Introduction à l’informatique CM12

Antonio E. Porreca
aeporreca.org/introinfo

Algorithmes sur les entiers

Incrémentation

1	1	1	0	1	1	1	1

Incrémentation

1	1	1	0	1	1	1	1

+1

Incrémentation

1	1	1	0	1	1	1	1

+1

							0

Incrémentation

1	1	1	0	1	1	1	1

+1

						0	0

Incrémentation

1	1	1	0	1	1	1	1

+1

					0	0	0

Incrémentation

1	1	1	0	1	1	1	1

+1

				0	0	0	0

Incrémentation

1	1	1	0	1	1	1	1

			1	0	0	0	0

Incrémentation

1	1	1	0	1	1	1	1

1	1	1	1	0	0	0	0

Dépassement d'entier (overflow)

1	1	1	1	1	1	1	1

Dépassement d’entier (overflow)

1	1	1	1	1	1	1	1

+1

Dépassement d'entier (overflow)

1	1	1	1	1	1	1	1

+1

							0

Dépassement d'entier (overflow)

1	1	1	1	1	1	1	1

+1

						0	0

Dépassement d'entier (overflow)

1	1	1	1	1	1	1	1

+1

					0	0	0

Dépassement d'entier (overflow)

1	1	1	1	1	1	1	1

+1

				0	0	0	0

Dépassement d'entier (overflow)

1	1	1	1	1	1	1	1

+1

			0	0	0	0	0

Dépassement d'entier (overflow)

1	1	1	1	1	1	1	1

+1

		0	0	0	0	0	0

Dépassement d'entier (overflow)

1	1	1	1	1	1	1	1

+1

	0	0	0	0	0	0	0

Dépassement d'entier (overflow)

1	1	1	1	1	1	1	1

+1

0	0	0	0	0	0	0	0

Dépassement d'entier (overflow)

1	1	1	1	1	1	1	1

0	0	0	0	0	0	0	0

Incrémenter

```
fonction incrémenter(N)
    n ≔ longueur(N)
    M ≔ tableau de longueur n
    i ≔ n – 1
    tant que i ≥ 0 et N[i] = 1 faire
        M[i] ≔ 0
        i ≔ i – 1
    fin tant que
    si i ≥ 0 alors
        M[i] ≔ 1
        i ≔ i – 1
    fin si
    tant que i ≥ 0 faire
        M[i] ≔ N[i]
        i ≔ i – 1
    retourner M
fin fonction
```

Addition

1	1	1	0	1	1	1	1	+
0	1	1	0	1	1	1	1	=

Addition

+1

1	1	1	0	1	1	1	1	+
0	1	1	0	1	1	1	1	=
							0	

Addition

+1

1	1	1	0	1	1	1	1	+

0	1	1	0	1	1	1	1	=

						1	0

Addition

+1

1	1	1	0	1	1	1	1	+

0	1	1	0	1	1	1	1	=

					1	1	0

Addition

+1

1	1	1	0	1	1	1	1	+

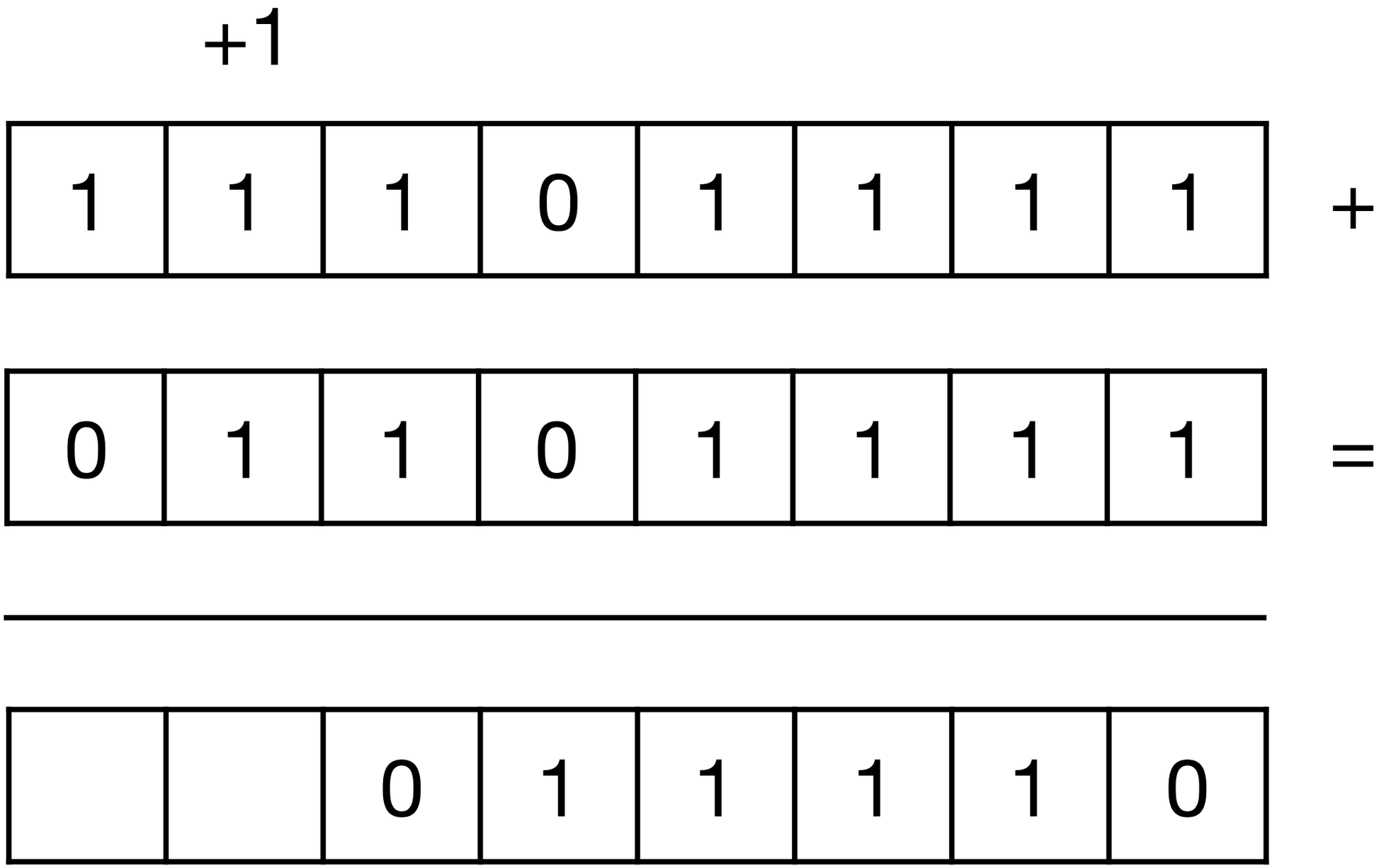
0	1	1	0	1	1	1	1	=

				1	1	1	0

Addition

1	1	1	0	1	1	1	1	+
0	1	1	0	1	1	1	1	=
			1	1	1	1	0	

Addition



Addition

+1

1	1	1	0	1	1	1	1	+

0	1	1	0	1	1	1	1	=

	1	0	1	1	1	1	0

Addition

+1

	1	1	1	0	1	1	1	1	+

	0	1	1	0	1	1	1	1	=

	0	1	0	1	1	1	1	0

Addition

1	1	1	0	1	1	1	1	+
0	1	1	0	1	1	1	1	=
0	1	0	1	1	1	1	0	

Division euclidienne d'*a* par *b*

Division euclidienne d'*a* par *b*

$$a = q \times b + r \qquad \textbf{avec } 0 \leq r < b$$

Division euclidienne d'*a* par *b*

$$a = q \times b + r$$

quotient reste

avec $0 \leq r < b$

Division euclidienne

```
fonction division-euclidienne(a, b)
    q ≔ 0
    r ≔ a
    tant que r ≥ b faire
        q ≔ q + 1
        r ≔ r – b
    fin tant que
    retourner (q, r)
fin fonction
```

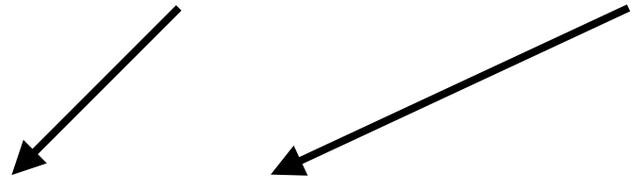
Plus grand diviseur commun

Plus grand diviseur commun

$$21 = 14 \times 1 + 7$$

Plus grand diviseur commun

$$21 = 14 \times 1 + 7$$



$$14 = 7 \times 2 + 0$$

Plus grand diviseur commun

$$21 = 14 \times 1 + 7$$

$$14 = 7 \times 2 + 0$$

$$\text{pgdc}(21, 14) = 7$$

Plus grand diviseur commun

$$799 = 345 \times 2 + 109$$

Plus grand diviseur commun

$$799 = 345 \times 2 + 109$$

$$345 = 109 \times 3 + 18$$

Plus grand diviseur commun

$$799 = 345 \times 2 + 109$$

$$345 = 109 \times 3 + 18$$

$$109 = 18 \times 6 + 1$$

Plus grand diviseur commun

$$799 = 345 \times 2 + 109$$

$$345 = 109 \times 3 + 18$$

$$109 = 18 \times 6 + 1$$

$$18 = 1 \times 18 + 0$$

Plus grand diviseur commun

$$799 = 345 \times 2 + 109$$

$$345 = 109 \times 3 + 18$$

$$109 = 18 \times 6 + 1$$

$$18 = 1 \times 18 + 0$$

$$\text{pgdc}(799, 345) = 1$$

Algorithme d'Euclide

```
fonction pgdc(a, b)
        (a ≥ b entiers ≠ 0)
        r ≔ a mod b
        tant que r > 0 faire
            a ≔ b
            b ≔ r
            r ≔ a mod b
        fin tant que
        retourner b
fin fonction
```

Ça sert à quoi ?

Communications sécurisées

Alice

Bob

Communications sécurisées

Alice

Bob

Communications sécurisées

Alice

Bob

Eve

Communications sécurisées

Alice

Bob

Eve

Communications sécurisées

Alice

Bob

Eve

Communications sécurisées

Alice

Bob

Eve

Communications sécurisées

Alice

Bob

Eve

Communications sécurisées

Alice

Bob

Eve

Communications sécurisées

Alice

Bob

Eve

Communications sécurisées

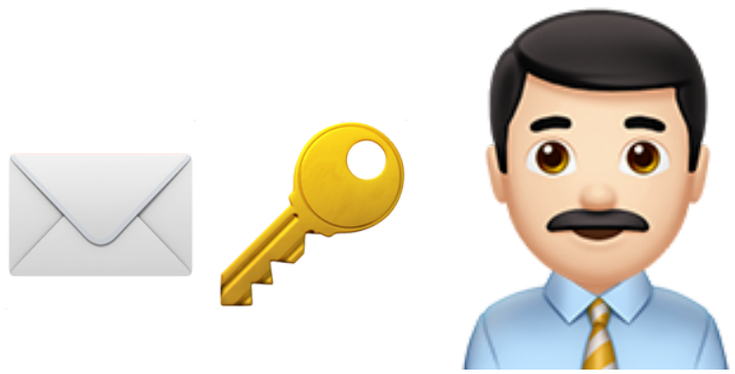
Alice

Bob

Eve

Communications sécurisées

Alice



Bob

Eve

On connait déjà

- Chiffrement de Cesar
- Chiffrement spartiate
- Chiffrement de Vigenère
- …mais ça ne suffit plus aujourd’hui

Cryptosystème RSA

(e, n) (d, n)

Alice Bob

$\in \{0, \ldots, n-1\}$

Chiffrement et déchiffrement RSA

Alice

(e, n)

$$M \in \{0, \ldots, n-1\}$$

$$C = M^e \bmod n$$

Bob

(d, n)

$$C^d \bmod n = M$$

Comment choisir les clés RSA

1. Choisir p et q deux grands nombres premiers différents
2. Calculer $n = pq$
3. Calculer $\phi(n) = (p - 1)(q - 1)$
4. Choisir un entier e premier avec $\phi(n)$
5. Calculer l'entier $d < \phi(n)$ tel que $de \bmod \phi(n) = 1$

Théorème

Alice (e, n)

$$M \in \{0, \ldots, n-1\}$$

$$C = M^e \bmod n$$

Bob (d, n)

$$C^d \bmod n = M$$

Calculer les puissances

$$x \quad x^2 \quad x^3 \quad \dots \quad x^n$$

Calculer les puissances

$$x \quad x^2 \quad x^3 \quad \cdots \quad x^n$$

```
fonction puissance(x, n)
    y ≔ 1
    pour i ≔ 1 à n faire
        y ≔ yx
    fin pour
    retourner y
fin fonction
```

Calculer les puissances

$$x \quad x^2 \quad x^3 \quad \cdots \quad x^n$$

```
fonction puissance(x, n)
    y ≔ 1
    pour i ≔ 1 à n faire
        y ≔ yx
    fin pour
    retourner y
fin fonction
```

n **multiplications**

Exponentiation rapide

$$x^{16}$$

Exponentiation rapide

$$x^{16} = (x^8)^2$$

Exponentiation rapide

$$x^{16} = (x^8)^2$$

$$= ((x^4)^2)^2$$

Exponentiation rapide

$$x^{16} = (x^8)^2$$

$$= ((x^4)^2)^2$$

$$= (((x^2)^2)^2)^2$$

Exponentiation rapide

$$x^{16} = (x^8)^2$$

$$= ((x^4)^2)^2$$

$$= (((x^2)^2)^2)^2$$

4 multiplications

Exponentiation rapide

$$x^{13}$$

Exponentiation rapide

$$x^{13} = (x^6)^2 \times x$$

Exponentiation rapide

$$x^{13} = (x^6)^2 \times x$$
$$= ((x \times x \times x)^2)^2 \times x$$

Exponentiation rapide

$$x^{13} = (x^6)^2 \times x$$

$$= ((x \times x \times x)^2)^2 \times x$$

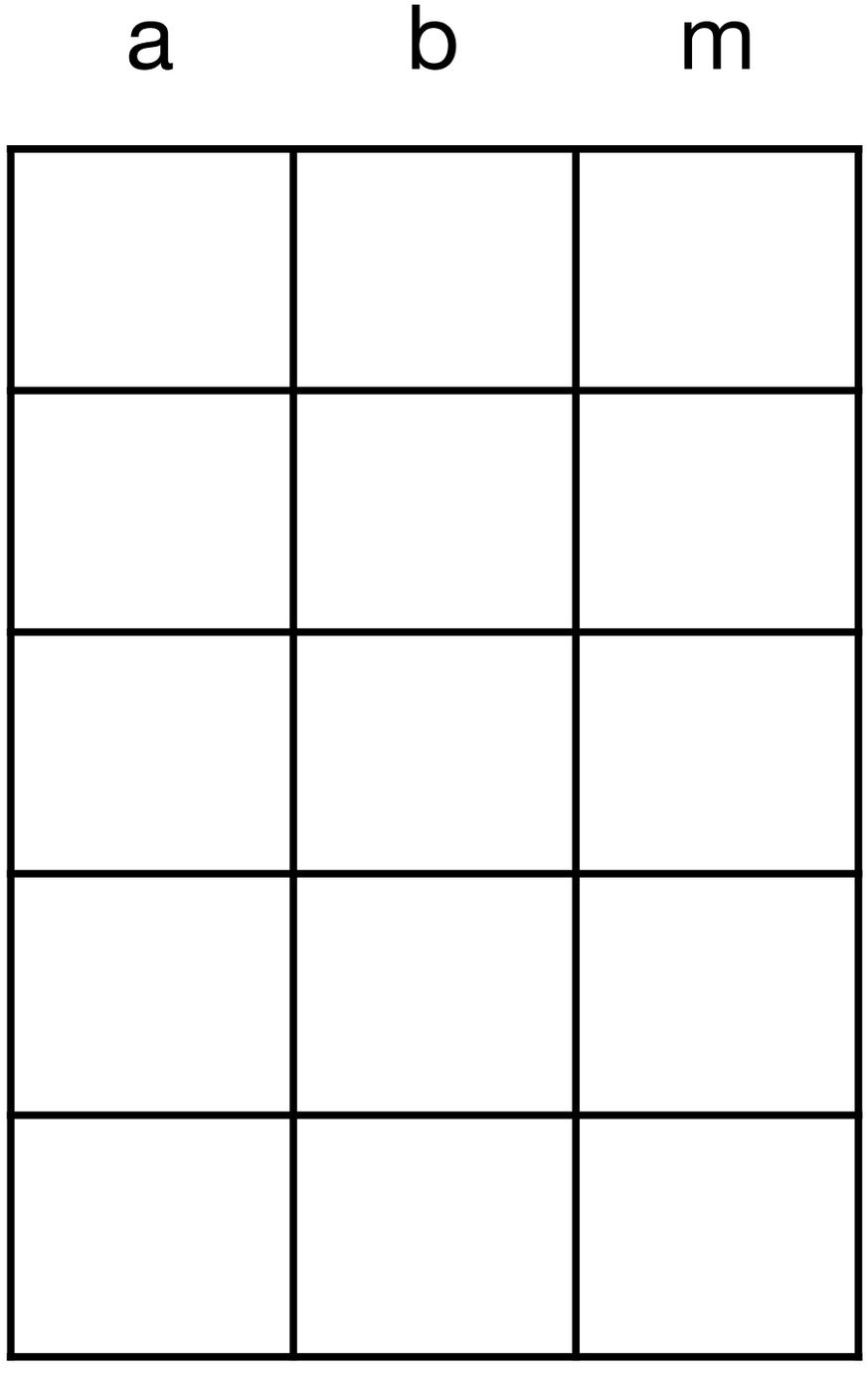
5 multiplications

Exponentiation rapide

```
fonction puissance(x, n)
    a ≔ 1
    b ≔ x
    m ≔ n
    tant que m > 0 faire
        si m mod 2 = 0 alors
            m ≔ m / 2
        sinon
            m ≔ (m – 1) / 2
            a ≔ a × b
        fin si
        b ≔ b × b
    retourner a
fin fonction
```

Exponentiation rapide

```
fonction puissance(x, n)
    a ≔ 1
    b ≔ x
    m ≔ n
    tant que m > 0 faire
        si m mod 2 = 0 alors
            m ≔ m / 2
        sinon
            m ≔ (m – 1) / 2
            a ≔ a × b
        fin si
        b ≔ b × b
    retourner a
fin fonction
```



Exponentiation rapide

```
fonction puissance(x, n)
    a ≔ 1
    b ≔ x
    m ≔ n
    tant que m > 0 faire
        si m mod 2 = 0 alors
            m ≔ m / 2
        sinon
            m ≔ (m – 1) / 2
            a ≔ a × b
        fin si
        b ≔ b × b
    retourner a
fin fonction
```

a	b	m
1	x	13

Exponentiation rapide

```
fonction puissance(x, n)
    a ≔ 1
    b ≔ x
    m ≔ n
    tant que m > 0 faire
        si m mod 2 = 0 alors
            m ≔ m / 2
        sinon
            m ≔ (m – 1) / 2
            a ≔ a × b
        fin si
        b ≔ b × b
    retourner a
fin fonction
```

a	b	m
1	x	13
x	x^2	6

Exponentiation rapide

```
fonction puissance(x, n)
    a ≔ 1
    b ≔ x
    m ≔ n
    tant que m > 0 faire
        si m mod 2 = 0 alors
            m ≔ m / 2
        sinon
            m ≔ (m – 1) / 2
            a ≔ a × b
        fin si
        b ≔ b × b
    retourner a
fin fonction
```

a	b	m
1	x	13
x	x^2	6
x	x^4	3

Exponentiation rapide

```
fonction puissance(x, n)
    a ≔ 1
    b ≔ x
    m ≔ n
    tant que m > 0 faire
        si m mod 2 = 0 alors
            m ≔ m / 2
        sinon
            m ≔ (m – 1) / 2
            a ≔ a × b
        fin si
        b ≔ b × b
    retourner a
fin fonction
```

a	b	m
1	x	13
x	x^2	6
x	x^4	3
x^5	x^8	1

Exponentiation rapide

```
fonction puissance(x, n)
    a ≔ 1
    b ≔ x
    m ≔ n
    tant que m > 0 faire
        si m mod 2 = 0 alors
            m ≔ m / 2
        sinon
            m ≔ (m – 1) / 2
            a ≔ a × b
        fin si
        b ≔ b × b
    retourner a
fin fonction
```

a	b	m
1	x	13
x	x^2	6
x	x^4	3
x^5	x^8	1
x^{13}	x^{16}	0

Calcul de fonctions mathématiques

Racine carré

$$x = \sqrt{a}$$

$$x^2 = a \quad (x \geq 0)$$

$$x^2 - a = 0 \quad (x \geq 0)$$

Racine carré

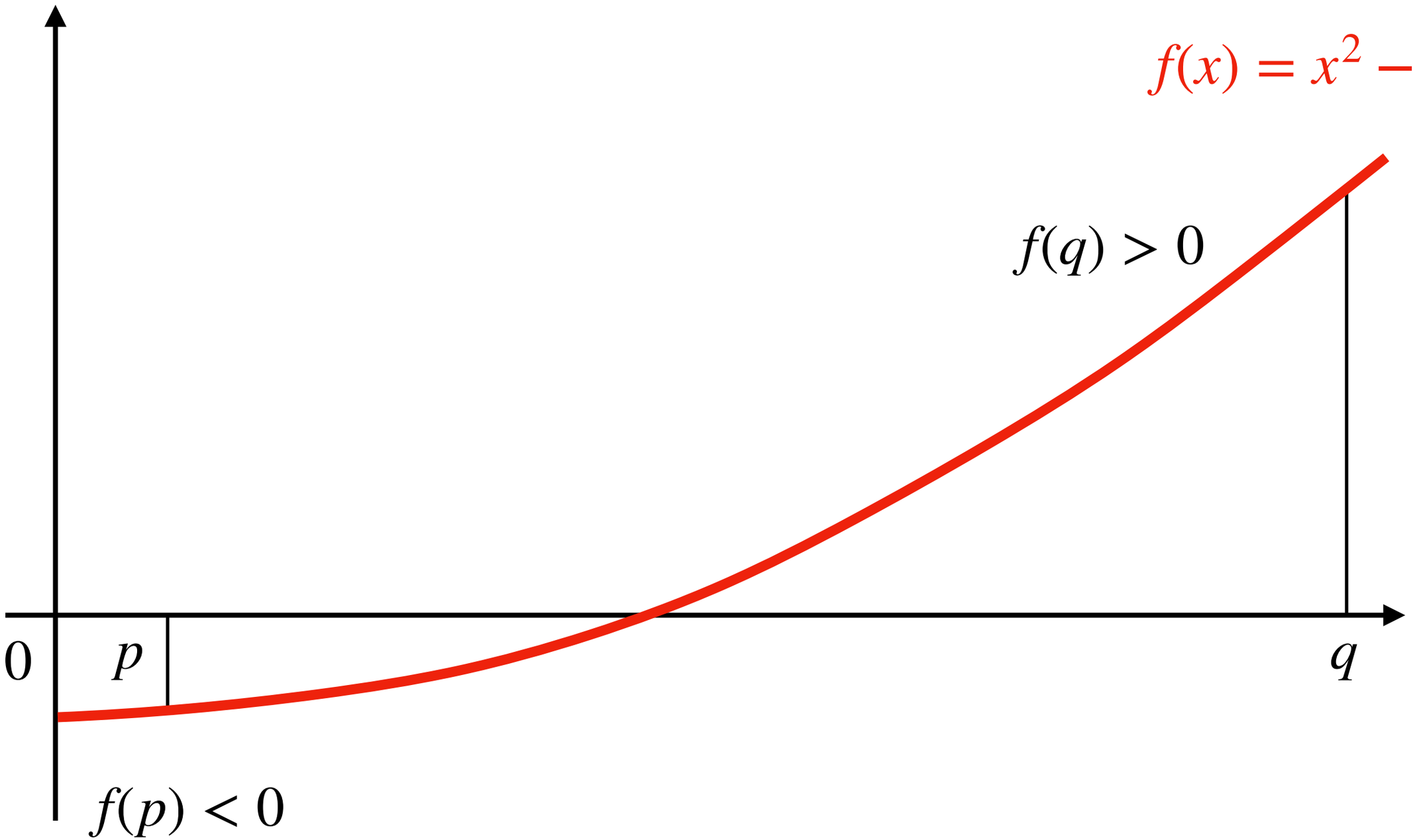
$$x = \sqrt{a}$$

$$\Updownarrow$$

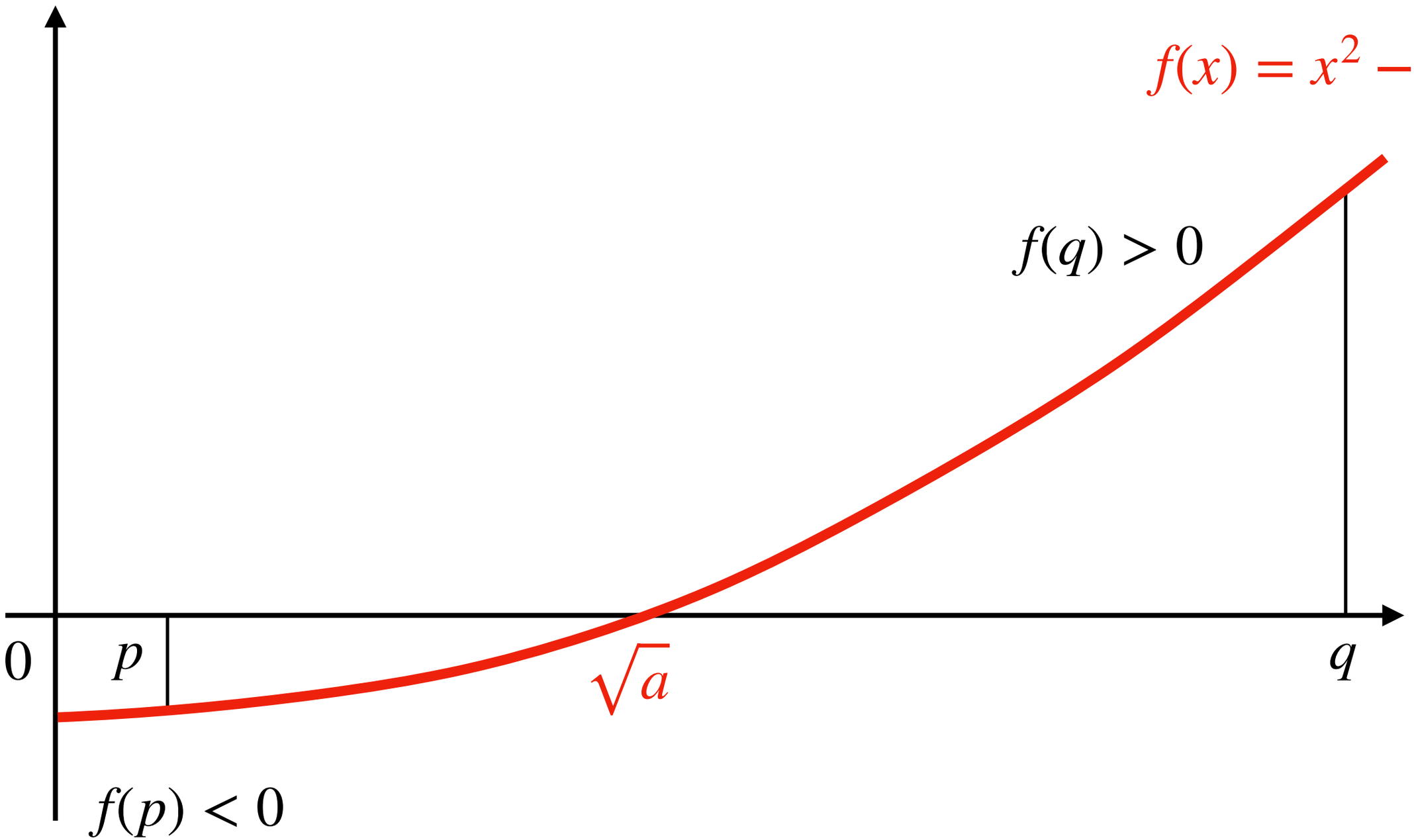
$$f(x) = 0 \qquad \text{où} \qquad f(x) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 - a$$

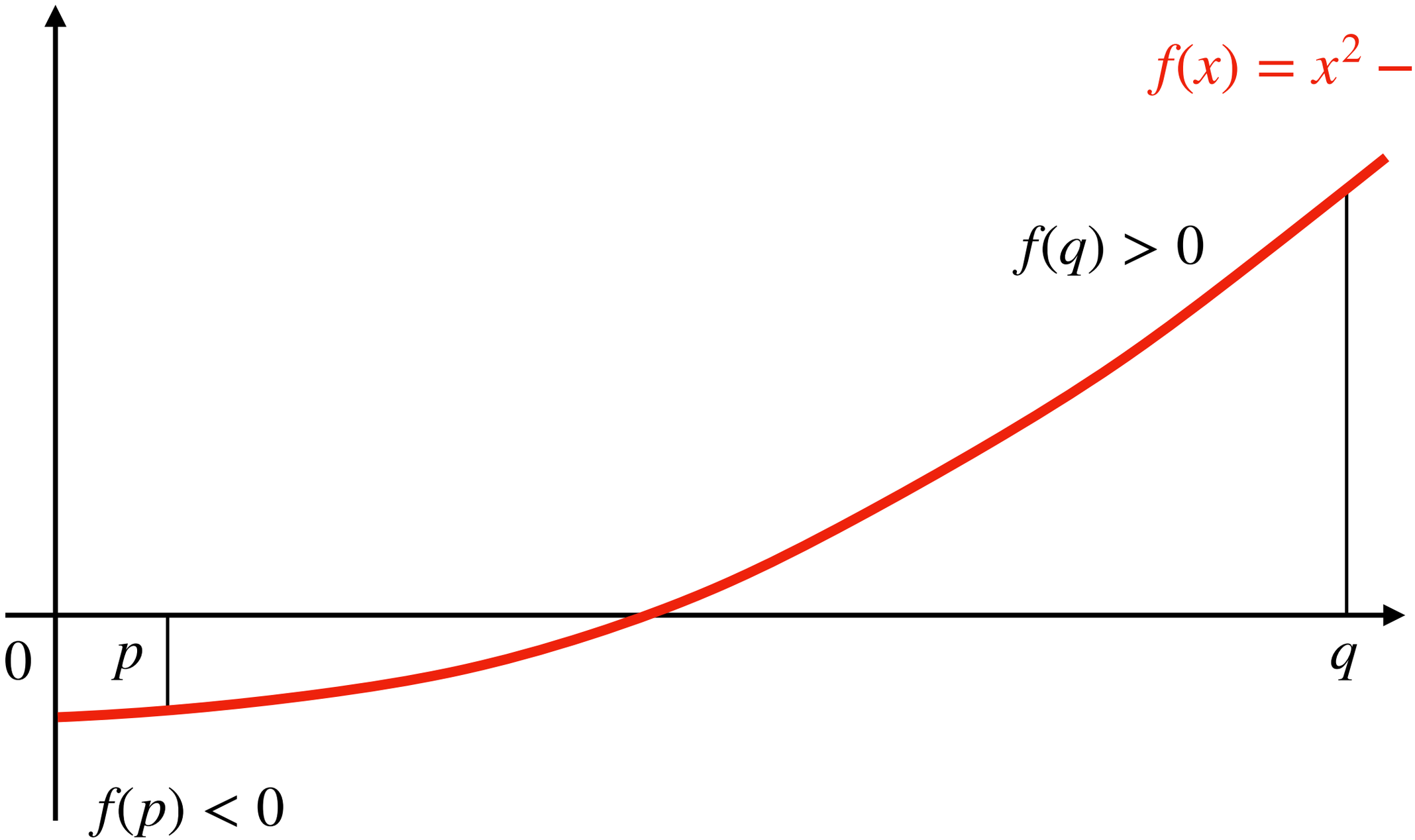
Approximations des zéros par recherche dichotomique



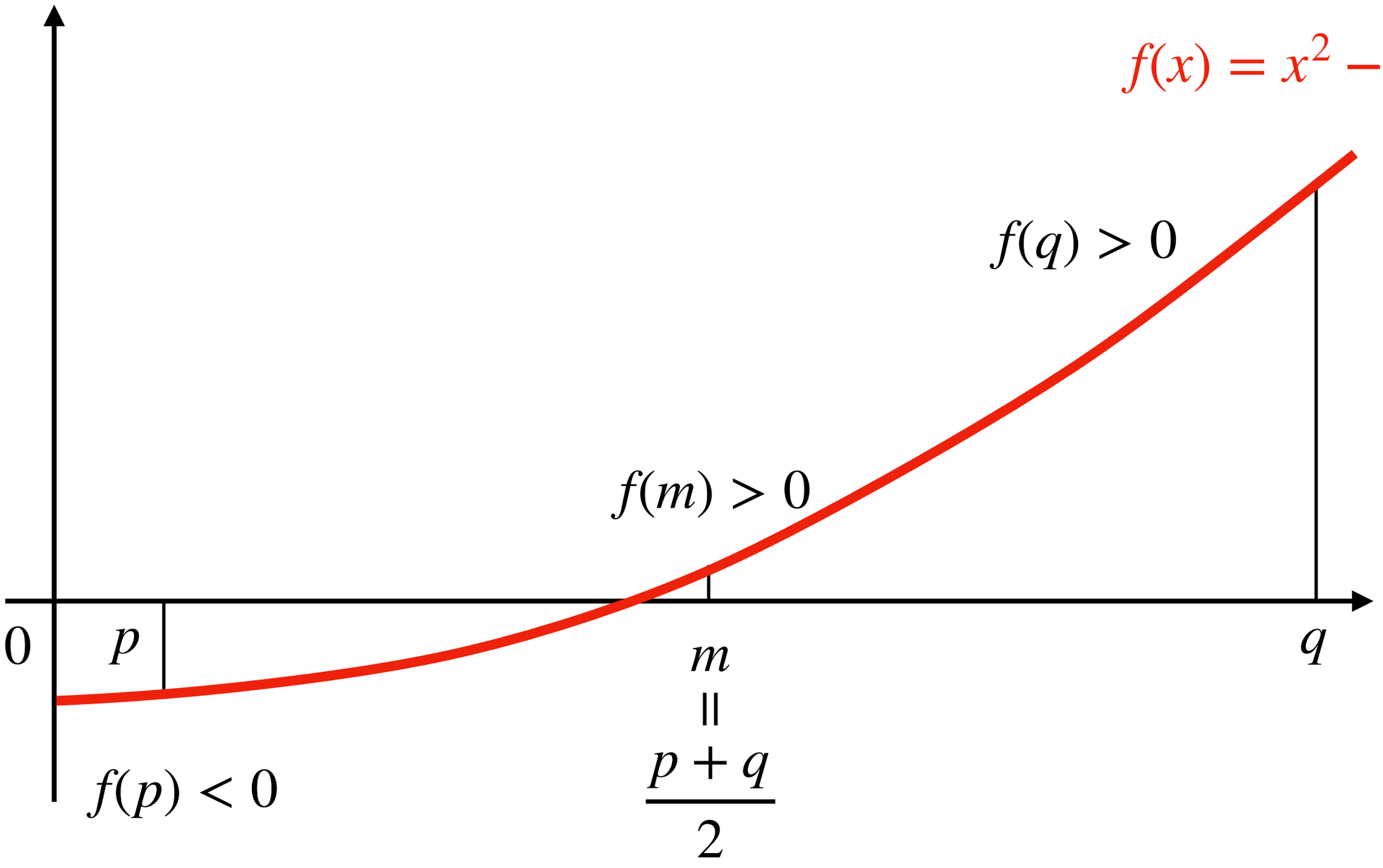
Approximations des zéros par recherche dichotomique



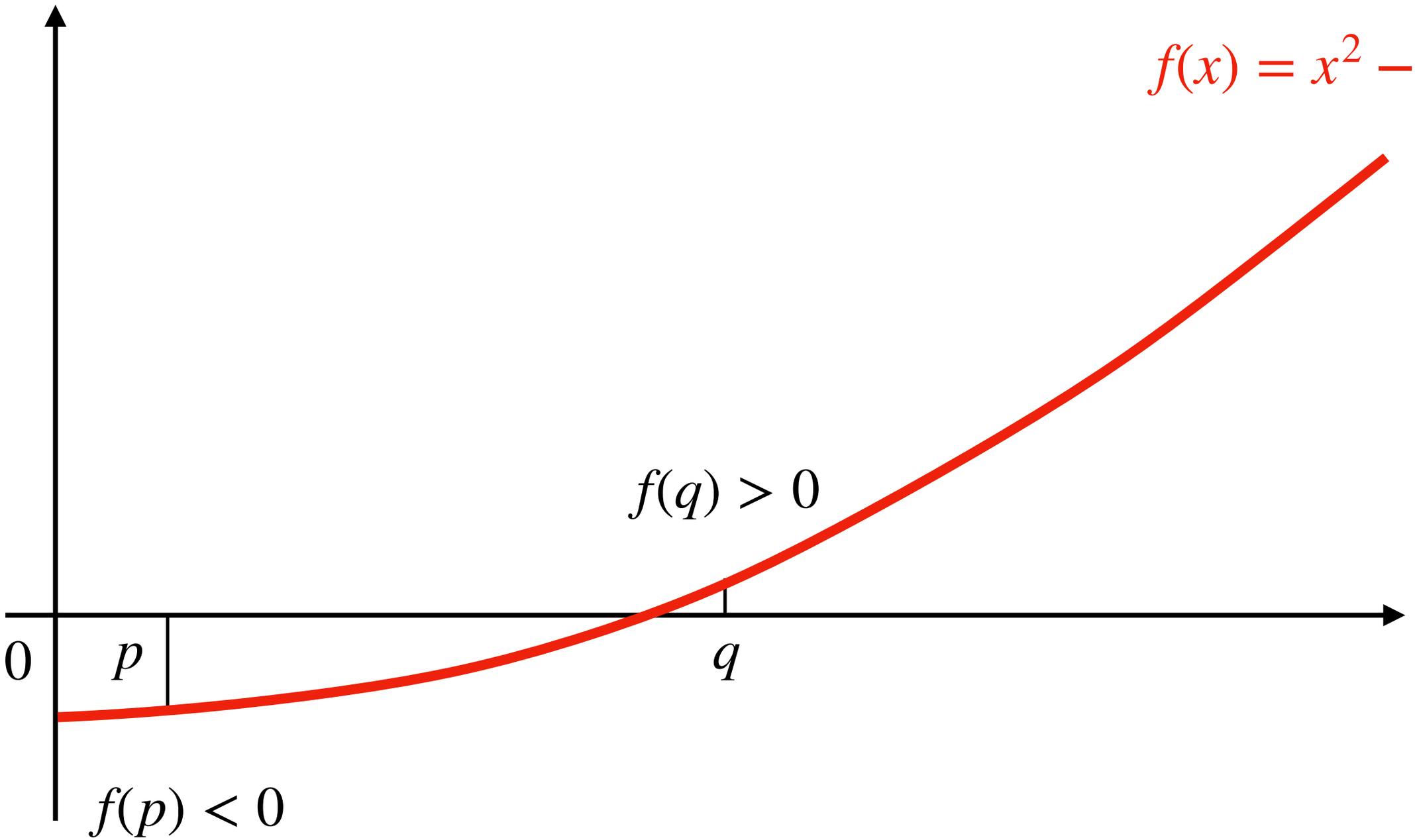
Approximations des zéros par recherche dichotomique



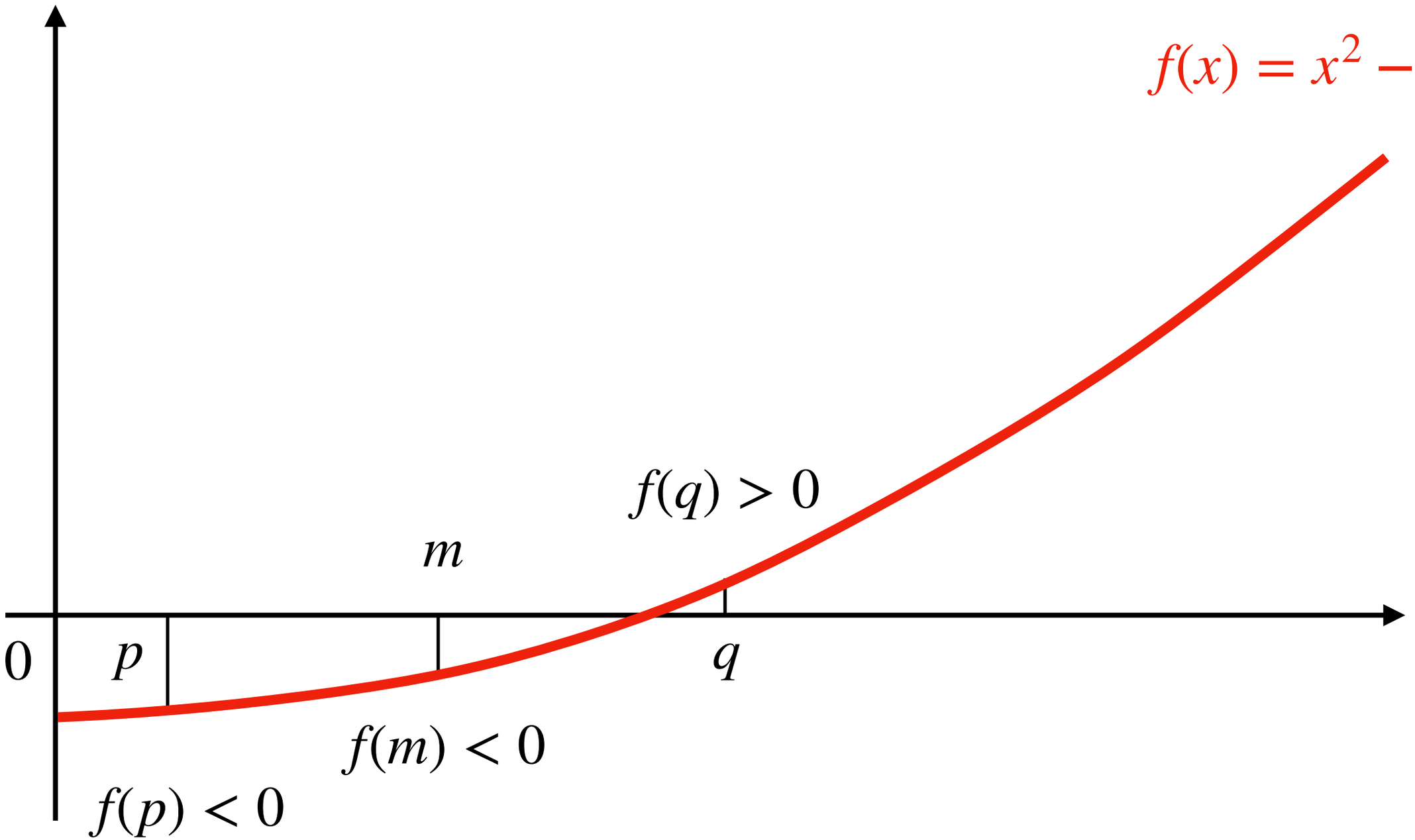
Approximations des zéros par recherche dichotomique



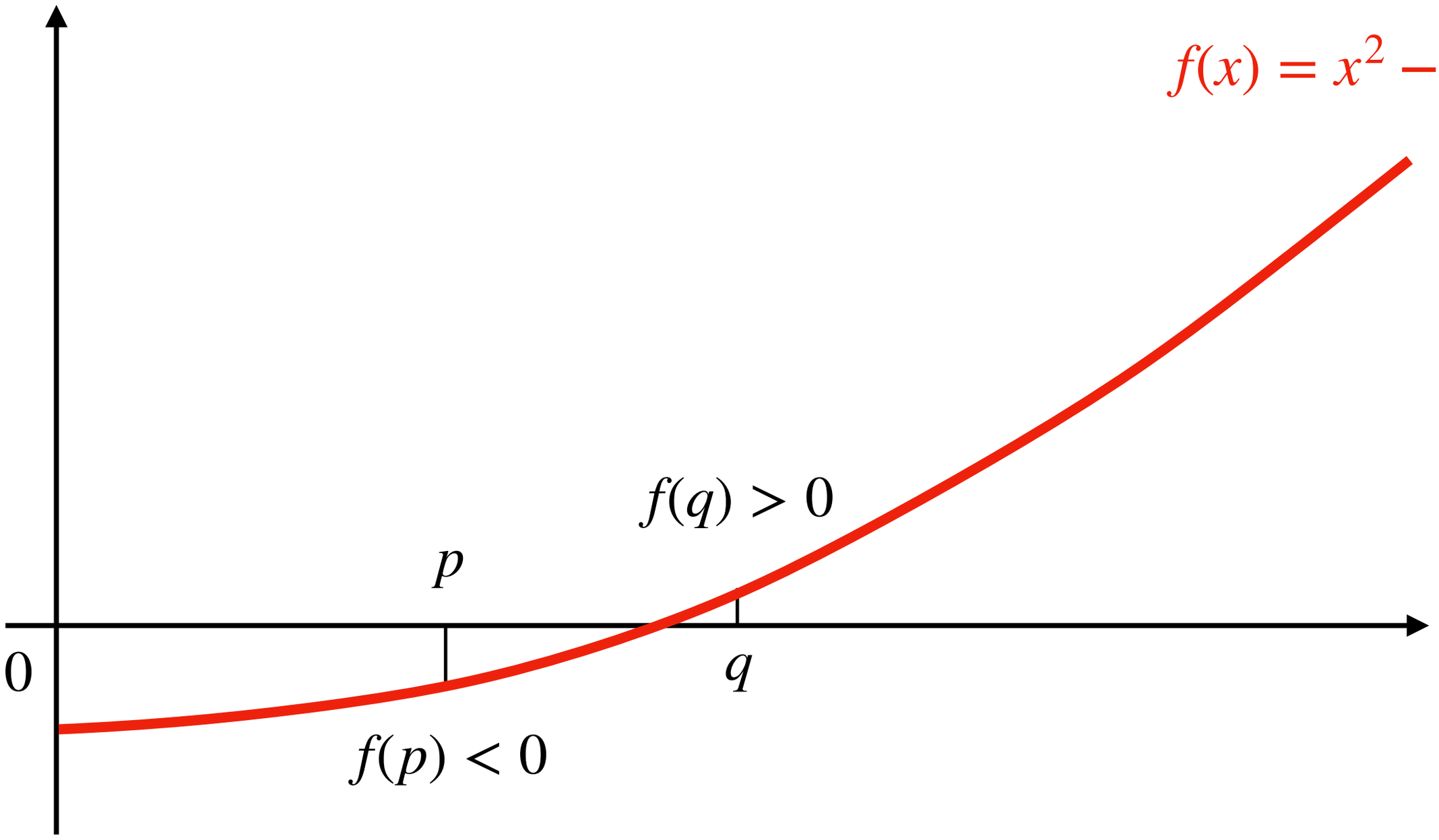
Approximations des zéros par recherche dichotomique



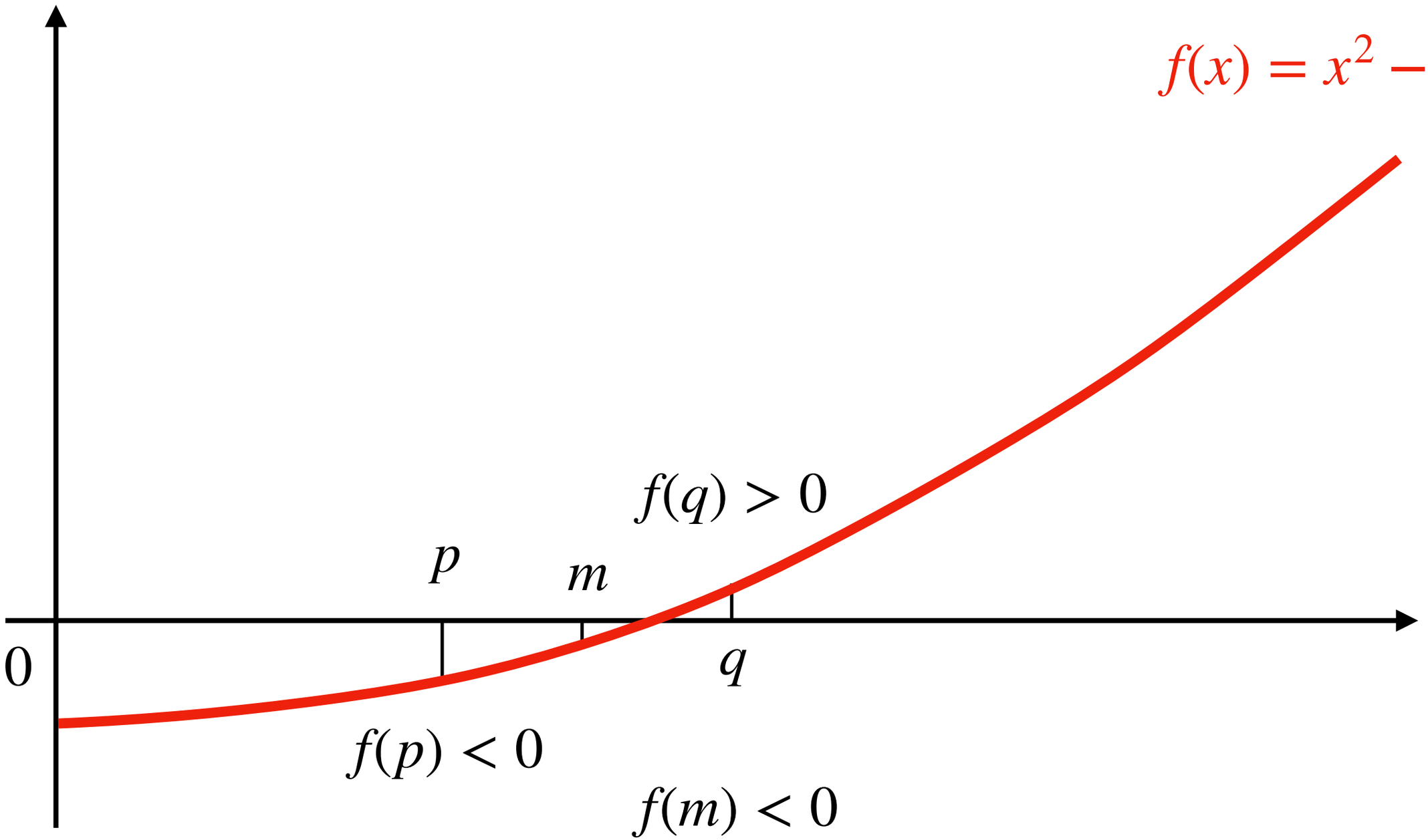
Approximations des zéros par recherche dichotomique



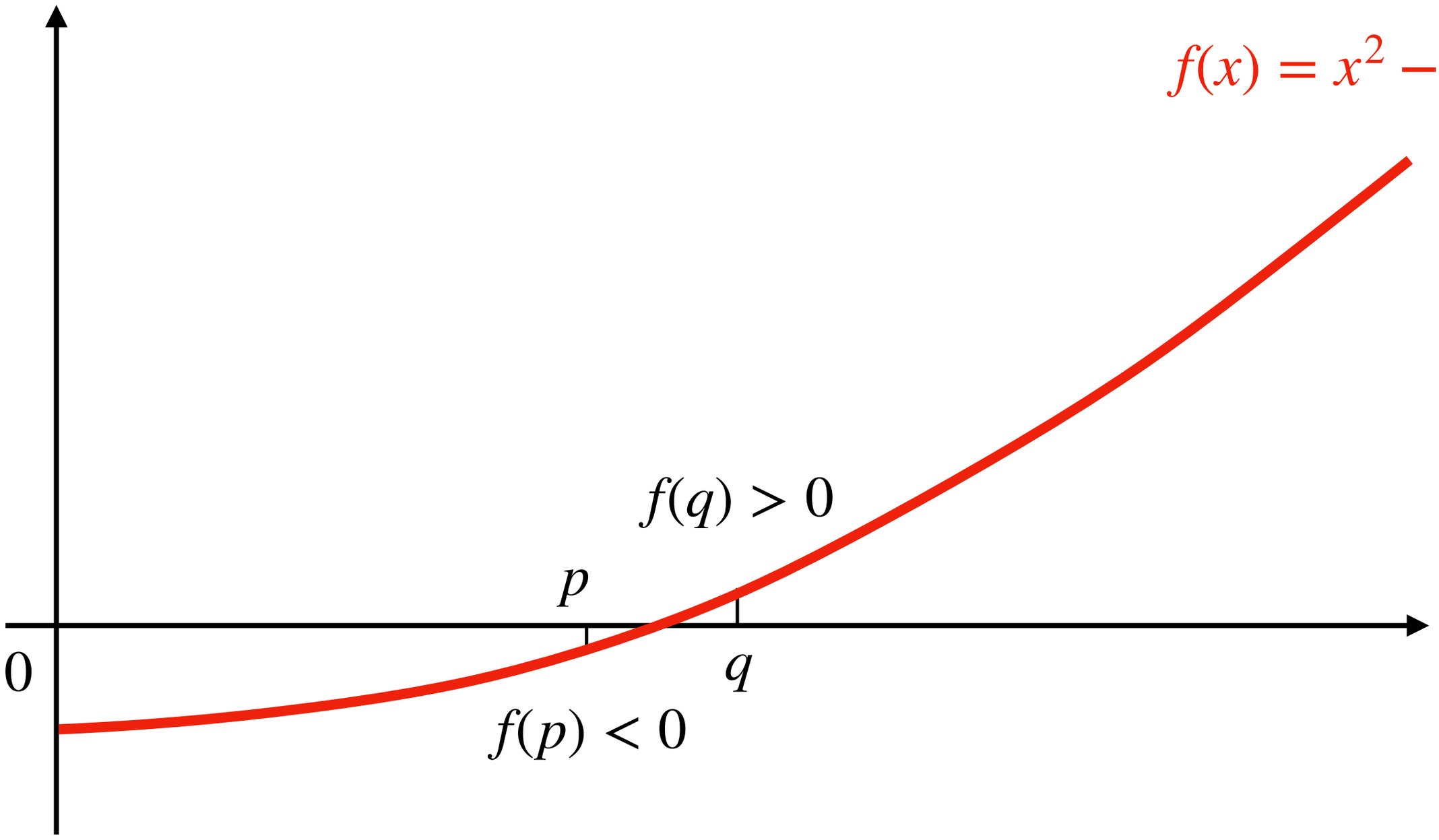
Approximations des zéros par recherche dichotomique



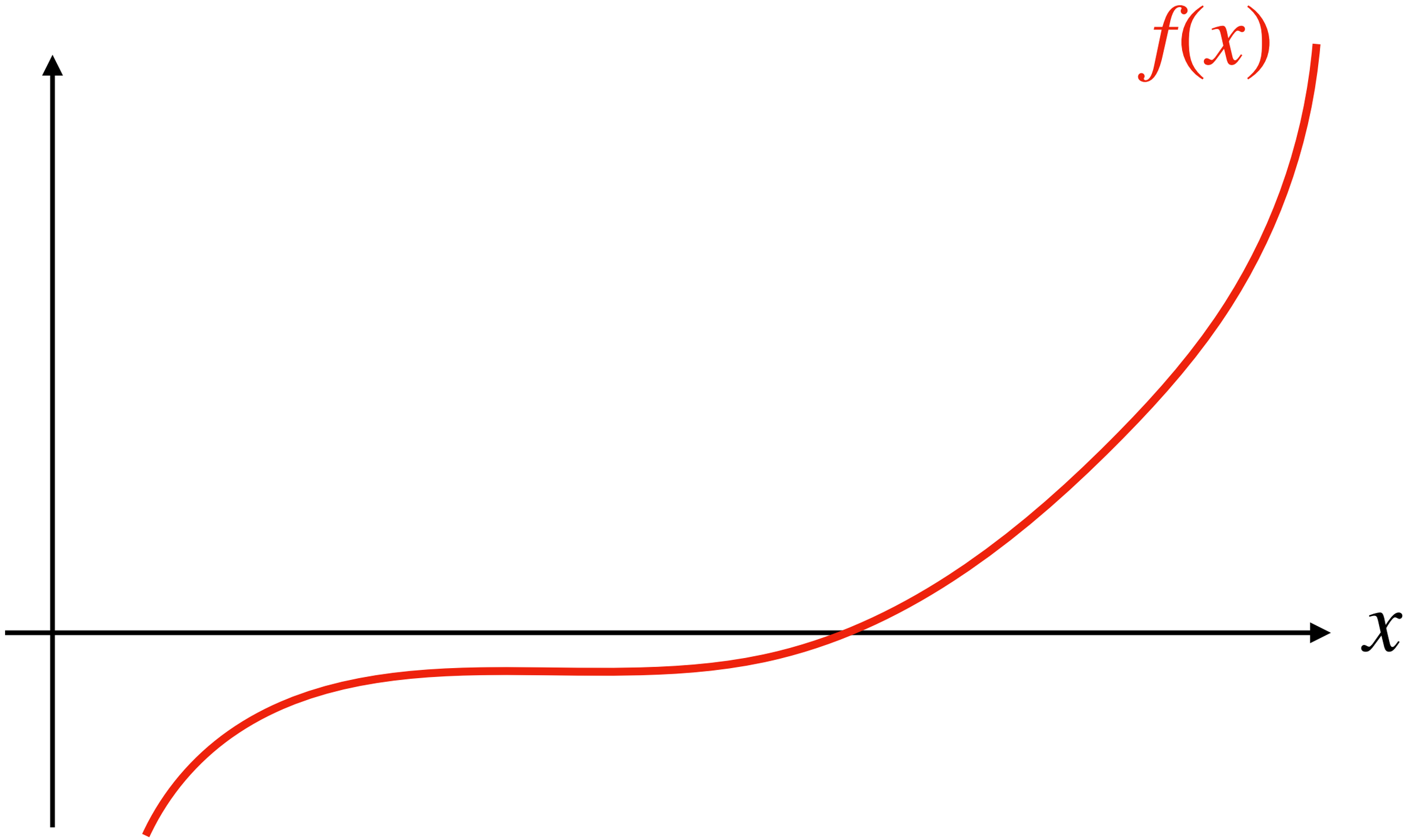
Approximations des zéros par recherche dichotomique



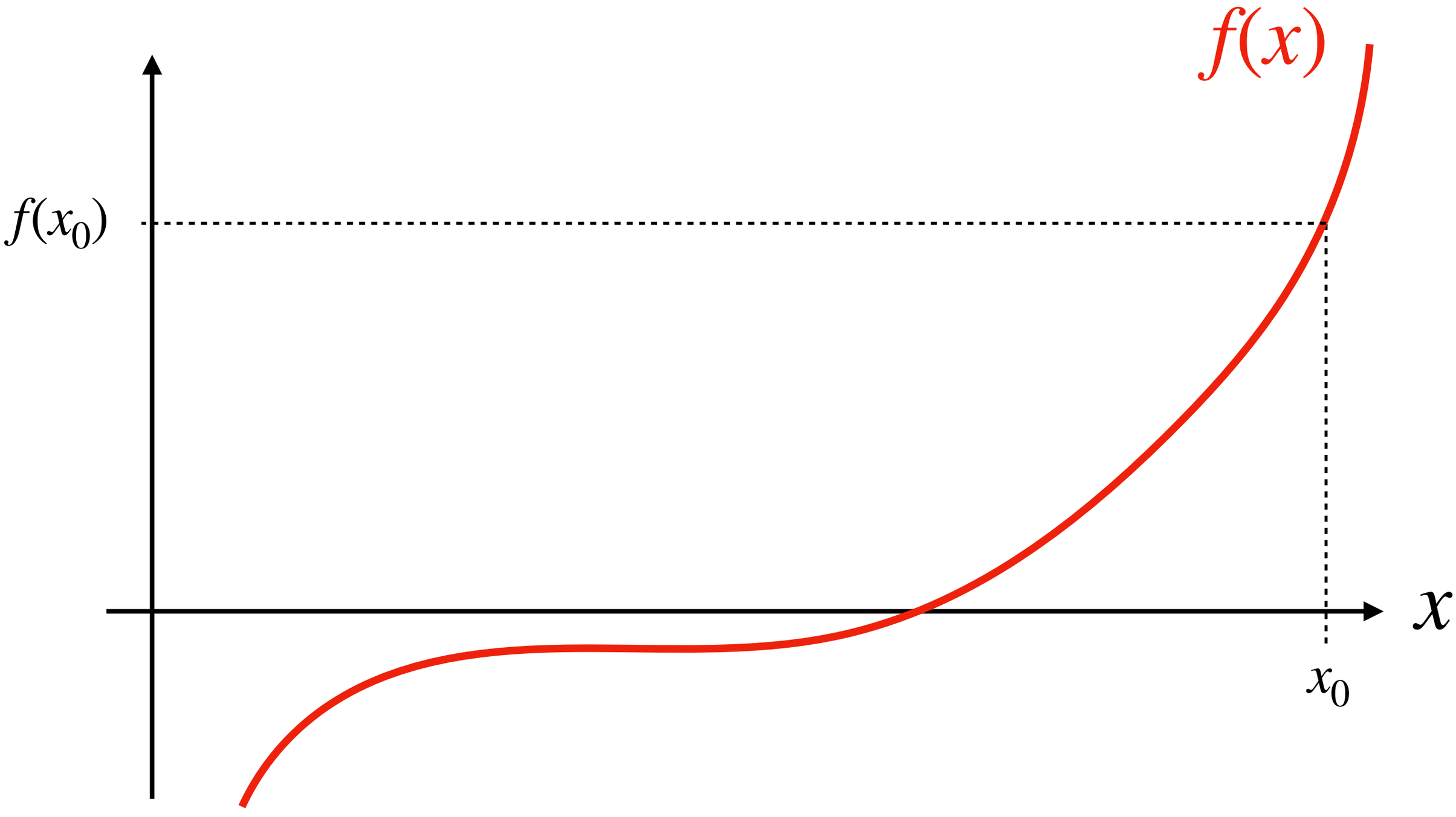
Approximations des zéros par recherche dichotomique



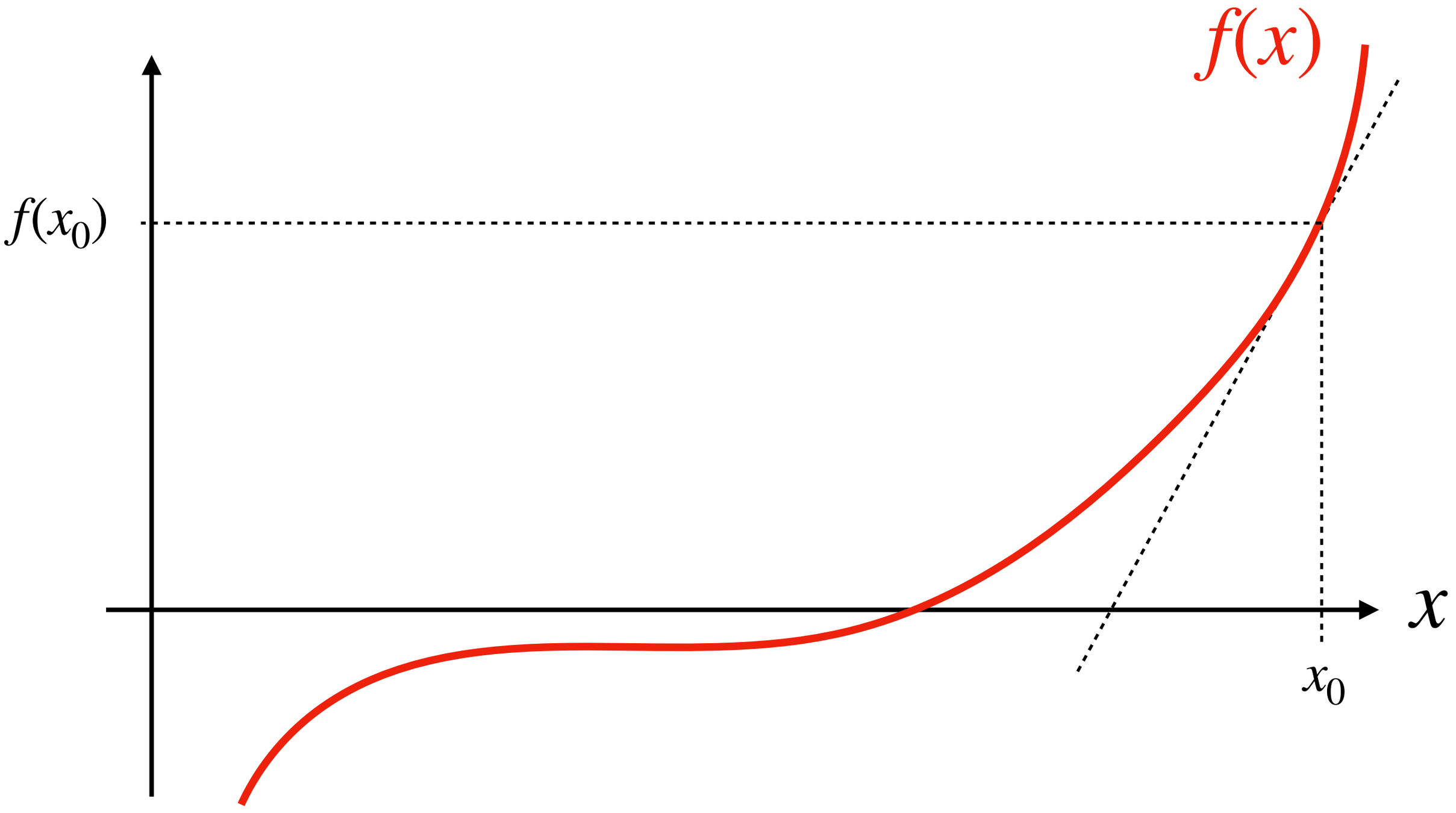
Méthode de la descente



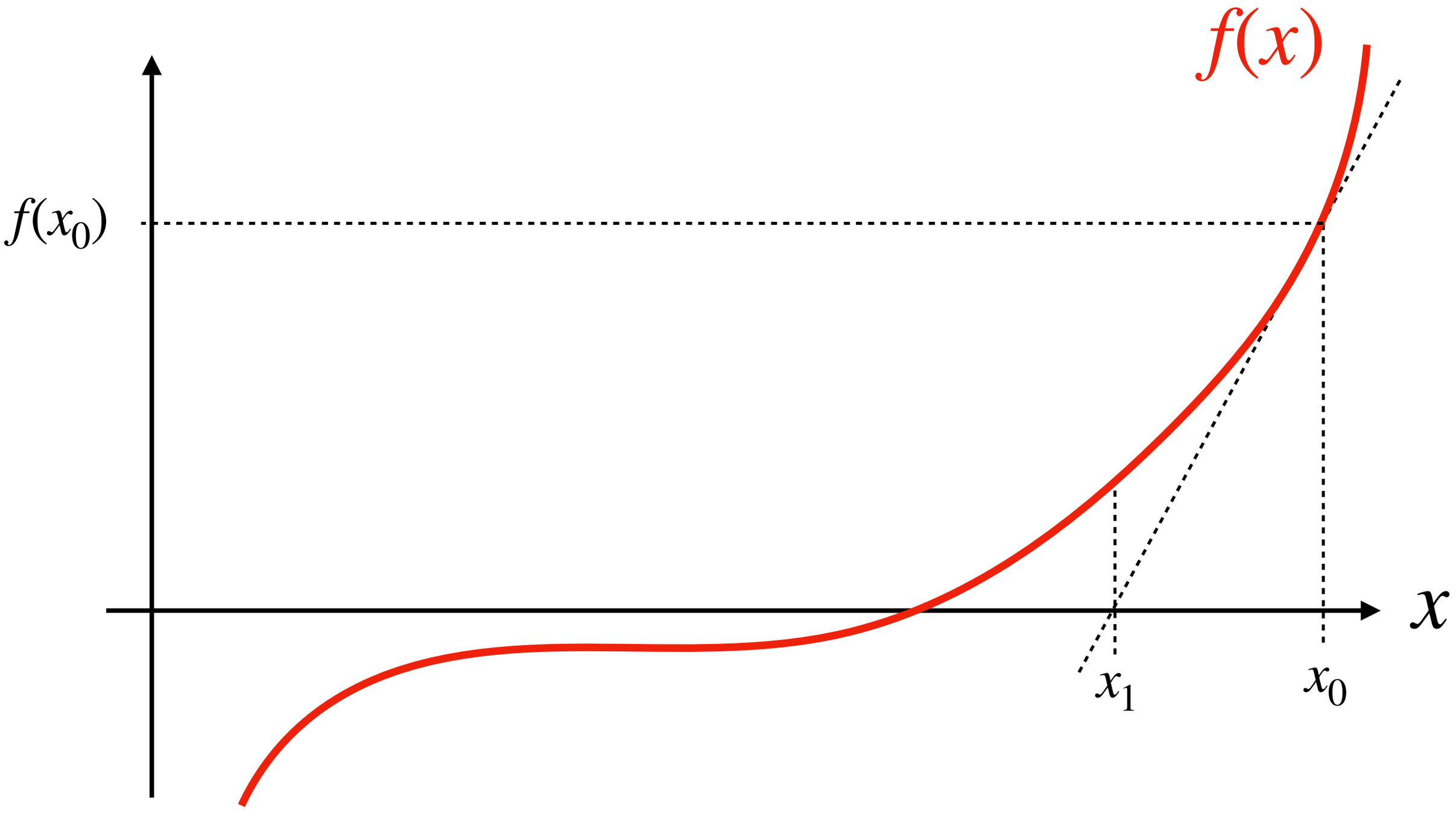
Méthode de la descente



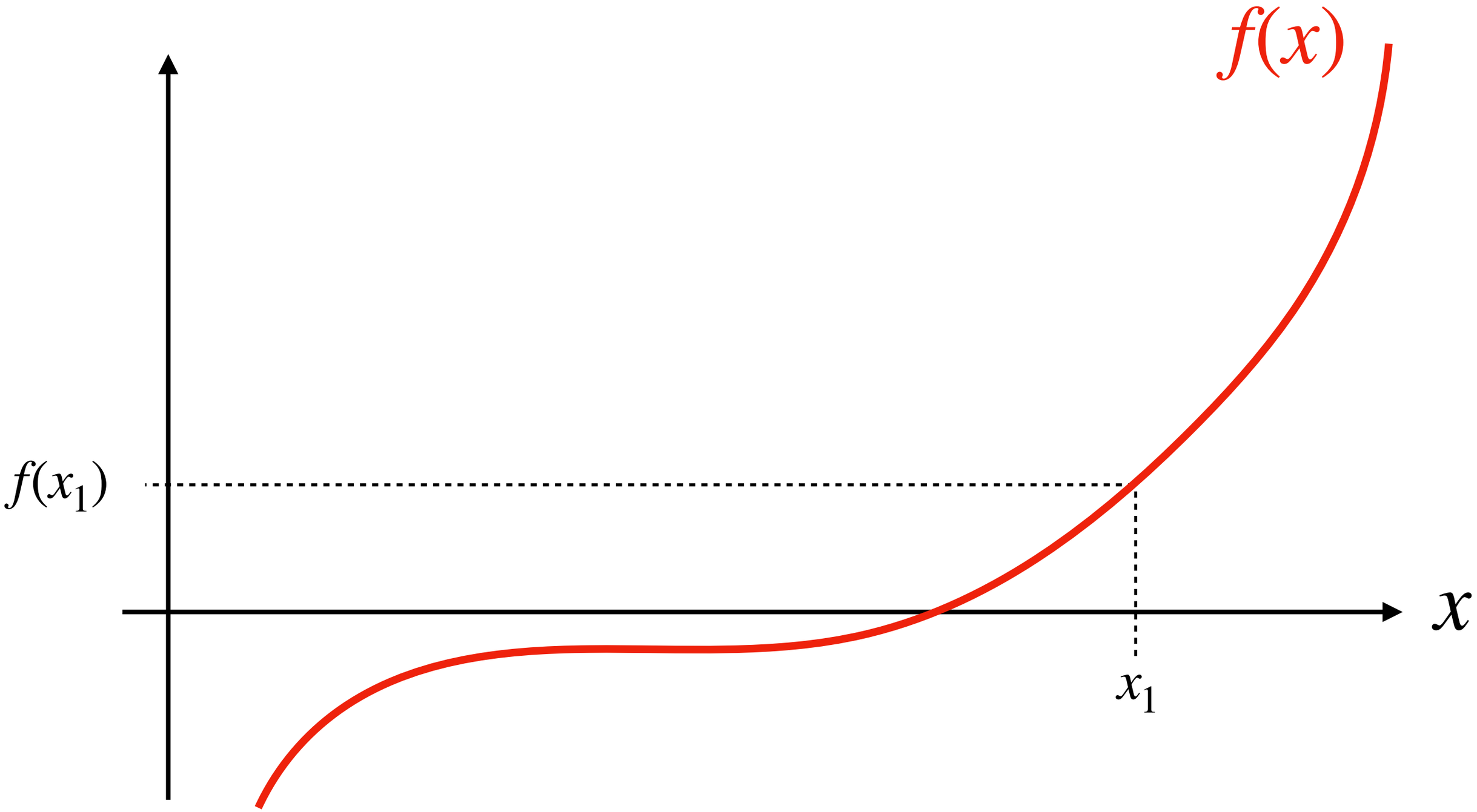
Méthode de la descente



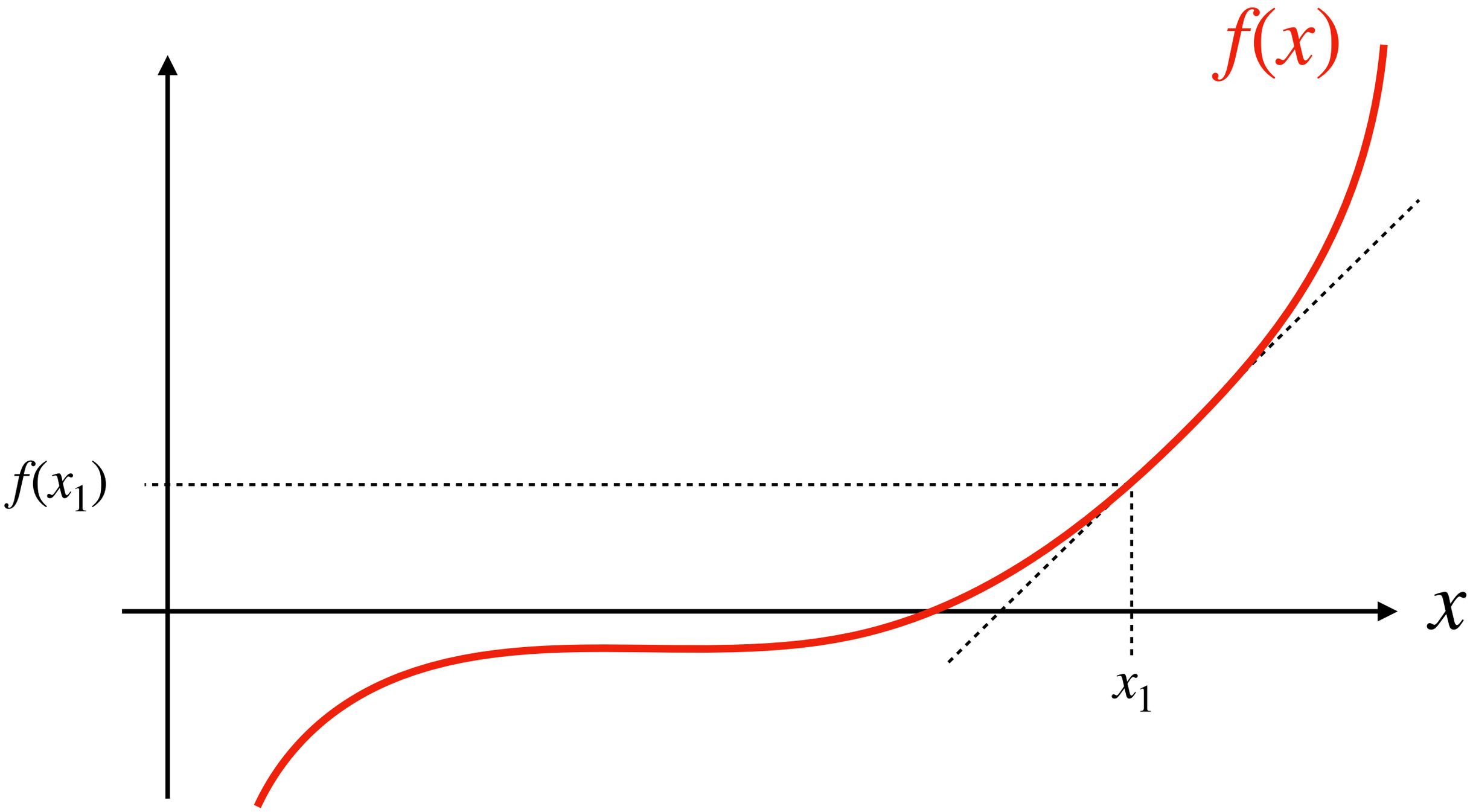
Méthode de la descente



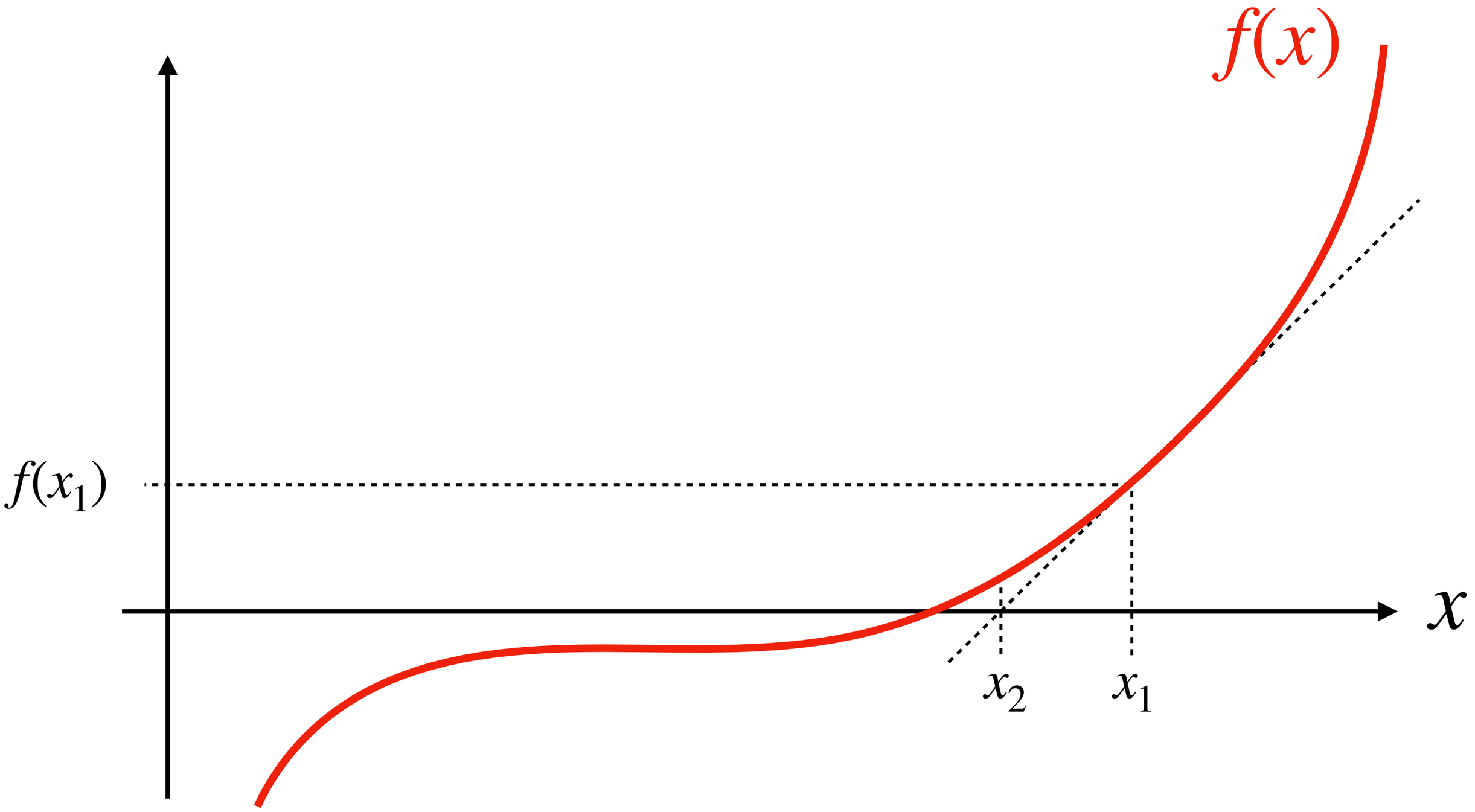
Méthode de la descente



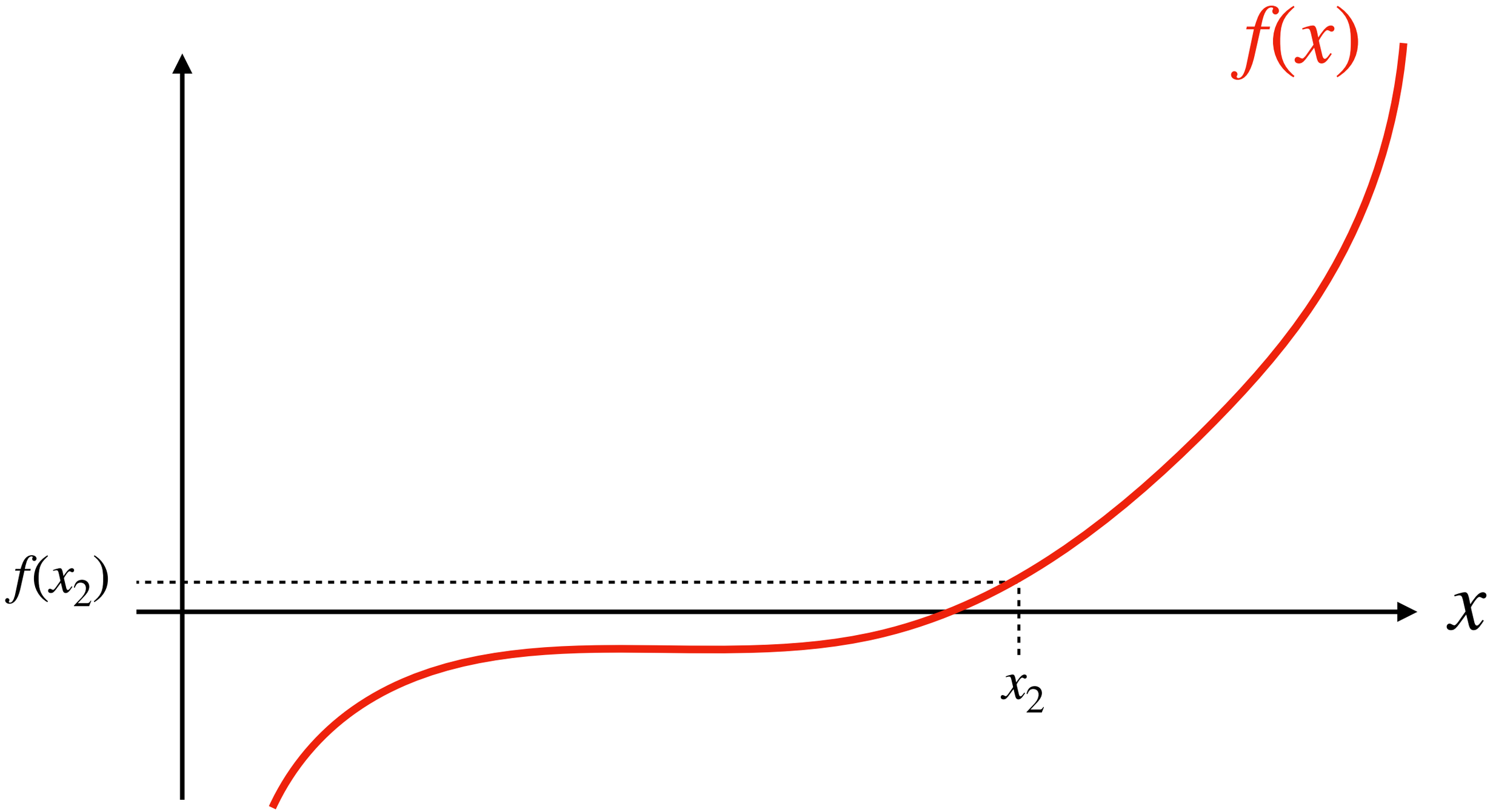
Méthode de la descente



Méthode de la descente



Méthode de la descente



Algorithme de Newton

fonction approx-zéro(f, x_0)
    a ≔ x_0
    tant que f(a) ≠ 0 **faire**
        tracer la tangente t en a
        a ≔ abscisse de l'intersection de t
                et de l'axe des abscisses
    fin tant que
    retourner a
fin fonction

Tracer la tangente

- La tangente à *f* en *a* est la droite d'équation

$$y = f(a) + (x - a)\, f'(a)$$

- On a $y = 0$ quand

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Algorithme de Newton

fonction approx-zéro(f, x_0)
    a ≔ x_0
    tant que f(a) ≠ 0 **faire**
        a ≔ a – f(a) / f’(a)
    fin tant que
    retourner a
fin fonction

Algorithme de Newton

fonction approx-zéro(f, f’, x_0)
    a ≔ x_0
    tant que f(a) ≠ 0 **faire**
        a ≔ a – f(a) / f’(a)
    fin tant que
    retourner a
fin fonction

Terminaison

fonction approx-zéro(f, f’, x_0, ε)
    a ≔ x_0
    tant que |f(a)| > ε **faire**
        a ≔ a – f(a) / f’(a)
    fin tant que
    retourner a
fin fonction

Représentation des réels en virgule flottante

Comment coder les réels ?

- Spoiler : on ne peut pas vraiment les traiter !
- On se débrouille avec des approximations
- Notation scientifique :

$$0{,}000312 = 3{,}12 \times 10^{-4}$$

Représentation flottante

- Notation scientifique finie binaire sur 32 bits

$$s \times m \times 2^k$$

- s = signe = +1 ou –1 = un bit (0 ou 1)
- m = mantisse = entier avec $1 \leq m < 2$ sur 23 bits
- k = exposant = entier avec $-126 \leq k \leq +127$ sur 8 bits

Représentation flottante
Un exemple

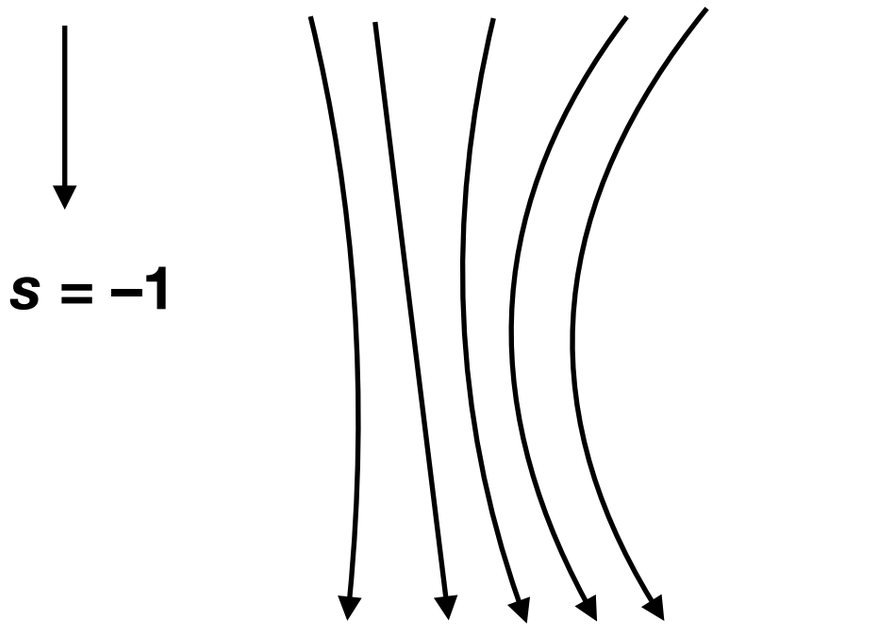
1 01101011 11011001100000000000000

Représentation flottante
Un exemple

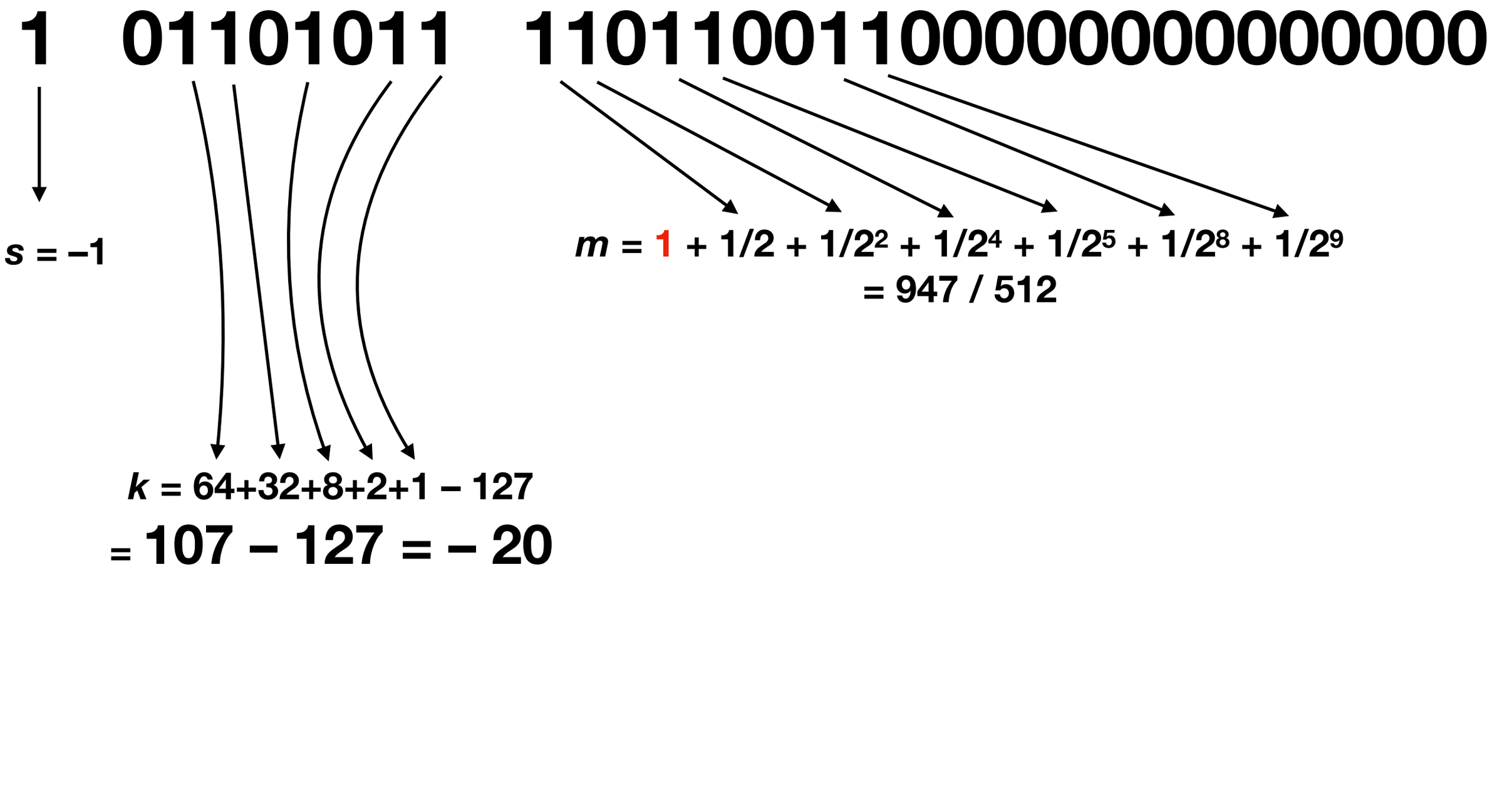
1 01101011 11011001100000000000000

$s = -1$

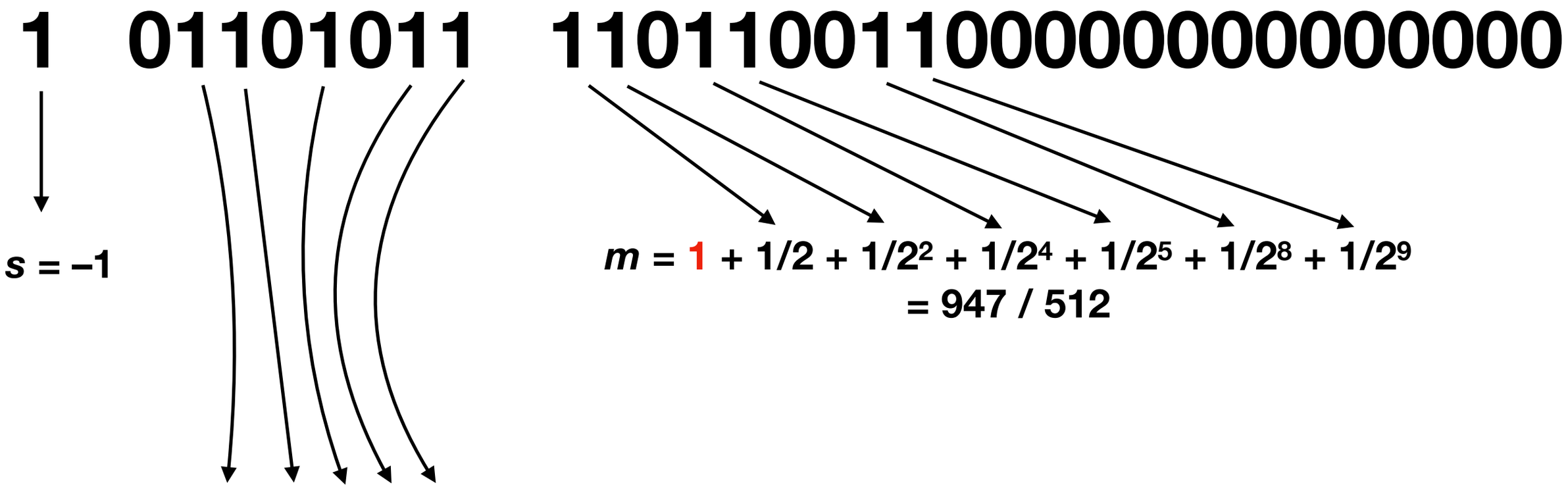
Représentation flottante
Un exemple



Représentation flottante
Un exemple



Représentation flottante
Un exemple



$$-947/512 \times 2^{-20} \cong 1{,}76 \times 10^{-6}$$

The End