Decomposition algébrique des systèmes dynamiques

Un système dynamique (à temps discrets) est, en général, un ensemble d'états X avec une fonction de transition $f:X \to X$ qui décrit l'évolution du système dans le temps. La plupart des modèles de calcul traditionnels en informatique (par exemple, les machines de Turing et les automates cellulaires) peuvent être modélises par des systèmes dynamiques, ainsi que des phénomènes naturels (par exemple, en biologie) ou liés à l'ingénierie (par exemple, pour la description de protocoles d'interaction dans un système complexe).

En particulier, on est souvent intéressé à l'analyse de systèmes dynamiques finis pour détecter des comportements désirables ou indésirable du système modélisé et, plus en général, pour établir certaines propriétés asymptotiques du système, notamment la présence de points fixes (états x tels que $f(x) = x$) et le nombre et la longueur des cycles. Souvent la vérification de ce type de propriétés a une complexité algorithmique élevée (il s'agit de problèmes **NP**-complets ou même plus difficiles) ; on essaie d'atténuer ce problème en décomposant le système en composantes de taille inférieure pour les analyser de façon plus simple, avec le but de décrire le comportement du système global en fonction des comportements de ses composantes.

Récemment on a proposé une décomposition algébrique des systèmes dynamiques finis [2, 1, 3] en termes d'opérations de somme (union disjointe) et produit (cartésien), ce qui donne une structure algébrique de *semi-anneau* (qui généralise, par exemple, les opérations sur les entiers naturels). Cela permet de décomposer les systèmes dynamiques par des équations polynomiales, par exemple $aX^2 + bXY = cY + dZ$ où chaque coefficient a, b, c, d ainsi que les valeurs cherchées pour les variables X, Y, Z sont des systèmes dynamiques. La résolution de ce type d'équations s'avère être indécidable dans le cas général (par réduction du 10ème problème de Hilbert), mais il y a également des classes d'équations solvables algorithmiquement.

L'étude de ce type de décomposition des systèmes dynamiques est néanmoins encore en phase préliminaire ; il est nécessaire d'identifier des classes d'équations solvables *efficacement* (en temps polynomial) qui puissent permettre de couvrir un éventail assez large de systèmes dynamiques d'intérêt concret. En particulier, il est important d'analyser la complexité et définir des algorithmes pour la décomposition de systèmes dynamiques, ainsi que d'étudier les relations entre les propriétés dynamiques d'un système et celles des décompositions algébriques correspondantes.

Travail à effectuer Étude de la décomposition d'un macro-système dynamique en systèmes dynamiques irréductibles, soit du point de vue algébrique et combinatoire, soit en examinant la complexité de tel analyse et l'existence ou non d'algorithmes efficaces. En particulier, il est souhaitable de généraliser les approches déjà présentes dans la littérature (notamment dans le cas des automates cellulaires et, en général, des réseaux booléens, ainsi que la décomposition de graphes arbitraires) dans le cadre ici proposé.

Lieu LIS, 163 avenue de Luminy, 13288 Marseille CEDEX 9, France

Contacts Antonio E. Porreca ⟨`antonio.porreca@lis-lab.fr`⟩

Références

[1] Alberto Dennunzio, Valentina Dorigatti, Enrico Formenti, Luca Manzoni, and Antonio E. Porreca. Polynomial equations over finite, discrete-time dynamical systems. In Giancarlo Mauri, Samira El Yacoubi, Alberto Dennunzio, Katsuhiro Nishinari, and Luca Manzoni, editors, *Cellular Automata, 13th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry, ACRI 2018*, volume 11115 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 298–306. Springer, 2018. `https://aeporreca.org/papers/polynomial-equations-over-finite-discrete-time-dynamical-systems.pdf`

[2] Valentina Dorigatti. Algorithms and complexity of the algebraic analysis of finite discrete dynamical systems. Master's thesis, Università degli Studi di Milano-Bicocca, 2018.

[3] Antonio E. Porreca. Composing behaviours in the semiring of dynamical systems. Invited talk at International Workshop on Boolean Neworks (IWBN 2020), Universidad de Concepción, Chile, January 2020. `https://aeporreca.org/talks/composing-behaviours-in-semiring-of-dynamical-systems.pdf`