

---

**TD 02 – Machines de Turing**


---

**Exercice 1.***Machines de Turing déterministes*

Donner une machine de Turing déterministe (peut importe le nombre de rubans) et une fonction (de la taille de l'entrée) bornant son temps d'exécution, pour les problèmes de décision suivants.

**Palindrome**

1. *entrée* : un mot  $x \in \{a, b, k, y\}^*$   
*question* :  $x$  est-il un palindrome?

Un palindrome est un mot qui se lie identiquement de la gauche vers la droite et de la droite vers la gauche, tel que le mot *kayak*.

**Parité**

2. *entrée* : un entier  $x \in \{0, 1\}^*$  codé en binaire  
*question* :  $x$  contient-il un nombre pair de lettre 1 ?

Nous souhaitons maintenant avoir une machine de Turing équivalente à votre réponse à la question 1, en réduisant l'alphabet à  $\{0, 1\}$ .

3. Donner une machine qui simule la machine de votre réponse en 1, fonctionnant sur l'alphabet  $\{0, 1, B\}$ .

**Exercice 2.***Langage de haut niveau*

Soit l'algorithme suivant :

```

entrée : une suite de bits  $x[1], x[2], \dots, x[n]$ 
i <- n
tant que (  $x[i] == 1$  et  $i \geq 1$  )
faire
    i <- i-1
fin tant que
si i == 0
alors
    accepter
sinon
    rejeter
fin si

```

1. Donner une machine de Turing décidant le même problème.
2. Quel est le problème décidé par l'algorithme de la question 1 (donner le langage associé) ?

**Exercice 3.***Taille des entrées*

1. Donner un algorithme en langage de haut niveau pour décider le problème suivant.

**Primalité**

*entrée* : un entier  $x \in \{0, 1\}^*$  codé en binaire  
*question* :  $x$  est-il premier ?

2. Borner le temps d'exécution de l'algorithme proposé en 1.
3. Donner un algorithme en langage de haut niveau pour décider le problème suivant.

**Primalité unaire**

*entrée* : un entier  $x \in \{1\}^*$  codé en unaire

*question* :  $x$  est-il premier?

4. Borner le temps d'exécution de l'algorithme proposé en 3.

**Exercice 4.**

*SAT et Verif-SAT*

1. Donner un algorithme pour le problème suivant.

**SAT**

*entrée* : une formule propositionnelle  $\phi$

*question* :  $\phi$  est-elle satisfaisable?

2. Borner le temps d'exécution de l'algorithme proposé en 1.
3. Donner un algorithme pour le problème suivant.

**Verif-SAT**

*entrée* : une formule propositionnelle  $\phi$  et une valuation  $v : X \rightarrow \{\top, \perp\}$  avec  $X$  l'ensemble des variables de  $\phi$

*question* :  $v$  satisfait-elle  $\phi$ ?

4. Borner le temps d'exécution de l'algorithme proposé en 3.
5. Donner un algorithme non-déterministe pour le problème SAT.
6. Borner le temps d'exécution de l'algorithme proposé en 5.

**Exercice 5.**

*Codages « raisonnables »*

1. Donner un algorithme pour transformer un graphe orienté donné par sa matrice d'adjacence

$(m_{i,j})_{i \in V, j \in V}$  telle que  $m_{i,j} = 1$  ssi il existe un arc de  $i$  vers  $j$ ,

en listes d'adjacence

$(\ell_i)_{i \in V}$  avec  $\ell_i \subseteq V$  telles que  $j \in \ell_i$  ssi il existe un arc de  $i$  vers  $j$ .

2. Donner un algorithme pour faire le contraire.
3. Borner le temps d'exécution de chacun de ces deux algorithmes.