Chap 5 常微分方程的初值问题

2022年11月5日　　10:11

利普希兹连续:

- 对$\forall y_1, y_2 \in D \subset \mathbb{R}^2$，满足$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \le L|y_1-y_2|$，*则称$f$是利普希兹连续*
- 充分条件：若D是凸集，且凸集D内满足$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \le L$，则f是利普希兹连续的。
- 如果f是利普希兹连续的，则初值问题
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(t,y), y(a)=\alpha,$$
是良态问题,方程有解且唯一，误差线性传播。

欧拉方法

- 先用泰勒展开计算出一系列步长为h的网格点，再通过插值，获得想要的点
- $y(t_{i+1})=y(t_i)+hf(t_i,y(t_i))+\frac{h^2}{2}y^{(2)}(\xi_i)$，截断误差为$O(h)$.
- 误差范围:$|y(t_i)-\omega_i| \le \frac{hM}{2L}\left[\mathrm{e}^{L(t_i-a)}-1\right], |y''(t)| \le M$
- 尽管y的二阶导不可知，仍可以用
$$y''(t)=\frac{dy'}{dt}(t)=\frac{df}{dt}(t,y(t))=\frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t))+\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))\cdot f(t,y(t)).$$
来计算M
- 算上舍入误差
$$|y(t_i)-u_i| \le \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2}+\frac{\delta}{h}\right)[e^{L(t_i-a)}-1]+|\delta_0|e^{L(t_i-a)},$$
可以得到最佳步长$h=\sqrt{\frac{2\delta}{M}}$

n阶泰勒方法

- $\omega_0=\alpha, \omega_{i+1}=\omega_i+hT^{(n)}(t_i,\omega_i), T^{(n)}(t_i,w_i)=\sum_{i=0}^{n}\frac{h^i}{(i+1)!}f^{(i)}(t_i,\omega_i)$
- 截断误差为O(h^n)

荣格-库塔方法

- 二元变量的泰勒展开
-

Evaluations per step	2	3	4	$5 \le n \le 7$	$8 \le n \le 9$	$10 \le n$
Best possible local truncation error	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^{n-1})$	$O(h^{n-2})$	$O(h^{n-3})$

- 中点法(二阶)
  - $\omega_{i+1}=\omega_i+hf\left(t_i+\frac{h}{2}, \omega_i+\frac{h}{2}f(t_i,\omega_i)\right)$
  - 截断误差与泰勒二阶相同.
  - 修正欧拉方法:$\omega_{i+1}=\omega_i+\frac{h}{2}[f(t_i,\omega_i)+f(t_{i+1},\omega_i+hf(t_i+\omega_i))]$
- 高阶

- 三阶

  $$\frac{h}{4}\left(f(t_i,w_i)+3f\left(t_i+\frac{2h}{3},w_i+\frac{2h}{3}f\left(t_i+\frac{h}{3},w_i+\frac{h}{3}f(t_i,w_i)\right)\right)\right)$$

微分方程组

- 把y看作向量即可.以四阶荣格库塔为例.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=f(t,\vec{u}),\overrightarrow{w_0}=\overrightarrow{\alpha_0},$$

$$\overrightarrow{k_1}=hf(t_j,\overrightarrow{\omega_j}),\overrightarrow{k_2}=hf\left(t_j+\frac{h}{2},\overrightarrow{\omega_j}+\frac{1}{2}\overrightarrow{k_1}\right),$$

$$\overrightarrow{k_3}=hf\left(t_j+\frac{h}{2},\overrightarrow{\omega_j}+\frac{1}{2}\overrightarrow{k_2}\right),\overrightarrow{k_4}=hf(t_{j+1},\overrightarrow{\omega_j}+\overrightarrow{k_3})$$

$$\vec{\omega}_{j+1}=\overrightarrow{\omega_j}+\frac{1}{6}(\overrightarrow{k_1}+2\overrightarrow{k_2}+2\overrightarrow{k_3}+\overrightarrow{k_4})$$

高阶微分方程

- 可以经过变换成微分方程组