Actividad de Aprendizaje 1.3

Ejercicios sobre transformaciones de vectores aleatorios

Ejercicios del capítulo 4 del libro de Casella y Berger (2002) que para su comodidad se traducen a continuación:

4.16) Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes e idénticamente distribuidas con función de masa de probabilidades Geométrica.

a) Demuestre que U y V son variables aleatorias independientes, donde U y V se definen como sigue:

$$U \,=\, \text{mín}\{X, Y\} \qquad \text{y} \qquad V \,=\, X - Y$$

b) Obtenga la distribución de probabilidad de $Z = X/(X+Y)$ donde se define $Z = 0$ en caso de que $X+Y = 0$.

c) Obtenga la función de masa de probabilidades conjunta de X y $X + Y$.

4.21) Un punto es generado aleatoriamente en el plano mediante coordenadas polares. Se especifica un radio R donde la distribución de probabilidad de R^2 es χ^2 (Ji-cuadrada) con parámetro igual a 2. De forma independiente al radio, se especifica un ángulo Θ con distribución de probabilidad continua uniforme sobre el intervalo $[0, 2\pi[$. Obtenga la función de densidad conjunta de probabilidades del vector aleatorio (X, Y) donde $X = R\cos\Theta$ e $Y = R\,\text{sen}\,\Theta$.

4.24) Sean las variables aleatorias independientes X con distribución de probabilidades Gamma$(r, 1)$ e Y con distribución Gamma$(s, 1)$. Defina el vector aleatorio:

$$\Big(Z_1, Z_2) \,:=\, (X + Y, \frac{X}{X+Y}\Big)\,.$$

Deduzca la función de densidad conjunta de (Z_1, Z_2), demuestre con ello que Z_1 y Z_2 son variables aleatorias independientes, que Z_1 tiene distribución de probabilidad Gamma, indicando con qué parámetros, y que Z_2 tiene distribución de probabilidad Beta, indicando con qué parámetros.

4.26) Sean las variables aleatorias independientes X con distribución de probabilidad Exponencial (λ) e Y con distribución Exponencial(μ). Se define el vector aleatorio:

$$(Z, W) \,:=\, \big(\text{mín}\{X, Y\}\,,\, \mathbf{1}_{\{Z\,=\,X\}}\big)$$

a) Obtenga la función de distribución conjunta de (Z, W).

b) Demuestre que Z y W son variables aleatorias independientes.

Ejercicio tomado del capítulo 4 del libro de Grimmett y Stirzaker (2004):

4.7.5) Dada una constante $-1 < \rho < 1$ considere el vector aleatorio (X, Y) con función de densidad conjunta:

$$f(x, y) \,=\, \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right\},$$

y defina la variable aleatoria

$$Z \,:=\, \frac{Z - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}\,.$$

a) Demuestre que X y Z son variables aleatorias independientes, cada una con distribución de probabilidad Normal$(0, 1)$.

b) Demuestre que:

$$\mathbb{P}(X > 0\,,\, Y > 0) \,=\, \frac{1}{4} \,+\, \frac{1}{2\pi}\,\text{arc sen}\,\rho\,.$$