TD 04 – Classes P et EXP

Exercice 1. *Temps déterministe*

Rappel des définitions :

$$\mathsf{P} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{DTIME}(n^k),$$

$$\mathsf{EXP} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{DTIME}(2^{n^k}).$$

1. Au précédent TD nous avons donné une machine M_{pal} pour le problème du **Palindrome** qui fonctionne en temps n^3+2 sur l'alphabet $\Gamma = \{a, b, k, y, B\}$. Expliquer quelle est l'idée du théorème d'accélération linéaire pour résoudre en temps $(1+\frac{1}{1000})n + \frac{1}{1000}(n^3+2)$ le problème du **Palindrome**.
2. Donner deux classes de complexité en temps déterministe qui sont séparées par le théorème de hiérarchie.
3. Montrer que le problème suivant est dans P.

Accessibilité
entrée : un graphe orienté G et deux sommets s et t
question : existe-t-il un chemin de s à t dans G ?

4. Montrer que le problème **2-SAT** est dans la classe P.
5. Montrer que le problème $L_{2SAT+} = L_{2SAT} \cup \{a01bb, t11wu\}$ est dans P, sans utiliser le lemme de clôture de P par changements finis (on supposera que $0, 1, a, b, t, w, u \in \Sigma$). C'est-à-dire, donner un algorithme polynomial pour ce problème (a priori on devrait utiliser le même argument que pour la preuve générale, mais sur un exemple).

Exercice 2. *Temps non-déterminisite*

1. Montrer que le problème **Clique** est dans la classe EXP.
2. Montrer que le problème suivant est dans la classe EXP.

Set packing
entrée : une famille $\{S_j\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ d'ensembles tels que $S_j \subseteq \{1,\ldots,n\}$ pour tout $j \in \{1,\ldots,m\}$, et un entier $\ell \in \mathbb{N}$
question : $\{S_j\}$ contient-il ℓ ensembles mutuellement disjoints ?

3. Montrer que le problème suivant est dans EXP.

Node cover
entrée : un graphe $G = (V, E)$ et un entier ℓ
question : existe-t-il un sous ensemble $V' \subseteq V$ tel que $\lvert V'\rvert \leq \ell$ et toute arête de E a l'une de ses extrémités dans V' ?

4. Montrer que le problème suivant est dans EXP.

Directed Hamiltonian circuit
entrée : un graphe orienté $G = (V, A)$
question : existe-t-il un circuit dans G qui inclue chaque sommet exactement une fois ?