TALLER FORMATIVO-TALLER HEP

Alumno. Carlos Macedonio Montañez Montenegro.

1. **A partir del lagrangiano de Proca para un campo vectorial de spin 1**

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right) A^\nu$$

Deducir la ecuación de Euler –Lagrange:

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right) A^\nu = 0$$

Solución

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{-1}{4\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \qquad \text{(a)}$$

$$\partial_\mu \phi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu}$$

Aplicando derivadas

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1,2,3) \text{ ,}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial v_x} = m v_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \frac{-\partial U}{\partial x}$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \ (i = 1,2,3, \dots)$$

Luego aplicándose en (a)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu$$

Finalmente

$$\boldsymbol{\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right) A^\nu = 0}$$

2. Tal como está el lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L} = i(\hbar c)\overline{\Psi}\gamma^\mu \boldsymbol{\partial_\mu \psi} - (\boldsymbol{mc^2})\overline{\Psi}\,\boldsymbol{\psi}$$

Algunas personas prefieren tratar con ellos en igualdad de condiciones usando el lagrangiano modificado.

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar c}{2}[\overline{\Psi}\gamma^\mu(\boldsymbol{\partial_\mu}\psi) - (\boldsymbol{\partial_\mu}\overline{\Psi})\gamma^\mu\psi] - (mc^2)\overline{\Psi}\,\psi$$

Aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a este $\mathcal{L}$, y demuestre que se obtiene la ecuación de Dirac.

$$i\gamma^\mu \boldsymbol{\partial_\mu}\psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

Y su adjunto

Solución

Sobre el spinor

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\Psi})} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\Psi}} = i\hbar c\gamma^\mu \boldsymbol{\partial_\mu}\psi - mc^2\psi$$

Luego se tiene que

$$i\gamma^\mu \boldsymbol{\partial_\mu}\psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right) = 0$$

Este es la ecuación de Dirac y describe al spin de una partícula de masa "m", aplicándole la ecuación de Euler –Lagrange , se tendrá.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\Psi})} = i\hbar c\overline{\Psi}\gamma^\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\Psi}} = -mc^2\overline{\Psi}$$

Por lo tanto se tiene

$$i\partial_\mu \overline{\Psi}\gamma^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\overline{\Psi} = 0$$

3. **El lagrangiano de Klein –Gordon para un campo complejo seria:**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^* (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^* \phi$$

Tratando ϕ y ϕ^* como variable de campo independientes, deduzca las ecuaciones de campo para cada una y demuestre que estas ecuaciones de campo son consistentes(es decir, una es el conjugado complejo de la otra).

Solución

Para el caso se tiene también

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^* (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^* \phi \approx \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2$$

Además

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

Desarrollando el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_0\phi\partial_0\phi - \partial_1\phi\partial_1\phi - \partial_2\phi\partial_2\phi - \partial_3\phi 3\phi] - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2$$

Luego

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi = \partial^0 \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 \phi)} = -\partial_1 \phi = \partial^1 \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0$$

4. **Aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a la ecuación**

$$\mathcal{L} = \left[i\hbar c\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\mu}}\psi - mc^{2}\overline{\psi}\psi\right] - (q\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi)A_{\mu}$$

Para obtener la ecuación de Dirac con acoplamiento electromagnético, donde A_{μ} es algún campo nuevo, que cambia(en coordinación con la transformación de fase local de ψ) de acuerdo con la regla $A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial\lambda$

Solución

$$i\hbar c\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\mu}}\psi - mc^{2}\overline{\psi}\psi$$

Se tiene que el lagrangiano de Dirac es invariante ante la transformación

Transformación de fase local

$$\psi \to e^{i\theta}\psi, \text{ para } \theta, real \qquad , \ \bar{\psi} \to e^{i\theta}\bar{\psi}$$

Transformación de fase local

$$\psi \to e^{i\theta(x)}\psi$$

En esta condición, el lagrangiano no es invariante, y se tomara un término adicional de su derivación.

$$\partial_{\mu}\left(e^{i\theta}\psi\right) = i\left(\partial_{\mu}\theta\right)e^{i\theta}\psi + e^{i\theta}\partial_{\mu}\psi$$

Luego se tiene

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - \hbar c(\partial_{\mu}\theta)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

Extrayendo un factor

$$\lambda(x) = -\frac{\hbar c}{q}\theta(x)$$

Donde se tiene que “q” , es la carga de la partícula

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + (q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)\partial_{\mu}\lambda$$

Sobre la transformación de fase local, ahora se tendría

$$\psi \to e^{iq\lambda(x)/\hbar c}\psi$$

Luego

$$\mathcal{L} = \left[i\hbar c\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\mu}}\psi - mc^{2}\overline{\psi}\psi\right] - (q\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi)A_{\mu}$$