

第六章 混沌与分形

二十世纪跨学科研究有两项重大发现，一个是混沌(chaos)，另一个就是分形(fractal)。大体上可以说，混沌是现象的深化，而分形则是结构的深化。这两项发现使人类对自然规律和社会现象的认识发生了革命性的变革，提高到一个新的阶段。时至今日，分形和混沌已经进入自然科学和社会科学的各个学科，成为它们的共同语言。它们有着广泛的应用，形成新的学科或新的研究领域。例如，混沌物理学、分形物理学以及混沌经济学，等等。

6.1 混沌

6.1.1 混沌概念的产生

19 世纪末和 20 世纪初，已有许多物理学家和数学家在思考非线性动力系统中的一些问题，如法国数学家 Hadamard (1865~1963) 在研究测地流中首次观察到解对初值的敏感；法国数学家、数理论家和哲学家 Poincare (1854—1912) 在研究三体运动的稳定性时，从哲学的层面上讨论了初值敏感性与不可预测性，但均未使用混沌一词。直到半个世纪后，美国 MIT 气象学家 Lorenz (1917 年 5 月 23 日出生) 在《确定的非周期性流》一文中重新独立地揭示了上述现象，并首次使用“混沌”一词，科学地给出了例证。

此后，随着计算机的发展，对混沌现象及理论研究也随之展开，1975 年 Li-Yoke 等第一次以数学语言来表述混沌：即混沌是出于确定映射的似随机。物理学上，混沌通常被认为是确定的、耗散的非线性动力系统中无序的、不可预知的行为。但是，到目前为止，对于混沌仍然还未有令人满意和统一认同的定义。而形成共识的是：混沌不能被简单等同于无序，是一种非周期性的有序。它是在确定性现象和随机性现象之间可由确定方程描述的非确定性现象，或称为确定的随机现象。

近几十年来，混沌成为急剧兴起的一门学科，被誉为继相对论、量子论之后又一重大发现。混沌学是现代科学与现代技术，它是计算机技术相结合的产物。

6.1.2 混沌的特征

- 1、非线性：**物理学上常把许多非线性问题近似为线性方程组求解。然而物质世界中的非线性系统广泛存在，许多物理现象的本质实际上归结于运动的非线性，因此混沌运动的研究就是对非线性系统的处理的研究。
- 2、蝴蝶效应：**“蝴蝶效应”就是“对初值的敏感依赖性”的同义词。最早出现在用计算机进行天气预报的计算上，两组天气模式先是几乎完全一致，然而一旦出现细微差异后，在到达第一个波峰时，两组模式相位明显不同，之后就不再相似，出现非周期的混乱的输出，即两组天气模式分道扬镳。这种现象就叫“蝴蝶效应”，比如，巴西丛林一只蝴蝶偶然扇动翅膀，可能会在美国得克萨斯州掀起一场龙卷风。维纳也曾引用一首民谣来描述这种对初始条件的敏感依赖性：丢了一个钉子，坏了一只蹄铁；坏了一只蹄铁，折了一匹战马；折了一匹战马，伤了一位骑士；伤了一位骑士，输了一场战斗；输了一场战斗，亡了一个帝国。一般来说，产生混沌的体系具有整体的稳定性，而局部是非稳定的（即内随机性），这种内随机性是产生蝴蝶效应的原因所在。
- 3、分维性：**维数是空间和客体的重要几何参量，比如状态空间的维数反映了描述该空间中运动所需的不多不少的变量个数，吸引子的维数则说明了刻画该吸引子所必需的信息量。简单吸引子，如固定点、有限环等所测得的维数通常为整数，但对于描述混沌系统状态的混沌吸引子（即奇怪吸引子）来说，由于是分形结构，不存在特征尺度，这样，20 世纪 70 年代后发展起来的分形理论、分维概念被相继引入，所讨论的奇怪吸引子通常就为分数维。此外，分数维还被认为描述动力系统时间演化所需独立变量的下限。
- 4、长期预测的不可能性：**在牛顿力学中，只要确定了运动微分方程及初始条件，就可以求出以后任一时刻质点的位置、速度和加速度，即能预测运动的状态。但对于混沌，情形就大不相同。由于混沌所具有的轨道的不稳定性及对初值的敏感性特征，因此不可能对系统未来的运动状态作出估算，亦即长期预测是不可能的。

6.1.3 Logistic 映射方程

Logistic 映射方程又称虫口模型，它是研究昆虫类生物种群繁殖性态的非线性差分方程。也是研究混沌现象最具代表性的方程。

一般来说, 昆虫种群总数在相邻两年间具有函数关系 $x_{\text{第二年}} = f(x_{\text{第一年}})$, 通过不断地迭代, 就可以知道种群在若干年后的长期变化趋势。

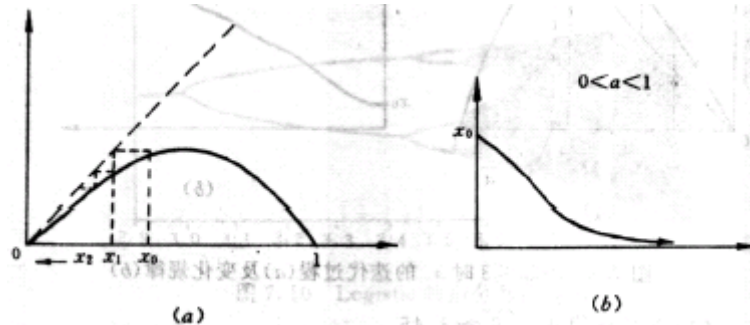
最简单的是线性函数 $y = ax$, 如果 $a > 1$, 则迭代方程 $x_{n+1} = ax_n, n = 1, 2, \dots$ 可知种群诬陷增长。当 $a = 1$ 时, 种群始终保持常数。当 $a < 1$, 将导致种群灭绝。显然三种结局都不符合实际情况。

因此在建模时需引入合理的限制条件或参数, 假定种群数由于事物和竞争等原因而有某一限定值 (取为 1), 如果种群数 $x < 1$, 则由于有较好的生存繁殖条件, 使种群数不断增加。当 $x > 1$ 时, 则种群数由于食物不足和过于拥挤而逐渐减少。于是虫口方程可以表示为

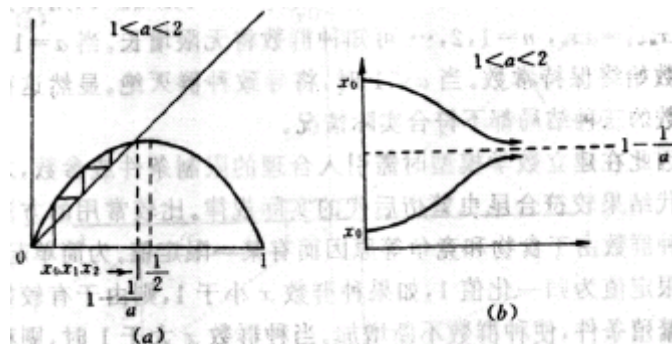
$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), 0 < x_n < 1 \quad (6.1.1)$$

研究表明, 当 a 取不同的数值时, x_n 演变的规律将迥然不同。

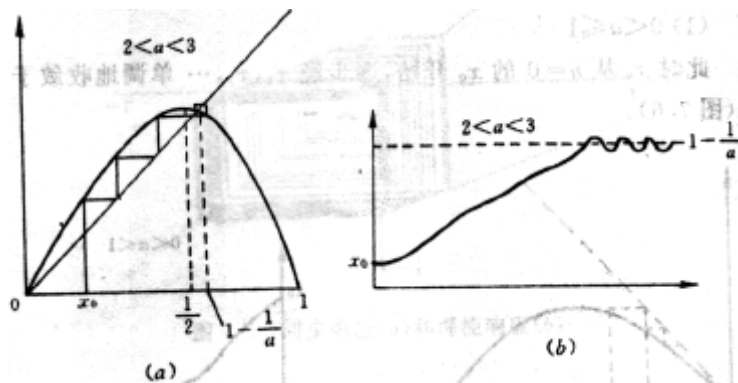
(1) $0 < a \leq 1$: 序列 x_n 单调地收敛于 0, 其迭代过程 and 变化过程如图 6.1.1 所示。



(2) $1 < a \leq 2$: x_n 单调地增加至稳定点 $1 - (1/a)$, 其迭代过程 and 变化过程如图 6.1.2 所示。



(3) $2 < a \leq 3$: x_n 的值围绕 $1 - (1/a)$ 附近振动, 最后衰减至 $1 - (1/a)$, 其迭代 and 变化过程如图 6.1.3 所示。



(4) $3 < a \leq 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$: 例如 $a = 3.2$, 此时 $1 - (1/a) = 0.6875$ 并不是最后收敛到的稳定点了。任取的初值 x_0 的轨道反复地只取两个值 0.5130 和 0.7995, 形成周期为 2 的循环, 其迭代 and 变化过程如图 6.1.4 所示。

(5) $a > 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$: 则取两个稳定值地周期环也变得不稳定了, 取而代之地是轨道将反复地接连取四个值。即随着 a 从 3.45 左右向 $a_\infty = 3.56994\dots$ 增大, 会出现 4, 8, 16, \dots , 2^n 个倍周期分岔现象直至进入稳定点连成一片的混沌区, 其迭代 and 变化过程如图 6.1.5 所示。

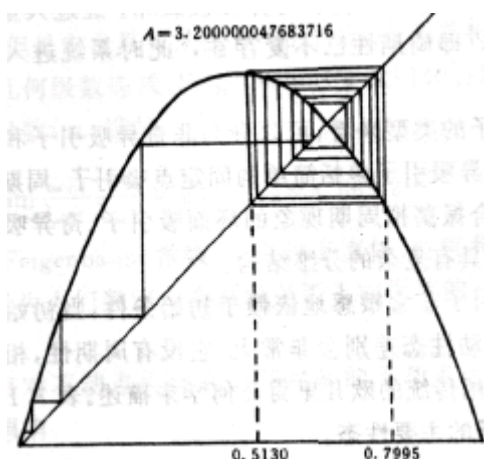
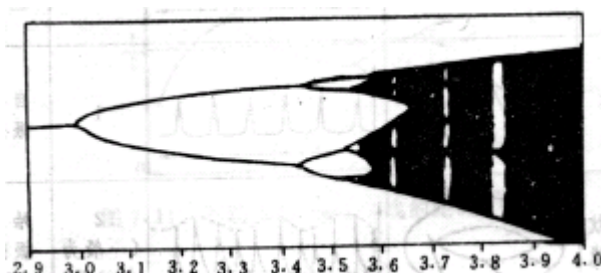
图 6.14 $a=3.2$ 时出现的两个稳定点

图 6.15 Logistic 映射分岔混沌图

由上可知，确定性的差分方程可以呈现出强烈依赖于初始条件的非周期性的混沌动力学过程。分岔是非线性方程所表征的动力学系统所特有的现象。从吸引子的类型看，可以分维非奇异吸引子和奇异吸引子两类。非奇异吸引子包括简单的固定点吸引子、周期性为的极限环和描述复合振荡拟周期现象的环面吸引子。奇异吸引子又称混沌吸引子，它具有复杂的分维结构。

这里应当提出的是，尽管进入混沌后解的性态失去规律性可预测性，但是它也具有某些有趣的特征。混沌学的奠基人、美国物理学家费根鲍姆（Feigenbaum）发现，使周期加倍的那些参数 $\{\lambda_n\}$ 满足

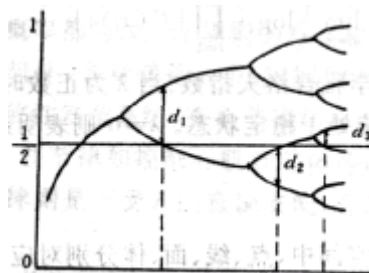
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{m+1} - \lambda_m}{\lambda_m - \lambda_{m-1}} = \frac{1}{\delta}, \quad \delta = 4.6692... \text{ 被称为 Feigenbaum 常数, 它在许多流体、电气和}$$

激光试验中被观察到，成为人们判定一个系统是否走向混沌的一个重要判据。

另外，当每对不动点失稳变成两对新的不动点时，其与 $x = 1/2$ 线的距离具有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d_m}{d_{m-1}} = -a, \quad a = 2.5029... \text{ 被称为另一个 Feigenbaum 常数, 如图 6.6 所示, 其中}$$

负号表示两者分立于直线 $x=1/2$ 的两侧。

图 6.6 不动点与 $x=1/2$ 线的距离

6.1.4 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数（简称李氏指数）是用来衡量复杂的非线性动力学系统性态对初始条件改变的灵敏度，或者说它表示两条无限小分开轨迹间的相对距离在单位时间内平均指数增长因子。

设轨迹点为 x_n 时的误差为 dx_n ，则在 x_{n+1} 时可写出

$$x_{n+1} + dx_{n+1} = f(x_{n+1} + dx_{n+1}) \approx f(x_n) + dx_{n+1} \cdot f'(x_n) \quad (6.1.2)$$

于是，在 Logistic 映射方程 $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$, $0 < x_n < 1$ 情况下，有

$$dx_{n+1} = dx_n f'(x_n) = dx_n \cdot a(1 - 2x_n) \quad (6.1.3)$$

若给定初始误差 dx_0 ，则由由迭代式 (6.1.3) 可知 x_n 的误差大小为

$$|dx_n| = dx_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} |a(1-2x_i)| \quad (6.1.4)$$

当不确定性按指数速度增长，则上式一定与下式一致

$$dx_n = dx_0 \cdot 2^{\lambda n} \quad (6.1.5)$$

或者

$$dx_n = dx_0 \cdot e^{\lambda n} \quad (6.1.6)$$

由式 (6.1.4) 和式 (6.1.5) 可得：

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \left(\prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)| \right) \quad (6.1.7)$$

如果用式 (6.1.4) 和式 (6.1.6)，则有

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)| \right) \quad (6.1.8)$$

这里 λ 均被称为 Lyapunov 指数。当 λ 为正数时意味着混沌存在；当 λ 为负数时表示系统处于稳定状态。 $\lambda = 0$ 则表明系统有周期运动。

如何区别不同吸引子的发展，Lyapunov 指数 (λ) 各给出了如下判据：

(1) 在一维情况下，有稳定的不动点： $\lambda < 0$ 。

(2) 在二维情况下，A. 稳定不动点： $(\lambda_1, \lambda_2) = (-, -)$ ；B. 极限环： $(\lambda_1, \lambda_2) = (-, 0)$ ，此时也可能有一种“病态”情况，即不存在极限环，而是一条有不动点组成的直线。

(3) 在三维情况下，A. 稳定焦点（不动点）： $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, -)$ ；B. 稳定极限环： $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, 0)$ ；C. 稳定环面： $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, 0, 0)$ 。

以上情形，若有一个 Lyapunov 指数变为正，就会出现混沌，例如： $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, 0)$ ，或 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, 0)$ 为一个不稳定环面（即非吸引子），若吸引子有 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, -)$ ，亦即一个混沌吸引子。

6.2 混沌应用

随着混沌理论的迅速发展，混沌在很多领域得到应用。下面介绍混沌在优化计算、反演计算和通信保密等方面中的应用。

6.2.1 优化计算

混沌是存在于非线性系统的一种较为普遍的现象，混沌并不是一片混乱，而它有着遍历性、随机性、“规律性”等特点，因此在优化计算中，利用混沌变量进行搜索，无疑会比随机性搜索更具优越性。这里介绍的优化计算就是用类似载波的方法将混沌状态引入到优化变量中，并把混沌运动的遍历范围“放大”到优化变量的取值范围，然后进行混沌变量搜索。

首先选择用于载波的混沌变量。选用式 (6.2.1) 所示的 Logistic 映射，其中 μ 是控制变量，取 $\mu = 4$ 。设 $0 \leq x_0 \leq 1, n = 0, 1, 2, \dots$ 不难证明此时系统处于混沌状态。利用混沌对初值的敏感的特点，赋给式 (6.2.1) i 微小差异的初值即可得到 i 个混沌变量。

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad (6.2.1)$$

设一类连续对象的优化问题为

$$\min f(x_i), i = 1, \dots, n, s.t. a_i \leq x_i \leq b_i \quad (6.2.2)$$

混沌优化的基本步骤如下:

(1) 算法初始化: 置 $k = 1, k' = 1$; 对式 (6.2.1) 中的 x_n 分别赋给 i 个微小差异的初值, 则可得到 i 个轨道不同的混沌变量 $x_{i,n+1}$ 。

(2) 通过式 (6.2.3) 用载波的方法将选定的 i 个混沌变量 $x_{i,n+1}$ 分别引入到 (6.2.2) 的 i 个优化变量中, 使其变成混沌变量 $x'_{i,n+1}$, 并将混沌变量的变化范围“放大”到相应的优化变量的取值范围。

$$x'_{i,n+1} = c_i + d_i x_{i,n+1} \quad (6.2.3)$$

其中 c_i, d_i 为常数, 相当于“放大”倍数,

(3) 用混沌变量进行迭代搜索。

令 $x_i(k) = x'_{i,n+1}$, 计算相应的性能指标 $f_i(k)$ 。令 $x_i^* = x_i(0), f^* = f(0)$ 。

If $f_i^*(k) \leq f^*$ then $f^* = f_i(k), x_i^* = x_i(k)$ Else If $f_i^*(k) > f^*$ then 放弃 $x_i(k)$ 。 $k := k + 1$

(4) 如果经过 (3) 的若干步搜索 f^* 都保持不变, 则按式 (6.2.4) 进行第二次载波。

$$x''_{i,n+1} = x_i^* + \alpha_i x_{i,n+1} \quad (6.2.4)$$

其中 $\alpha_i x_{i,n+1}$ 为遍历区间很小的混沌变量, α_i 为调节常数, 可以小于 1。 x_i^* 为当前最优解。反之, 返回 (3)。

(5) 用二次载波后的混沌变量继续迭代搜索。

令 $x_i(k') = x''_{i,n+1}$, 计算相应的性能指标 $f_i(k')$ 。

If $f_i^*(k') \leq f^*$ then $f^* = f_i(k'), x_i^* = x_i(k')$ Else If $f_i^*(k') > f^*$ then 放弃 $x_i(k')$ 。 $k' := k' + 1$

(6) 如果满足终止判据则终止搜索, 输出最优解 x_i^*, f^* 。反之, 返回 (5)。

虽然混沌运动在一定范围具有遍历性, 但在最优解的邻域内, 搜索时间可能很长。因此在一次载波得到近似最优解时, 再用二次载波使遍历范围变小, 则可以进行细搜索, 这样就能很快求得全局最优解。

6.2.2 反演计算

根据已知物体的形体和性质, 利用物质机理和定理等规律进行计算, 得到反应物体的形体和性质的有关参量, 这一过程叫做正演(计算)。比如, 根据已知物体的形状和物理性质等参数, 利用物理学定理, 计算各种场(重力场、磁场、电场、声场等)的分布, 这一过程就是正演(计算)。反之, 利用观察或测量的数据资料来推算物体的形状和物性参数的过程, 则叫反演(计算)。比如, 在地面用磁力仪探测地下一磁体, 用采集到的磁异常数据, 就可以推算地下磁体的形状和磁导率值, 这一计算过程就叫反演或反演计算。特别是在无损检测(探伤)、生物医学工程、地球物理等领域中, 反演计算尤为重要。

现实中, 大多数反演问题可以归结为如下非线性函数的求解过程:

$$b = f(x) \quad (6.2.5)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 为物体的几何参量和物性参量; $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ 为 m 个测量点的测量值。

其求解方法, 主要有最小二乘法(包括阻尼最小二乘法)、斜量方法(包括共扼斜量法和变尺度法)和直接方法(包括单纯形法和共扼方向法)等^[1]。

这里, 将式 (6.2.5) 作线性化处理, 可得到如下线性方程组:

$$Ax = b \quad (A \in R^{m \times n}, b \in R^m) \quad (6.2.6)$$

关于式 (6.2.6) 方程组的求解, 常用方法有很多。比如在位场反演中, 正则化方法最受推崇^[2], 然而正则化方法在应用中也有其不足, 特别是正则化参数须凭经验试算来确定, 因为 $\alpha \in (0, +\infty)$, 其范围之大, 最佳正则化参数 α 不易得到, 因此很难得到理想的最优解。在 CT (Computer Tomography, 层析成像) 中, 一般采用矩阵

反演法（包括最小范数法、奇异值分解法和共扼方向法等）和迭代重建法（ART、SIRT 等），特别是当 A 为大型稀疏、超定 ($m > n$) 且欠定 ($\text{rank}(A) < n$) 时，如下常用的 ART（代数重建技术）和 SIRT（联立迭代重建技术）之类的迭代算式比较实用。

$$\text{ART: } x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \lambda \frac{\Delta y_i^{(k)}}{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2} a_{ij} \quad (6.2.7)$$

$$\text{SIRT: } x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \frac{\lambda}{M_j} \sum_{i=1}^m \frac{\Delta y_i^{(k)}}{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2} a_{ij} \quad (6.2.8)$$

式中， $\Delta y_i^{(k)}$ 表示测量值与第 k 次迭代计算值之差， M_j 为实际测量数据与第 j 个求解值有关的数目。 λ 为修正量的加权因子，主要凭经验选取。

但在实际应用研究中发现：当 $\lambda < \lambda_0$ ，即在某个范围内，分辨率不高；当 $\lambda \geq \lambda_0$ 以后，方差突然爆发，其解估计主要反应误差，即出现“相变”混沌状态。

现将非线性方程（6.2.5）用迭代法求解， k 为迭代次数， λ_k 为第 k 次迭代时的阻尼系数， Δm_k 为第 k 次迭代时的参量修正增值， μ_k 为松弛因子。

取 $k = 1, 2, 3, \dots$ 依次增大，不难构造出如下迭代格式：

$$\Delta m_k = (A_{k-1}^T A_{k-1} + \lambda_k I)^{-1} A_{k-1} (b - b_k) \quad (6.2.9)$$

$$X_k = X_{k-1} + \mu_k \Delta m_k \quad (6.2.10)$$

其中雅可比矩阵 A 的元素 $a_{ij} = \partial f(x_i) / \partial x_j$ 。

根据式（6.2.10），可以将上述非线性反演的系统方程写成：

$$\frac{dX_k}{dk} = \Delta m_k \frac{d\mu_k}{dk} + \mu_k \frac{d(\Delta m_k)}{dk} \quad (6.2.11)$$

而式（6.2.10）本身就是该系统的 Poincare 映射，也即为一个非线性动力系统。

在反演过程中，当 k 迭代到多少时能取得最优解呢？即可采用 Lyapunov 指数来控制，定义如下

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\|e\| \rightarrow 0} \frac{1}{k} \lg \frac{\|b - b_k\|}{\|e\|} \quad (6.2.12)$$

其中 e 为数据误差向量。

根据 Lyapunov 指数性质，当式（6.2.12）中的 L 由负数值快变成正数值时，立即停止迭代，此时求得的解就是最优解。否则当 L 为正数值时，系统即处于混沌状态，解估计反应的是增大的方差。

研究表明，非线性反演远比线性反演遵循与混沌理论相似的一些规律，如果不考虑计算成本，非线性反演可以获得分辨率更高的反演结果。它在地球物理反演中具有更好的应用前景。非线性反演之所以具有这个优点，是因为对非线性反问题解空间的性质、状态好一些。打个比方说，线性反演的解空间好像在悬崖瀑布上，精确解位于瀑布的顶端，这里若不站得稳点，一掉下来就会被方差淹没；而非线性反演的解空间有许多礁石、湍流、漩涡，但没有悬崖瀑布，只要沿着正确的搜索路线，仍然可以闯过去，达到目的地。

6.2.3 保密通信

由于混沌系统具有对初始条件和参数极端敏感的特性，当初始条件或参数有微小的变化时，就能产生

完全不相关的信号来。同时，由于有限的混沌序列长度不可能导出系统的初始条件，因而可以将其用于保密通信中。

混沌理论在 80 年代后期得到保密界的重视，自英国数学家 R. Matthews 在 1989 年提出混沌加密算法以来，出现多种混沌序列密码体制。根据现代密码学中的分组加密和序列加密的分类，混沌加密可以分为混沌逆系统方法和混沌伪随机序列方法两类。

(1) 混沌逆系统方法

$$\text{加密} \quad y = E(u, X)$$

$$\text{解密} \quad u_1 = F(y, Z)$$

式中， u 为原始信号， y 为加密信号， u_1 为解密信号， X 与 Z 可以是高维向量。为了扰乱原始信号 u ，加密系统 E 应当工作在充分混沌的区间。

为了方便实现，可以采用如下差分方程来进行，即

$$y(t) = E(u(t), y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-n))$$

$$u_1(t) = F(y(t), y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-n))$$

例如，当 $n=1$ 时，用 Logistic 混沌迭代方程 $x(t+1) = ax(t)(1-x(t))$ 可以构造一个直接逆混沌加密系统。

如果解密信号 u_1 与原始信号 u 是渐进同步的，即当 $t \rightarrow \infty$ 时满足 $|u(t) - u_1(t)| \rightarrow 0$ ，则称这样的系统为渐进逆系统。在这种在混沌系统输出信号 $y(t)$ 的作用下，两个混沌系统 E 与 F 的状态达到一致的现象成为自同步，它提供了跟踪和恢复混沌系统状态的有效手段。

为此，Feldmann 等人提出了如下一个保密混沌系统，

$$\text{保密形式为: } \begin{cases} \dot{X} = AX + bf(X, u) \\ y = f(X, u) + c^T X \end{cases}, \text{ 其解密形式为: } \begin{cases} \dot{X}_1 = AX_1 + b(y - c^T X_1) \\ u_1 = f^{-1}(X_1, y - c^T X_1) \end{cases}$$

其中 $X \in R^n$ ($n > 0$) 为加密系统状态； $A \in R^{n \times n}$, $b \in R$, $c \in R^n$ ，均为混沌参数； f 为一个可逆的非线性映射； $X_1 \in R^n$ 为解密系统状态。

(2) 混沌伪随机序列方法

混沌伪随机序列密码的基本问题在于寻找能具有较好密码学特性的混沌序列。R. Matthews 分析了用 Logistic 混沌映射作为序列密码产生器的实际问题。为了防止该混沌信号中稳定周期窗的出现以及加大密钥空间，他提出用如下迭代混沌系统

$$g(x) = (b+1)(1+1/b)x(1-x)^b$$

来生成密码序列。其中，若计算在 $D=8$ 位十进制数的表示下进行，而且能取到的最小正数为 10^{-38} 时，参数 b 的大小可取在范围 $1 \leq b \leq 4$ 。当将 x 的最低两位十进制数对 25 取模用作密码序列，这类密码序列在穷举攻击下的密钥熵为 $H(k) = 6.6(D-2)$ ，因此，通过增加混沌系统的实现精度就可以提高它的保密性能。

混沌序列除了用作保密通信外，还可以构造出具有良好随机性和汉明相关性的跳频码，使得跟踪和干扰跳频发射台难度增大。(有关混沌保密通信可参阅：关新平等著《混沌控制及其在保密通信中的应用》，北京：国防工业出版社，2002)

6.3 混沌神经网络

6.3.1 网络模型

利用混沌动力学中“简单的规则则可能产生复杂动力学”这一重要特征，在简单器件构成的系统中用包含着比较简单的学习规则的混沌吸引子来表现人的知识和经验，并以此来处理一些复杂动力学问题，从而实现具有适应性的信息处理功能则是完全可能的。混沌已渗透于智能信息处理之中，比如，1982 年，JH Hopfield 提出了 Hopfield 神经网络模型，使人工神经网络的研究有了突破性的进展。他把神经网络看作非线性动力学系统，引进了 Lyapunov 函数，使网络的收敛性和稳定性研究有了明确判据。Hopfield 运用这种全连模型成功地解决了旅行商 (TSP) 问题。这一成果使人工神经网络的研究又活跃起来，并取得了一大批引人注目的成果。

通常，构造混沌神经网络的方法主要有以下两种：(1) 构造混沌神经元模型，并基于该模型构造混沌神经网络。(2) 利用已有的神经网络模型研究它们发生混沌的条件。

目前,混沌神经网络模型主要有 Aihara 依据动物实验提出的模型和 Inoue 依据 Logistic 映象提出的模型。

1、Aihara 的混沌神经网络模型

1990 年, Aihara 等 (Aihara K et al. Chaotic neural networks[J]. Phys Lett, 1990, 144(6,7): 334~340.) 在前人推导和实验的基础上, 给出了一个混沌神经元模型, 考虑到了神经元本身的非线性动力学的混沌行为。这个模型脱离了一般的传统思路, 但可得到包括其它更一般的结果。

$$x_i(t+1) = u \left[\sum_{j=1}^M \sum_{r=0}^t (w_{ij}^{(r)} x_i(t-r)) - \theta_i \right]$$

其中, $x_i(t+1)$ 是在离散时刻 $t+1$ 时第 i 个神经元的输出, x 取 1 (激活) 或 0 (抑止)。 u 的定义如下:

$$u(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}$$

$w_{ij}^r (r \neq j)$ 是第 j 个神经元激活 $r+1$ 个时间单位后影响第 i 个神经元的连接权, 而 w_{ji}^r 是第 i 个神经元激活 $r+1$ 个时间单位后保持的对自己的记忆系数, θ 是第 i 个神经元的权或抑止的阈值。

用混沌神经元构造混沌神经网络时, 要考虑几个不同于普通神经网络的方面, 类似 Hopfield 结构的来自内部神经元的反馈项和类似 BP 算法的外部输入项, 以及不应性响应和阈值, 从而有

$$x_i(t+1) = u \left[\sum_{j=1}^M w_{ij} k^r h_j(x_i(t-r)) + \sum_{j=1}^N v_{ij} \sum_{i=0}^t k^r I_j(t-r) - \alpha \sum_{r=0}^t k^r g_i(t-r) - \theta_i \right]$$

其中, M 为混沌元的个数, N 是外部输入数, w_{ij} 是第 j 个混沌神经元到第 i 个混沌神经元的连接权, v_{ij} 是第 j 个外部输入到第 i 个混沌神经元的连接权, f_i 是第 i 个混沌神经元的连续输出函数, h_j 是第 j 个混沌神经元的内部反馈函数, $I_s(t-r)$ 是离散时刻 $t-r$ 第 j 个外部输出强度, g_i 是第 i 个混沌神经元的不应性函数。

(注: 不应性即细胞兴奋后不能立即再产生第二次兴奋的特征。其表现为可逆的、短暂的兴奋性缺失或极度下降。)

2、Inoue 等的混沌神经网络模型

1991 年 Inoue 等提出用耦合的混沌振荡子作为单个神经元, 构造混沌神经网络模型的方法 (Inoue M, Nagayoshi A. A chaos neuro-computer[J]. Phys Lett(A), 1991, 158(8): 373~376)。耦合的混沌振荡子的同步和异步分别对应于神经元的激活和抑制两个状态。虽然混沌是由简单的确定性规则产生的, 但它包含规则性和不规则性两个方面。耦合的混沌振荡子的同步来自规则性, 而不规则性可产生搜索能力, 有可能遍历所有解空间, 找到全局最优解。其模拟态运动方程为 (Inoue M, Nagayoshi A. Solving an optimization problem with a chaos neural network[J]. Program Phys, 1992, 88(4): 769~773)

$$\begin{bmatrix} x_i(n+1) \\ y_i(n+1) \end{bmatrix} = \frac{1}{1+2D_i(n)} \begin{bmatrix} 1+D_i(n) & D_i(n) \\ D_i(n) & 1+D_i(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[x_i(n)] \\ g[y_i(n)] \end{bmatrix}$$

$$u \leq x_i(n) < 1, u \leq y_i(n) < 1; u_i(n) = 1/[1 + \exp(1 - z_i/z_0)], z_i \equiv \varepsilon/\nabla_i(n) - 1。$$

其中 D_i 是时刻 n 第 i 个神经元的耦合系数, $x_i(n)$ 和 $y_i(n)$ 分别是时刻 n 第 i 个神经元第一和第二振荡子变量。

该运动方程也解答了 TSP 问题, 结果表明, 短路径比长路径更稳定。需要进一步研究的是混沌神经元计算的本质及神经元模拟特性和网络亚稳态间的关系。

6.3.2 混沌神经网络展望

混沌是一种现象和行为, 神经网络是一种特定计算模式的拓扑结构, 它们各自有自身的特征, 但也有共同的规律, 即非线性动力学特性。尽管混沌神经网络的研究是近几年的事, 工作刚起步, 理论远不成熟。然而, 它是建立在人脑存在混沌现象这个前提之上的, 因而它也就有了生理学基础和生命力。它在联想记忆、组合优化等方面优于现有其它模型的性能表明了这一意义。为此, 可在下列几个方面进行深一步的研究并谋求应用:

- (1) 选择更加合适的奇异吸引子构成混沌神经网络。
- (2) 决策对象往往是一个复杂的动力学系统，且结构化与半结构化交织，所以，用混沌神经网络进行决策可能有较好结果，也易获全局最优。
- (3) 有可能利用混沌神经网络对初始条件的敏感依赖性对仅有微小差别的模式进行识别。
- (4) 在优化方面，由于混沌的特性，不再必须用模拟退火算法、遗传算法等来避免局部最小。混沌神经网络在智能信息处理中显示了广阔的应用前景。
- (5) 利用混沌结果对初始条件敏感的特性，还可以同进化算法相结合，使搜索遍历所有的解空间，避免过早收敛，易于找到全局最优。

综上所述，混沌神经网络是建立在对人脑机理认识不断加深和作用不断了解的基础上。但是对人脑的认识还远不深入，同样不能期望混沌神经网络能解决所有问题。例如，精确是电脑同人脑相比的优势所在，但正是这一优势，使得一台超级计算机在辨认图象如人脸方面，还不如一个三岁小孩。人类正是在这种不断认识自我、模仿自我的过程中，提高对自然界的认识程度的。

6.4 分形

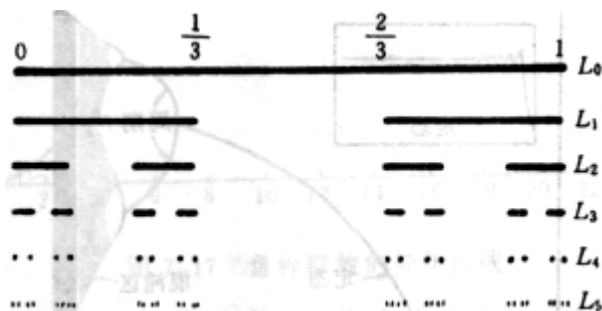
6.4.1 分形概念

由上可知，混沌是指复杂的现象。那么，另一个重要概念——分形又是何所指呢？经典几何的研究对象是一般意义下的点、线、面、体和流形，它们都是规整的几何形体，都有整数的维数，有可度量的长度、面积、体积或测度。可以认为这样的图形有较好的结构。但自然界的事物往往是不规整的，例如山峰的轮廓、云朵的外形、海岸的曲线以及疲劳金属的断裂面，等等，这样的不规整的图形经典几何是不能处理的。1978 年 Mandelbrot 提出了分形的概念，把结构的研究引向深入。笼统的说，分形是不规整几何对象的统称。

6.4.2 分形的特征

最简单的分形的例子如图 6.4.1 和图 6.4.2 所示，分别是集合论创始人、德国数学家 Cantor (1845-1918) 于 1883 年提出的著名的三分 Cantor 集和瑞典数学家 Koch 于 1904 年提出的著名的 Koch 曲线。它们都是在线段 $[0,1]$ 上通过递归方法构造出来的。

Cantor 集是由不可数多点构成的一个完备集合，长度为零；Koch 曲线的长度为无穷大，但面积为零。长度或面积为零或无穷大都是指用通常的尺度（即 Lebesgue 测度）去度量的结果；为零表示所用尺度太大，为无穷大表示所用尺度太小。不管那种情形都不便处理，能否通过适当改变尺度的方法使得度量的结果是一个有限正数（所谓改变尺度是在测度理论的意义下而非在一般意义下把度量单位放大或缩小）？在本世纪之初，Hausdorff 建立的以他的名字命名的维数与测度理论提供了这样的工具。空间每一个集合都有一个确定的 Hausdorff 维数（一个新的尺度）和 Hausdorff 测度（用这把新尺度度量的结果）。在一般情形下它们都是有限正数（例外情形也有，这时需要进一步处理）。例如，上面提到的三分 Cantor 集的 Hausdorff 维数为 $\log_2 \log_3 = 0.6309$ ，其相应测度为 1；Koch 曲线的 Hausdorff 维数为 $\log_4 \log_3 = 1.2619$ ，其相应测度是个正数但至今尚未求出。一般说来，Hausdorff 维数与测度的准确值的计算是非常困难的，一般只能近似估计。



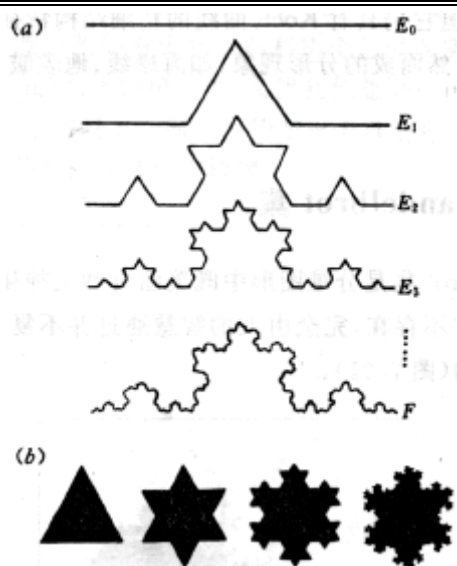


图 6.4.1 Cantor 集的构成

图 6.4.2 三次 Koch 曲线(a)及由它构成的 Koch 雪花(b)

分形的集合具有如下特征：

- (1) 该集有精细结构，即在任意小的比例尺度内包含整体。
- (2) 分形集都是很不规则的，无法用传统的几何语言来描述。
- (3) 通常分形集都有自相似性，可能是近似的，也可能是统计意义上的。
- (4) 通常分形集的分形维数比它的拓扑维数更大
- (5) 许多情况下，分形集是非常简单的，或者是递归的。

“分形几何”为混沌的研究提供了重要的数学工具，分形几何利用计算机作出了精美绝伦的混沌图像。一个混沌系统的混沌集往往就是分形，即其维数不是整数，长度、面积或体积不是零就是无穷大。为了从数量上刻画和区分它们，可以用 Hausdorff 维数和测度。分形的相应的量越大，说明它的规模越大。一个混沌集规模越大，对比起来也就越不容易。所以计算或估计维数和测度是一项重要的工作。

6.4.3 分维数的计算^[4]

(1) 描述分形维数的一般形式

由于自然界中分形的多样性，描述它们特征的分维也有多种形式。一般有经典维数、Hausdorff 维数及相似维数。经典维数指为确定物体和几何图形中任意一点位置所需要的独立坐标数，也就是该物体和几何图形的维数，它必须是整数。

Hausdorff 提出：假设考虑的物体或图形是欧氏空间的有界集合，用半径为 r ($r > 0$) 的球覆盖其集合时，假定 $N(r)$ 是球的个数的最小值，则有

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)} \quad (6.4.1)$$

式中 D 即是 Hausdorff 维数（注：又称 Kolomogrov 容量维）。比如 Cantor 集，考虑 $[0,1]$ 区间，由图 6.4.1 可知，线段被划分 m 次后将由 2^m 个长度各为 3^{-m} 的线段所组成，则 $D = \ln 2 / \ln 3$ 。同理，Koch 的维数为 $\ln 4 / \ln 3$ 。

设该物体或几何图形可分为 N 个局部，每个局部按相似比 β 与整体相似，则其相似维数为：

$$D = \frac{\ln N}{\ln(1/\beta)} = -\frac{\ln N}{\ln(\beta)} \quad (6.4.2)$$

上式中的 D 不必为整数。比如 Koch 曲线可以分成 4 个部分，每个部分是原来的 $1/3$ （相似比），所以相似维数为 $\ln 4 / \ln 3$ 。同理，Cantor 集可以分成 3 个部分，剩下 2 个部分，且每个部分是原来的 $1/3$ （相似比），所以相似维数为 $\ln 2 / \ln 3$ 。

(2) Mandelbrot 给出的模型

在分形几何中, Mandelbrot 给出了分形曲线长度的分维估算模型:

$$L = L_0 \varepsilon^{1-D} \quad (6.4.3)$$

其中: L 为分形曲线的欧氏长度, L_0 为分形曲线的初始操作长度, ε 为分形曲线的标度, D 为其分维。

Mandelbrot 也首次提出了周长—面积关系的分形估算模型

$$P^{1/D} = a_0 A^{1/2} \quad (6.4.4)$$

其中 P 为分形曲线的 Hausdorff 长度, A 为平面图形的欧氏面积, a_0 为形状因子, D 为分维。

(3) 测定分形维数的方法

对于一些具有严格相似性的分形, 其维数可以由相似维数的定义方便地求出. 对于复杂的分形, 计算其维数的实用方法一般有: 通过改变标尺求分维的标尺法, 利用统计学中方差原理的半方差法和根据功率谱密度求分维的 PSD 法。另外, 根据测度关系、相关函数、分布函数也可求分维 (李契 等, 分形维数计算方法研究进展, 北京林业大学学报, 2003, 24 (2): 71—78)。

1) 标尺法: 本方法是用圆和球、线段和正方形、立方体等具有特征长度的基本图形去近似分形图形。一般地说, 如果某曲线具有 $N(r) \propto r^{-D}$ 关系, 即可称 D 为这一曲线的维数。对于海岸线和随机行走轨迹的分形维数的测定, 多数是采用此法。还可以把此法扩展到二维和三维, 即把平面或空间分割成边长为 r 的细胞, 然后来数所要考虑的形状 (或构造) 中所含的细胞数 $N(r)$ 。许多研究者将标尺法用于分形维数的计算。

2) 半方差法: 半方差 (semivariance) 是地统计学 (geostatistics) 中的关键概念, 其基础是区域化随机变量理论, 用来研究自然现象的空间相关性和依赖性, 它是普通随机变量与位置有关的随机函数, 区域化随机变量间的差异用半方差来表示, 定义为:

$$r(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(i) - Z(i+h)]^2$$

式中, $r(h)$ 为样本在距离为 h 时的半方差, $N(h)$ 为距离为 h 的点对的数量, $Z(i)$ 和 $Z(i+h)$ 分别为第 i 和 $i+h$ 点的依赖变量值。可见, 半方差与经典统计学中方差的根本差异在于半方差考虑了空间尺度, 即上式中的 h 。分形维数 D 的计算公式为: $D = (4-m)/2$, 这里 m 为双对数半方差图的斜率。 D 越远离 2, 不同尺度的样方间差异越显著。异质性越强。

3) 根据功率谱密度求分维: 该法又叫 PSD (particle size distribution) 法, 根据观测对空间或时间的随机变量的统计性质进行调查时, 往往可以较简单地得到与波数变化相对应的频谱。从频谱的观点来看, 所谓改变观察的尺度就是改变截止频率 f_c 。此处的截止频率, 指的是把较此更细小的振动成分舍去的界限频率。如果说某变动是分形, 那么即使进行观测尺度的变换, $f \rightarrow \lambda$ 波谱形状也不变, 具有这种性质的频谱 $S(f)$ 只限于下述幂型 $S(f) \propto f^\beta$ 。 β 与分形维数 D 的关系: $\beta = 5 - 2D$ 。

6.5 分形应用

分形理论是现代非线性科学研究中十分活跃的一个数学分支, 在物理、地质、材料科学以及工程技术中都有着广泛的应用。特别是随着电子计算机的迅速发展, 分形的思想和方法在模式识别、自然图像的模拟、图象处理、图象生成和信息隐匿等方面取得了极大的成功。下面主要介绍分形理论在信息处理、图像压缩、话音隐匿和数字水印等方面中的应用。

6.5.1 分形信息处理

Mandelbrot 首先揭示了分形的本质特征, 确定了分形集合的理论框架, 现在在计算机上用各种方法生成的分形结构也越来越多。但到目前为止, 用一个数学的系统去解释地构造、研究一大类存在于人为的或自然的具有“自记忆” (比例相似性) 结构的分形, 最为成功的就是迭代函数系统 (IFS), 它既包含了确定性的过程也包含随机的过程。

1、迭代函数系统 (IFS): 设二维空间 R^2 中 IFS $\{R^2; W_1, W_2, \dots, W_n\}$

$$W_i(X) = A_i x + T_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.5.1)$$

其中 $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$, $T_i = \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}$ 。A 的意思可以分解为旋转、伸缩、扭曲、反演等; T 的意思是移位。

定义集合 A、B 之间的距离为 $d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}$, 其中 $d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}$ 。在一个距离空间中, 若总存在 $d(f(x), y(y)) \leq sd(x, y)$, 则称 s 为 f 的收缩因子。当仿射映射式 (6.5.1) 是收缩映射时, 必存在一唯一不动点, 即吸引子, 这就是吸引子定理。表 6.5.5 为 Sierpinski 三角的 IFS, 图 6.5.5 为在计算机上绘出的吸引子的形状。

表 6.5.1 Sierpinski 三角的 IFS

w	a	b	c	d	e	f
1	0.5	0	0	0.5	1	1
2	0.5	0	0	0.5	50	1
3	0.5	0	0	0.5	50	50

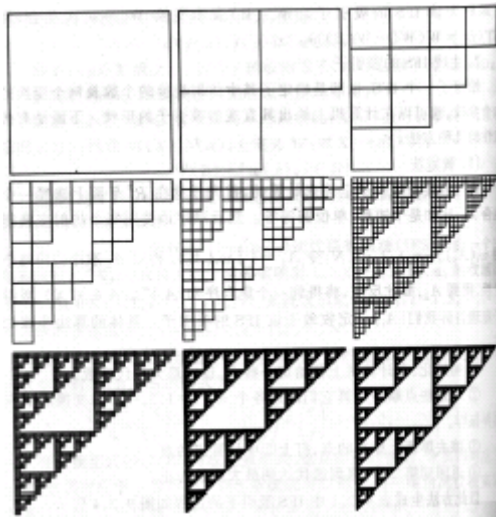


图 6.5.5 确定法生成 Sierpinski 三角的过程

按照 IFS 的吸引子定理, 可以给每一个 $W_i()$ 分配一个概率 P_i 。在采用随机迭代算法或灰度复印机算法【陈衍仪 编著. 图像压缩的分形理论和方法. 国防工业出版社, 1997】计算 IFS 吸引子的图像时, P_i 是起作用的。在与随机迭代算法一起使用时, 其值可取作

$$P_i = |A_i| / \sum_{i=1}^N |A_i| = |a_i d_i - b_i c_i| / \sum_{i=1}^N |a_i d_i - b_i c_i| \quad (6.5.2)$$

注意有可能某个 $|A_i| = 0$, 则实际操作时可把该 P_i 设成一个较小的正数, 比如 0.001。 a_i 、 b_i 、 c_i 、 d_i 、 e_i 、 f_i 和 P_i 的值成为 IFS 码 (P_i 有时不必给出, 可以从码中算出)。例如, 表 6.5.2 表示吸引子为 Fem 的 IFS, 其随机迭代生成过程如图 6.5.2 所示。

表 6.5.2 吸引子为 Fem 的 IFS

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07



图 6.5.2 吸引子 Fern 的随机迭代生成过程

2、拼贴原理：分形是由反馈 IFS 生成的，其中迭代函数系统就是 Hutchinson 算子，即由许多 $H_1(A_n)$ 、...、 $H_n(A_n)$ 合并而成，合并就是拼贴，亦即把几个子集或图形拼贴起来。

例如 Bamsley（牛津大学培养出来的数学家）用一叶苔藓的轮廓作为 A_0 。用四部分，即 4 个迭代系统拼贴。不断迭代最后形成像自然形态的一叶苔藓。如图 6.5.3 所示，其中 H_4 有反射，另外，主叶在梗上有错开，主叶上的子叶之间也有错开，即整体与局部是相似的。这个演示曾引起震惊。



图 6.5.3 Bamsley 苔藓

$$H_1(x_k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \end{bmatrix}, \quad H_2(x_k) = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ 0.04 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{bmatrix},$$

$$H_3(x_k) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad H_4(x_k) = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.44 \end{bmatrix}$$

6.5.2 图像压缩

根据分形理论，不少复杂的图形，从计算的观点来看，其信息含量并不大，可以用简单的程序来产生。比如 Fern（蕨类植物）的图形，看上去比较复杂，用一般图形表示法要用上万个数据，但采用分形方法，仅需 24 个数据（一组四个仿射变换），用 IFS 方法便可在计算机上产生这种图形，如图 6.5.4 所示。

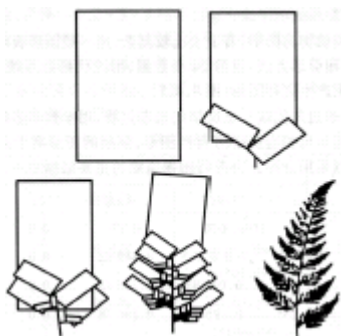


图 6.5.4 蕨类植物的图形（以一组四个仿射变换进行迭代得到）

这说明，复杂的图形寓于简单的算法之中，这是分形图像压缩的主要根据之一。

科学家们发现,自然界许多事物的发展过程(如生长、凝聚、进化等)形成多种分形结构,分形意味着自然界是复杂形态中潜藏着有组织的结构。大自然的美,就在于她在本质上是简单的。如果能找到这些有效的信息,就能简洁地表达自然界的图景。这是我们采用分形方法进行图像压缩的另一重要根据。

当然,这些称为分形的自然体并没真正分形,只是在一定尺度上可以看成分形,就像并不存在真正的线和圆并不妨碍我们用欧几里德集合去描绘物体的形状一样,真正分形的不存在也不妨碍我们用分形的方法进行图像压缩。

1、用IFS的黑白分形图像压缩:由拼贴定理可知,要设法找到这样的IFS,它的吸引子要逼近一个给定集。即要找到这样一组变换,它是一个合适的空间内的压缩映射,而给定集就在该空间当中。在给定集经变换后的图像的并或图像的拼贴,接近该给定集本身,两个图像的相似程度用Hausdorff度量来测度。

分形图像压缩的主要目的是找出与分辨力无关的理想图像的模型,它用由0、1组成的有限长的数字来表示。可以用IFS压缩算法进行图像压缩,这是一种基于拼贴定理的交互式图像求模方法。可以在计算机上寻找IFS的参数(即编码)。【具体步骤见参考文献:陈衍仪编著.图像压缩的分形理论和方法.国防工业出版社,1997,p65-67】。

2、多灰度图像的压缩:由于多了一个灰度变量,故上面的二维映射应为三维,类似二维情形进行分形压缩。

此外,还有基于迭代变换理论(ITT)的图像压缩,以及1993年国际学术会上提出的近似正交基的分形压缩方法等。

6.5.3 基于分形的话音隐匿技术

【柏森等编著.通信信息隐匿技术,北京:国防工业出版社,2005,P232-239】

6.5.4 基于分形的数字水印技术

Puate等人【46】于1996年提出了基于分形编码的水印嵌入方法。

【Stefan Katzenbeisser等编.通信信息隐匿技术—隐写术与数字水印,北京:人民邮电出版社,2001,P96-98】

6.5 分形神经网络

在大型映射网络中,随着网络结构的线性增长,其连接权的数量按指数迅速增长。对于含有 10^3 以上的大型网络,尽管采用快速算法,其训练难度也是很大的,甚至无法实现的。面对这样的难题,和神经网络在实用中大规模化发展的趋势,人们开始寻找使用计算方法和系统产生的规律构成大型网络。J.W.L.Merrill等研究了用分形迭代方法探索出映射网络权的连接结构,在此基础上对网络训练以减少训练量。有人采用有训练后的小网络按比例扩展到大网络,再进行二次训练,以节省直接训练的时间。但这两种方法需对大网络进行训练。下面从分形的观点给出一种计算网络权值的方法。

6.5.1 信息分形网络原理和特性

假设在所有可能结构中,有一个子类是具有信息分形特征的,即权空间的局部结构除具有局部特性外,也具有整个权空间的整体特性。由于网络是靠存储在权值的信息来完成一定的任务(如识别、分类等),所以这种信息分形性必将导致网络的功能分形,即子网络功能反映射整体的功能。因此,可从任意一个已知功能的子网络经过信息分形原理放大成具有类似功能的大网络。

$$\text{设两个矩阵: } A_{NM} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{N1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{N2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1M} & a_{2M} & \cdots & a_{NM} \end{bmatrix}, B_{LK} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{K1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{K2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1L} & b_{2L} & \cdots & b_{KL} \end{bmatrix}$$

它们的 Kronecker 积定义为: $A_{NM} \otimes B_{LK} =$

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{21}B & \dots & a_{N1}B \\ a_{12}B & a_{22}B & \dots & a_{N2}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1M}B & a_{2M}B & \dots & a_{NM}B \end{bmatrix} \quad (6.5.1)$$

设有一个两层映射网络如图 6.5.1(a)所示, 其权系数矩阵为 $W = [w_{ij}]$, $f(\cdot)$ 是非线性传递函数。采用 W 的 Kronecher 自积, 相应扩展后的网络如图 6.5.1(b)所示。新的输入、输出。权矩阵分别为:

$$XX = (xx_1, xx_2, \dots, xx_m), \quad YY = (yy_1, yy_2, \dots, yy_{mm}), \quad WW = W \otimes W$$

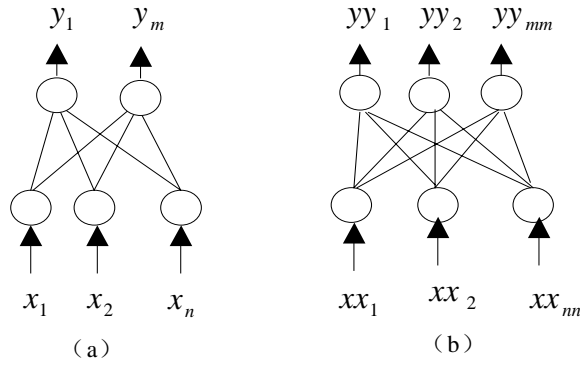


图 6.5.1 神经网络分形放大

扩展的网络具有如下性质:

- (1) 尺度相似性: 扩展网络对放大尺度后相同样本输入, 其输出等价于两个相同原始小网络具有不同系数 k 输入时的输出。 k 是小网络相应输出元的输入权值之和。当 f 的增益足够高时, 输出是小网络的空间重复。表明了扩展网络对模式尺度变化时的可识别性。
- (2) 位移相似性: 扩展网络对同一模式不同位移输入时是可识别的。另外, 位移不同, 输出的大小也不同, 这可认为是识别位置的信息。
- (3) 重复相似性: 网络对同一模式空间重复时是可识别的。
- (4) 叠加相似性: 由上述三条性质可推导出, 对网络输入叠加模式, 具有可识别性。
- (5) 空间权的多重分形性: 多重分形指具有分形性质, 但不能用同一具固定的分维数来描述情况。它往往具有很多不同的分维数, 并有多重尺度的变换特性。这种扩展网络的空间权值能形成自相似分形网, 呈现出多重尺度分形性。

6.5.2 在模式识别和分类中的应用

下面介绍将扩展网络应用于输入层与隐含层, 这相当于扩大了输入视野和隐含层视野。步骤如下:

- (1) 为方便起见, 选择一个三层映射网络;
- (2) 使用快速 BP 算法训练这个小网, 使之对小规模问题有效;
- (3) 计算扩展网, 得到信息分形的大网络;
- (4) 将结果网络应用于大型实际问题。

实验选用一个 2—2—3 的三层网络, 训练其对二进制码正确分类; 然后, 扩展为 2—4—9 网络, 再对长码进行分类。结果见表 6.5.1。由表可知, 扩展网络正确分类相应于短码的放大、平移后的长码。

另外, 目前分形几何学在神经网络中的应用, 主要是将样本集进行分形研究计算、提取分维数, 然后将分维数作为向量^[5], 或将分维数与样本一起作为向量^[6], 输入神经网络进行学习训练。这样就实现了分形与神经网络的结合。

	输入		输出
A类	训练码	110, 101, 011	10
	识别码	111000111	10
		000110000	10
		011011011	10
B类	训练码	100, 001, 010	01
	识别码	111000000	01
		000010000	01
		001001001	01

本章主要参考文献

- [1] 袁亚湘,孙文瑜.最优化理论与方法[M].北京:科学出版社,1997
- [2] 靳蕃 编著,神经计算智能基础[M].成都:西南交通大学出版社,2001
- [3] 王耀南 编著,智能信息处理技术[M].北京:高等教育出版社,2003
- [4] 李契,等.分形维数计算方法研究进展,北京林业大学学报,2003,24(2):71-78
- [5] 侯祥林等,非线性机械设备系统的分形神经网络诊断方法,振动工程学报,2001,14 (2):220-223
- [6] 杨明 等,智能材料结构损伤的分形神经网络诊断方法,材料科学与工程学报,2003, 21(3):387-390
- [7] 关新平等著.混沌控制及其在保密通信中的应用.北京:国防工业出版社,2002
- [8] 陈衍仪编著.图像压缩的分形理论和方法.国防工业出版社,1997
- [9] 柏森 等编著.通信信息隐匿技术,北京:国防工业出版社,2005,P232-239
- [10] Stefan Katzenbeisser 等编.通信信息隐匿技术—隐写术与数字水印,北京:人民邮电出版社,2001,P96-98