Zusammenfassung Lineare Algebra II

12. Juli 2013

0.1 Eigenwerte

Es ist wünschenswert, lineare Abbildungen mit möglichst einfachen Matrizen darstellen zu können. In diesem Kapitel werden Endomorphismen eines Vektorraums betrachtet und eine Basis gesucht, so dass die darstellende Matrix möglichst einfach (im idealen Fall eine Diagonalmatrix) ist.

Definition. Für einen Endomorphismus F von V heißt ein $\lambda \in K$ **Eigenwert** von F, falls ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $F(v) = \lambda \cdot v$ existiert. v heißt in diesem Fall ein **Eigenvektor** zum Eigenwert λ.

Definition. Ein Endomorphismus heißt **diagonalisierbar**, wenn eine Basis aus Eigenvektoren existiert. (Für $\dim V = n < \infty$ ist ein Endomorphismus F genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ gibt, so dass $M_{\mathcal{B}}(F)$ eine Diagonalmatrix ist.)

Lemma. *Eigenwerte $w_1, \ldots, w_m$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sind linear unabhängig.*

Beweis. Mit Induktion über m. Für den Induktionsschritt betrachtet man eine Linearkombination $\sum_{i=0}^{m} \mu_i v_i = 0$. Dann gilt

$$0 = \lambda_1 \cdot \sum_{i=0}^{m} \mu_i v_i - F\left(\sum_{i=0}^{m} \mu_i v_i\right) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_1 \mu_i v_i - \lambda_i \mu_i v_i) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_1 - \lambda_i) \mu_i v_i.$$

Nun kann man die Induktionsvoraussetzung verwenden. □

Satz. *Ein Endomorphismus von V ist diagonalisierbar, wenn er paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $n = dim V$ besitzt.*

Beweis. Folgt direkt aus dem obigen Lemma. □

Definition. Für einen Endomorphismus F von V und ein $\lambda \in K$ definieren wir den **Eigenraum** von F bezüglich λ als $\mathrm{Eig}(F; \lambda) := \{v \in V : F(v) = \lambda \cdot v\}$. (Dies ist in der Tat ein Unterraum von V.)

0.2 Das Charakteristische Polynom

Bemerkung. Folgende sind äquivalent:

i) λ ist Eigenwert von F,

ii) $\mathrm{Eig}(F; \lambda) = \ker(F - \lambda \cdot \mathrm{id}) \supsetneq \{0\}$,

iii) $\det(F - \lambda \cdot \mathrm{id}) = 0$.

Definition. Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt $P_A := \det(A - t \cdot E_n) \in K[t]$ das **charakteristische Polynom** von A, wobei t als unbestimmte bzw. ein Element von $K[t]$ aufzufassen ist.

Bemerkung. $\deg P_A = n$. Sei also $P_A = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i$. Dann gelten:

i) $\alpha_n = (-1)^n$,

ii) $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \mathrm{Tr}(A) = (-1)^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n a_{ii}$,

iii) $\alpha_0 = \det A$.

Lemma. *Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.*

Beweis. Wegen $S \cdot t \cdot E_n \cdot S^{-1} = t \cdot E_n$ folgt für $A = SBS^{-1}$

$\det(B - t \cdot E_n) = \det S \cdot \det(B - t \cdot E_n) \cdot (\det S)^{-1} = \det(SBS^{-1} - S \cdot t \cdot E_n \cdot S^{-1}) = \det(A - t \cdot E_n)$.

□

Definition. Für einen Endomorphismus F definiern wir $P_F := P_{M_{\mathcal{A}}(F)}$ als das **charakteristische Polynom** von F, wobei $\mathcal{A}$ eine beliebige Basis ist. (P_F ist nach dem obigen Lemma wohldefiniert.) Die dazugehörige Polynomfunktion nennen wir die **charakteristische Funktion** von F.

Bemerkung. $\mathrm{Eig}(A; \lambda) = \mathrm{Lös}(A - \lambda \cdot E_n, 0)$.

0.3 Die Jordansche Normalform

Zerfällt P_F in Linearfaktoren, so ist V (wie wir bereits wissen) genau dann direkte Summe der F-invarianten Eigenräume $Eig(F, \lambda_i)$, wenn

$$\dim Eig(F, \lambda_i) = \mu(P_F, \lambda_i) = r_i$$

. Ist die Dimension des Eigenraumes zu klein, betrachten wir stattdessen den

Definition. Hauptraum $Hau(F, \lambda) = \ker(F - \lambda id_v)^r$

, wobei $Eig(F, \lambda) \subseteq Hau(F, \lambda)$ gilt.

Satz. *Satz über die Hauptraumzerlegung*
Sei $F \in End_K(V)$ und

$$P_F = \pm(t - \lambda_1)^{r_1} \cdot ... \cdot (t - \lambda_k)^{r_k}$$

mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_k \in K$. Es sei $V_i = Hau(F, \lambda_i \subset V$ für jedes λ_i der Hauptraum. Dann gilt:

- $F(V_i) \subset V_i$ *und* $\dim Vi = r_i$ *für* $i = 1, ..., k$.
- $V = V_1 \oplus ... \oplus V_k$
- *F hat eine Zerlegung $F = F_D + F_N$ mit*
  - *F_D diagonalisierbar.*
  - *F_N nilpotent.*
  - $F_D \circ F_N = F_N \circ F_D$.

Wir betrachten nun einen Eigenwert λ von F und Potenzen von

$$G = F - \lambda id_V$$

.

Satz. *Lemma von FITTING*
Zu einem $G \in End_K(V)$ betrachten wir die beiden Zahlen

$$d = \min\{l \in \mathbb{N} : \ker G^l = KerG^{l+1}\} \text{ und } r = \mu(P_G, 0)$$

wobei $G^0 = id_V$. Dann gilt:

- $d = \min\{l : Im(G^l) = Im(G^{l+1})\}$
- $\ker G^{d+i} = \ker G^d$, $Im(G^{d+1} = Im(G^d)$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$
- *Die Räume $U = \ker G^d$ und $W = Im(G^d)$ sind G-invariant.*
- $(G \mid U)^d = 0$ *und* $G \mid W : W \to W$ *ist ein Isomorphismus.*
- *Für das Minimalpolynom von $G \mid U$ gilt $M_{G|U} = t^d$.*
- $V = U \oplus W$, $\dim U = r \geq d$, $\dim W = n - r$