\pi}{3}i}$ 3) $2\sqrt{3}e^{\frac{2\pi}{3}i}$
4) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ 5) $2\sqrt{3}e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

10. Сумма комплексных чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4$ равна:

1) $6 - 3i$ 2) $-2 - 3i$ 3) $2 - 7i$ 4) $-6 - 3i$
5) $-6 + 3i$

11. Разность комплексных чисел $z_1 = 2 + 4i$ и $z_2 = -5 - 3i$ равна:

1) $2 + 7i$ 2) $7 + 7i$ 3) $-3 + i$ 4) $7 + 4i$
5) $-7 - 7i$

12. Произведение комплексных чисел $z_1 = 4 - 2i$ и $z_2 = -1 + i$ равно:

1) $2 - 6i$ 2) $-6 + 6i$ 3) $2 + 6i$ 4) $-2 - 6i$
5) $-2 + 6i$

13. Частное комплексных чисел $z_1 = 2i$ и $z_2 = 3 - 3i$ равно:

1) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$ 2) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$ 3) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$ 4) $-3 + 5i$

5) $-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i$

14. Уравнение $x^2+12=0$ на множестве комплексных чисел имеет корни:

1) корней нет 2) $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{3}i$ 3) $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{3}$

4) $x_{1,2}=\pm 3\sqrt{2}i$ 5) $x_{1,2}=\pm 3\sqrt{2}$

Часть 2. Второй уровень сложности

15. Степень $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{14}$ равна:

1) 16384 2) $-8192+8192\sqrt{3}i$ 3) $8192+8192\sqrt{3}i$

4) $-1+\sqrt{3}i$ 5) 8192

16. Все значения корня $\sqrt[3]{-4}$ равны:

1) $z_1=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}+i\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}}{2}$, $z_2=-\sqrt[3]{4}$, $z_3=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}-i\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}}{2}$

2) $z=\sqrt[3]{4}$

3) $z_1=\sqrt[3]{4}$, $z_2=-\sqrt[3]{4}$

4) $z=-4$

5) $z_1=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}+i\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}}{2}$, $z_2=-\sqrt[3]{4}$, $z_3=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}-i\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}}{2}$

17. Уравнение $x^4-16=0$ на множестве комплексных чисел имеет корни:

1) $x=2$ 2) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm 2i$ 3) $x_{1,2}=\pm 2$

4) $x_{1,2}=\pm 2i$ 5) корней нет

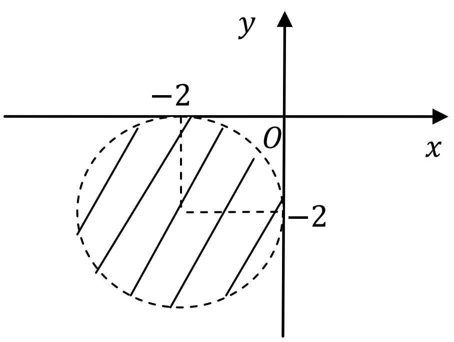
18. Расстояние между точками $z_1=5-2i$ и $z_2=-4i$ равно:

1) $\sqrt{29}$ 2) 4 3) $\sqrt{7}$ 4) $\sqrt{21}$ 5) 29

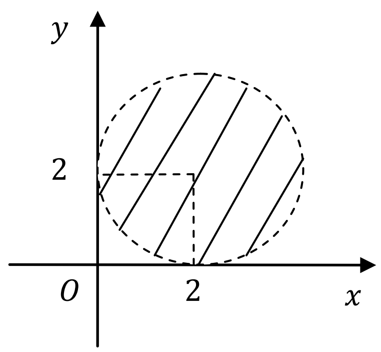
Часть 3. Третий уровень сложности

19. В комплексной плоскости условие $|z+2+2i|\leq 2$ определяет область:

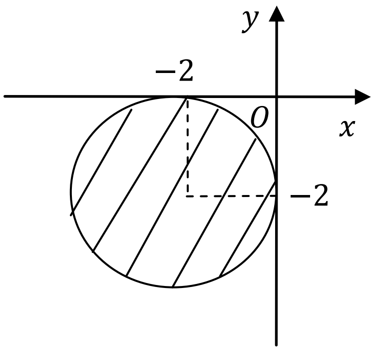
1)



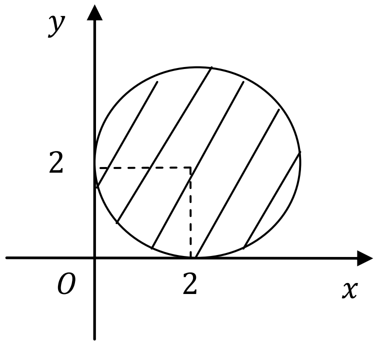
2)



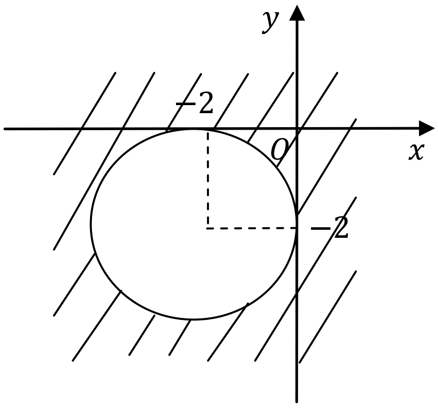
3)



4)



5)



20. Все комплексные числа $z = x + iy,\ \ x, y \in R$, удовлетворяющие условию $z^2 + \bar{z} = 0$, имеют вид:

1) $z_1 = 0, z_2 = -1$ 2) $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

3) $z_1 = 0, z_2 = -1, z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ 4) таких z не существует

5) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Вариант 2

Часть 1. Первый уровень сложности

1. Действительная часть числа $z = 4i$ равна:

1) 4 2) –4 3) 0 4) i 5) 2

2. Мнимая часть числа $z = 1 - 2i$ равна:

1) 1 2) -1 3) 2 4) –2 5) $-i$

3. Степень i^{17} равна:

1) 0 2) $-i$ 3) i 4) -1 5) 1

4. Комплексное число, сопряжённое числу $z = 9 + 2i$, имеет вид:

1) $\bar{z} = 9 - 2i$ 2) $\bar{z} = -9 + 2i$ 3) $\bar{z} = -2i$

4) $\bar{z} = 2i$ 5) $\bar{z} = -9 - 2i$

5. Комплексному числу $z = -4$ на комплексной плоскости соответствует точка:
1) $M(0; -4)$ 2) $M(-4; 0)$ 3) $M(0; 4)$
4) $M(4; 0)$ 5) $M(2; 0)$
6. Модуль комплексного числа $z = -4i$ равен:
1) 16 2) 4 3) 2 4) –4 5) $2\sqrt{2}$
7. Аргумент комплексного числа $z = -3 + 3\sqrt{3}i$ равен:
1) $-\frac{5\pi}{6}$ 2) $\frac{5\pi}{6}$ 3) $-\frac{\pi}{3}$ 4) $-\frac{2\pi}{3}$ 5) $\frac{2\pi}{3}$
8. Тригонометрическая форма комплексного числа $z = -3 - \sqrt{3}i$ имеет вид:
1) $2\sqrt{3}\left(cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ 2) $2\sqrt{3}e^{-\frac{5\pi}{6}}$ 3) $2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}}$
4) $2\sqrt{3}\left(\sin\frac{5\pi}{6} - icos\frac{5\pi}{6}\right)$ 5) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$
9. Показательная форма комплексного числа $z = 4i$ имеет вид:
1) $2e^{-\frac{\pi}{2}i}$ 2) $4e^{\frac{\pi}{2}i}$ 3) $4e^{-\frac{\pi}{2}i}$ 4) $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$
5) $4\left(\cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$
10. Сумма комплексных чисел $z_1 = -5$ и $z_2 = -3 + i$ равна:
1) $2 + i$ 2) $-8 + i$ 3) $-2 - i$ 4) $-3 - 5i$
5) $-3 + 6i$
11. Разность комплексных чисел $z_1 = 4 - 2i$ и $z_2 = 3i$ равна:
1) $12 - 6i$ 2) $4 + i$ 3) $4 - 5i$ 4) $1 - 2i$
5) $-4 + 5i$
12. Произведение комплексных чисел $z_1 = 3 - i$ и $z_2 = -5 + 4i$ равно:
1) $-19 + 17i$ 2) $-15 - 4i$ 3) $-11 + 17i$
4) $17 - 11i$ 5) $-11 - 17i$
13. Частное комплексных чисел $z_1 = 5 - i$ и $z_2 = 3 + 2i$ равно:
1) $\frac{17}{13} + i$ 2) $1 - i$ 3) $1 + i$ 4) $\frac{17}{13} - i$
5) $-1 - i$
14. Уравнение $x^2 + 4x + 13 = 0$ на множестве комплексных чисел имеет корни:
1) $x_{1,2} = -3 \pm i$ 2) $x_1 = 5, x_2 = -1$ 3) $x_{1,2} = 2 \pm 3i$
4) $x_{1,2} = -2 \pm 3i$ 5) корней нет

Часть 2. Второй уровень сложности
15. Степень $\left(-\sqrt{3} + i\right)^{13}$ равна:
1) 8192 2) $-\sqrt{3} + i$ 3) $4096\sqrt{3} - 4096i$
4) 4096 5) $-4096\sqrt{3} + 4096i$
16. Все значения корня $\sqrt[3]{8}$ равны:
1) $z_1 = 2, z_2 = -1 + \sqrt{3}i, z_3 = -1 - \sqrt{3}i$
2) $z_1 = 2, z_2 = 1 + \sqrt{3}i, z_3 = 1 - \sqrt{3}i$
3) $z_1 = 2, z_2 - 2$ 4) $z = 8(\cos 0 + isin\, 0)$ 5) $z = 2$
17. Уравнение $x^4 + 16 = 0$ на множестве комплексных чисел имеет корни:
1) $x_{1,2} = \pm 2$ 2) $x_{1,2} = \pm 2i$ 3) $x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \pm 2i$

4) не имеет корней

5) $x_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, x_3 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, x_4 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

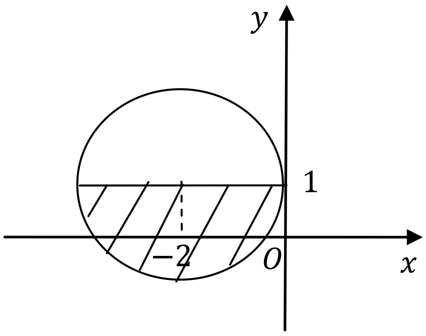
18. Расстояние между точками $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -5 - i$ равно:

1) 3 2) 45 3) $\sqrt{53}$ 4) $3\sqrt{5}$ 5) 53

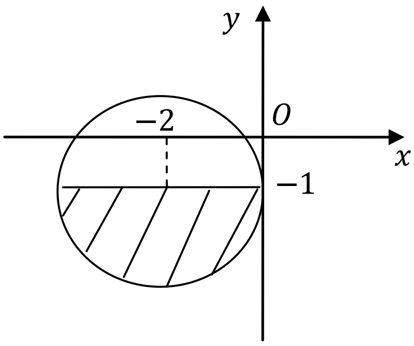
Часть 3. Третий уровень сложности

19. В комплексной плоскости условие $|z + 2 - i| \leq 2$, $Imz \leq 1$ определяет область:

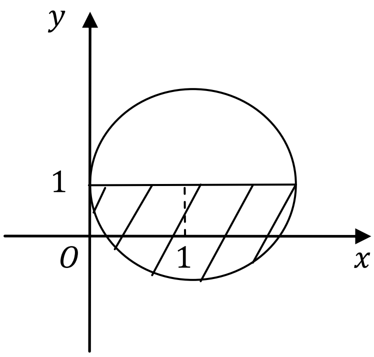
1)



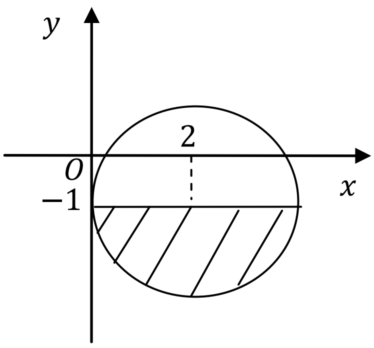
2)



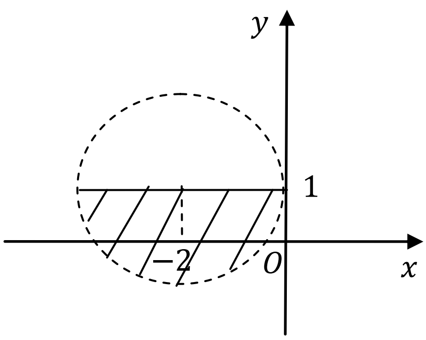
3)



4)



5)



20. Алгебраическая форма записи числа $z = 3e^{\frac{\pi}{6}i}$ имеет вид:

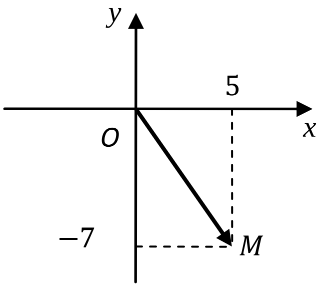
1) $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ 2) $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ 3) $-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

4) $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ 5) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

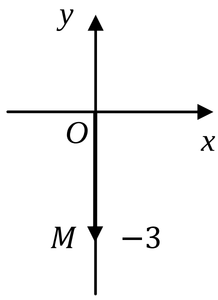
Ответы к заданиям Практикума
Часть I

2.1. 1) $Rez = -2, Imz = 7$; 2) $Rez = -\frac{3}{2}, Imz = -4$; 3) $Rez = 3$, $Imz = 1$; 4) $Rez = 10, Imz = -1$; 5) $Rez = 4, Imz = 0$;
6) $Rez = -1, Imz = 0$; 7) $Rez = 0, Imz = -\frac{1}{2}$; 8) $Rez = 0, Imz = \frac{3}{2}$;
9) $Rez = 0, Imz = \sqrt[3]{5}$; 10) $Rez = 0, Imz = \arccos 1$;
11) $Rez = tg\frac{\pi}{12}, Imz = 0$. **2.2.** 1) $-i$; 2) 1; 3) –1; 4) $-i$; 5) 1; 6) i.
2.3. 1) $6 + 7i$; 2) $2 - 2i$; 3) -3; 4) $3i$; 5) $\cos\frac{\pi}{10} - i\sin\frac{\pi}{10}$.
2.4.

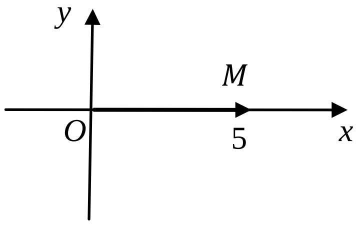
1)



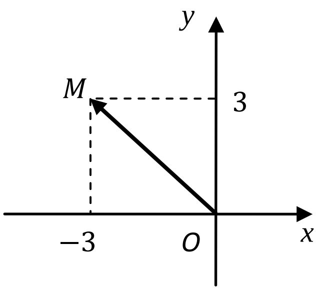
2)



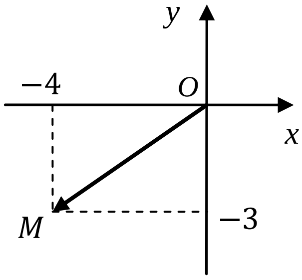
3)



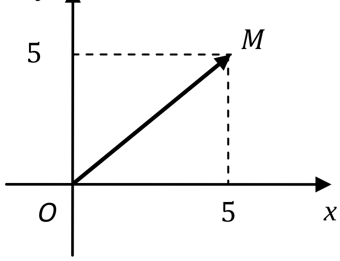
4)



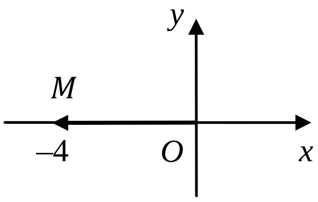
5)



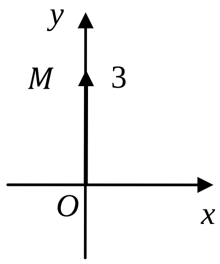
6)



7)



8)



2.5. 1) $r = 5$; 2) $r = 5\sqrt{2}$; 3) $r = \sqrt{29}$; 4) $r = \sqrt{2}$; 5) $r = 5$; 6) $r = 0{,}4$; 7) $r = 2$; 8) $r = 3$; 9) $r = 3$; 10) $r = 1 + arcsin^2\, 2$. **2.6.** 1) $\varphi = -\frac{\pi}{3}$; 2) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$; 4) $\varphi = \frac{\pi}{6}$; 5) $\varphi = 0$; 6) $\varphi = \pi$; 7) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 8) $\varphi = -\frac{\pi}{2}$; 9) $\varphi = \pi - arctg\,\frac{4}{3}$; 10) $\varphi = -\pi + arctg\,\frac{\sqrt{3}}{5}$.

2.7. 1) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; 2) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$; 3) $6\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$; 5) $12\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; 6) $4(\cos 0 + isin\, 0)$; 7) $3(\cos\pi +$ $+ isin\,\pi)$; 8) $1\left(\cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$; 9) $\sqrt{113}\left(\cos\left(arctg\,\frac{8}{7}\right) + isin\left(arctg\,\frac{8}{7}\right)\right)$; 10) $\sqrt{13}\left(\cos\left(\pi -\right.\right.$ $\left.\left.- arctg\,\frac{3}{2}\right) + isin\left(\pi - arctg\,\frac{3}{2}\right)\right)$. **2.8.** 1) $6e^{\frac{\pi}{2}i}$; 2) $e^{\pi i}$; 3) $2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$; 4) $6e^{-\frac{\pi}{2}i}$; 5) $\frac{3}{2}e^{0i}$; 6) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; 7) $5\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$; 8) $2\sqrt{2}e^{-\frac{5\pi}{6}i}$; 9) $\sqrt{10}e^{(arctg3)i}$; 10) $\sqrt{29}e^{\left(arctg\frac{5}{2}-\pi\right)i}$. **2.9.** 1) $z_1 + z_2 = 9 - i$, $z_1 - z_2 = 1 + 3i$, $z_1 z_2 = 22 - 6i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{9}{10} + \frac{7}{10}i$. 2) $z_1 + z_2 = 4 - 6i$, $z_1 - z_2 = -4 + 12i$, $z_1 z_2 = 27 + 12i$, $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{27}{97} + \frac{12}{97}i$; 3) $z_1 + z_2 = 3 + 4i$, $z_1 - z_2 = -9 +$ $+4i$, $z_1 z_2 = -18 + 24i$, $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$. **2.10.** 1) $x_{1,2} = \pm 3i$; 2) $x_{1,2} = -\frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{7}}{8}i$.

Часть II

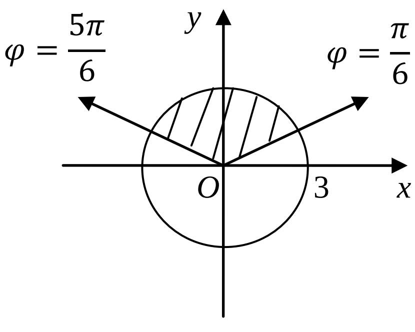
2.11. 1) $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right)$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) +\right.$ $\left. + isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$; 2) $z_1 z_2 = 10\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $z_1 z_2 = 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$. **2.12.** 1) $131\,072 + 131\,072i$;

2) $512-512\sqrt{3}i$. **2.13.** 1) $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$, $z_2=2\left(\cos\frac{3\pi}{5}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$, $z_3=-2$, $z_4=2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)\right)$,
$z_5=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$; 2) $z_1=\sqrt[8]{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right)$,
$z_2=\sqrt[8]{5}\left(\cos\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}\right)$, $z_3=\sqrt[8]{5}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right)$,
$z_4=\sqrt[8]{5}\left(\cos\frac{11\pi}{16}+i\sin\frac{11\pi}{16}\right)$, $z_5=\sqrt[8]{5}\left(\cos\frac{15\pi}{16}+i\sin\frac{15\pi}{16}\right)$,
$z_6=\sqrt[8]{5}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{16}\right)+i\sin\left(-\frac{13\pi}{16}\right)\right)$, $z_7=\sqrt[8]{5}\left(\cos\left(-\frac{9\pi}{16}\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(-\frac{9\pi}{16}\right)\right)$, $z_8=\sqrt[8]{5}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{16}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{16}\right)\right)$;
3) $z_1=\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right)$, $z_2=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{11\pi}{18}+i\sin\frac{11\pi}{18}\right)$,
$z_3=\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{18}\right)+i\sin\left(-\frac{13\pi}{18}\right)\right)$. **2.14.** 1) $z_1=2$, $z_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$, $z_3=2\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$, $z_4=2\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)$,
$z_5=2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)$; 2) $z_1=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}\right)$,
$z_2=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{16}+i\sin\frac{11\pi}{16}\right)$, $z_3=\sqrt[8]{8}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{16}\right)+i\sin\left(-\frac{13\pi}{16}\right)\right)$,
$z_4=\sqrt[8]{8}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{16}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{16}\right)\right)$. **2.15.** 1) 5; 2) 1; 3) $\sqrt{53}$;
4) $\sqrt{7-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$.

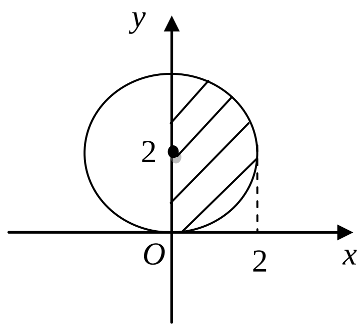
Часть III

2.16. $\frac{261}{205}-\frac{152}{205}i\approx 1{,}273-0{,}741i$. **2.17.** $\frac{2^{18}\sqrt{2}}{5^7}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{3\pi}{4}\right)\approx$ $\approx -3{,}355+3{,}355i$. **2.18.** $x_1=\sqrt{\frac{\sqrt{29}+5}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{29}-5}{2}}i$, $x_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{29}+5}{2}}-$ $-\sqrt{\frac{\sqrt{29}-5}{2}}i$, $x_3=\sqrt{\frac{\sqrt{29}+5}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{29}-5}{2}}i$, $x_4=-\sqrt{\frac{\sqrt{29}+5}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{529}-5}{2}}i$.
2.19.

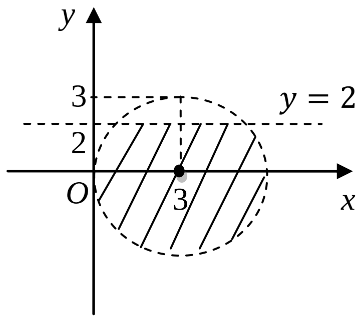
1)



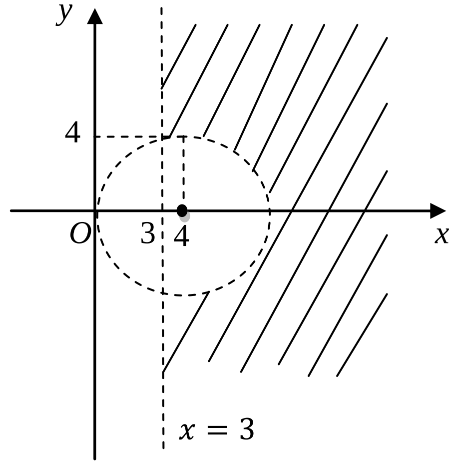
2)



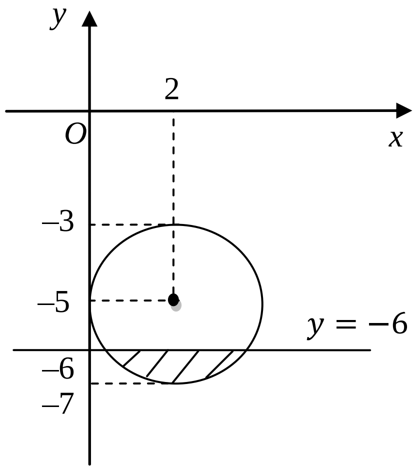
3)



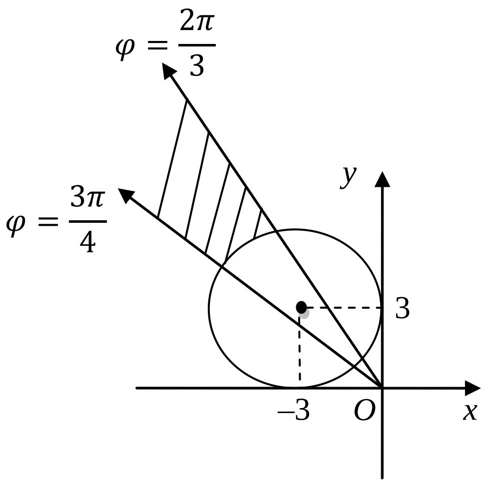
4)



5)



6)



2.20. 1) 0; 2) $\frac{9+\sqrt{161}}{8}i,\ -\frac{9+\sqrt{161}}{8}i$; 3) $3\left(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$; 4) 6π; 5) точки прямой $y=2x+1$.

Ответы к тестам

Вариант 1.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номер ответа	4	4	1	5	5	2	3	2	3	2

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Номер ответа	2	5	3	2	2	1	2	1	3	3

Вариант 2.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номер ответа	3	4	3	1	2	2	5	1	2	2

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Номер ответа	3	3	2	4	5	1	5	3	1	4

Заключение

Комплексные числа являются значимой составляющей математической подготовки студентов, в особенности будущих инженеров, строителей, программистов, экономистов. Решение многих задач математики, физики, механики, электротехники, электроники невозможно без этих чисел. Область применения комплексных чисел многообразна. Однако, существует реальность её дальнейшего расширения, приложения в новых теоретических и прикладных направлениях. Для этого надо понять природу комплексного числа, овладеть на высоком уровне существующим понятийным аппаратом.

Данное пособие направлено на формирование понятия комплексного числа, а также умений и навыков работы с математическим аппаратом этих чисел, что поможет студенту освоить существующие методы, основанные на новых числах, а также разработать новые методы и решить новые профессиональные задачи. Комплексные числа имеют яркую историю развития, что отражено во введении пособия и является хорошей мотивацией для изучения этих чисел. Трёхуровневая структура пособия позволит студенту с любой степенью математической подготовки освоить комплексные числа и побудить к дальнейшему их изучению.

Список литературы

1. Баврин, И. И. Высшая математика: Учеб. для студ. естественно-научных специальностей педагогических вузов / И. И. Баврин – 3-е изд., стереотип. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 616 с.

2. Балк, М. Б. Реальные применения мнимых чисел / М. Б. Балк, Г. Д. Балк, А. А. Полухин. – К.: Рад. шк., 1988. – 255 с.

3. Глазков, Ю. А. Комплексные числа. 9–11 классы / Ю. А. Глазков, И. К. Варшавский, М. Я. Гаиашвили. – М.: Издательство «Экзамен», 2012. – 157, [3] с.

4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред Н. Ш. Кремера. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2013.– 909 с.– Серия: Бакалавр. Углублённый курс.

5. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры: Учебник. 19-е изд., стер. / А. Г. Курош – СПб.: Издательство «Лань», 2013. – 432 с.

6. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.

7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т. I / Н.С. Пискунов – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 416 с.

8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч.1 / Д. Т. Письменный. – 12-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2013.– 288 с.