О числе независимости случайного многодольного гиперграфа

Студент 608 группы Николаев Александр Евгеньевич

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра теории вероятностей

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Шабанов Дмитрий Александрович

2021г.

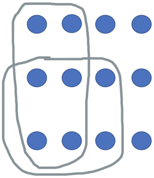
Основные определения

Определение

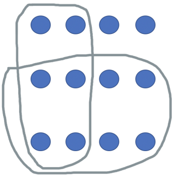
Гиперграф H — *это пара* $H = (V, E)$, *где на конечном множестве вершин* V *определен набор подмножеств (рёбер)* E.

Определение

Гиперграф $H = (V, E)$ *называется* k*-однородным гиперграфом, если каждое его ребро* $e \in E$ *содержит ровно* k *вершин.*



✓

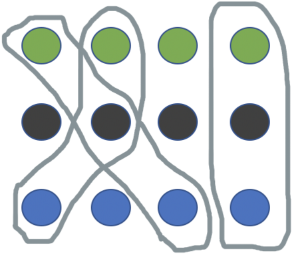


✗

Основные определения

Определение

k-однородный гиперграф $H = (V, E)$ называется k-дольным гипергафом если множество его вершин можно разбить на k множеств таким образом, что в каждом ребре присутствует ровно одна вершина из каждого множества.



Основные определения

Заметим что 2-однородный гиперграф есть классический граф, а 2-однородный 2-дольный гиперграф есть классический двудольный граф.

Определение

Циклом в случайном гиперграфе называют последовательность различных вершин и различных ребер $(v_1, e_1, \ldots, e_t, v_{t+1})$ *такую, что* $e_i \cap e_{i+1} = v_i$ *для всех* $1 \leq i \leq t$ *и* $v_1 = v_{t+1}$.

Определение

Гипердерево - связный гиперграф без циклов.

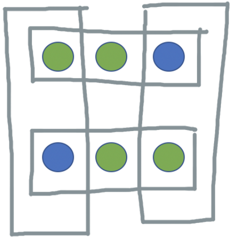
Основные определения

Определение

Множество вершин $W \subset V$ в гиперграфе $H = (V, E)$ называется независимым, если оно не содержит полных ребер внутри себя.

Определение

Числом независимости $\alpha(H)$, гиперграфа H называется максимальный размер независимого множетсва в H.



Основные определения

Биномиальная модель k-однородного случайного (полного или k-дольного) гиперграфа $H(n,k,p)$: каждое возможное k-ребро включается в гиперграф на n вершинах независимо от других с вероятностью p.

- В случае k-дольного гиперграфа мы будем изуать гиперграфы с $p = \frac{cn}{n^k}$
- В случае полного гиперграфа мы будем изуать гиперграфы с $p = \frac{cn}{\binom{n}{k}}$

Обзор известных результатов

Число независимости случайного графа $G(n,p)$ активно изучается, начиная с опубликованных в 70-х годах прошлого века работ Д. Матулы [1], Дж. Гримметта и К. МакДиармида [2], П. Эрдеша и Б. Боллобаша [3] для случая постоянного $p \in (0,1)$. Была доказана сильная концентрация значений $\alpha(G(n,p))$.

Теорема 1

[П. Эрдеш, Б. Боллобаш, [3]]
Пусть $p \in (0,1)$ *фиксировано,* $b = (1-p)^{-1}$. *Для положительного* $\varepsilon > 0$ *положим*

$$\begin{aligned} k_{+\varepsilon} &= \left[2\log_b n - 2\log_b \log_b n + 2\log_b \tfrac{e}{2} + 1 + \varepsilon\right] \\ k_{-\varepsilon} &= \left[2\log_b n - 2\log_b \log_b n + 2\log_b \tfrac{e}{2} + 1 - \varepsilon\right] \end{aligned}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left(k_{-\varepsilon} \leqslant \alpha(G(n,p)) \leqslant k_{+\varepsilon} - 1\right) \to 1 \quad \textit{при } n \to +\infty$$

В недавней работе М. Бойяти, Д. Гамарник и П. Тетали [5], обосновали существование следующего предела для случая p линейно зависящего от n, однако им не удалось получить значение $\gamma(c)$

$$\frac{\alpha(G(n, c/n))}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} \gamma(c) \tag{1}$$

Для $c \leq e$, γ может быть найдена с помощью алгоритма предложенного Р. Карпом и М. Сипсером [6] для поиска максимального паросочетания в случайном графе $G(n, c/n)$. Следствие из их доказательства может быть сформулировано следующим образом

$$\frac{\alpha(G(n, c/n))}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} r + \frac{cr^2}{2}, \tag{2}$$

где $r = r(c)$ является единственным на $(0, 1)$ решением уравнения $r = e^{-cr}$. $\quad$В общем случае значение величины $\gamma(c)$ остается неизвестным.

Новые результаты

Цель настоящей работы обобщение результата (2) на случай многодольного гиперграфа $H_k(n,k,p)$ в разреженном случае

Теорема 2

Для любых фиксированных $k \geq 3$ *и* $c \in (0, \frac{1}{k-1})$, *при* $p = \frac{nc}{n^k}$

$$\frac{\alpha(H_k(n,k,p))}{n} \xrightarrow{P} k\left(r + \frac{c(k-1)}{k} r^k\right), \qquad \text{если } n \to +\infty \tag{3}$$

где $r-$ *это единственное решение уравнения* $r = e^{-cr^{k-1}}$ *из* $(0,1)$.

План доказательства

Шаг 1

Утверждение 1

Для любой функции $p = p(n) \in (0,1)$ *выполнено соотношение*

$$\frac{\alpha(H_k(n,k,p)) - E\alpha(H_k(n,k,p))}{n} \xrightarrow{P} 0 \text{ при } n \to \infty \tag{4}$$

Результат: для обоснования результата достаточно показать, что существует такая константа $\gamma = \gamma(k,c) \in (0,1)$, что при $p = \frac{nc}{n^k}$

$$\frac{E\alpha(H_k(n,k,p))}{n} \longrightarrow \gamma(k,c) \qquad \text{при } n \to +\infty \tag{5}$$

Шаг 2 - структура разреженного многодольного гиперграфа

Лемма 1

Среднее число компонент с циклами ограниченно сверху величиной $2 \ln 2n$

Лемма 2

Компоненты размером от $\frac{4}{k-1} \ln n$ *покрывают не более* $o(n)$ *вершин с вероятностью, стремящейся к 1.*

Как следствие

Лемма 3

Гипердеревья занимают $kn(1 - o(1))$ *вершин с вероятностью, стремящейся к 1.*

Шаг 3 - применение алгоритма Карпа-Сипсера для поиска независимого множества в k-однородном гипердереве $T(V, E)$

- Суть алгоритма в определении типа вершины w_0, w_1 или r.
- Максимальное независимое множество состоит из всех вершин типа r и $\frac{k-1}{k}$ доли вершин типа w_1

Шаг 4 - Апроксимация алгоритма Карпа-Сипсера на случайное гипердерево.

Построим случайное k-однородное гипердерево $T(k, c)$ с корнем в вершине $\widetilde{v}$, последовательно добавляя ребра, причем количество ребер выходящих из корня и любой из далее полученных вершин, будет иметь распределение Пуассона с параметром c.

Утверждение 2

Если $\widetilde{v}-$ корень случайного гипердерева $T(k, c)$, то

$$P(\widetilde{v} \in R) = r, \quad P(\widetilde{v} \in W) = w = 1 - r$$
$$P\left(\widetilde{v} \in W_1\right) = w_1 = cr^k, \quad P\left(\widetilde{v} \in W_0\right) = w_0 = w - w_1$$

где $r \in (0, 1)-$ решение уравнения $r = e^{-cr^{k-1}}$.

Шаг 5 - Аналог алгоритма Карпа-Сипсера для многодольного гиперграфа.
Так как гипердеревья занимают $nk(1 - o(1))$ вершин $H_k(n, k, p)$, то обозначив за $H'_k(n, k, p))$ объединение древесных компонент и изолированных вершин $H_k(n, k, p)$ можно показать следующие

Утверждение 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E\alpha(H_k(n, k, p))}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{E\alpha\left(H'_k(n, k, p)\right)}{n}$$

Утверждение 4

При $c < \frac{1}{k-1}$ выполяется утверждение

$$\gamma(k, c) = \lim_{n\to\infty} \frac{E\alpha(H_k(n, k, p))}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(P(v \in R) + \frac{k-1}{k} P\left(v \in W_1\right) \right)$$

Шаг 6 - Апроксимация случайного гипердерева и многодольного гиперграфа.

Покажем что вероятности вершин быть типа w и r в древесных компонентах многодольного гиперграфа стремятся к вероятности иметь такой же тип в случайном гипердереве $T(k,c)$

Лемма 4

Пусть $k \geqslant 3, c \in (0, \frac{1}{k-1})$ фиксированы. Тогда при $p = \frac{nc}{n^k}$ выполнены следующие соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} P(v \in R) = P(\widetilde{v} \in R) = r, \quad \lim_{n\to\infty} P\left(v \in W_1\right) = P\left(\widetilde{v} \in W_1\right) = w_1$$

где величины r и w_1 определены в утверждении 2.

Шаг 7 - доказательство результата

Собирая вместе полученные результаты устанавливаем истинность теоремы.

Библиография

- Matula D.W., “On the complete subgraphs of a random graph”, In: Combinatory Mathematics and its applications, Chapel Hill, 1970, 356–369.
- Grimmett G., McDiarmid C., “On colouring random graphs”, Math. Proc. Cambr. Phil. Soc., 77 (1975), 313–325.
- Bollobas B., Erdős P., “Cliques in random graphs”, Math. Proc. Cambr. Phil. Soc., 80 (1976), 419–427.
- Wormald N., “Models of random regular graphs”, Surveys in Combinatorics, London Math. Soc. Lec. Notes Ser., 267, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, 239–298.
- Bayati M., Gamarnik D., Tetali P., “Combinatorial approach to the interpolation method and scaling limits in sparse random graphs”, Ann. Probab., 41:6 (2013), 4080–4015.
- Karp R., Sipser M., “Maximum matchings in sparse random graphs”, 22nd Ann. Symp. on Found. Computer Sci., 1981, 364–375.

Спасибо за внимание!