Complexité CM7

Antonio E. Porreca
aeporreca.org/complexite

Diapositives basées sur le livre Complexité algorithmique par Sylvain Perifel

⚠️ Correction de l'exercice 2.3 du contrôle continu ⚠️

Montrer que le problème QUATRE-ENNEMIS est dans $\mathbf{P}$:

- Entrée : un graphe orienté $G = (V, E)$
- Question : le graphe G contient-il un ensemble V' de quatre sommets tels que aucune paire de sommets dans V' n'est relié par un arc ?

⚠️ Correction de l'exercice 2.3 du contrôle continu ⚠️

fonction quatre-ennemis(V, E)

    pour $u_0 \in V$ **faire** — $O(|V|)$

        pour $u_1 \in V - \{u_0\}$ **faire** — $O(|V|)$

            pour $u_2 \in V - \{u_0, u_1\}$ **faire** — $O(|V|)$

                pour $u_3 \in V - \{u_0, u_1, u_2\}$ **faire** — $O(|V|)$

                    $V' := \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$

                    $bon :=$ vrai

                    pour v dans V' **faire**

                        pour w dans V' **faire**

                            si $(v, w) \in E$ **alors**

                                $bon :=$ faux

                    si bon **alors**

                        retourner vrai

    retourner faux

$O(1)$

$O\big(|V|^4\big) \leq O(n^4)$

Précédemment dans Complexité…

⚠️ Définition 3-A (p. 64) ⚠️

Réductions (many-one) polynomiales

- Une réduction (many-one) en temps polynomial d'un problème L_1 (sur l'alphabet Σ_1) à un problème L_2 (sur l'alphabet Σ_2) est une fonction $f\colon \Sigma_1^\star \to \Sigma_2^\star$ calculable en temps polynomial telle que

$$\forall x \in \Sigma_1^\star \quad x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$$

- Si une telle f existe, on dit que L_1 se réduit à L_2 (via f) et on notera $L_1 \leq_{\mathrm{m}}^{\mathbf{P}} L_2$ (ou parfois, en bref, $L_1 \leq L_2$)

⚠️ Definition 3-J (p. 67) ⚠️
Difficulté et complétude

Soit L un problème et $\mathscr{C}$ une classe de complexité

- On dit que L est $\mathscr{C}$-difficile (ou $\mathscr{C}$-dur) si pour tout problème $L' \in \mathscr{C}$ on a $L' \leq L$
- On dit que L est $\mathscr{C}$-complet s'il est $\mathscr{C}$-difficile et en plus on a $L \in \mathscr{C}$

$\mathbf{P}$ a (beaucoup de) problèmes complets

- Tout problème $L \in \mathbf{P}$ non trivial (c'est-à-dire, $L \neq \emptyset$ et $L \neq \Sigma^\star$) est $\mathbf{P}$-complet pour les reductions en temps polynomial

- Ça veut dire que cette notion de complétude n'est pas très intéressant pour $\mathbf{P}$…

Et maintenant,
la suite

Il existe bien des problèmes $\mathbf{NP}$-complets,
ou : on est pas là pour perdre notre temps

Proposition 3-M (p. 68)

La prédiction est $\mathbf{NP}$-complète

Le problème suivant est $\mathbf{NP}$-complet :

$$A = \{(\langle N \rangle, x, 1^t) : N(x) \text{ accepte en temps } \leq t\}$$

code d'une MT non deterministe

mot d'entrée pour la MT N

entier $t \in \mathbb{N}$ en unaire

💡 Idée de la démonstration

- $A \in \mathbf{NP}$ parce qu'on peut simuler $N(x)$ avec une machine de Turing universelle non déterministe

- Pour tout $B \in \mathbf{NP}$, on a $B \leq A$ parce qu'on peut prévoir le résultat de la machine N_B qui reconnaît B

    - Le problème A est, justement, la prédiction du résultat d'une TM non déterministe

Démonstration : $A \in \mathbf{NP}$

- Soit U une machine non déterministe efficace
- Voilà un algorithme pour décider si $(\langle N \rangle, x, 1^t) \in A$:
  - Simuler $N(x)$ pendant t étapes en exécutant $U(\langle N \rangle, x)$
  - Si $U(\langle N \rangle, x)$ accepte en $\leq t$ étapes, accepter
  - Si elle rejette ou elle n'a pas terminé en t étapes, rejeter
- Comme U simule N en temps polynomial,
  cet algorithme fonctionne aussi en temps polynomial

Démonstration :

$$\forall B \in \mathbf{NP}, B \leq A$$

- Soit $B \in \mathbf{NP}$ et soit N_B une machine non déterministe qui reconnait B en temps polynomial $p(n)$

- Donc on connaît N_B et son temps de calcul $p(n)$, puisque c'est nécessaire pour prouver que $B \in \mathbf{NP}$

- Voilà la réduction : $f(x) = (\langle N_B \rangle, x, 1^{p(|x|)})$

- $x \in B$ ssi $N_B(x)$ accepte en temps $\leq p(|x|)$ ssi $f(x) \in A$

- f est calculable en temps polynomial

f est calculable en temps polynomial, par exemple si N_B fonctionne en temps $p(n) = n^3 - 3n + 7$

fonction $f(x)$		
écrire "(" sur le ruban de sortie		
écrire le code $\langle N_B \rangle$ sur le ruban de sortie	$O(1)$	
écrire "," sur le ruban de sortie		
écrire x sur le ruban de sortie	$O(n)$	
écrire "," sur le ruban de sortie	$O(1)$	
pour $i := 1$ **à** n **faire**		
pour $j := 1$ **à** n **faire**	$O(n^3)$	
pour $k := 1$ **à** n **faire**		$O(p(n))$
écrire 1 sur le ruban de travail		
pour $i := 1$ **à** 3 **faire**		
pour $j := 1$ **à** n **faire**	$O(n)$	
effacer 1 du ruban de travail		
pour $i := 1$ **à** 7 **faire**	$O(1)$	
écrire 1 du ruban de travail		
copier le ruban de travail sur le ruban de sortie	$O(p(n))$	
écrire ")" sur le ruban de sortie	$O(1)$	
fin		

⚠️ Remarque ⚠️

- Ouais, on est bien d'accord, ce n'est pas un problème très interessant… 🙄
- C'est un problème ad-hoc calqué sur la definition de **NP**
- La **NP**-complétude devient pertinente lorsqu'elle concerne des problems naturels
- On verra qu'il y en a plein de naturels !

Les problèmes **NP**-complets,
ou entrons enfin
dans le vif du sujet

Proposition 3-P (p. 69)

$\mathbf{NP}$-complétude : tout ou rien

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$
2. tout problème $\mathbf{NP}$-complet est dans $\mathbf{P}$
3. il existe un problème $\mathbf{NP}$-complet dans $\mathbf{P}$

Démonstration

- Si $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ (1), alors en particulier $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{P}$,
  donc tout problème $\mathbf{NP}$-complet est dans $\mathbf{P}$ (2)

- Si tout problème $\mathbf{NP}$-complet est dans $\mathbf{P}$ (2),
  vu qu'il existe au moins un problème $\mathbf{NP}$-complet,
  alors il existe un problème $\mathbf{NP}$-complet dans $\mathbf{P}$ (3)

- S'il existe un problème $\mathbf{NP}$-complet A dans $\mathbf{P}$ (3),
  alors on peut le résoudre en temps polynomial.
  Mais comme $B \leq A$ pour tout $B \in \mathbf{NP}$,
  alors $B \in \mathbf{P}$ aussi, donc $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{P}$, donc $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ (1)

⚠️ Proposition 3-W (p. 76) ⚠️

$\mathbf{NP}$-complétude par réduction

- Soit C un problème $\mathbf{NP}$-complet et $A \in \mathbf{NP}$
- Si $C \leq A$ alors A est aussi $\mathbf{NP}$-complet

Démonstration

- Soit $B \in \mathbf{NP}$ n'importe quel problème dans $\mathbf{NP}$
- Comme C est $\mathbf{NP}$-complet, on a $B \leq C$
- Si $C \leq A$, alors $B \leq A$ aussi par transitivité de $\leq$
- Ça vaut pour tout $B \in \mathbf{NP}$, donc A est $\mathbf{NP}$-difficile
- Et comme $A \in \mathbf{NP}$ aussi, il est $\mathbf{NP}$-complet

👍

⚠️ Remarque ⚠️

- On vient d'utiliser la notion de réduction $C \leq A$, qui montre qu'un peut résoudre C efficacement si on a une solution efficace pour A…
- …d'une façon perverse, pour montrer que A n'a pas de solution efficace* !
- Autrement dit, si C est difficile est A est au moins aussi difficile que C, alors A est difficile aussi

* Dans l'hypothèse que $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$

⚠️ Théorème 3-V (p. 72) ⚠️

Théorème de Cook-Levin

- Considérons le problème SAT :
  - Entrée : une formule booléenne φ
  - Question : φ est-elle satisfaisable ?
- SAT est $\mathbf{NP}$-complet
- On verra la démonstration dans un prochain épisode

Proposition 3-Z (p. 77)
3SAT est $\mathbf{NP}$-complet

- Considérons le problème 3SAT :

  - Entrée : une formule booléenne φ en forme normale conjonctive avec au plus 3 littéraux par clause, par exemple :

$$\varphi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

  - Question : φ est-elle satisfaisable ?

- 3SAT est $\mathbf{NP}$-complet

💡 Idée de la démonstration

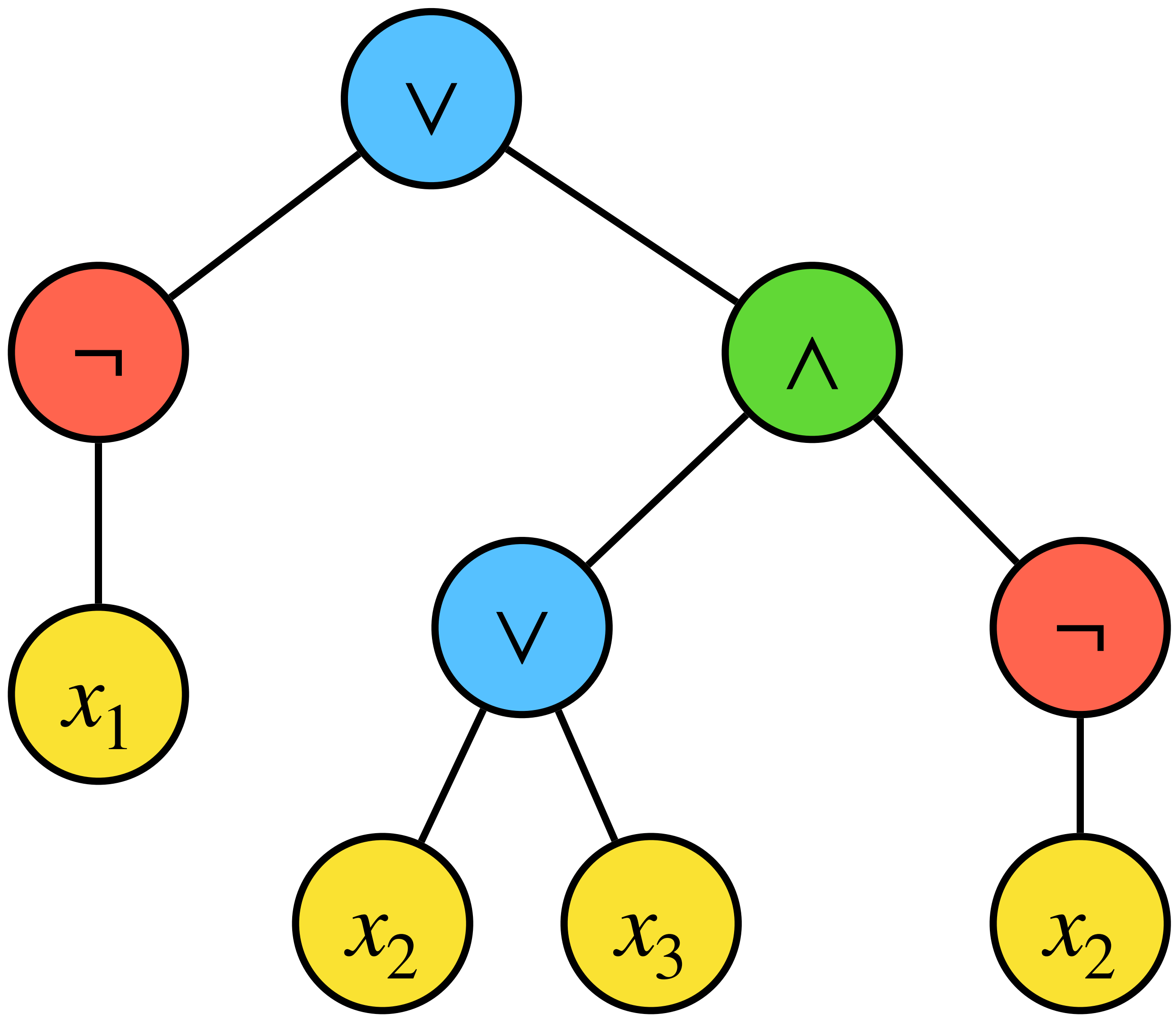
- On voit une instance $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de SAT
  sous la forme d'un arbre syntaxique

- Tester sa satisfaisabilité revient alors à deviner les valeurs de $x_1, \ldots, x_n$ et celles des nœuds de l'arbre et tester
  la cohérence de ces choix

- Ce test est local à chaque nœud de l'arbre
  et nécessite seulement des clauses contenant trois littéraux car le degré d'un sommet de l'arbre
  est au plus 3 (un père et au plus deux fils)

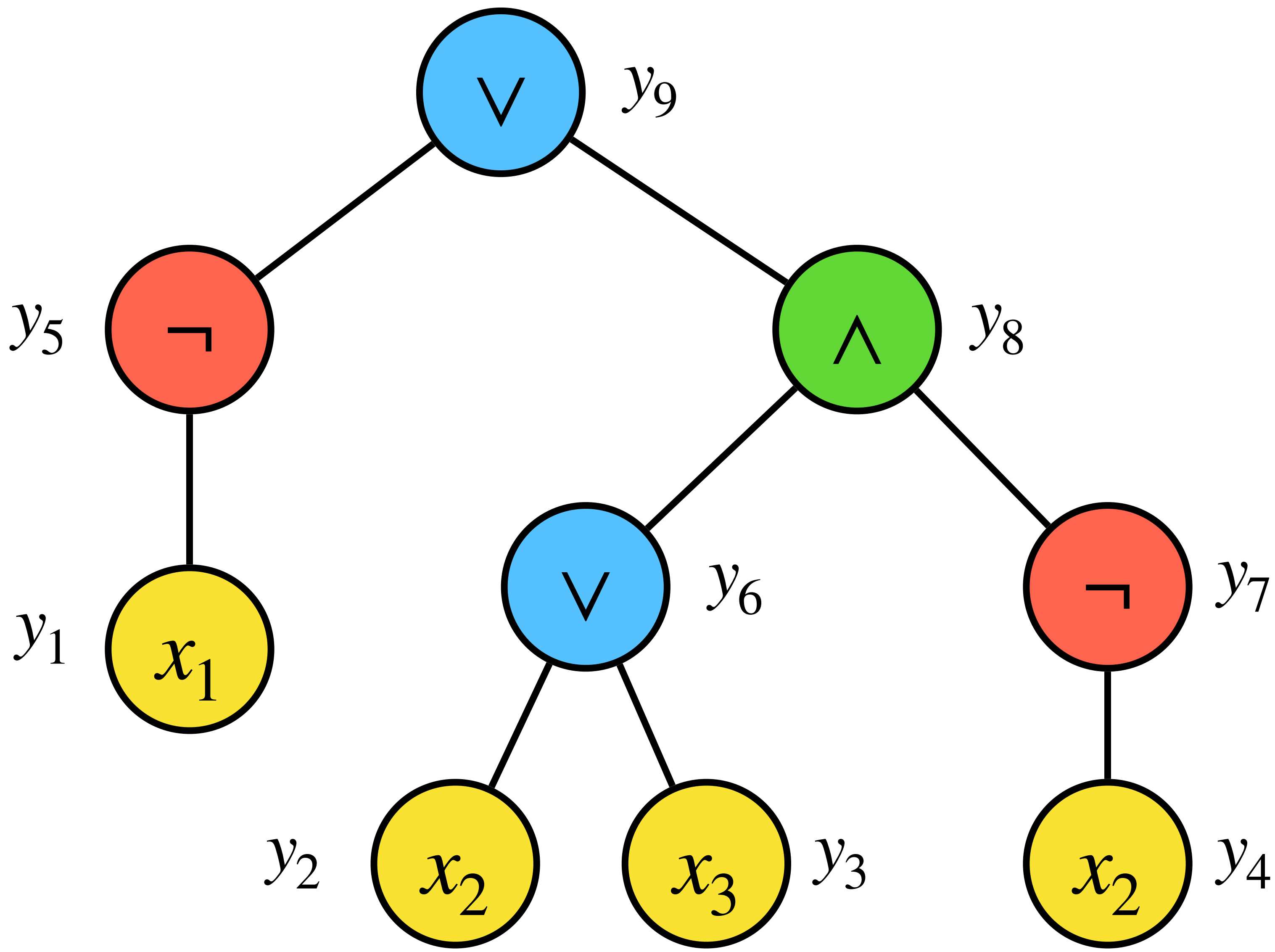
Démonstration

$$\varphi = (\neg x_1) \vee \big((x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2)\big)$$

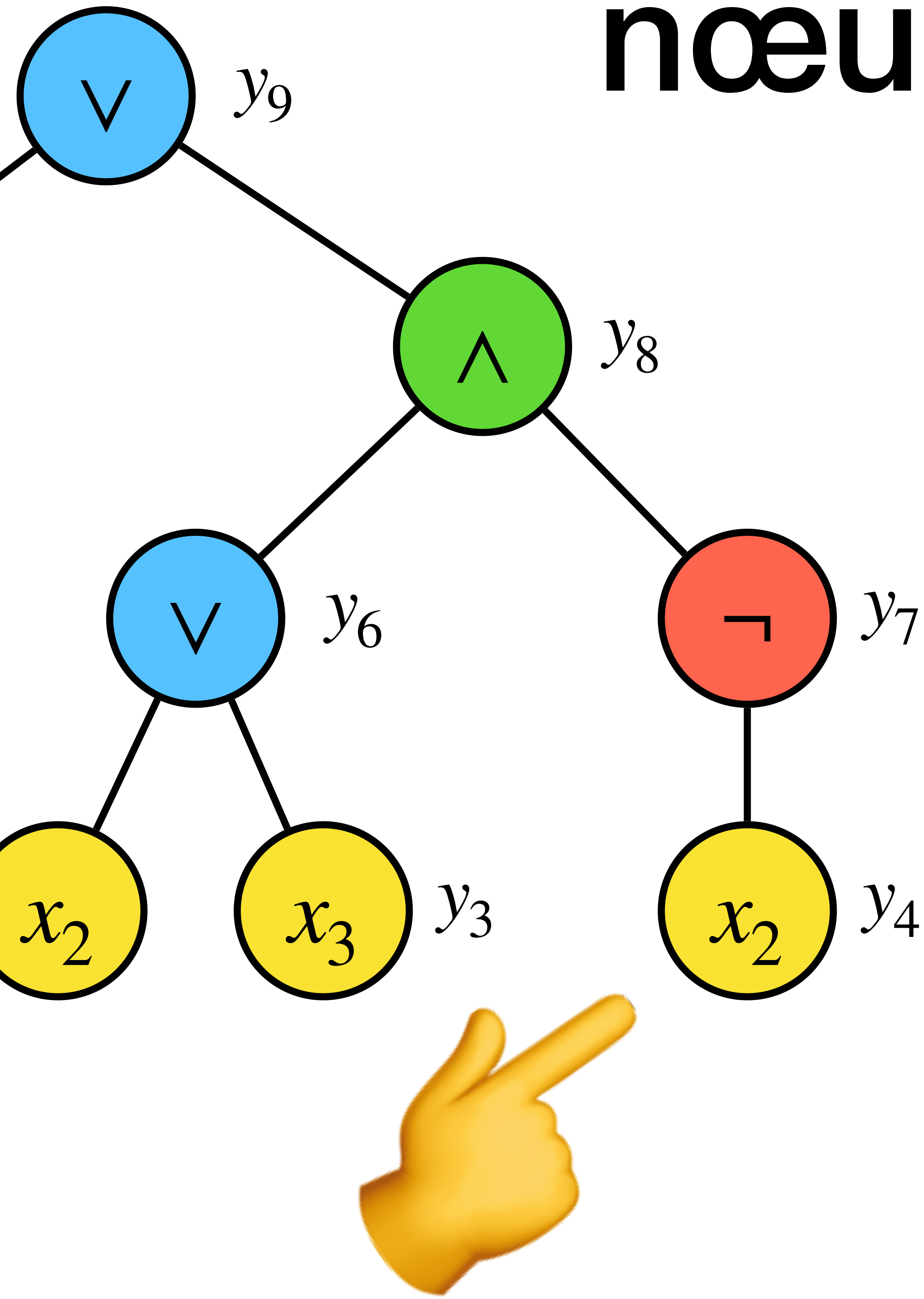


Démonstration

$$\varphi = (\neg x_1) \vee \left((x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2)\right)$$



Description des valeurs des nœuds de l'arbre



$$y_4 \iff x_2$$

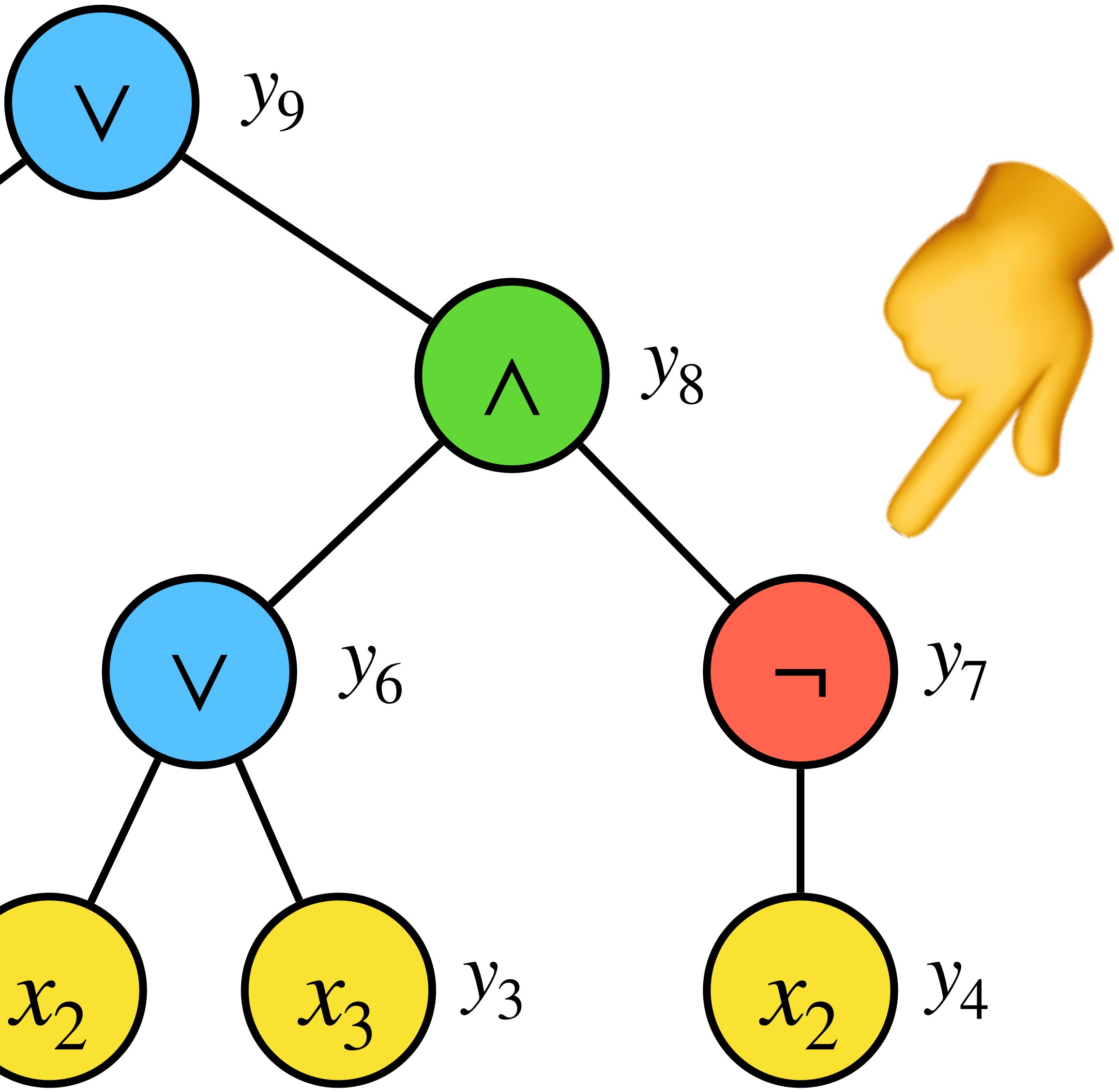
$$\downarrow$$

$$(y_4 \Rightarrow x_2) \wedge (x_2 \Rightarrow y_4)$$

$$\downarrow$$

$$(\neg y_4 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee y_4)$$

Description des valeurs des nœuds de l'arbre



$$y_7 \iff \neg y_4$$

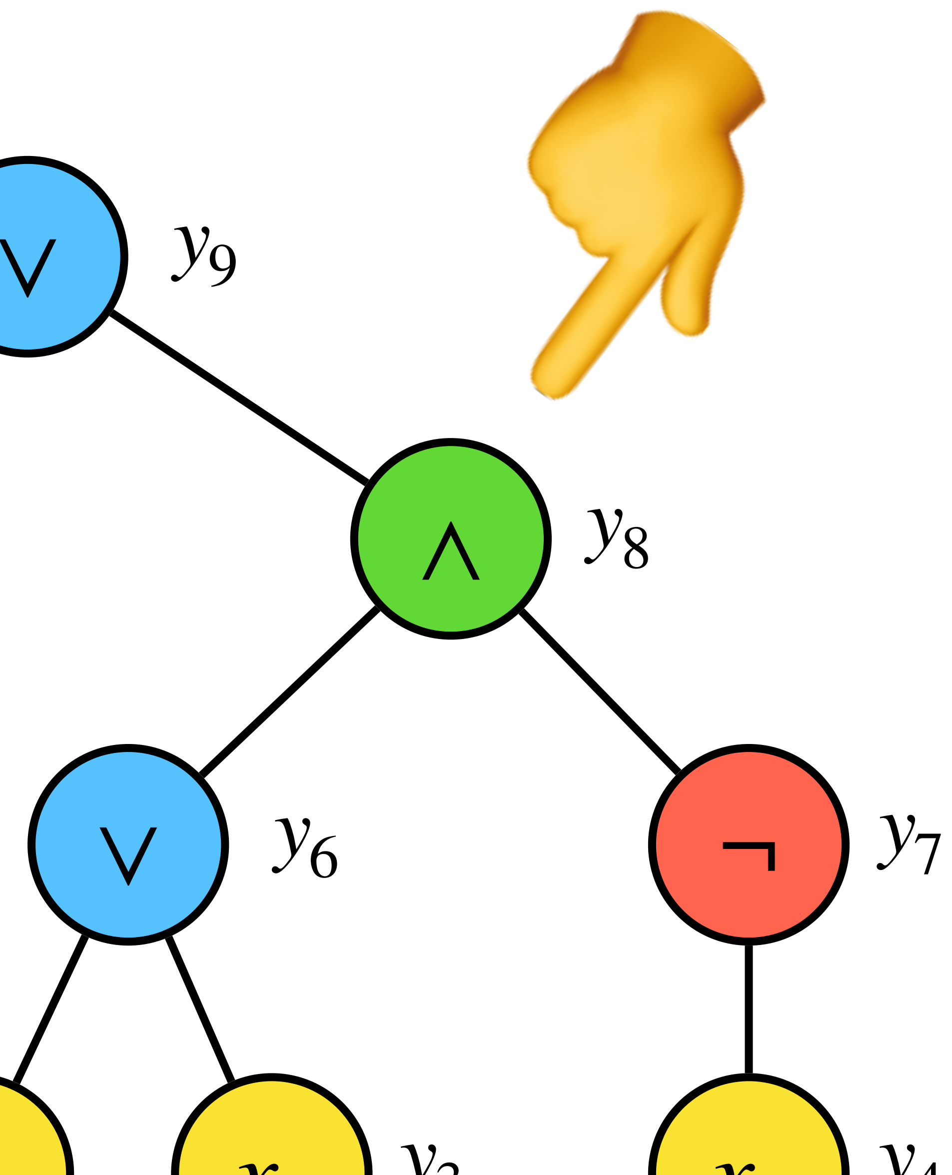
$$\downarrow$$

$$(y_7 \Rightarrow \neg y_4) \land (\neg y_4 \Rightarrow y_7)$$

$$\downarrow$$

$$(\neg y_7 \lor \neg y_4) \land (y_4 \lor y_7)$$

Description des valeurs des nœuds de l’arbre



$$y_8 \iff y_6 \land y_7$$

$$\downarrow$$

$$(y_8 \Rightarrow y_6 \land y_7) \land (y_6 \land y_7 \Rightarrow y_8)$$

$$\downarrow$$

$$(\neg y_8 \lor (y_6 \land y_7)) \land (\neg(y_6 \land y_7) \lor y_8))$$

$$\downarrow$$

$$(\neg y_8 \lor y_6) \land (\neg y_8 \lor y_7) \land (\neg y_6 \lor \neg y_7 \lor y_8)$$

Description des valeurs des nœuds de l'arbre

$$y_9 \iff y_5 \lor y_8$$

$$\downarrow$$

$$(y_9 \Rightarrow y_5 \lor y_8) \land (y_5 \lor y_8 \Rightarrow y_9)$$

$$\downarrow$$

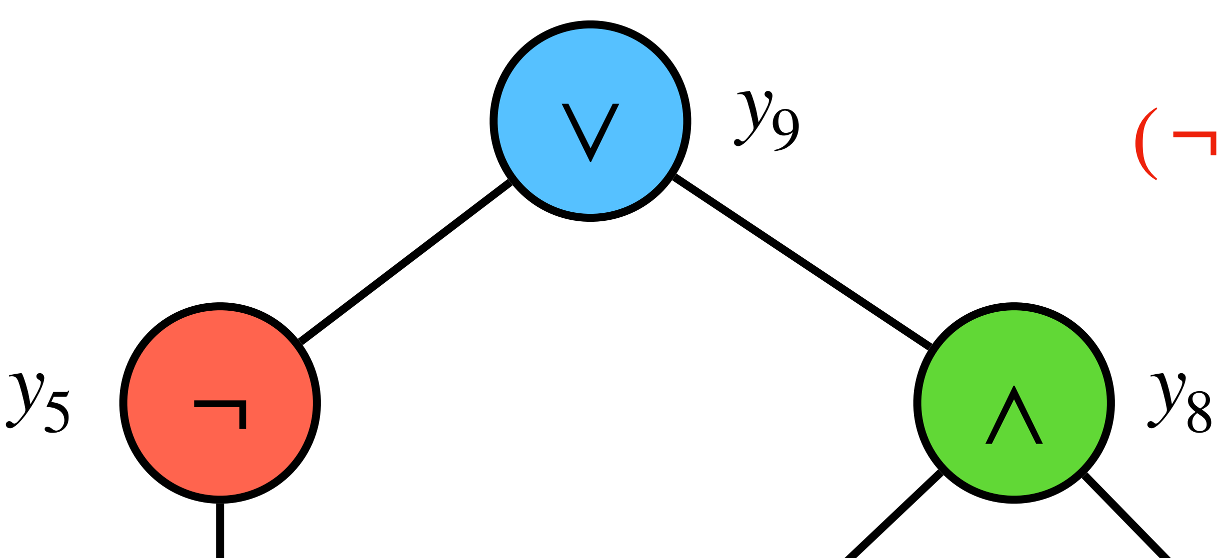
$$(\neg y_9 \lor y_5 \lor y_8) \land (\neg(y_5 \lor y_8) \lor y_9))$$

$$\downarrow$$

$$(\neg y_9 \lor y_5 \lor y_8) \land ((\neg y_5 \land \neg y_8) \lor y_9))$$

$$\downarrow$$

$$(\neg y_9 \lor y_5 \lor y_8) \land (\neg y_5 \lor y_9) \land (\neg y_8 \lor y_9)$$



Démonstration

- Pour chaque nœud $s = 1,\ldots,m$ on a une conjonction C_s de deux ou trois clauses disjonctives avec au plus 3 variables
- Soit y_m la variable correspondant à la racine de l'arbre
- On construit la formule en forme normale conjonctive

$$\psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = y_m \wedge \bigwedge_{s=1}^{m} C_s$$

Démonstration

$$\psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = y_m \wedge \bigwedge_{s=1}^{m} C_s$$

- La formule ψ est satisfaisable ssi la formule φ l'est aussi

- La fonction $\varphi \mapsto \psi$ est calculable en temps polynomial (il suffit de construire les clauses C_s indiquées ci-dessus)

- Donc 3SAT est $\mathbf{NP}$-difficile

- Comme il est dans $\mathbf{NP}$, il est $\mathbf{NP}$-complet

👍

⚠️ Remarque ⚠️

- On peu résoudre 2SAT en temps polynomial !
- Il est vraiment nécessaire d'avoir 3 littéraux par clause pour obtenir un problème $\mathbf{NP}$-complet*
- Pourquoi 3SAT est important ? C'est très pratique pour faire des réductions 3SAT $\leq A$ et montrer que A est $\mathbf{NP}$-complet
- La raison est que 3SAT a une structure plus simple et régulière que SAT

* Dans l'hypothèse que $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$

Problème ENSEMBLE-INDÉPENDANT

- Entrée : un graphe non orienté G et un entier k

- Question : existe-t-il un ensemble de k sommets indépendants dans G, c'est-à-dire tous non reliés deux à deux ?

Proposition 3-AE (p. 80)

ENS-INDÉP est $\mathbf{NP}$-complet

- Le problème est dans $\mathbf{NP}$ car vérifier que k sommets sont indépendants se fait en temps polynomial :

pour $v \in X$ **faire**
    pour $w \in X - \{v\}$ **faire**
        si $(v, w) \in E$ **alors**
            rejeter
accepter

- Pour la $\mathbf{NP}$-difficulté, on réduit 3SAT

Proposition 3-AE (p. 80)

ENS-INDÉP est $\mathbf{NP}$-complet

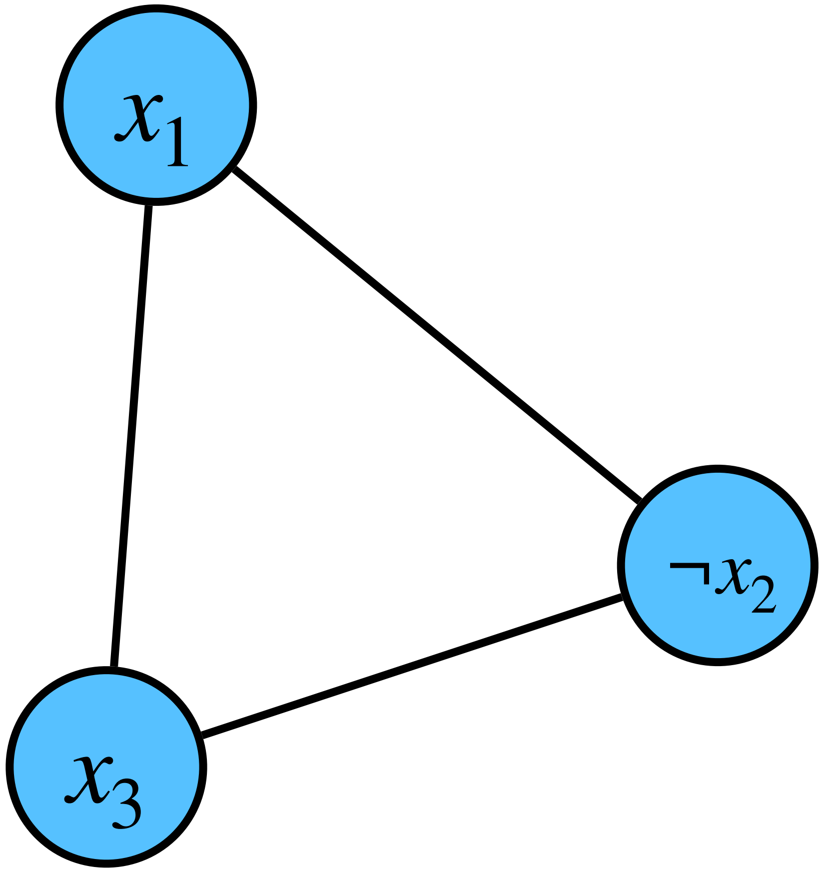
- La réduction transforme une formule φ en 3-CNF à i clauses en un graphe contenant i triangles (un pour chaque clause)
- Chaque sommet d'un triangle correspond à un littéral de la clause
- Entre les triangles, on relie ensuite x et $\neg x$
- Si φ est satisfaisable, alors les littéraux valant 1 dans une solution forment un ensemble indépendant du graphe, et réciproquement

Démonstration

- Soit $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une instance de 3SAT
- La formule a m clauses de au plus 3 littéraux
- Si une formule a moins de trois littéraux,
  on répète un littéral pour en avoir exactement 3
- Par exemple $(x_1 \vee \neg x_2) \mapsto (x_1 \vee x_1 \vee \neg x_2)$

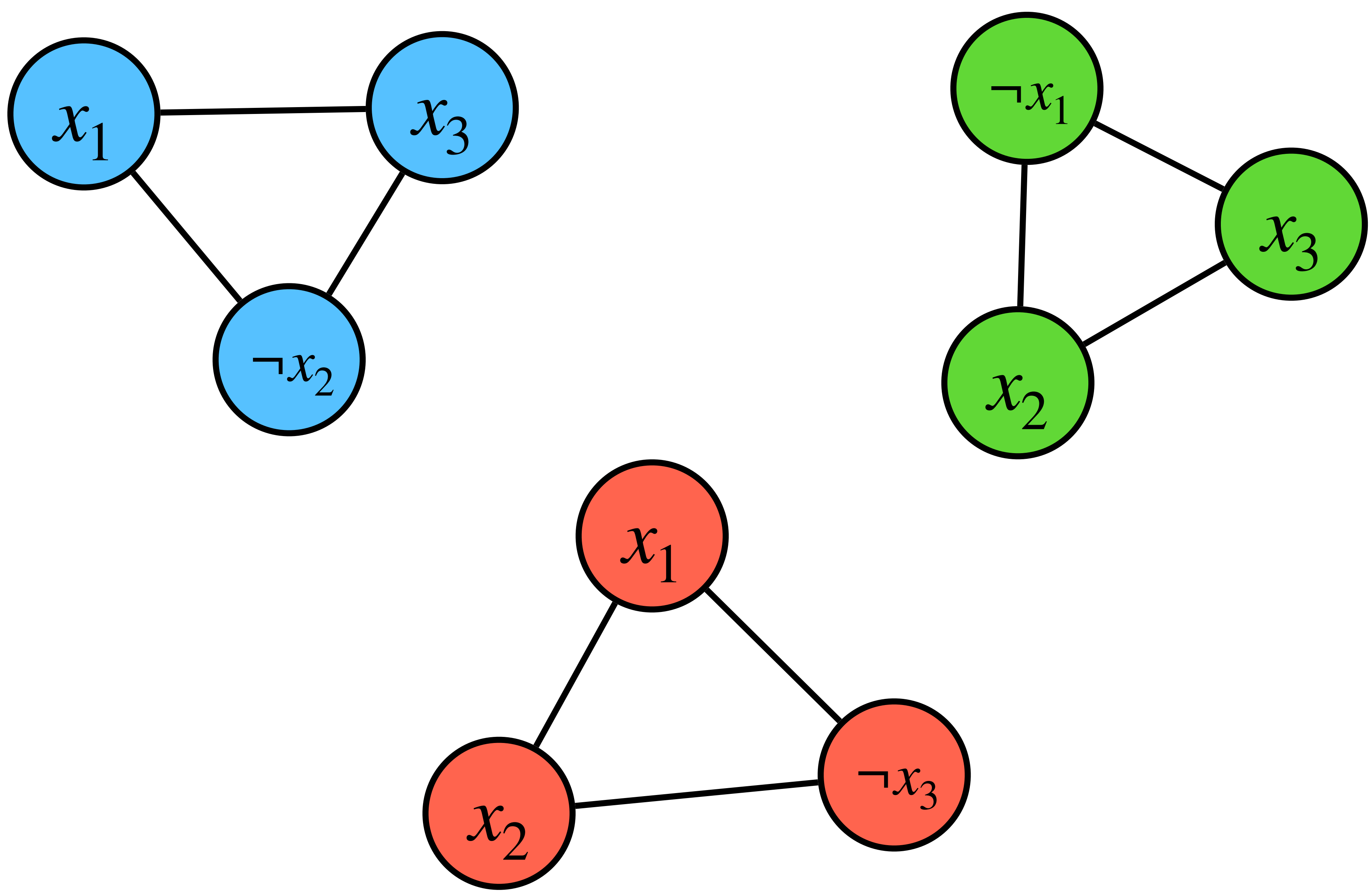
Clause → Triangle

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$



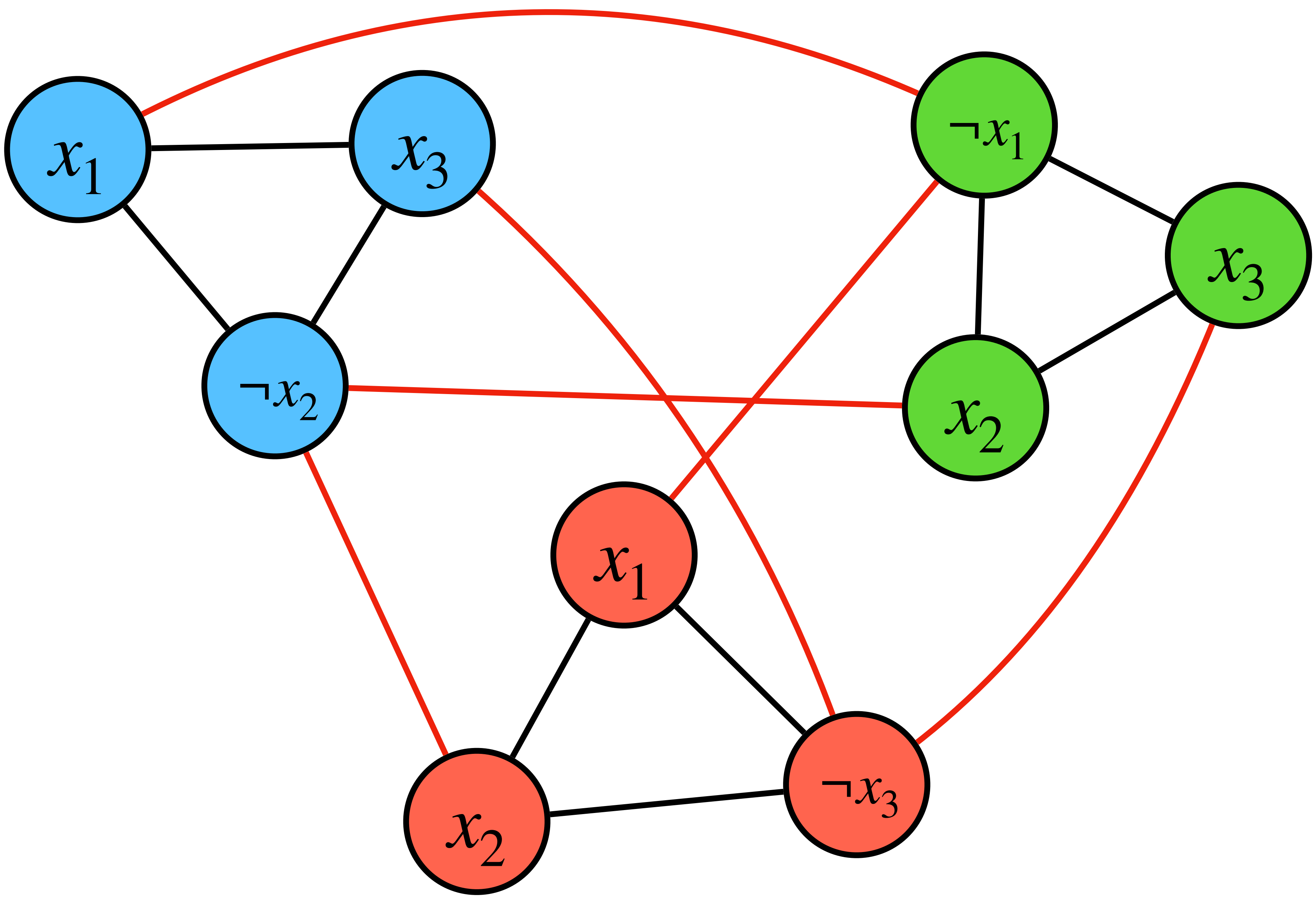
Formule → Triangles

$$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



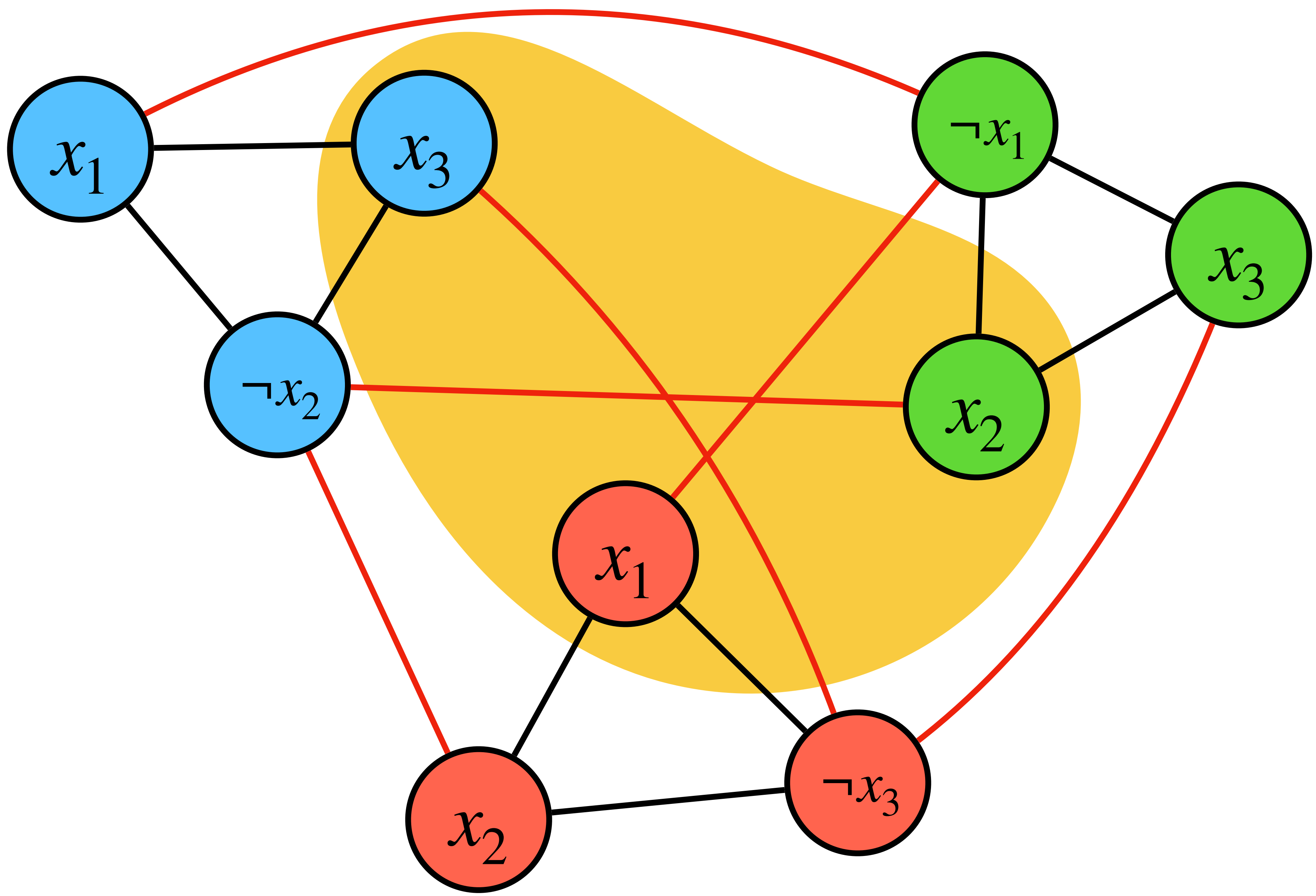
Arcs pour les négations

$$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



Arcs pour les négations

$$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



Graphe associé à la formule

- Soit $G = (V, E)$ le graphe ainsi construit

- Et soit $k = m$, le nombre de clauses

- On peut construire G et k à partir de φ
  en temps polynomial

- Il reste à montrer que φ est satisfaisable ssi
  G a un ensemble indépendant de taille $k = m$

$\varphi \in$ SAT $\Rightarrow (G, k) \in$ ENS-INDÉP

- Si φ est satisfaisable par une certaine affectation des variables, soit ℓ_1 un littéral vrai dans la première clause (ℓ_1 est soit une variable, soit sa négation)

- Au moins l'un des sommets de G correspond à ce littéral ℓ_1

- Soit ℓ_2 un littéral vrai dans la deuxième clause ; donc ℓ_1 et ℓ_2 ne sont pas dans le même triangle de G

- Aussi $\ell_1 \neq \neg \ell_2$, car ils sont tous les deux vrais ; donc il n'y a pas d'arête entre les deux dans G

$\varphi \in$ SAT $\Rightarrow (G, k) \in$ ENS-INDÉP

- En répétant le raisonnement, on obtient un ensemble $\{\ell_1, \ldots, \ell_m\}$ de littéraux vrais dans φ…

- …qui correspond à un ensemble de sommets dans G qui ne sont jamais connectés par un arête

- Donc il s'agit d'un ensemble indépendant de taille $m = k$

- Donc $(G, k) \in$ ENS-INDÉP

$(G, k) \in$ ENS-INDÉP $\Rightarrow \varphi \in$ SAT

- Supposons que G ait un ensemble indépendant $\{\ell_1, \ldots, \ell_m\}$ de taille $k = m$
- Si $i \neq j$, alors $\ell_i \neq \neg \ell_j$, sinon ils seraient reliés dans G
- Alors il existe une affectations qui rend vrais tous les ℓ_i
- Mais ℓ_i et ℓ_j ne sont jamais littéraux dans la même clause, sinon ils feraient partie du même triangle
- Donc l'affectation rend vraies toutes les clauses
- Donc $\varphi \in$ SAT

Corollaire 3-AG (p. 82)

CLIQUE est $\mathbf{NP}$-complet

- ENS-INDÉP est $\mathbf{NP}$-complet
- ENS-INDÉP $\leq$ CLIQUE $\in \mathbf{NP}$
- Donc CLIQUE est $\mathbf{NP}$-complet aussi