Actividad de Aprendizaje 1.1

Ejercicios sobre distribución conjunta y marginales

1. Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Demuestre que la función $\mathbb{P}_{\mathbf{X}} : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$ definida como:

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(B) \,=\, \mathbb{P}(\mathbf{X}^{(-1)}(B)) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \,:\, \mathbf{X}(\omega) \in B\}\right)$$

cumple con la definición de *medida de probabilidad.*

2. Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Demuestre que una función $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es vector aleatorio si y solo si cada una de sus funciones componentes $\mathbf{X}(\omega) = \big(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big)$ son variables aleatorias.

3. Por medio de operaciones de conjuntos expresa el producto cartesiano de intervalos acotados semiabiertos $]a_1, b_1] \times]a_2, b_2]$ en términos de conjuntos de la clase:

$$\mathfrak{J} = \big\{ \,]-\infty, x_1] \times \,]-\infty, x_2] : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \big\}.$$

4. Utilizando el resultado anterior, demuestra que para un vector aleatorio (X_1, X_2) con función de distribución conjunta de probabilidades $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$ se cumple que:

$$\mathbb{P}(a_1 < X_1 \leq b_1 \,,\, a_2 < X_2 \leq b_2) \,=\, F_{X_1,X_2}(b_1, b_2) - F_{X_1,X_2}(b_1, a_2) - F_{X_1,X_2}(a_1, b_2) + F_{X_1,X_2}(a_1, a_2).$$

5. Demuestra que para cualquier vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ su función de distribución conjunta cumple las siguiente propiedades:

   a) $F_{\mathbf{X}}(-\infty, x_2) = \lim\limits_{x_1 \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = 0$ para todo $x_2 \in \mathbb{R}$, y análogamente $F_{\mathbf{X}}(x_1, -\infty) = 0$ para todo $x_1 \in \mathbb{R}$.

   b) $F_{\mathbf{X}}(+\infty, +\infty) = 1$.

   c) Continuidad por la derecha en cada variable, esto es:

$$\lim_{\delta \to 0+} F_{\mathbf{X}}(x_1 + \delta, x_2) \,=\, F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \,=\, \lim_{\delta \to 0+} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2 + \delta).$$

   d) Propiedad 2–creciente. Si $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ entonces:

$$F_{\mathbf{X}}(x_2, y_2) - F_{\mathbf{X}}(x_2, y_1) - F_{\mathbf{X}}(x_1, y_2) + F_{\mathbf{X}}(x_1, y_1) \geq 0.$$

   e) Cotas de Fréchet–Hoeffding:

$$\text{máx}\{F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1, 0\} \,\leq\, F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \,\leq\, \text{mín}\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\},$$

   donde F_{X_1} y F_{X_2} son las funciones de distribución marginales de las variables aleatorias X_1 y X_2, respectivamente. *Sugerencia: Recuerde que si E_1 y E_2 representan eventos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ entonces se cumple que:*

$$\text{máx}\{\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - 1, 0\} \,\leq\, \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \,\leq\, \text{mín}\{\mathbb{P}(E_1), \mathbb{P}(E_2)\}.$$

6. Considere dos dados, cada uno con caras numeradas mediante $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, construidos de tal forma que al lanzarlos cualquiera de las caras tiene la misma probabilidad de quedar hacia arriba. Considere el experimento aleatorio de lanzar ambos dados una sola vez.

   a) Deduzca el espacio de probabilidad correspondiente a este experimento aleatorio.

b) Defina sobre el espacio de probabilidad anterior dos variables aleatorias: X igual a la suma de los números de las caras que queden hacia arriba, Y igual al valor absoluto de la diferencia de dichos números. Deduzca la función de masa de probabilidad conjunta del vector aleatorio (X, Y), así como las funciones de masa de probabilidad marginal correspondientes.

7. Considere un experimento aleatorio binomial con parámetros dados $n \geq 2$ y $0 < \theta < 1$, y considere dos variables aleatorias definidas sobre su espacio de probabilidad: X que reporta el número de éxitos, Y que reporta el valor 1 si los n resultados son iguales, o bien 0 en cualquier otro caso. Deduzca la función de masa de probabilidades conjunta del vector aleatorio discreto (X, Y).

8. Deduzca la fórmula general para la función de masa de probabilidades conjunta de un vector aleatorio discreto (X, Y, Z) tal que de manera inidividual (marginal) X sea una variable aleatoria Bernoulli con parámetro $0 < \theta_1 < 1$, Y una variable aleatoria Bernoulli con parámetro $0 < \theta_2 < 1$, y Z una variable aleatoria Bernoulli con parámetro $0 < \theta_3 < 1$.

9. Sea (X, Y) un vector aleatorio absolutamente continuo con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) \;=\; e^{-y}\mathbf{1}_{\{0<x<y<1\}}\,.$$

   a) Verifique que $f_{X,Y} \geq 0$ y que $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y)dxdy = 1$.

   b) Grafique las curvas de nivel de $f_{X,Y}(x, y)$.

   c) Calcule $\mathbb{P}(X + Y \geq 1)$.

   d) Deduzca las funciones de densidad marginales f_X y f_Y.

   e) Obtenga explícitamente la fórmula de la función de distribución conjunta $F_{X,Y}(x, y)$ y luego a partir de ella verifique que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y) \;=\; f_{X,Y}(x, y).$$

10. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta uniforme sobre un triángulo en $\mathbb{R}^2$ con vértices en los puntos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

   a) Obtenga explícitamente su función de densidad conjunta, verifique que $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ y que $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y)dxdy = 1$.

   b) Calcule $\mathbb{P}(Y > X^2)$.

   c) Deduzca las funciones de densidad marginales f_X y f_Y.

   d) Obtenga explícitamente la fórmula de la función de distribución conjunta $F_{X,Y}(x, y)$ y luego a partir de ella verifique que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y) \;=\; f_{X,Y}(x, y).$$

11. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad f_X, sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y estrictamente monótona, y defina la variable aleatoria $Y := g(X)$. Demuestre lo siguiente:

   a) Y es una variable aleatoria absolutamente continua.

   b) Si g es estrictamente creciente entonces la función de distribución conjunta del vector aleatorio (X, Y) está dada por:

$$F_{X,Y}(x, y) \;=\; \text{mín}\{F_X(x), F_Y(y)\}.$$

   c) Si g es estrictamente de creciente entonces la función de distribución conjunta del vector aleatorio (X, Y) está dada por:

$$F_{X,Y}(x, y) \;=\; \text{máx}\{F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0\}.$$

   d) En cualquiera de los dos casos anteriores el vector aleatorio (X, Y) no es absolutamente continuo (es decir, no existe su función de densidad conjunta).