Domaine Sciences et Technologies
PORTAIL 1 RENÉ DESCARTES

Introduction à l'informatique : TD 8
Code UE : S14IN1I1

Année 2019-20 **Graphes non orientés**

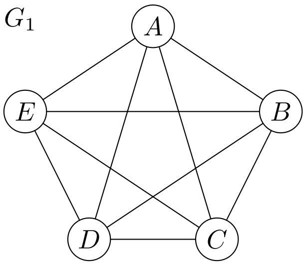
Exercice 1 (Cycles eulériens)

Dans un graphe non orienté, on appelle *cycle eulérien* tout cycle (un chemin qui revient à son point de départ) qui traverse chaque arête du graphe une et une seule fois. On a vu en cours la caractérisation suivante :

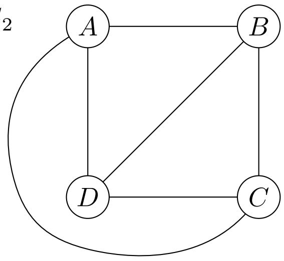
> « Un graphe non orienté connexe admet un cycle eulérien
> si et seulement si chaque sommet est de degré pair. »

1. En utilisant la caractérisation précédente, dites pour chacun des graphes suivants s'ils admettent un cycle eulérien.

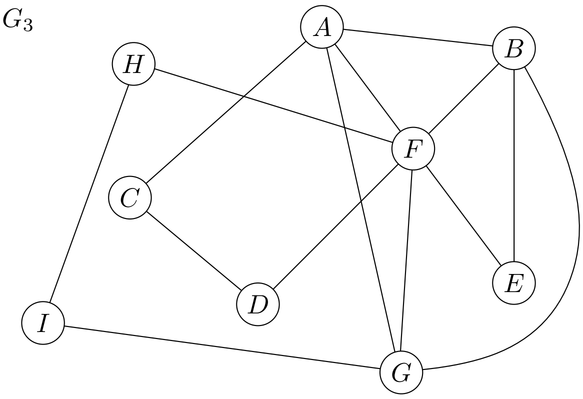
G_1



G_2



G_3

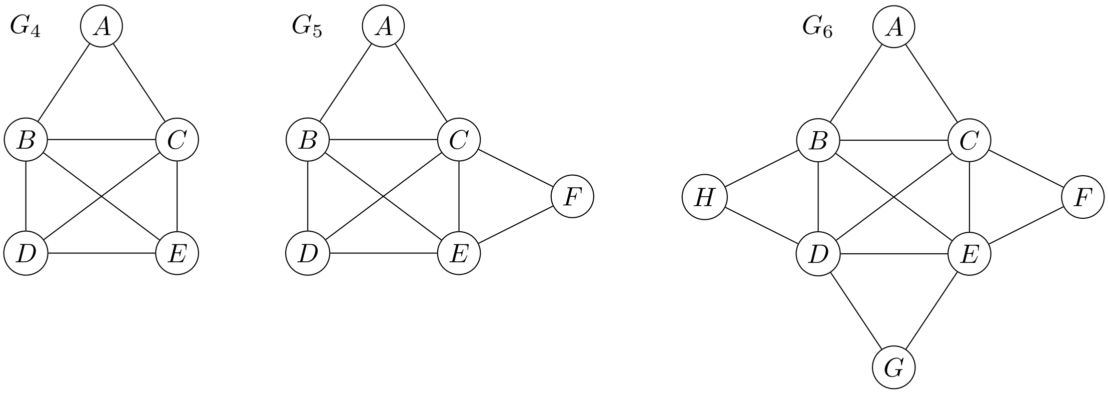


L'algorithme de Hierholzer qu'on a décrit en cours nous permet de construire un cycle eulérien (s'il en existe un). On l'a décrit de manière informelle ainsi :

- Choisir n'importe quel sommet initial v
- Suivre un chemin arbitraire d'arêtes jusqu'à retourner à v, obtenant ainsi un cycle c
- **Tant qu**'il y a des sommets u dans le cycle c avec des arêtes qu'on n'a pas encore choisies **faire**
  - Suivre un chemin à partir de u, n'utilisant que des arêtes pas encore choisies, jusqu'à retourner à u, obtenant un cycle c'
  - Prolonger le cycle c par c'

À noter qu'en toute généralité, un graphe eulérien peut admettre plusieurs cycles eulériens différents.

2. Pour les graphes précédents qui admettent un cycle eulérien, trouver un tel cycle en appliquant l'algorithme de Hierholzer.
3. La notion de cycle eulérien peut être étendue : un *chemin eulérien* est un chemin (pas nécessairement un cycle) qui traverse chaque arête du graphe une et une seule fois. Parmi les graphes suivants, quels sont ceux pour lesquels vous pouvez trouver un chemin eulérien ?



4. À partir de vos observations, conjecturer une caractérisation des chemins eulériens en terme de degré des sommets du graphe (ressemblant à la caractérisation des cycles eulériens).

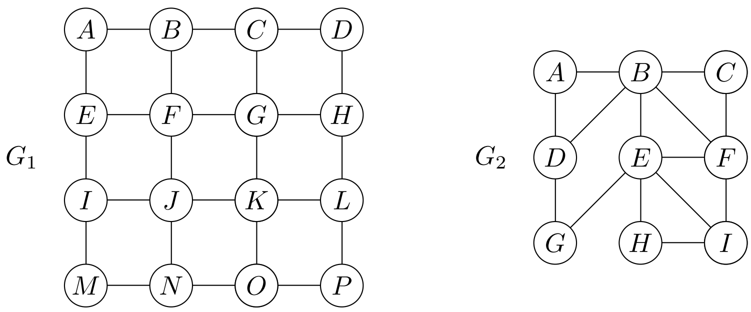
Exercice 2 (Coloration de graphes)

L'algorithme de Welsh-Powell, qu'on a décrit en cours, permet de colorer les sommets d'un graphe de manière que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes. On choisit dans cette exercice de colorer les sommets avec des couleurs qui sont des entiers $0, 1, 2, \ldots$ L'algorithme de Welsh-Powell peut alors s'écrire de la manière suivante :

— Trier le sommets du graphe par ordre de degré décroissant
— couleur ← 0 (*couleur initiale*)
— **Tant qu**'il y a encore des sommets non colorés **faire**
  — Parcourir la liste triée des sommets et colorer en *couleur* les sommets non colorés qui ne sont pas connectés à d'autres sommets de la même couleur
  — couleur ← couleur + 1 (*choisir une nouvelle couleur*)

À chaque fois que deux sommets ont le même degré, *on les suppose trier par ordre alphabétique.* Par exemple, si les sommets A, D, B sont tous de degré 3, on suppose qu'ils seront triés dans l'ordre A, B, D.

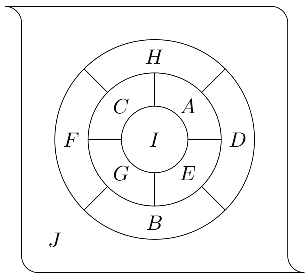
1. Colorier les graphes suivants à l'aide de l'algorithme de Welsh-Powell.



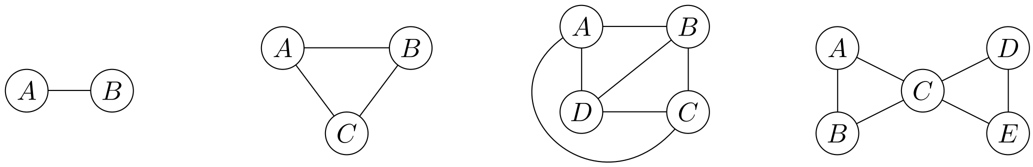
2. Les colorations obtenues sont-elle optimales en terme du nombre de couleurs utilisées ? Si oui, pourquoi ? Si non, trouver une meilleure coloration.

Exercice 3 (Coloration de cartes)

Une carte est un découpage d'une feuille de papier en régions, séparées par des frontières. Par exemple, la carte à droite est découpée en 10 régions. Chaque carte est associée à un *graphe planaire* (un graphe qu'on peut dessiner sur une feuille de papier sans qu'aucune des arêtes n'en croise une autre). Vice versa, chaque graphe planaire est associé à une carte (non nécessairement unique). Chaque région de la carte correspond à un sommet et chaque frontière entre régions à une arête.



1. Dessiner une carte pour chacun des graphes suivants.



2. À l'aide de l'algorithme de Welsh-Powell, colorier la carte donnée en exemple au début de l'exercice. *Noter que la région externe J correspond, elle aussi, à l'un des sommets du graphe associé. (Comme dans l'exercice précédent, si deux sommets ont le même degré, choisir d'abord le plus petit selon l'ordre alphabétique.)*
3. La coloration obtenue est-elle optimale en terme de nombre de couleurs ? Si oui, pourquoi ? Si non, trouver une meilleure coloration.