Chap 2 一元方程求解

2022年11月4日 14:59

二分法(Bisection Method)

- 对于跳出循环的讨论
  - $|P_N - P_{N-1}| < \varepsilon$,存在$P_N - P_{N-1}$收敛,但PN不收敛的情况.因此,最好设置一个最大迭代次数.
  - 例外见exercise 16,17
- O(2^-n)做法

不动点法(Fixed-Point Iteration)

- 不动点存在且唯一的充分条件:

  If $g \in C[a,b]$ and $g(x) \in [a,b]$ for all $x \in [a,b]$, then g has at least one fixed point in $[a,b]$.
  - If, in addition, $g'(x)$ exists on (a,b) and a positive constant $k < 1$ exists with

$$|g'(x)| \le k, \quad \text{for all } x \in (a,b),$$

- 不动点迭代可收敛的条件

  $|g'(x)| \le k < 1$
- 不动点迭代的收敛速率为O(k^n).
- 线性收敛

牛顿迭代(Newton's Method)

- 条件是f二阶连续
- $p_n = p_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_{n-1})}$ 很显然,f'在区间内不能等于0.
- 否则,可能需要计算二阶导,引入$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)}$
- 牛顿迭代至少是平方收敛
- $p_0 \in [p-\delta, p+\delta], g(p) \approx 0, k \to 0$,因此收敛很快,也要求充分精确的初值.
- 主要缺陷:每次迭代都要计算f的导数,常常f的导数并不好计算

Secant Method

- $f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-1})-f(p_{n-2})}{p_{n-1}-p_{n-2}}$, 则$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1}-p_{n-2})}{f(p_{n-1})-f(p_{n-2})}$
- 同样要求$|p_{n-2} - p_{n-1}| < \delta$
- 通常用作其他方法的精益求精