# Actividad de Aprendizaje 1.2
## Ejercicios sobre distribuciones condicionales e independencia

1. Considere dos dados, cada uno con caras numeradas mediante $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, construidos de tal forma que al lanzarlos cualquiera de las caras tiene la misma probabilidad de quedar hacia arriba. Considere el experimento aleatorio de lanzar ambos dados una sola vez, y defina sobre el espacio de probabilidad que le corresponde dos variables aleatorias: $X$ igual a la suma de los números de las caras que queden hacia arriba, $Y$ igual al valor absoluto de la diferencia de dichos números.

   *a*) Obtenga explícitamente las funciones de masa de probabilidades condicionales $p_{X|Y}$ y $p_{Y|X}$.

   *b*) Determine si $X$ e $Y$ son o no variables aleatorias independientes.

2. Considere un experimento aleatorio binomial con parámetros dados $n \geq 2$ y $0 < \theta < 1$, y considere dos variables aleatorias definidas sobre su espacio de probabilidad: $X$ que reporta el número de éxitos, $Y$ que reporta el valor 1 si los $n$ resultados son iguales, o bien 0 en cualquier otro caso.

   *a*) Obtenga explícitamente las funciones de masa de probabilidades condicionales $p_{X|Y}$ y $p_{Y|X}$.

   *b*) Determine si $X$ e $Y$ son o no variables aleatorias independientes.

3. Ejercicios del libro de Casella y Berger (2002) 4.10 y 4.11, que para su comodidad se traducen a continuación:

   4.10) Considere el vector aleatorio $(X, Y)$ con función de masa de probabilidad conjunta dada por:

   $$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{si } (x,y) \in \{(1,2),(3,2)\} \\ \frac{1}{6} & \text{si } (x,y) \in \{(2,2),(1,3),(3,3)\} \\ \frac{1}{3} & \text{si } (x,y) = (2,4) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

   a) Demuestre que $X, Y$ son variables aleatorias dependientes.

   b) Obtenga explícitamente las funciones de masa de probabilidades condicionales $p_{X|Y}$ y $p_{Y|X}$.

   c) Obtenga la función de masa de probabilidades conjunta de un vector aleatorio $(U, V)$ tal que sus funciones de masa de probabilidades marginales sean las mismas que $(X, Y)$ pero tal que $U, V$ sean variables aleatorias independientes.

   4.11) Considere que se lanzarán volados con una moneda equilibrada, y por tanto el resultado posible en cada volado es águila o sol. Sea la variable aleatoria $U$ igual al número de volados necesarios hasta obtener águila por primera vez, y sea la variable aleatoria $V$ igual al número de volados necesarios para acumular 2 águilas. ¿Son $U$ y $V$ variables aleatorias independientes?

4. Deduzca la fórmula general para la función de masa de probabilidades conjunta de un vector aleatorio discreto $(X, Y, Z)$ tal que de manera inidividual (marginal) $X$, $Y$ y $Z$ sean variable aleatorias Bernoulli con parámetro $0 < \theta < 1$.

   *a*) Suponiendo que las variables aleatorias son independientes por pares, determine los valores posibles para $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0, Z = 0)$ en función de $\theta$.

   *b*) Ahora suponga que $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Z = 0) = \mathbb{P}(Y = 0, Z = 0) = \beta$ para algún $0 < \beta < 1$, y que $\mathbb{P}(X = 0, Z = 0, Z = 0) = \tau$ para algún $0 < \tau < 1$. Obtenga condiciones necesarias y suficientes para $\beta$ y $\tau$ de tal forma que las variables aleatorias sean condicionalmente independientes por pares, pero que no sean independientes por pares ni conjuntamente (la tres).

5. Considere una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$f(x,y) := k\mathbf{1}_C(x,y)$$

donde $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\,,\ \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \leq x \leq -\log(y + \frac{1}{2})\}$ y $k$ es un constante.

a) Determine el valor de la constante $k$ tal que $f$ cumpla con ser una función de densidad conjunta.

b) Sea $(X,Y)$ un vector aleatorio con función de densidad conjunta igual a la obtenida en el inciso a) anterior. Deduzca las funciones de densidad marginales y condicionales.

c) ¿Son $X$ e $Y$ variables aleatorias independientes? Justifique.

d) Calcule explícitamente la probabilidad $\mathbb{P}(X + Y > 0)$.

e) Calcule explícitamente la probabilidad $\mathbb{P}(X < Y)$.