Chap 4 数值积分和微分

2022年11月4日 15:02

数值微分

- 前向差分:$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{h}{2}f''_{(\xi)}$,在x0点误差为O(h).
- (n+1)-点公式(拉格朗日)
  - 三点公式

    $$f'(x)=f(x_0)\frac{(2x-x_1-x_2)}{2h^2}-f(x_1)\frac{(2x-x_0-x_2)}{h^2}+f(x_2)\frac{(2x-x_1-x_2)}{2h^2}$$

    $$E(x_0)=E(x_2)=\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi),E(x_1)=\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi)$$
  - 五点公式
    - $$f'(x_0)=\frac{1}{12h}[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)]+\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi),$$

      系数(1, -8, 8, -1),O(h^4)

    $$f'(x_0)=\frac{1}{12h}[-25f(x_0)+48f(x_0+h)-36f(x_0+2h)$$
    $$+16f(x_0+3h)-3f(x_0+4h)]+\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi),$$

      系数(-25, 48, -36, 16, -3)
- 二阶导数中点公式
  - $$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi),$$
- 舍入误差
  - 以拉氏多项式为例

    The total error in the approximation,

    $$f'(x_0)-\frac{\tilde{f}(x_0+h)-\tilde{f}(x_0-h)}{2h}=\frac{e(x_0+h)-e(x_0-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1),$$

    is due both to round-off error, the first part, and to truncation error. If we assume that the round-off errors $e(x_0\pm h)$ are bounded by some number $\varepsilon>0$ and that the third derivative of f is bounded by a number $M>0$, then

    $$\left|f'(x_0)-\frac{\tilde{f}(x_0+h)-\tilde{f}(x_0-h)}{2h}\right|\le\frac{\varepsilon}{h}+\frac{h^2}{6}M.$$
- 理查森外推
  - 用低精度的步长组合出高精度的微分
  - $$M=N_1(h)+K_1h^2+K_2h^4+K_3h^6+\cdots.$$
  - 可以用作精简拉氏多项式的计算过程

数值积分

- 求积法(Quadrature),基于插值多项式。
  - Trapezoidal rule（梯形法则）：

    $$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{(x_1-x_0)}{2}[f(x_0)+f(x_1)]-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

    当二阶导恒零时无误差。

- Simpson's rule：
  $$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$
  当四阶导恒为0时无误差。
  函数在子区间振荡会降低精度
- 封闭牛顿-柯特斯公式
  - $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx\sum_{i=0}^{n}a_i f(x_i)$，$a_i=\int_{x0}^{x_n}\prod_{j=0}^{n}\frac{x(-x_j)}{x(_i-x_j)}$
  - 八分之三法则：
    $\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$
  - 只适用小积分区间
- 复合数值积分
  - 分段处理
  - 复合梯形法则：
    $$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_j)+f(b)\right]-\frac{b-a}{12}h^2f''(\mu).$$
  - 分成n段后的舍入误差：$\mathrm{e}(h)\le nh\varepsilon$
- Romberg Integration
  - 对复合梯形法则应用理查森外推（误差形式满足理查森外推条件），取n = 1，2，4，8，16，……

k	$O(h_k^2)$	$O(h_k^4)$	$O(h_k^6)$	$O(h_k^8)$		$O(h_k^{2n})$
1	$R_{1,1}$					
2	$R_{2,1}$	$R_{2,2}$				
3	$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$			
4	$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n	$R_{n,1}$	$R_{n,2}$	$R_{n,3}$	$R_{n,4}$	$\cdots$	$R_{n,n}$

$$R_{1,1}=\frac{h}{2}(f(a)+f(b)).$$

$$R_{2,1}=\frac{1}{2}\left[R_{1,1}+h\sum_{k=1}^{2^{i-2}}f(a+(k-0.5)h)\right].$$

$$R_{k,j}=R_{k,j-1}+\frac{1}{4^{j-1}-1}(R_{k,j-1}-R_{k-1,j-1}),\quad \text{for } k=j,j+1,\ldots$$

- 高斯求积法
  - 优化牛顿-柯特斯法则的定步长，使得精度为2n-1阶。最小化阶数。
  - Legendre多项式
    - $$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=x^2-\frac{1}{3},$$ $$P_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x,\quad\text{and}\quad P_4(x)=x^4-\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{35}.$$
    - 当P（x）的阶数小于2n时，令x1,x2,...,xn是n阶勒让德多项式的根，则

$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, dx.$$

$$\int_{-1}^{1} P(x) \, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i).$$