Actividad de Inducción para la Unidad 1
Ejercicios de repaso sobre Probabilidad I

1. Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad que representa a un fenómeno o experimento aleatorio. Demuestra que la medida de probabilidad $\mathbb{P}$ cumple las siguientes propiedades, dados E_1 y E_2 subconjuntos de Ω que representan eventos:

   a) $\mathbb{P}(\Omega \setminus E_1) = 1 - \mathbb{P}(E_1)$.
   b) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
   c) $\mathbb{P}(E_1 \setminus E_2) = \mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$.
   d) Si $E_1 \subseteq E_2$ entonces $\mathbb{P}(E_1) \leq \mathbb{P}(E_2)$.
   e) $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$.
   f) $\text{máx}\{\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - 1, 0\} \;\leq\; \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \;\leq\; \text{mín}\{\mathbb{P}(E_1), \mathbb{P}(E_2)\}$

2. Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y sean $E_1, \ldots, E_n$ subconjuntos de Ω que representan eventos conjuntamente independientes. Demuestra que los eventos representados por los subconjuntos $A_1, \ldots, A_n$ donde cada $A_j \in \{E_j, \Omega \setminus E_j\}$ también son conjuntamente independientes.

3. Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, y se define la función $P_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ como:
$$P_X(B) \;:=\; \mathbb{P}(X^{(-1)}(B)).$$
   Demuestra que P_X cumple con la definición de *medida de probabilidad*.

4. Demuestra que los intervalos $]a,b]$, $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$, $\{a\}$, $]-\infty,b[$, $]a,\infty[$ y $[a,\infty[$ pueden obtenerse mediante una cantidad numerable de operaciones de conjuntos utilizando solo intervalos del tipo $]-\infty,x]$.

5. Sea F_X una función de distribución de probabilidades de una variable aleatoria X. Demuestra que F_X cumple las siguientes propiedades:

   a) F_X es una función monótona creciente, esto es que si $x_1 < x_2$ entonces $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.
   b) F_X es continua por la derecha, es decir que $\text{lím}_{\delta \to 0+} F_X(x+\delta) = F_X(x)$.
   c) $F_X(+\infty) \equiv \text{lím}_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
   d) $F_X(-\infty) \equiv \text{lím}_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.
   e) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
   f) $\mathbb{P}(X < a) = F_X(a-) \equiv \text{lím}_{x \to a-} F_X(x)$.
   g) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a-)$.
   h) $\mathbb{P}(X > b) = 1 - F_X(b)$.
   i) $\mathbb{P}(X \geq b) = 1 - F_X(b-)$.
   j) $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a)$.
   k) $\mathbb{P}(a \leq X < b) = F_X(b-) - F_X(a-)$.
   l) $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$.

6. Sean F_1 y F_2 dos funciones de distribución de probabilidades cualesquiera. Si para cualquier número real $0 \leq \alpha \leq 1$ se define una función $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ como la combinación lineal convexa de F_1 y F_2, esto es:
$$F(x) \;:=\; (1-\alpha)F_1(x) \;+\; \alpha F_2(x)\,,$$
   demuestra que entonces F cumple las propiedades de una función de distribución de probabilidades como en el ejercicio anterior.