

AliceFlow_v0.48

3D программа расчёта
динамики вязкой несжимаемой жидкости
и теплообмена.

Обозначения

ρ - плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$;

c_p - удельная теплоёмкость при постоянном давлении, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$;

λ - теплопроводность, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$;

T - температура, $^\circ\text{C}$;

t - время, с;

∇ - символический оператор Гамильтона;

\vec{V} - вектор скорости с компонентами V_x, V_y, V_z , $\text{м}/\text{с}$;

P - давление, Па ;

\vec{g} - ускорение свободного падения, $\text{м}/\text{с}^2$;

μ - коэффициент динамической вязкости, $\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$;

T – транспонирование;

δ_{ij} - символ Леопольда Кронекера;

$\bar{\bar{\epsilon}}$ -тензор скоростей деформаций;

$|\Omega|$ –модуль завихренности, ротора вектора скорости;

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ - кинематическая вязкость;

$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$ - коэффициент объёмного линейного температурного

расширения;

k - кинетическая энергия турбулентных пульсаций;

μ_t - турбулентная динамическая вязкость, $\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$;

κ - эмпирическая постоянная Т. ф. Кармана, $\kappa = 0.42$;

$\mu_{eff} = \frac{1}{\alpha_k} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) = \frac{1}{1.393} \left(\mu + \frac{\mu_t}{1.0} \right)$ - эффективная динамическая вязкость, $\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$;

Содержание

1. Математическое введение.
 - 1.1. Теорема о дивергенции (метод Грина-Гаусса).
 - 1.2. Метод наименьших квадратов (для одной переменной).
 - 1.3. Вычисление расстояния до ближайшей твёрдой неподвижной стенки.
2. Определяющие уравнения.
 - 2.1. Уравнение теплопроводности в твёрдом теле.
 - 2.2. Уравнение теплопередачи в жидкости.
 - 2.3. Уравнения Навье-Стокса.
 - 2.4. Тензор касательных напряжений.
 - 2.5. Приближение Обербека-Буссинеска.
 - 2.6. Турбулентность. Уравнения Рейнольдса 1895г. Подход RANS.
 - 2.7. Алгебраическая модель турбулентности (Zero-Equation Turbulence Model).
 - 2.8. Уравнение теплопроводности в жидкости.
 - 2.9. Дифференциальные модели турбулентности.
 - 2.10. Модели турбулентности с одним дифференциальным уравнением.
 - 2.11. Модель Колмогорова-Прандтля (Kolmogorov-Prandtl Turbulence Model).
 - 2.12. Вискореинольдсовая стандартная $k-\varepsilon$ модель турбулентности Лаундера-Сполдинга 1972 г.
 - 2.13. Модель Спаларта – Аллмареса с одним уравнением.
 - 2.14. Модель SST К-Omega Ментера с двумя уравнениями.
 - 2.15. Двухслойная (k- ε) – модель.
3. Неньютоновская жидкость.
 - 3.1. Power-law fluid. Закон Оствальда-де Вела.
 - 3.2. Вязкость крови. Закон Кессона.
 - 3.3. Другие псевдопластические зависимости динамической вязкости от напряжения сдвига. Обобщение для программной реализации.
4. Модель теплообмена излучением.

Список литературы.

1. Математическое введение.

1.1. Теорема о дивергенции (метод Грина-Гаусса).

Простейшим вариантом вычисления, нахождения градиентов, является использование теоремы о дивергенции (метод Грина-Гаусса):

$$\int_S \Phi d\vec{S} = \int_V \nabla \Phi dV, \quad (1.1)$$

где S – поверхность ограничивающая объём V , Φ - рассматриваемая полевая величина, например температура, dV – элементарный (малый) объём, $d\vec{S}$ - вектор равный по длине dS - элементарной площади (части) поверхности S , и направленный по нормали к dS наружу поверхности S . Градиент величины Φ :

$$\nabla \Phi = \vec{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.2)$$

Применение формулы (1.1) даёт конструктивный способ вычисления градиента величины – приводит к суммированию по граням:

$$(\nabla \Phi)_P = \frac{1}{J} \sum_f \Phi_f \vec{S}_f, \quad (1.3)$$

Здесь $(\nabla \Phi)_P$ - искомый вектор имеющий три скалярных компонента, P – обозначает центр P -ого контрольного объёма (КО), $J=dx \cdot dy \cdot dz$ – объём КО, f – пробегает все грани данного P -ого КО, \vec{S}_f - вектор направленный наружу P -ого КО и равный по длине площади грани f P -ого КО.

1.2. Метод наименьших квадратов (для одной переменной).

Очень часто требуется решить переопределённую систему уравнений – когда количество уравнений больше чем число неизвестных. Такая необходимость возникает, например, при применении подсеточной динамической модели турбулентности Германо (1990год). Итак рассмотрим систему n – линейных уравнений и только одно неизвестное x .

$$\begin{cases} a_1 x = b_1 \\ \dots \\ a_n x = b_n \end{cases}, \quad (1.4)$$

здесь x – скаляр (искомая величина). Составим функцию $Q(x)$ минимум которой достигается на решении системы (1.4). Очевидно, такой функцией будет следующая:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2. \quad (1.5)$$

Необходимое условие минимума $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ даёт искомое значение $x = x^*$ удовлетворяющее одновременно в некотором смысле всем уравнениям (1.4):

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad (1.6)$$

Итак, $x = x^*$ определяемое по формуле (1.6) и есть искомое решение системы (1.4) полученное по способу наименьших квадратов.

Сделаем небольшое пояснение: решение i -ого уравнения есть величина $x_i = \frac{b_i}{a_i}$. Систему уравнений (1.4) можно преобразовать:

$$\begin{cases} a_i \rightarrow 1 \\ b_i \rightarrow \frac{b_i}{a_i} = x_i \end{cases} \quad (1.7)$$

Тогда решение системы (1.6) примет вид среднего арифметического:

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.8)$$

2. Определяющие уравнения.

2.1. Уравнение теплопроводности в твёрдом теле.

Теплопередача в твёрдом теле описывается уравнением теплопроводности :

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + S_T, \quad (2.1)$$

где T - температура, t - время, ρ - плотность, λ - теплопроводность, c_p - удельная теплоёмкость при постоянном давлении, S_T - источниковый член уравнения, который, например, может отвечать за объёмное тепловыделение. При тепловом расчёте, например, СВЧ транзистора, инженер имеет дело с многослойными структурами, в которых каждый слой имеет свои свойства материала - свои значения величин теплопроводности, теплоёмкости и плотности. Более того для многих материалов, с которыми приходится иметь дело, теплопроводность и теплоёмкость значительно зависят от температуры. Таким образом, уравнение (2.1) является нелинейным и для его решения требуется применить итерационный подход.

2.2. Уравнение теплопередачи в жидкости.

Под термином жидкость, понимаются как жидкости, так и газы. В основном при расчётах рассматриваются две жидкости - вода и воздух. Теплопередача в жидкости происходит согласно следующему уравнению:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c_p \vec{V} \cdot T) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + S_T, \quad (2.2)$$

где T - температура, \vec{V} - вектор скорости жидкости, имеющий в трёхмерном пространстве три компоненты V_x, V_y, V_z ; t - время, ρ - плотность, λ - теплопроводность, c_p - удельная теплоёмкость при постоянном давлении, S_T - источник член уравнения который, например, может отвечать за объёмное тепловыделение. Уравнение (2.2) записано в дивергентной форме.

При тепловом расчёте, например, радиаторов охлаждения, свойства теплоносителей (воздуха или воды) зависят от температуры, а также, возможно, от давления. Поэтому уравнение (2.2) является нелинейным. Более того в расчётах рассматриваются задачи сопряжённого теплообмена, когда часть теплопередачи осуществляется в твёрдом теле, а часть в жидкости. Таким образом имеем дело с уравнением (2.2) для которого скорость в твёрдом теле равна нулю. Уравнение (2.2) обобщает уравнение (2.1).

Наконец, уравнение (2.2) содержит ещё один член, т.е. имеет следующую форму (см. [3] стр. 21):

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_i c_p T)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} V_i) + S \quad (2.3)$$

первый член описывает нестационарность потока, второй конвективный перенос, третий - перенос за счёт теплопроводности и определяется законом Фурье для переноса энергии $q_i = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$, четвёртый диссипацию энергии, пятый - приток или убытие энергии за счёт химических реакций, радиации и т.д.

Распишем более подробно диссипативный (четвёртый) член:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} V_i) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{11} V_x + \tau_{21} V_y + \tau_{31} V_z) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{12} V_x + \tau_{22} V_y + \tau_{32} V_z) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{13} V_x + \tau_{23} V_y + \tau_{33} V_z) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(2 \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right) V_x + \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) V_y + \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) V_z \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) V_x + \mu \left(2 \cdot \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right) V_y + \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) V_z \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) V_x + \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) V_y + \mu \left(2 \cdot \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right) V_z \right). \end{aligned}$$

Здесь τ_{ij} - тензор скоростей деформаций (о нём будет рассказано позже), μ - коэффициент динамической молекулярной вязкости.

2.3. Уравнения Навье-Стокса.

Уравнения Навье-Стокса, описывающие движение вязкой несжимаемой жидкости, известны с 1827 года. Несмотря на это они таят в себе ещё много непознанного.

Изучение движения жидкостей (и газов) представляет собой содержание гидродинамики. Поскольку явления, рассматриваемые в гидродинамике, имеют макроскопический характер, то в гидродинамике жидкость (мы говорим здесь и ниже для краткости только о жидкости, имея при этом в виду, как жидкости, так и газы) рассматривается как сплошная среда. Это значит, что всякий малый элемент объёма жидкости считается всё-таки настолько большим, что содержит ещё очень большое число молекул. Соответственно этому, когда мы будем говорить о бесконечно малых элементах объёма, то всегда при этом будет подразумеваться "физически" бесконечно малый объём, т.е. объём, достаточно малый по сравнению с объёмом тела, но большой по сравнению с межмолекулярными расстояниями. В таком же смысле надо понимать в гидродинамике выражения "жидкая частица", "точка жидкости". Если, например, говорят о смещении некоторой частицы жидкости, то при этом идёт речь не о смещении отдельной молекулы, а о смещении целого элемента объёма, содержащего много молекул, но рассматриваемого в гидродинамике как точка.

Здесь предполагается, что уравнения Навье-Стокса описывают ламинарные течения, а для моделирования турбулентных течений нужно использовать дополнительные соотношения в рамках RANS подхода. RANS подход базируется на осреднённых уравнениях Навье-Стокса - уравнениях Рейнольдса, для замыкания которых требуются дополнительные соотношения.

Рассмотрим систему уравнений гидродинамики :

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \rho \vec{g}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (4)$$

$$\bar{\bar{\tau}} = \mu \left(\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \delta \right), \quad (5.1)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), i=1,2,3, \quad (5.2)$$

здесь \vec{V} - вектор скорости в 3D пространстве с компонентами V_x, V_y, V_z , P – давление, ρ - плотность, \vec{g} - ускорение свободного падения, μ - коэффициент динамической вязкости, T – транспонирование, δ_{ij} - символ Леопольда Кронекера, ∇ - символический векторный оператор Гамильтона, $\vec{\tau}$ - тензор касательных напряжений (справедлива гипотеза Ньютона о линейной связи, т.е. иными словами мы пока ограничимся рассмотрением класса Ньютоновских жидкостей). О тензоре касательных напряжений будь немного подробнее рассказано позже.

Уравнение сохранения импульса (3) (II закон Ньютона) записано в векторном виде и в 3D пространстве представляет собой 3 скалярных уравнения – для каждой компоненты скорости одно уравнение. Для замыкания системы уравнений к (3) добавляется закон несжимаемости (4). Закон несжимаемости (4) представляет собой одно скалярное уравнение.

Примечание: (5.1) и (5.2) – две разные (символьно математически) формы записи тензора касательных напряжений означающие физически одно и то же.

Впервые на основании соображений о взаимодействии молекул эти уравнения были получены Навье в 1822 г. и Пуассоном в 1829 г., а затем Сен-Венаном в 1843 г. и позже Стоксом в 1845г.

При тепловом расчёте, например, радиаторов охлаждения, коэффициент кинематической вязкости теплоносителей (воздуха или воды) зависит от температуры. Поэтому к уравнениям (3), (4), (5) требуется добавить уравнение (2) для расчёта поля температур. Результирующая система уравнений (2-5) является сильно нелинейной и для её эффективного решения требуется применить идеи расщепления и итерационный подход.

2.4. Тензор касательных напряжений.

Распишем покомпонентно тензор касательных напряжений или тензор скоростей деформаций. Если посмотреть на векторное уравнение сохранения импульса то можно увидеть что оно распадается на скалярных уравнения (3). По одному для каждой компоненты скорости. Таким образом уравнения сохранения импульса в декартовой прямоугольной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} V_x) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right) \right) + \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \\
& \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} V_y) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right) \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} V_z) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right) \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Обозначения здесь стандартные и уже упоминались ранее выше по тексту. Тензор скоростей деформаций является симметричным тензором второго ранга и имеет вид матрицы производных от скоростей размерами 3x3:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \mu \left(2 \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right) & \mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) & \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & \mu \left(2 \cdot \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right) & \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) & \mu \left(2 \cdot \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right) \end{bmatrix} \tag{5}$$

2.5. Приближение Обербека-Буссинеска.

Данное приближение используется для моделирования естественной конвекции. В нём предполагается, что плотность линейно зависит от температуры:

$$\rho(T) = \rho_0 (1.0 - \beta \cdot (T - T_0))$$

Здесь

β - коэффициент линейного температурного объёмного расширения,

ρ_0 - плотность при температуре T_0 ,

T - температура в градусах Цельсия.

Тогда дивергентная форма системы уравнений тепловой конвекции в приближении Обербека-Буссинеска запишется в виде:

$$\frac{\partial(\rho_0 \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{V} \vec{V}) = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\bar{\epsilon}} - \rho_0 \beta (T - T_0) \vec{g}; \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial(\rho_0 c_p T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 c_p \vec{V} T) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T); \quad (2.1)$$

$$\nabla \vec{V} = 0; \quad (4.1)$$

Здесь

- \vec{V} - вектор скорости в трёхмерном пространстве,
- P - давление,
- $\bar{\bar{\epsilon}}$ - тензор скоростей-деформаций см. формулу (5),
- \vec{g} - вектор силы тяжести,
- c_p - удельная теплоёмкость при постоянном давлении,
- λ - коэффициент теплопроводности.

Вывод системы уравнений тепловой конвекции в приближении Обербека-Буссинеска можно посмотреть в книге Г.З. Гершуни и Жуховицкого [1].

Коэффициент $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ - объёмного линейного температурного расширения для реальных жидкостей (вода и воздух) является фундаментальным свойством материала и чаще всего является функцией температуры.

2.6. Турбулентность. Уравнения Рейнольдса 1895г. Подход RANS.

Турбулентность означает, что мгновенные скорости, давление и температура изменяются в каждой точке расчётной области. Таким образом мгновенную скорость можно представить в виде суммы некоторой осреднённой компоненты скорости и колеблющейся (пульсационной) скорости, например (для давления и температуры аналогично):

$$\begin{aligned} V_x &= \bar{V}_x + V'_x \\ V_y &= \bar{V}_y + V'_y \\ V_z &= \bar{V}_z + V'_z \\ P &= \bar{P} + P' \\ T &= \bar{T} + T' \end{aligned} \quad (6)$$

где \bar{V}_x - средняя (осреднённая) горизонтальная скорость, V'_x - колеблющаяся (пульсационная) компонента горизонтальной скорости. Остальные функции (скорость, давление, температура) аналогично : черта сверху - осреднённая компонента, штрих сверху - пульсационная компонента. Температуру более подробно рассмотрим позже.

При инженерном расчёте из-за огромного количества информации которое таит в себе турбулентное течение имеет смысл рассматривать только поведение средних величин (с чертой сверху). Ввиду ограничения быстродействия современных настольных ЭВМ. Для средних величин требуется получить определяющие уравнения. В основе новых уравнений для средних величин, конечно же должны лежать уравнения Навье-Стокса (3,

4, 5), которые требуется осреднить по некоторому достаточно большому интервалу времени $[0..Θ]$, который всё-таки относительно невелик по сравнению с характерными временами изменения осреднённых величин.

Справедливы следующие соотношения :

$$\frac{1}{Θ} \int_0^Θ V'_x dt = 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{Θ} \int_0^Θ V_x dt = \bar{V}_x. \quad (8)$$

Т.е. среднее значение по времени от пульсационной компоненты равно нулю (7), а среднее по времени от мгновенной величины есть осреднённая компонента (8).

Воспользовавшись соотношениями (7) и (8) и некоторыми правилами работы со средними, можно из уравнений Навье-Стокса (3,4,5) в результате подстановки в них (6) и применения осреднения получить так называемые уравнения Рейнольдса для осреднённых величин, которые имеют вид:

$$\frac{\partial(\rho \bar{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V} \bar{V}) = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} - \nabla \cdot \bar{\bar{R}} + \rho \bar{g}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0, \quad (4)$$

$$\bar{\bar{\tau}} = \mu \left(\nabla \bar{V} + \nabla \bar{V}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \bar{V}) \delta \right), \quad (5.1)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), i=1,2,3, \quad (5.2)$$

$$R_{ij} = \langle \rho V'_i V'_j \rangle \quad (9)$$

Здесь средние величины относительно которых записаны уравнения (которые должны быть с чертой сверху) обозначены просто как обычно без черты. $\langle \rangle$ - обозначает операцию осреднения по времени. $-\nabla \cdot \bar{\bar{R}}$ - дополнительное слагаемое в (3.4) по сравнению с (3). R_{ij} - представляет собой тензор напряжений Рейнольдса.

$$\bar{\bar{R}} = \begin{bmatrix} \langle \rho V'_x V'_x \rangle & \langle \rho V'_x V'_y \rangle & \langle \rho V'_x V'_z \rangle \\ \langle \rho V'_y V'_x \rangle & \langle \rho V'_y V'_y \rangle & \langle \rho V'_y V'_z \rangle \\ \langle \rho V'_z V'_x \rangle & \langle \rho V'_z V'_y \rangle & \langle \rho V'_z V'_z \rangle \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Часто при моделировании турбулентных течений тензор напряжений Рейнольдса включают в тензор вязких напряжений (скоростей деформаций) с неизвестным коэффициентом - турбулентной динамической вязкостью, например:

$$-\langle \rho V'_x V'_y \rangle = \mu_t \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right). \quad (10)$$

Преимущество такого способа заключается в том, что форма представления для $-\nabla \cdot \bar{\bar{R}}$ совпадает с формой представления для диффузии в исходных уравнениях (3). Тогда $\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} - \nabla \cdot \bar{\bar{R}}$ можно объединить, введя эффективную вязкость как сумму ламинарной и турбулентной вязкостей:

$$\mu := \mu + \mu_t,$$

где μ_t - турбулентная динамическая вязкость. В рамках RANS подхода все модели турбулентности отличаются только способом вычисления μ_t .

2.7. Алгебраическая модель турбулентности (Zero-Equation Turbulence Model (ZEM)).

По-видимому, самой простой моделью турбулентности является алгебраическая модель турбулентности - Zero-Equation Turbulence Model. Данная модель основана на понятии турбулентной вязкости и не требует решения каких либо дополнительных дифференциальных уравнений.

Согласно этой модели коэффициент динамической вязкости μ фигурирующий в формуле (5) модифицируется следующим образом:

$$\mu := \mu + \mu_t, \quad (11)$$

где $:=$ - оператор присваивания, а μ_t - турбулентная динамическая вязкость.

Коэффициент теплопроводности λ в уравнении (2) также модифицируется:

$$\lambda := \lambda + \frac{c_p \mu_t}{\sigma_T} = \frac{c_p \mu}{Pr} + \frac{c_p \mu_t}{\sigma_T}, \quad (11.1)$$

здесь постоянная $\sigma_T = 0.85$ - турбулентное число Прандтля, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ -

кинематическая вязкость, $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ - коэффициент температуропроводности, а

$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ - число Прандтля.

Турбулентная динамическая вязкость моделируется следующим образом:

$$\mu_t = \rho \ell^2 S, \quad (12)$$

где ρ - плотность, ℓ - длина пути смешения (Прандтля), универсальна для пристеночной зоны движения у гладкой поверхности, S - модуль тензора скоростей деформаций по средней скорости (все величины представляются в виде прямой суммы осреднённой и пульсационной составляющей. Уравнения записаны для средних величин.).

Длина пути смешения ℓ рассчитывается по следующей формуле :

$$\ell = \min(\kappa d, 0.09 \cdot d_{\max}). \quad (13)$$

В данном случае мы воспользовались гипотезой Эскудиера для максимума пути смешения. В гипотезе Эскудиера (1966) d_{\max} равен толщине пограничного слоя. Такое определение пути смешения позволяет замкнуть

модель Прандтля без привлечения дополнительных предположений. Хотя эта гипотеза хорошо описывает турбулентный масштаб в пограничном слое, её практическое использование существенно затруднено из-за трудностей определения толщины пограничного слоя.

Константы принимают следующие значения $\kappa = 0.419$ - постоянная Теодора фон Кармана, d - расстояние от текущей точки до ближайшей твёрдой стенки (именно твёрдой стенки на которой выполняется условие прилипания), d_{\max} - максимальное значение среди всех кратчайших расстояний от текущей точки до ближайшей стенки, для всех возможных текущих точек (центров контрольных объёмов). Остаётся проблема, требуется более точно оценить d_{\max} так чтобы она наиболее точно соответствовала толщине пограничного слоя на стенке, вблизи к данной точке.

Модуль тензора скоростей деформаций по средней скорости определяется следующим образом (см. [2]):

$$S = \sqrt{2 \cdot S_{ij} S_{ij}}, \quad (14)$$

$$S = \sqrt{2 \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)^2} \quad (14.1)$$

$$S = \sqrt{2 \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} (\nabla \vec{V})^2} \quad (14.2)$$

$$S = \sqrt{2 \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2} \quad (14.3)$$

где

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right). \quad (15)$$

Под обозначением $S = \sqrt{2 \cdot S_{ij} S_{ij}}$ понимается следующая величина :

$$S = \sqrt{2 \cdot S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{2 (S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2S_{12}^2 + 2S_{13}^2 + 2S_{23}^2)}. \quad (16)$$

Она является тензорным инвариантом.

2.8 Уравнение теплопроводности в жидкости.

Пусть модуль тензора скоростей деформаций S вычисляется по формуле (14.3)

$$S = \sqrt{2 \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2} \quad (14.3)$$

тогда уравнение теплопроводности в жидкости имеет вид :

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} c_p T) = \nabla(\lambda \nabla T) + \beta T [\nabla(P \vec{V}) - P \nabla(\vec{V})] + \mu S^2 \quad (2.4)$$

где S - инвариант тензора скоростей деформаций, P - давление.
см. Darwish.

2.9. Дифференциальные модели турбулентности.

В дифференциальных моделях турбулентности приходится решать дифференциальные уравнения (часто одно или два) для определения турбулентных характеристик необходимых для вычисления турбулентной вязкости фигурирующей в гипотезе Буссинеска 1877 г. Здесь будет дана краткая характеристика дифференциальных моделей турбулентности.

- ✓ Легко применимы к течениям в областях сложной геометрии.
- ✓ Нет необходимости использовать нелокальные переменные, характерные для пограничных слоёв или других течений (нелокальными переменными: толщина пограничного слоя, трение на стенке изобилуют алгебраические модели турбулентности).
- ✓ Имеют "эффекты памяти" за счёт решения уравнений переноса.

Можно сделать вывод, что дифференциальные уравнения турбулентности существенно более универсальны, чем алгебраические.

2.10. Модели турбулентности с одним дифференциальным уравнением.

Хотя первые модели такого типа появились уже в конце 1960-х гг., они долгое время не находили практического применения, оставаясь в тени более сложных и, как тогда казалось, более перспективных моделей с двумя дифференциальными уравнениями переноса турбулентных характеристик. Это было связано как с объективными недостатками первых моделей с одним уравнением (для их замкнутой формулировки необходимо было использовать те или иные алгебраические соотношения для линейного масштаба турбулентности), так и с имевшей место переоценкой возможностей моделей с двумя уравнениями. Однако в конце 1980 — начале 1990-х гг., в связи с крушением надежд на создание универсальной модели турбулентности, интерес к моделям с одним уравнением значительно повысился. В результате был разработан целый ряд моделей такого типа, в частности модели Болдуина — Барса, Ю. Голдберга, А.Н. Секундова с соавторами, Спаларта — Аллмараса, П. Дурбина с соавторами. Дальнейшие исследования показали, что, по крайней мере, часть из этих моделей не только не уступает по точности и универсальности более сложным моделям с несколькими транспортными уравнениями (прежде всего моделям типа $k-\varepsilon$), но во многих отношениях превосходит эти модели. Характерной особенностью последней генерации моделей с одним уравнением является то, что все они, за исключением модели Голдберга, формулируются либо непосредственно для турбулентной вязкости, либо для величин, связанных с нею простыми соотношениями. Иными словами, идея В. Ни и Л. Коважного, впервые предложивших именно такой подход, оказалась более плодотворной, чем путь, предложенный П. Брэдшоу, Д. Феррисом и Н. Атвеллом.

В настоящее время наиболее популярными из перечисленных выше моделей турбулентности с одним уравнением являются две модели: модель Секундова ν_t -92 (используется главным образом в России) и модель Спаларта — Аллмараса (SA-модель).

Модель ν_t -92 представляет собой последовательное обобщение и развитие модели Ни и Коважного. В результате многолетней работы ее авторам удалось добиться вполне удовлетворительного описания не только большинства канонических сдвиговых турбулентных течений (плоские и осесимметричные струи и слои смешения в несжимаемой и сжимаемой жидкостях, пограничный слой на плоской пластине при отсутствии и наличии шероховатости поверхности и др.), но и ряда существенно более сложных течений, в том числе внутренних течений, представляющих непосредственный интерес.

Авторы SA-модели, которая по своей форме весьма близка к модели ν_t -92, ориентировались, прежде всего, на решение задач внешней аэродинамики. Построенное ими модельное уравнение переноса турбулентной вязкости (SA-1) оказалось заметно более простым, чем в модели ν_t -92. Тем не менее, последующий опыт эксплуатации SA-модели показал, что ее реальные возможности заметно шире, чем предполагалось авторами при создании модели. Более того, после введения в нее поправки на кривизну линий тока и вращение, границы применимости SA-модели еще более расширились, о чем достаточно убедительно свидетельствуют результаты расчётов, которые сравнивались с экспериментом. Тем не менее, как и все известные модели, SA-модель никак не претендует на статус универсальной. Например, при расчете осесимметричной затопленной струи коэффициент расширения струи, рассчитанный с помощью SA-модели, отличается от экспериментального значения более чем вдвое.

Завершая краткий обзор современных моделей турбулентности с одним дифференциальным уравнением, следует обратить внимание на то обстоятельство, что, в отличие от алгебраических моделей, они удовлетворяют принципу инвариантности Галилея, что является весьма желательным для любой физической модели, и сформулированы в тензорно-векторной форме, что делает возможным их использование для расчета течений со сложной геометрией. Наряду с этим, вычислительные затраты, связанные с реализацией этих моделей (по крайней мере, лучших из них), сравнительно невелики. Таким образом, модели данной группы во многих случаях представляют собой оптимальный компромисс между алгебраическими моделями и более сложными в вычислительном отношении моделями с двумя дифференциальными уравнениями.

2.11. Модель Колмогорова-Прандтля.

Низкорейнольдсовая модель с одним уравнением на основе уравнения для кинетической энергии турбулентности.

Кинетическая энергия турбулентных пульсаций :

$$k = \frac{\langle V_x'^2 \rangle + \langle V_y'^2 \rangle + \langle V_z'^2 \rangle}{2}. \quad (17)$$

Сразу можно отметить, что величина k может принимать внутри расчётной области только значения большие нуля, и только на твёрдой стенке может равняться нулю. Это важное замечание для программной реализации.

Скорость диссипации энергии:

$$\varepsilon = 2\nu \left\langle \frac{\partial V_i'}{\partial x_j} \frac{\partial V_i'}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (18)$$

Справедливое как в области развитого турбулентного течения, так и в вязком подслое уравнение переноса для k в дивергентной форме записывается следующим образом:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla(\rho k \vec{V}) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + G_k - \rho \varepsilon - \frac{2\mu k}{d^2}, \quad (19)$$

здесь k - кинетическая энергия турбулентных пульсаций, d - кратчайшее расстояние до ближайшей твёрдой стенки, ε - скорость диссипации энергии, ρ - плотность, G_k - генерация кинетической энергии турбулентных пульсаций, μ - коэффициент молекулярной динамической вязкости, μ_t - коэффициент турбулентной динамической вязкости, $\sigma_k = 0.72$ - турбулентное число Прандтля.

Фундаментальную роль в теории турбулентности, основанной на использовании уравнений для вторых моментов, сыграли работы А.Н.Колмогорова (1942) и Прандтля-Вигхардта (1945), в которых была предложена гипотеза, связывающая коэффициент турбулентной вязкости μ_t и кинетическую энергию турбулентности k :

$$\mu_t = \rho C_\mu \ell_v \sqrt{k} \quad (20)$$

Здесь ℓ_v - интегральный масштаб турбулентности, C_μ - эмпирическая постоянная.

Генерационный (производственный) член в уравнении для кинетической энергии турбулентности вычисляется по следующей формуле

$$G_k = -\left\langle \rho V_i' V_j' \right\rangle \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = -R_{ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \mu_t S^2. \quad (21)$$

Здесь ρ - плотность, R_{ij} - тензор напряжений Рейнольдса, μ_t - турбулентная динамическая вязкость см. формулу Колмогорова (20), инвариант тензора S - это модуль тензора скоростей деформаций см. формулу (16).

Скорость диссипации энергии турбулентности ε в соответствии с гипотезой Колмогорова-Прандтля выражается при больших числах Рейнольдса через кинетическую энергию k и интегральный масштаб ℓ_ε соотношением

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{\ell_\varepsilon} \quad (22)$$

где C_D - эмпирическая постоянная.

Принятие гипотезы (22) означает, что процессом, определяющим скорость диссипации, является не сам процесс собственно диссипации, т.е. процесс превращения кинетической энергии "мелкомасштабных вихрей" в тепло, а процесс переноса энергии последовательно от "больших вихрей" к "меньшим". Этот каскадный процесс, как предполагается, зависит лишь от величин ℓ_ε и k и не зависит от вязкости.

Входящие в (20) и (22) масштабы ℓ_v и ℓ_ε обеспечивают необходимые эффекты затухания в пристеночной области и определяются по формулам:

$Re_d = \frac{\rho d \sqrt{k}}{\mu},$	(23)
---------------------------------------	------

$\ell_v = C_\ell d [1.0 - \exp(-Re_d / A_v)],$	(24)
--	------

$\ell_\varepsilon = C_\ell d [1.0 - \exp(-Re_d / A_\varepsilon)].$	(25)
--	------

Коэффициенты в формулах имеют следующие значения :

Const	Value
σ_k	0.72
κ	0.42
C_μ	0.09
C_ℓ	$\frac{\kappa}{C_\mu^{3/4}}$
C_D	1.0
A_ε	$2C_\ell$
A_v	70

Граничные условия запишутся в следующем виде :

граница	условие на k
WALL	$k = 0$
SYMMETRY	$\frac{\partial k}{\partial \vec{n}} = 0$
PRESSURE OUTLET/OUTFLOW	$\frac{\partial k}{\partial \vec{n}} = 0$
INFLOW	$k = \frac{3}{2} (I_t U_\infty)^2,$ $I_t = 0.03$

Здесь \vec{n} - внешняя нормаль к границе, U_∞ - скорость набегающего потока на бесконечности (нормальная скорость на входной границе), I_t - интенсивность турбулентных пульсаций ($I_t = 3\%$).

При программной реализации большое значение имеет способ представления источникового члена уравнения (19):

$$G_k - \rho\varepsilon - \frac{2\mu k}{d^2} = \mu_t S^2 - \rho\varepsilon - \frac{2\mu k}{d^2} \quad (26)$$

Особую сложность при решении уравнений Рейнольдса, замкнутых моделью турбулентности Колмогорова-Прандтля, представляет решение дискретных уравнений модели турбулентности, т.к. во время итераций может возникнуть неустойчивость решения из-за того, что переменные k и ε могут принять нефизичные значения. Для улучшения сходимости при решении уравнения (19) использовалась стандартная форма записи аппроксимации источникового члена :

$$S = S_C + S_P \Phi_P \quad (27)$$

Т.е. источниковый член уравнения был линеаризован обычным образом. Роль Φ в данном случае играет кинетическая энергия турбулентных пульсаций. Для выполнения правил С.Патанкара необходима неположительность члена $S_P \leq 0$.

Согласно этой форме записи устойчивая аппроксимация источника (26) уравнения (19) для внутреннего КО имеет вид (см. [2]):

$$S_C = \mu_t S^{*2} + 0.5\rho\varepsilon^* \quad (28)$$

$$S_P = -1.5\rho \frac{\varepsilon^*}{k^*} - \frac{2\mu}{d^2} \quad (29)$$

Отметим, что $*$ обозначены величины с прошлой итерации, а также для внутреннего КО : $\varepsilon^* > 0$, $k^* > 0$ и поэтому $S_P \leq 0$.

Становится очевидным что при расчёте очень важно стартовать с каких то начальных значений, поэтому за начальные значения во внутренних КО расчётной области возьмём значения на входной границе :

$$k = 1.5(U_\infty I_t)^2, \quad I_t = 0.03; \quad (30)$$

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{0.75} k^{1.5}}{0.07 L_{in}}, \quad (31)$$

здесь L_{in} - линейный размер входной границы, если таких границ несколько то среднее арифметическое таких линейных размеров, U_∞ - характерная скорость на входе в расчётную область, если имеем дело с несколькими входными границами, то также берём среднее арифметическое среди скоростей на входе.

2.12. Высокорейнольдсовая стандартная $k-\varepsilon$ модель турбулентности Лаундера-Сполдинга 1972 г.

Для моделирования динамической турбулентной вязкости в данной модели требуется решить два дополнительных дифференциальных уравнения. Первое уравнение для k - кинетической энергии турбулентных пульсаций, а второе уравнение для ε - скорости диссипации энергии турбулентности.

Краткая характеристика данной модели следующая:

✓ Устойчивая.

- ✓ Широко применяется, несмотря на известные ограничения модели.
- ✓ Плохо применима для сложных течений включающие сильные отрывы потоков, потоков с сильной кривизной.
- ✓ Применима для начальных приближений, начального анализа вариантов конструкций и параметрического анализа.
- ✓ Модель является полуэмпирической, в которой константы были получены для потоков, обладающих изотропностью турбулентной вязкости (в эксперименте наблюдались развитые вторичные течения, вызванные неоднородностью распределения напряжений).
- ✓ При выводе данной модели турбулентности вводилось предположение, что поток является полностью турбулентным, и таким образом эффекты, вызванные молекулярной вязкостью незначительны (например для задач $Re \sim 10^5$ в которых режим течения не является полностью турбулентным и имеется обширная зона отрыва с малыми Re).
- ✓ грубая запись уравнения переноса скорости турбулентной диссипации ε .

Уравнения модели запишутся следующим образом:

А) для кинетической энергии турбулентных пульсаций:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla(\rho k \vec{V}) = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + G_k + G_b - \rho \varepsilon \quad (32)$$

В) для скорости турбулентной диссипации:

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \vec{V}) = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (33)$$

Турбулентная динамическая вязкость рассчитывается по формуле Колмогорова:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (34)$$

Стандартная k-epsilon модель имеет следующие константы:

Const	value
$C_{1\varepsilon}$	1.44
$C_{2\varepsilon}$	1.92
C_μ	0.09
σ_k	1.0
σ_ε	1.3

Подбор констант был выполнен на основе струйных течений (и зависимости

$C_{2\varepsilon} = C_{1\varepsilon} - \frac{\kappa^2}{\sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu}}$, где κ - постоянная Кармана). Названия констант: $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ -

турбулентные числа Прандтля. Величина $C_{3\varepsilon}$ подробно будет рассмотрена позже.

Генерационный (производственный) член в уравнении для кинетической энергии турбулентности вычисляется по следующей формуле

$$G_k = -\langle \rho V_i' V_j' \rangle \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = -R_{ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \mu_t S^2. \quad (35)$$

Здесь ρ - плотность, R_{ij} - тензор напряжений Рейнольдса, μ_t - турбулентная динамическая вязкость см. формулу Колмогорова (34), инвариант тензора S - это модуль тензора скоростей деформаций см. формулу (16).

Член G_b и коэффициент $C_{3\varepsilon}$ отвечают за эффект плавучести (Архимедовы силы всплытия более тёплых пластов). G_b - может быть отличен от нуля только при наличии ненулевой силы тяжести.

$$G_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (36)$$

$$G_b = \beta g_x \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x} + \beta g_y \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial y} + \beta g_z \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (36.1)$$

Здесь β - коэффициент линейного объёмного температурного расширения, g - ускорение свободного падения с компонентами g_x, g_y, g_z , T - температура, Pr_t - турбулентное число Прандтля, μ_t - коэффициент турбулентной динамической вязкости.

Турбулентное число Прандтля находится следующим образом:

$$\alpha_0 = \frac{1}{Pr} = \frac{\lambda}{\mu c_p} \quad (37)$$

$$Pr_t = \frac{1}{\alpha} \quad (38)$$

где величина α находится из следующего уравнения

$\left \frac{\alpha - 1.3929}{\alpha_0 - 1.3929} \right ^{0.6321} \cdot \left \frac{\alpha + 2.3929}{\alpha_0 + 2.3929} \right ^{0.3679} = \frac{\mu_{mol}}{\mu_{eff}} \quad (39)$
--

здесь μ_{mol} - молекулярная динамическая вязкость (обычная из свойств материалов, что задаёт пользователь), а $\mu_{eff} = \frac{1}{\alpha_k} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) = \frac{1}{1.393} \left(\mu + \frac{\mu_t}{1.0} \right)$.

Так как мы решаем два дополнительных уравнения, то для этих двух рассчитываемых функций требуется поставить граничные условия. Будем руководствоваться следующей таблицей:

Тип границы	k	ε
Граница с условием симметрии	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$
Входная граница	$k = \frac{3}{2} (I_t V_{in})^2$, $I_t = 0.03$	$\frac{C_\mu^{3/4} \cdot (0.005 \cdot V_{in}^2)^{3/2}}{\kappa \cdot d}$
Выходная граница	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$
Неподвижная твёрдая стенка	$k=0$	$10 \frac{6\nu}{\beta^* \cdot h^2} \cdot \max(k, \kappa h \Omega)$,

		$ \Omega $ –модуль завихрённости, h – шаг сетки по нормали к стенки вблизи стенки, κ – постоянная Кармана.
--	--	--

Данная модель является высокорейнольдсовой и абсолютно непригодна для расчёта пристенных течений, поскольку никак не учитывает влияние стенки на турбулентность. Существует два подхода к решению этой проблемы: использование пристенных функций или создание низкорейнольдсовой версии модели. Выбор подхода в значительной степени связан с используемой сеткой.

2.13. Модель Спаларта – Аллмареса (SA) с одним уравнением.

Модель с одним уравнением для модифицированной турбулентной кинематической вязкости 1992 года не требующая применения пристеночных функций.

$$\nu_t = \nu f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\nu}{\nu_t}$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + u_j \frac{\partial \nu}{\partial x_j} = P_\nu + \frac{1}{\sigma} \left\{ \nabla \cdot \left[(\nu + \nu_t) \nabla \nu \right] + C_{b2} |\nabla \nu|^2 \right\} - \varepsilon_\nu.$$

$$P_\nu = C_{b1} [1 - f_{t2}] S \nu - \text{генерация.}$$

$$\varepsilon_\nu = \left[C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left(\frac{\nu}{d} \right)^2 - \text{диссипация.}$$

$$S = |\Omega| + \frac{\nu}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$$

где

$$S = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \text{завихрённость.}$$

$$f_w = g \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad g = r + C_{w2} \cdot (r^6 - r), \quad r = \frac{\nu}{S \kappa^2 d^2}$$

$$f_{t2} = C_{t3} \exp(-C_{t4} \chi^2)$$

Здесь d – расстояние до ближайшей твёрдой стенки. Для того чтобы учесть генерацию турбулентности не только за счёт завихрённости $|\Omega|$, но и за счёт сдвиговых деформаций поля скорости используется модификация равенства

$$|\Omega| = |\Omega| + 2.0 \min(0, |S| - |\Omega|).$$

Модификация соотношения для $|\Omega|$, позволяет избежать избыточных значений турбулентной вязкости, иногда наблюдаемых при использовании не модифицированного соотношения, например, у оси вихревого течения, где эксперименты показывают подавление турбулентности из-за вращения жидкости.

Константы модели принимают значения

Таблица 1. Значения констант модели Спаларта-Аллмареса.

σ	2/3
C_{b1}	0,1355
C_{b2}	0,622
κ (постоянная Кармана)	0,41
C_{w1}	$\frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1+C_{b2})}{\sigma}$
C_{w2}	0,3
C_{w3}	2
C_{v1}	7,1
C_{t3}	1,1
C_{t4}	2
C_v (граничные условия на входной границе)	2

SA модель является низкорейнольдсовой и применяется во всей расчётной области, в том числе вблизи твёрдых стенок, на поверхностях которых в качестве граничного условия полагают $\nu = 0$. В этом случае вблизи твёрдых поверхностей требуется такая расчётная сетка, которая обеспечивает достаточно большое число элементов внутри пограничного слоя, в том числе — внутри вязкого подслоя.

Граничные условия для модели Спаларта - Аллмареса:

Граница расчётной области	граничное условие для модели SA
Твёрдая неподвижная стенка	$\nu = 0$
Выходная граница потока	$\frac{\partial \nu}{\partial n} = 0$, n – внешняя нормаль к границе.
Граница с условием симметрии	$\frac{\partial \nu}{\partial n} = 0$, n – внешняя нормаль к границе.
Входная граница потока	$C_v \cdot \frac{\mu}{\rho}$, $C_v = 2$. $C_v = 1 \div 5$. μ - молекулярная

	динамическая вязкость, ρ - плотность.
Opening	В зависимости от направления вектора скорости теплоносителя либо выходная, либо входная границы потока. Индивидуально для ячейки.

SA модель оказывается экономичной и достаточно точной для расчётов безотрывного обтекания и для течений с не очень большими зонами отрыва. В то же время, точность модели не гарантирована для течений с большими зонами отрыва, свободных сдвиговых течений и затухающей турбулентности.

2.14. Модель SST К-Omega Ментера[8],[9] с двумя уравнениями.

Опыт расчётов отрывных турбулентных течений за плохообтекаемыми телами показал, что модели на основе уравнения для скорости диссипации ε предсказывают начало отрыва потока значительно ниже по течению, чем это наблюдается в экспериментах, причём расчётный размер рециркуляционной зоны и интенсивность движения в ней оказываются заниженными. В то же время оказалось, что другой класс моделей, где вместо уравнения переноса для ε используется уравнение для $\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* \cdot k}$ (turbulence frequency — величина,

обратная времени жизни крупных вихрей), приводит к лучшему согласию с экспериментом на данном классе течений, если зона отрыва невелика. Так называемая k - ω модель развивалась в работах Д. Вилкокса и легла в основу комбинированной модели сдвиговых напряжений (shear stress transport), созданной позднее Ф. Ментером (в 1993 году) и объединяющей k - ω и k - ε модели. В цели данного пособия не входит обоснование уравнений SST-модели и демонстрация её преимуществ, поскольку этому посвящена специальная литература. Здесь приводится лишь перечень уравнений, используемых при расчётах.

Кинематическая турбулентная вязкость

$$\nu_T = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)}$$

Кинетическая энергия турбулентности

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma_k \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

Удельная скорость диссипации кинетической энергии турбулентности

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma_\omega \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] +$$

$$2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}$$

Замыкающие константы и формулы модели

$$F_2 = \tanh \left[\left[\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right) \right]^2 \right], \text{ d – кратчайшее расстояние до стенки.}$$

$$P_k = \min(\mu_i S^2, 10 \cdot \beta^* k \omega) - \text{ограниченный генерационный член.}$$

Генерация не ограничивается в уравнении для ω .

$$F_1 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right\}^4 \right\};$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10} \right);$$

$$\phi = \phi_1 F_1 + \phi_2 (1 - F_1);$$

$$\alpha_1 = \frac{5}{9}, \alpha_2 = 0.44;$$

$$\beta_1 = \frac{3}{40}, \beta_2 = 0.0828;$$

$$\beta^* = 0.09;$$

$$\sigma_{k1} = 0.85, \sigma_{k2} = 1;$$

$$\sigma_{\omega 1} = 0.5, \sigma_{\omega 2} = 0.856.$$

Граничные условия для SST модели.

Граница расчётной области	k	ω
Неподвижная стенка	k=0	$10 \frac{6\nu}{\beta^* \cdot h^2}$, h – шаг расчётной сетки вблизи неподвижной стенки поперёк стенке.
Входная граница потока	$1E-5 \cdot \frac{ V_{in} }{L} \cdot \frac{\mu_T}{\rho}$	$ V_{in} /L_{in}$, L_{in} – линейный размер входной границы.
Выходная граница потока	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$
Граница с условием симметрии	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$

2.15. Двухслойная (k-ε) – модель.

Данная модель создана на основе статьи «Метод расчёта турбулентных течений несжимаемой жидкости на основе двухслойной (k-ε) – модели». А.В.Кузьминов, В.Н.Лапин, С.Г.Черный. Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия.

Уравнение для кинетической энергии турбулентности:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho k u_j - \mu_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = G - \rho \varepsilon - \frac{2\nu k}{y^2};$$

$$G = \mu_T S^2 - \left(\frac{2\rho k}{3\mu_T} \right) \mu_T \operatorname{div} V - \text{генерация},$$

Член генерации не ограничивается сверху и его формула базируется на S.

$$\mu_k = \mu + \mu_T;$$

μ - молекулярная динамическая вязкость, μ_T - турбулентная динамическая вязкость.

$\rho \varepsilon$ - диссипация.

$\operatorname{Re}_y = \frac{y\sqrt{k}}{\nu}$ - турбулентное число Рейнольдса. y – кратчайшее расстояние до стенки.

$$\lambda(\operatorname{Re}_y) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{\operatorname{Re}_y - \operatorname{Re}_y^*}{A} \right) \right]; \quad A=5; \quad \operatorname{Re}_y^*=100.0; \quad - \text{Функция}$$

переключения между пристеночной моделью и моделью в ядре потока.

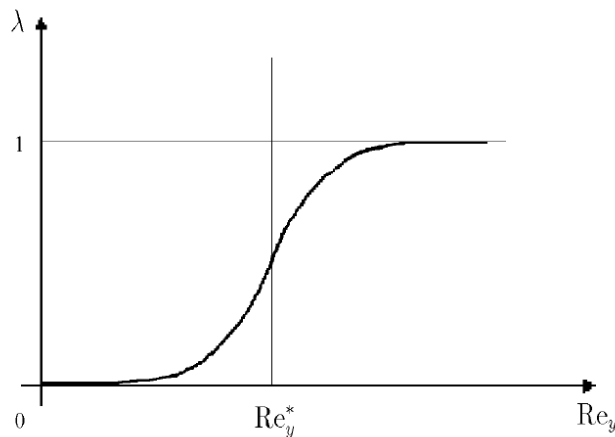


График функции $\lambda(\operatorname{Re}_y)$.

$$\mu_T = \max \left(\rho \left(\lambda C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} + (1-\lambda) C_\mu \ell_v \sqrt{k} \right), 9.156 \rho C_\mu \ell_v \sqrt{0.005 \cdot V^2} \right)$$

$$\ell_v = C_\ell y \left[1 - \exp(-\operatorname{Re}_y / A_v) \right]; \quad A_v = 70; \quad C_\mu = 0.09; \quad C_\ell = \kappa C_\mu^{-3/4}; \quad \kappa = 0.42.$$

Уравнение для скорости диссипации энергии турбулентности:

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \varepsilon u_j - \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ \left(\lambda C_{\varepsilon 2} \frac{1}{T} + 1 - \lambda \right) \rho \varepsilon = \lambda C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} G + (1 - \lambda) C_D \frac{\rho k^{3/2}}{\ell_\varepsilon};$$

$$\sigma_\varepsilon = 1.3; C_{\varepsilon 1} = 1.44; C_{\varepsilon 2} = 1.92; C_D = 1;$$

$$T = \max \left[\frac{k}{\varepsilon}, \frac{2}{\sqrt{C_\mu}} \sqrt{\frac{\mu}{\rho \varepsilon}} \right] > 0 \text{ - турбулентный масштаб времени.}$$

$$\ell_\varepsilon = C_\ell y \left[1 - \exp(-\text{Re}_y / A_\varepsilon) \right]; A_\varepsilon = 2C_\ell.$$

Граничные условия двухслойной (k-ε)-модели:

Граница расчётной области	k	ε
Неподвижная стенка	k=0	$10 \frac{6\nu}{\beta^* \cdot h^2} \cdot \max(k, \kappa h \Omega)$, Ω – модуль завихрённости, h – шаг сетки по нормали к стенки вблизи стенки, κ - постоянная Кармана.
Входная граница потока	$0.005 \cdot V_{in}^2$	$\frac{C_\mu^{3/4} \cdot (0.005 \cdot V_{in}^2)^{3/2}}{\kappa \cdot d}$
Выходная граница потока	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$
Граница с условием симметрии	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$

3. Неньютоновская жидкость.

3.1. Power-law fluid. Закон Оствальда-де Вела.

Возможно, также смоделировать ламинарные течения неньютоновских текучих сред, у которых коэффициент вязкости зависит от скорости сдвиговых деформаций. Тензор вязких сдвиговых напряжений в этих средах определяется вместо (5.2) следующим образом (закон Оствальда-де Вела):

$$\tau_{ij} = \max \left(\mu_{\min}, \min \left(2K |2S_{kl}S_{kl}|^{\frac{n-1}{2}}, \mu_{\max} \right) \right) \cdot S_{ij} \quad (40)$$

, где S_{ij} определяется согласно формуле (15):

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right), \quad (15)$$

n - коэффициент степенного закона, K - коэффициент консистенции (густоты потока), μ_{\min} и μ_{\max} - минимальная и максимальная динамические вязкости. Закон Оствальда-де Вела также называется степенным законом. Приведём следующую классификацию жидкостей: при $0 < n < 1$ - "утончающиеся" неньютоновские жидкости, поведение которых описывается степенным законом (псевдопластическая жидкость), $n > 1$ - "утолщающиеся" неньютоновские жидкости, поведение которых описывается степенным законом (дилатантная жидкость), $n = 1.0$ - ньютоновская жидкость. Классическая задача Блазиуса для неньютоновских жидкостей подчиняющихся закону Оствальда-де Вела решена в [4].

Распишем более подробно величину $|2S_{kl}S_{kl}|^{\frac{n-1}{2}}$. Она есть ни что иное как инвариант тензора скоростей деформаций :

$$S = \sqrt{2 \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)^2} \quad (14.1)$$

в степени $n-1$, т.е. $|2S_{kl}S_{kl}|^{\frac{n-1}{2}} = S^{n-1}$.

Соотношение (40) (см. [6]) удобно для расчётов в силу своей простоты, но оно лишь приближённо описывает поведение реальных неньютоновских жидкостей. Например, при n меньших единицы, степенной закон предсказывает, что эффективная вязкость должна беспрестанно уменьшаться при увеличении градиента скорости, становясь равной нулю, когда градиент скорости стремится к бесконечности, и с другой стороны, вязкость должна была бы стремиться к бесконечности, когда жидкость находится в покое. Однако реальные жидкости имеют максимум и минимум эффективной вязкости, которые зависят от законов физической химии на молекулярном уровне. Отсюда ограничения μ_{\min} и μ_{\max} . Существуют также другие модели, которые лучше описывают внутреннее поведение жидкостей, зависящее от градиента скорости, однако эта повышенная точность достигается в ущерб

простоте. Поэтому степенной закон продолжает использоваться для описания поведения жидкостей, позволяя делать математические предсказания, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными.

Жидкости, поведение которых описывается степенным законом, могут быть подразделены на три разных типа жидкостей, в зависимости от их показателя поведения:

n	Тип жидкостей
<1	<u>Псевдопластические</u>
1	<u>Ньютоновские жидкости</u>
>1	<u>Дилатантные жидкости</u>

Псевдопластичность — это свойство, при котором вязкость жидкости уменьшается при увеличении напряжений сдвига. Это свойство проявляет себя в некоторых сложных веществах, таких как лава, кетчуп, кровь, краски и лак для ногтей. Это также общее свойство для полимерных веществ.

Псевдопластичность может быть продемонстрирована на примере такого вещества как кетчуп. Если пластиковую бутылку с кетчупом сжать, то у содержимого бутылки изменяется вязкость, и вещество, бывшее до того густым как мёд, начинает вытекать почти как вода. Это свойство позволяет кетчупу, с одной стороны, легко вытекать из тары, а с другой стороны, сохранять свою форму на тарелке, и придаётся ему специально при помощи химической технологии, что позволяет увеличить его продажи.

Псевдопластичность не следует путать с тиксотропией. У псевдопластичных жидкостей вязкость *уменьшается при увеличении напряжения сдвига*, в то время как у тиксотропных жидкостей вязкость *уменьшается с течением времени при постоянном напряжении сдвига*.

Приведём несколько примеров на каждый день. Кетчуп и современные краски являются примерами псевдопластичных материалов, хотя их часто называют тиксотропными. Когда современные краски подвергаются встряхиванию или перемешиванию при помощи кисти, то краски становятся менее густыми, что позволяет им равномерно ложиться на холст. Отделившись от кисти, и попав на поверхность холста, краска вновь приобретает высокую вязкость, и, благодаря этому, сохраняет свою форму, что позволяет избежать подтёков.

Дилатантные жидкости (*дилатантные материалы*) — это такие материалы, у которых вязкость возрастает при увеличении скорости деформации сдвига. Такие жидкости являются одним из видов неньютоновских жидкостей.

Дилатантный эффект наблюдается в тех материалах, у которых плотно расположенные частички перемешаны с жидкостью, заполняющей пространство между частичками. При низких скоростях сдвига слоёв материала друг относительно друга жидкость действует как смазка, и дилатантный материал способен легко перетекать. При высоких скоростях жидкость не успевает заполнять свободные пространства, образующиеся между движущимися частичками, и поэтому трение между частичками сильно возрастает, что приводит к увеличению вязкости. Такой эффект можно легко наблюдать в смеси кукурузного крахмала и воды, которая ведёт себя парадоксальным образом, когда по её поверхности наносится удар или в неё что-либо бросают. Песок, полностью промоченный водой, также ведёт себя как дилатантный материал. По этой причине, когда гуляете по пляжу, можно наблюдать сухой песок в тех местах, куда наступала нога (под смоченным слоем песка имеется область сухого песка, вследствие того, что капли дождя, ударяясь об уже влажный песок, не могут проникнуть вглубь из-за дилатантных свойств мокрого песка).

- Реопексия является схожим свойством материалов; у реопектических материалов вязкость возрастает в результате «накопления» напряжения с течением времени.
- Противоположным дилатантности свойством является псевдопластичность.

Применение дилатантных материалов. Управление тяговым усилием.

Некоторые системы полного привода используют вязкостные муфты, наполненные дилатантной жидкостью, и передающие мощность между передними и задними колёсами. При движении по дороге с хорошим сцеплением между колёсами и покрытием дороги, характер движения передних и задних колёс одинаков, и таким образом, перемешивание жидкости в муфте весьма слабое, она обладает хорошей текучестью, и малая мощность передаётся через муфту от одних колёс к другим. Когда передние колёса начинают проскальзывать, скорость движения слоёв жидкости в вязкостной муфте возрастает, что приводит к загустеванию этой жидкости. Как следствие через муфту от задних колёс передаётся больший вращающий момент. В таком устройстве жидкость может почти полностью затвердевать, и при этом через муфту передаётся максимальный момент. Оператор в управлении описанным процессом никак не участвует. Описанные системы применяются в транспортных средствах, предназначенных для движения как по дорогам, так и по бездорожью.

Ещё одним применением являются бронежилеты.

Некоторые правительственные организации и корпорации используют дилатантные материалы в разработке бронежилетов и других защитных устройств для человеческого тела.

В одном исследовании, стандартная кевларовая ткань сравнивалась с композитной бронёй из кевлара и дилатантной жидкости. Результаты показали, что композитная броня показывает лучшие результаты, чем чистый кевлар, не смотря на то, что толщина композита была менее одной третьей от толщины чистого кевлара.

В качестве примеров использования дилатантных материалов в средствах персональной защиты можно привести d3o, и Активную систему защиты, производимую Dow Corning.

3.2. Вязкость крови. Закон Кессона.

Вязкость воды при температуре 20°C составляет 1 мПа·с, а вязкость крови в норме - 4-5 мПа·с. При различных патологиях значения вязкости крови могут изменяться от 1.7 до 22.9 мПа·с.

Как было отмечено в (1.12) кровь псевдопластическая жидкость её вязкость уменьшается при увеличении напряжений сдвига.

Вязкость крови описывается законом Оствальда-де Вела (40) с параметрами $n=0.92$; $K=0.008685713231$; C ограничивающими значениями $\mu_{\max} = 22.9 \text{ мПа} \cdot \text{с}$, $\mu_{\min} = 1.7 \cdot \text{мПа} \cdot \text{с}$. Но для крови закон Оствальда-де Вела справедлив лишь при $S < 0.2801377$. Где инвариант тензора S определяется формулой (14.1). При $S > 0.2801377$ справедлив закон Кессона [Casson N. 1959] полученный в 1957 году:

$$\tau_{ij} = \left(\frac{\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{S}} + b \right)^2 \cdot S_{ij}, \quad (41)$$

где для крови параметры модели принимают следующие значения $\tau_0 = 2.5 \cdot 10^{-3}$, $b=0.0407301$. Параметр $\sqrt{\tau_0} = \frac{(H-10) \cdot (C_F + 0.5)}{100}$, где H - гематокрит, C_F - концентрация фибриногена.

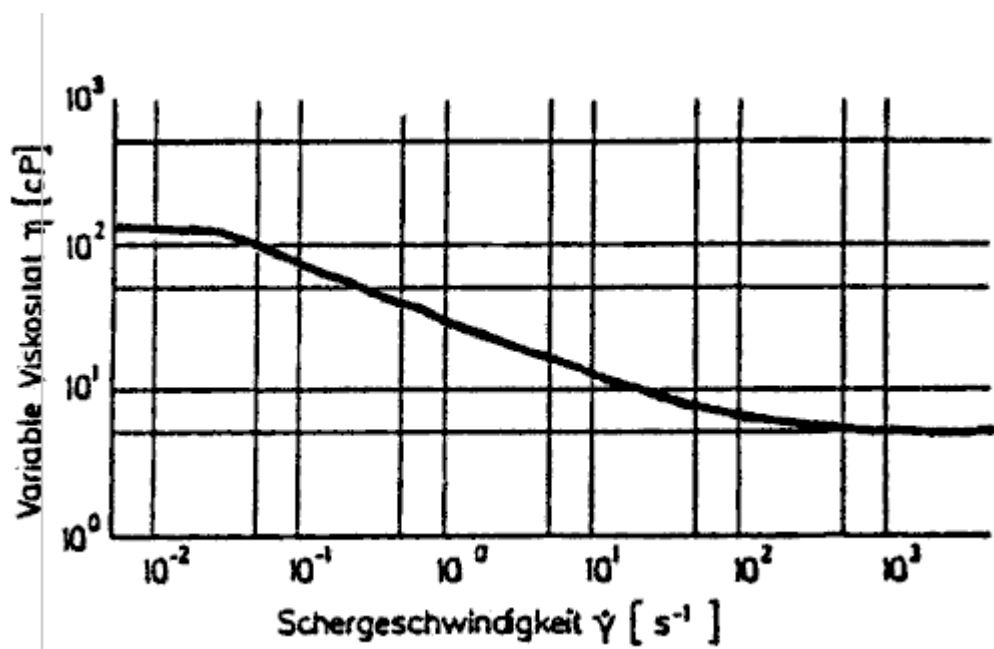


Рис. 1. График зависимости динамической вязкости крови в санти Пуазах (1Па*с=10Пуаз) от напряжения сдвига снизу по оси абсцисс.

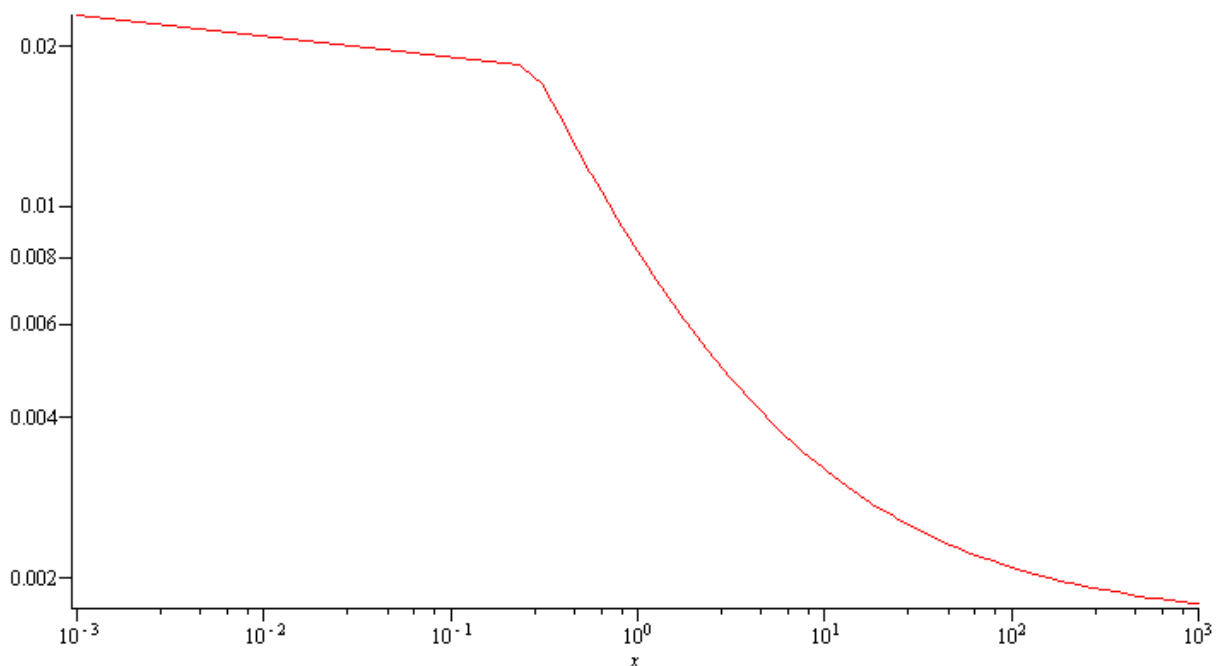


Рис. 2. Динамическая вязкость крови в Па*с от инварианта тензора скоростей деформаций S [СИ]. Здесь сшиты в точке $S = 0.2801377$ два закона, закон Оствальда-де Веля (слева) и закон Кессона (справа).

3.3. Другие псевдопластические зависимости динамической вязкости от напряжения сдвига. Обобщение для программной реализации.

Ниже приведены эмпирические уравнения, полученные разными авторами для описания псевдопластических материалов.

Динамическая вязкость	формула
Оствальд-де Вель Ostwald de Vel	$\mu = \max(\mu_{\min}, \min(2AS^{n-1}, \mu_{\max}))$; $0 < n < 1$;

Кессон Caisson	$\mu = \left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{S}} + B \right)^2; S > 0;$
Прандтль Prandtl	$\mu = \frac{A}{S} \arcsin\left(\frac{S}{B}\right); S > 0;$
Carreau	$\mu = A + (B - A) \cdot \left[1 + (C \cdot S)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}};$
Пауэлл-Эйринг Powell-Eyring	$\mu = A + \frac{B}{S} \operatorname{Arcsh}(C \cdot S); S > 0;$
Уильямсон Williamson	$\mu = \frac{A}{B + S} + C;$

Здесь A, B, C - параметры модели которые в общем случае зависят от температуры, S - инвариант тензора скоростей деформаций, μ_{\min} и μ_{\max} - ограничители коэффициента динамической вязкости, n - степень.

Каждый из этих законов справедлив только в своём диапазоне изменения S . При очень малых значениях S значение динамической вязкости должно быть ограничено сверху. Также возможно имеет смысл комбинировать законы сшивая их в ряде точек. Вместе с формулой также необходимо задавать начальное постоянное значение динамической вязкости с которой необходимо начинать расчёт. Например можно взять среднее арифметическое $\frac{\mu_{\min} + \mu_{\max}}{2}$. Также необходимо предусмотреть табличное

задание зависимости динамической вязкости от S .

О зависимости параметров A, B, C от температуры. Например, в формуле Оствальда-де Вела (40) содержится помимо коэффициента степенного закона n только один параметр - константа K (коэффициент консистенции). Его наверно можно сделать зависящим от температуры по закону:

$$K = A_1 \sqrt{T} \exp\left(\frac{B_1}{T}\right),$$

где T температура в Кельвинах, а A_1, B_1 - постоянные.

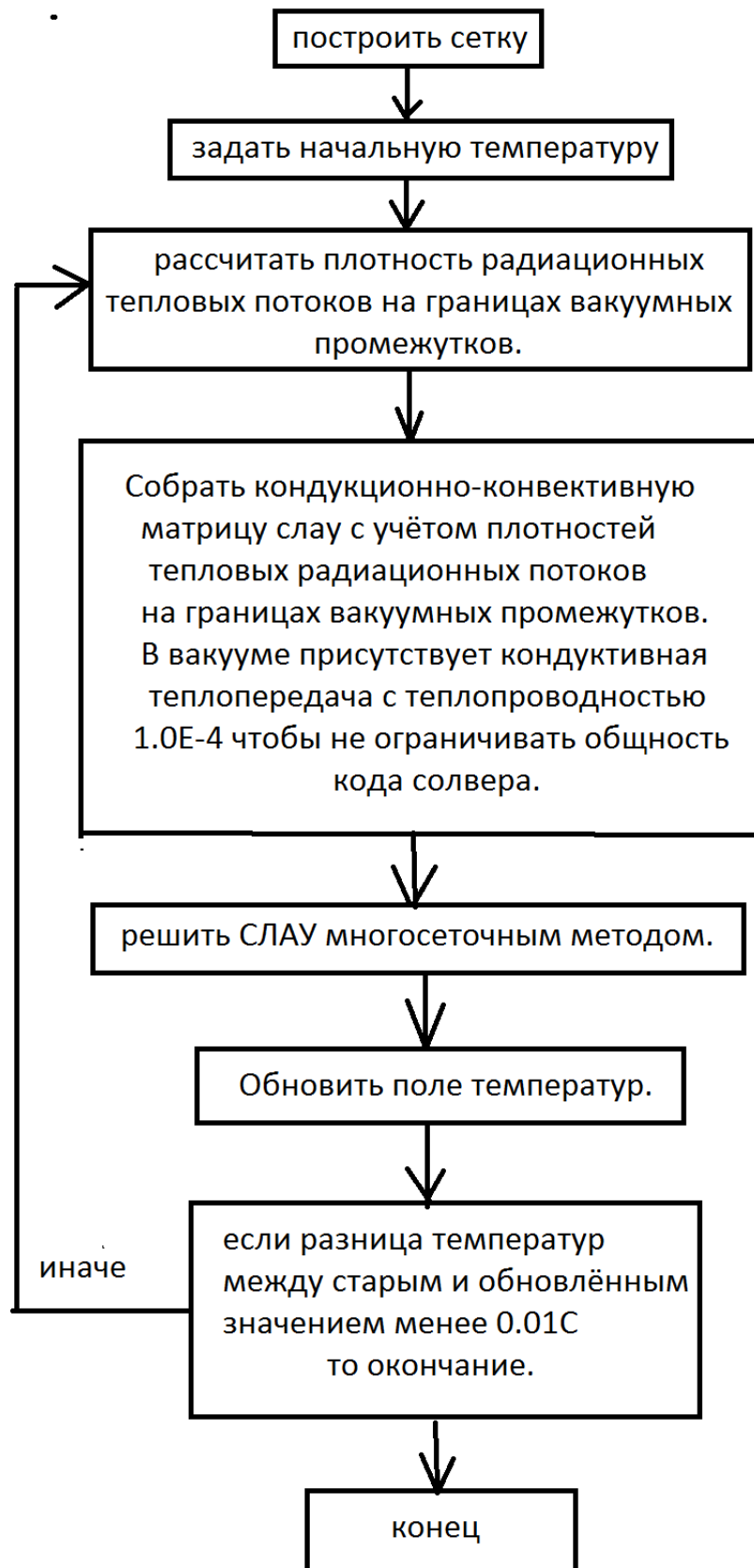
Поясним параметры в формуле Carreau:

$$\mu = A + (B - A) \cdot \left[1 + (C \cdot S)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}, \quad (42)$$

в ней $A - \mu_{\infty}$ - динамическая вязкость жидкости при бесконечно большой скорости сдвиговой деформации, т.е. минимальная динамическая вязкость, $B - \mu_0$ - динамическая вязкость жидкости при нулевой скорости сдвиговой деформации, т.е. максимальная динамическая вязкость, C - временная постоянная, n - коэффициент степенного закона. Эта модель - вариант сглаживания модели со степенным законом (40) с её ограничениями на величину μ .

4. Модель теплообмена излучением.

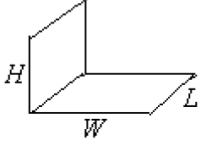
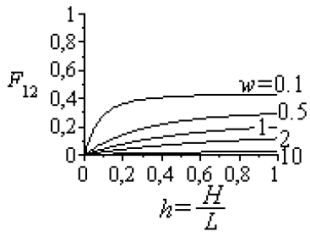
Алгоритм расчёта поля температур включая вакуумные промежутки [7].



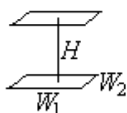
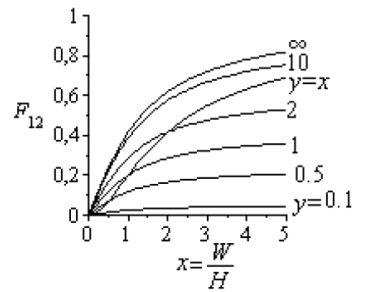
Промежуток геометрически представляет собой прямоугольную шестигранную призму на границах которой заданы излучательные способности - emissivity (emissW, emissE, emissS, emissN, emissB, emissT). Отражательная способность поверхности равна $\rho=1-\text{emissivity}$.

Вычисление ViewFactors для Prism Object:

Rectangular plate to unequal rectangular plate

Case	View factor	Plot
<p>From a horizontal rectangle of $W \cdot L$ to adjacent vertical rectangle of $H \cdot L$, with $h=H/L$ and $w=W/L$.</p> 	$F_{12} = \frac{1}{\pi w} \left[h \arctan\left(\frac{1}{h}\right) + w \arctan\left(\frac{1}{w}\right) - \sqrt{h^2 + w^2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + w^2}}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(ab^w c^{h^2}\right) \right]$ <p>with $a = \frac{(1+h^2)(1+w^2)}{1+h^2+w^2}$, $b = \frac{w^2(1+h^2+w^2)}{(1+w^2)(h^2+w^2)}$, $c = \frac{h^2(1+h^2+w^2)}{(1+h^2)(h^2+w^2)}$</p> <p>(e.g. for $h=w=1$, $F_{12}=0.20004$)</p>	

Equal rectangular plates

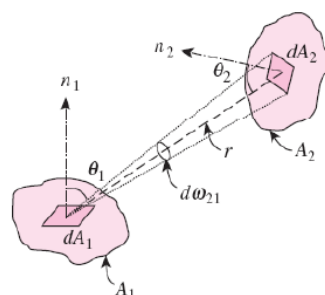
Case	View factor	Plot
<p>Between parallel equal rectangular plates of size $W_1 \cdot W_2$ separated a distance H, with $x=W_1/H$ and $y=W_2/H$.</p> 	$F_{12} = \frac{1}{\pi xy} \left[\ln \frac{x_1^2 y_1^2}{x_1^2 + y_1^2 - 1} + 2x \left(y_1 \arctan \frac{x}{y_1} - \arctan x \right) + 2y \left(x_1 \arctan \frac{y}{x_1} - \arctan y \right) \right]$ <p>with $x_1 \equiv \sqrt{1+x^2}$ and $y_1 \equiv \sqrt{1+y^2}$</p> <p>(e.g. for $x=y=1$, $F_{12}=0.1998$)</p>	

Приведённые аналитические значения являются результатом аналитического интегрирования следующего интеграла:

$$F_{12} = F_{A_1 \rightarrow A_2} = \frac{\dot{Q}_{A_1 \rightarrow A_2}}{\dot{Q}_{A_1}} = \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2$$

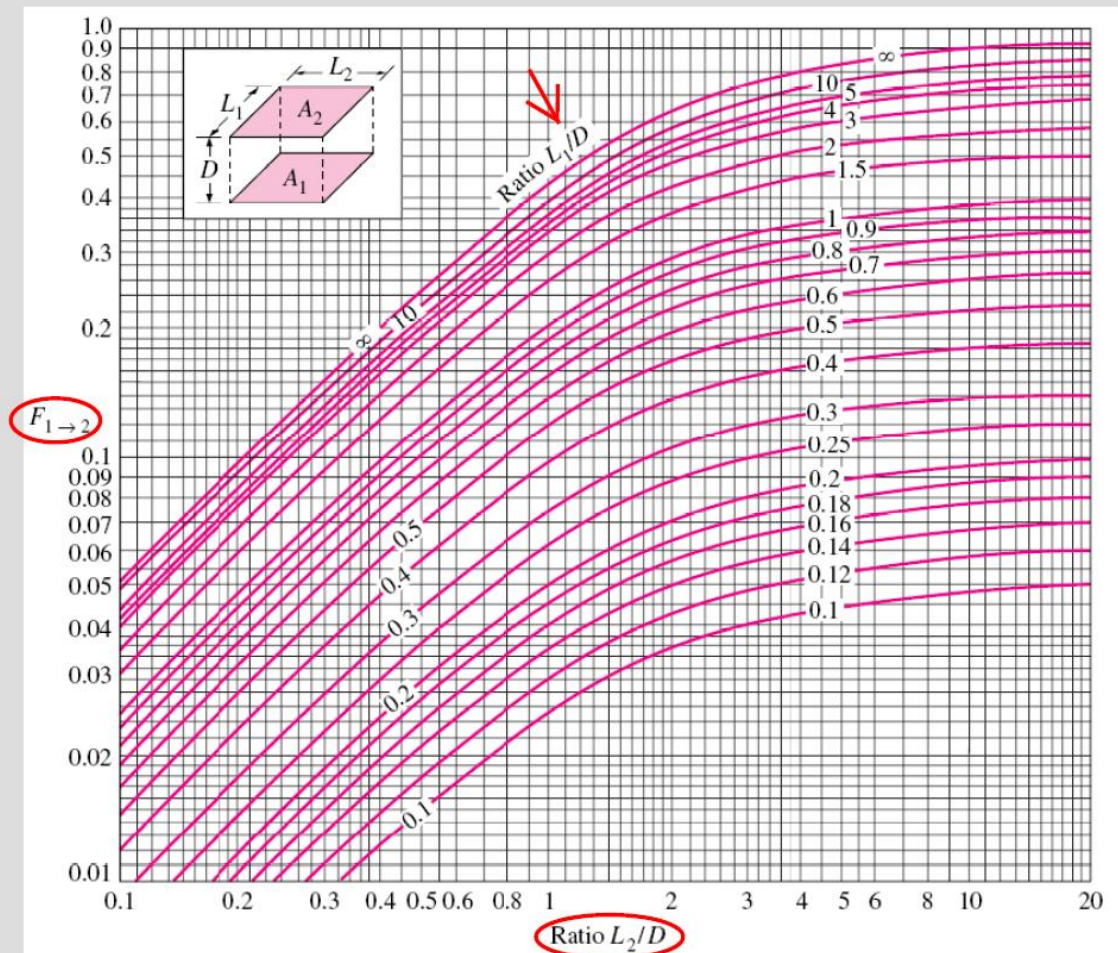
$$F_{21} = F_{A_2 \rightarrow A_1} = \frac{\dot{Q}_{A_2 \rightarrow A_1}}{\dot{Q}_{A_2}} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2$$

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$$

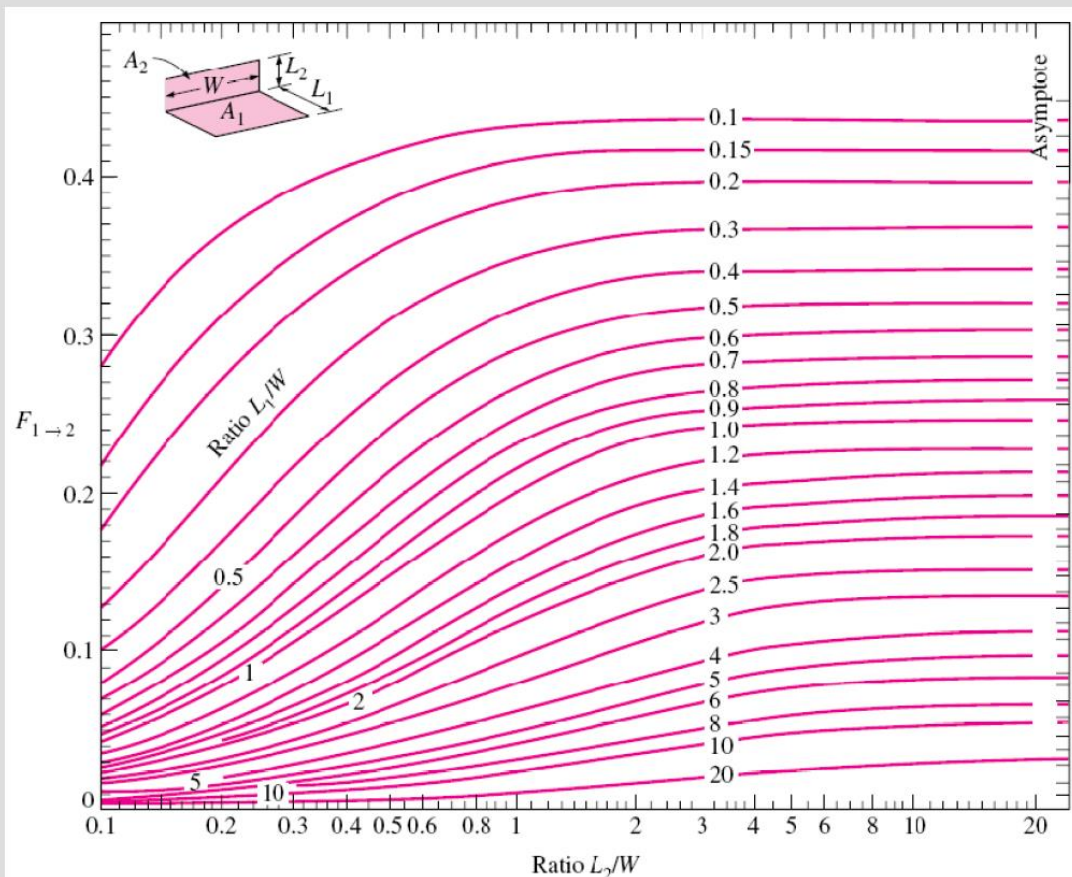


В случае сложных форм областей аналитического значения интеграла не существует и его значение вычисляется численно методом (прямоугольников, трапеций, Симпсона или иначе).

У нас простая форма области и интеграл берётся, посмотрим как это выглядит на графиках:



View factor between two aligned parallel rectangles of equal size.



View factor between two perpendicular rectangles with a common edge.

13

Для наших размеров ($W_1=280.32\text{mm}$, $W_2=177.6\text{mm}$, $H=18\text{mm}$) имеем

FWE=0.012	FWS=0.058	FWN=0.058	FWB=0.436	FWT=0.436
FEW=0.012	FES=0.058	FEN=0.058	FEB=0.436	FET=0.436
FSW=0.037	FSE=0.037	FSN=0.032	FSB=0.447	FST=0.447
FNW=0.037	FNE=0.037	FNS=0.032	FNB=0.447	FNT=0.447
FBW=0.028	FBE=0.028	FBS=0.045	FTN=0.045	FTB=0.853
FTW=0.028	FTE=0.028	FTS=0.045	FTN=0.045	FTB=0.853

Пусть на гранях Prism Object заданы значения излучательной способности:

emissW	emissE	emissS	emissN	emissB	emissT
0	0	0	0	0.9	0.9

Здесь 0 - означает полное отражение от стенки.

Также граням Prism Object приписываются значения температуры:

TW	TE	TS	TN	TB	TT
----	----	----	----	----	----

Здесь TG ($G=W,E,S,N,B,T$) это среднее для грани Prism значение

температуры в Кельвинах $TG = \frac{\sum_{i=1}^N TG_i}{N}$, где N - количество ячеек сетки разбивающих G грань Prism Object, а TG_i - значение температуры в К в i -ой ячейке сетки разбивающей G - грань Prism Object. Значения температур берутся с предыдущей итерации итерационного процесса решения нелинейного уравнения теплопередачи (нелинейность вызвана что плотность

теплового потока излучения на грани зависит от температуры на грани в четвёртой степени, т.е. от искомой нами функции).

Чтобы найти плотности лучистых тепловых потоков ($J_W, J_E, J_S, J_N, J_B, J_T$) на гранях Prism Object надо решить следующую линейную систему уравнений :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma T_W^4 = J_W + \frac{1-\varepsilon_W}{\varepsilon_W} \cdot (F_{WE}(J_W - J_E) + F_{WS}(J_W - J_S) + F_{WN}(J_W - J_N) + F_{WB}(J_W - J_B) + F_{WT}(J_W - J_T)) \\ \sigma T_E^4 = J_E + \frac{1-\varepsilon_E}{\varepsilon_E} \cdot (F_{EW}(J_E - J_W) + F_{ES}(J_E - J_S) + F_{EN}(J_E - J_N) + F_{EB}(J_E - J_B) + F_{ET}(J_E - J_T)) \\ \sigma T_S^4 = J_S + \frac{1-\varepsilon_S}{\varepsilon_S} \cdot (F_{SW}(J_S - J_W) + F_{SE}(J_S - J_E) + F_{SN}(J_S - J_N) + F_{SB}(J_S - J_B) + F_{ST}(J_S - J_T)) \\ \sigma T_N^4 = J_N + \frac{1-\varepsilon_N}{\varepsilon_N} \cdot (F_{NW}(J_N - J_W) + F_{NE}(J_N - J_E) + F_{NS}(J_N - J_S) + F_{NB}(J_N - J_B) + F_{NT}(J_N - J_T)) \\ \sigma T_B^4 = J_B + \frac{1-\varepsilon_B}{\varepsilon_B} \cdot (F_{BW}(J_B - J_W) + F_{BE}(J_B - J_E) + F_{BS}(J_B - J_S) + F_{BN}(J_B - J_N) + F_{BT}(J_B - J_T)) \\ \sigma T_T^4 = J_T + \frac{1-\varepsilon_T}{\varepsilon_T} \cdot (F_{TW}(J_T - J_W) + F_{TE}(J_T - J_E) + F_{TS}(J_T - J_S) + F_{TN}(J_T - J_N) + F_{TB}(J_T - J_B)) \end{array} \right.$$

Она решается с помощью метода нижней релаксации (достаточно $\alpha=0.1$) Якоби в следующем виде:

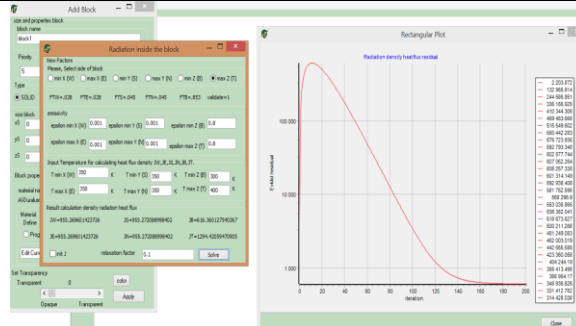
$$\left\{ \begin{array}{l}
J_W^{new} = \alpha \cdot \left(\frac{\left(\sigma T_W^4 + \frac{1-\varepsilon_W}{\varepsilon_W} \cdot (F_{WE}(J_E) + F_{WS}(J_S) + F_{WN}(J_N) + F_{WB}(J_B) + F_{WT}(J_T)) \right)}{1 + \frac{1-\varepsilon_W}{\varepsilon_W}} \right) + (1-\alpha)J_W \\
J_E^{new} = \alpha \cdot \left(\frac{\left(\sigma T_E^4 + \frac{1-\varepsilon_E}{\varepsilon_E} \cdot (F_{EW}(J_W) + F_{ES}(J_S) + F_{EN}(J_N) + F_{EB}(J_B) + F_{ET}(J_T)) \right)}{1 + \frac{1-\varepsilon_E}{\varepsilon_E}} \right) + (1-\alpha)J_E \\
J_S^{new} = \alpha \cdot \left(\frac{\left(\sigma T_S^4 + \frac{1-\varepsilon_S}{\varepsilon_S} \cdot (F_{SW}(J_W) + F_{SE}(J_E) + F_{SN}(J_N) + F_{SB}(J_B) + F_{ST}(J_T)) \right)}{1 + \frac{1-\varepsilon_S}{\varepsilon_S}} \right) + (1-\alpha)J_S \\
J_N^{new} = \alpha \cdot \left(\frac{\left(\sigma T_N^4 + \frac{1-\varepsilon_N}{\varepsilon_N} \cdot (F_{NW}(J_W) + F_{NE}(J_E) + F_{NS}(J_S) + F_{NB}(J_B) + F_{NT}(J_T)) \right)}{1 + \frac{1-\varepsilon_N}{\varepsilon_N}} \right) + (1-\alpha)J_N \\
J_B^{new} = \alpha \cdot \left(\frac{\left(\sigma T_B^4 + \frac{1-\varepsilon_B}{\varepsilon_B} \cdot (F_{BW}(J_W) + F_{BE}(J_E) + F_{BS}(J_S) + F_{BN}(J_N) + F_{BT}(J_T)) \right)}{1 + \frac{1-\varepsilon_B}{\varepsilon_B}} \right) + (1-\alpha)J_B \\
J_T^{new} = \alpha \cdot \left(\frac{\left(\sigma T_T^4 + \frac{1-\varepsilon_T}{\varepsilon_T} \cdot (F_{TW}(J_W) + F_{TE}(J_E) + F_{TS}(J_S) + F_{TN}(J_N) + F_{TB}(J_B)) \right)}{1 + \frac{1-\varepsilon_T}{\varepsilon_T}} \right) + (1-\alpha)J_T
\end{array} \right.$$

На вход метод Якоби получает:

1. значения температур на гранях Prism Object (Усреднённая по грани температура).
2. излучательные способности emissivity на каждой грани Prism Object.
3. Матрицу предварительно вычисленных View Factors (для Prism Object задействовано 30 значений View Factors).

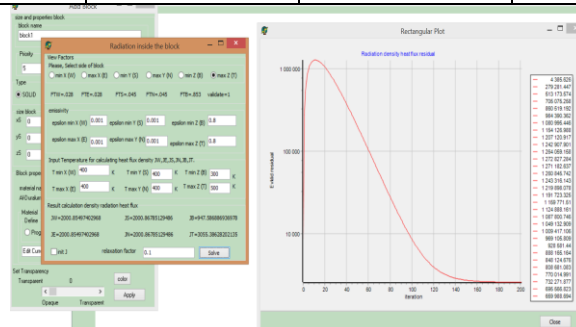
Замечание: если emissivity = 0 на какой либо из граней то это значение emissivity аппроксимируется значением 0.001 во избежании деления на ноль. Проведём тестирование описанной методики и для этого зададим несколько температур:

emissW	emissE	emissS	emissN	emissB	emissT
0.001	0.001	0.001	0.001	0.9	0.9
TW	TE	TS	TN	TB	TT
350K	350K	350K	350K	300K	400K
$J_W, \text{Вт/м}^2$	$J_E, \text{Вт/м}^2$	$J_S, \text{Вт/м}^2$	$J_N, \text{Вт/м}^2$	$J_B, \text{Вт/м}^2$	$J_T, \text{Вт/м}^2$
953.17	953.17	953.17	953.17	615.9	1293.97



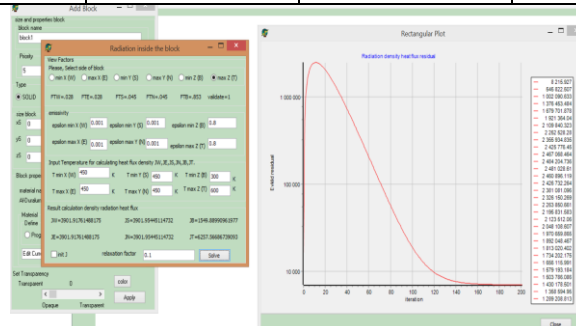
История сходимости при нахождении плотностей тепловых потоков излучения.

TW	TE	TS	TN	TB	TT
400K	400K	400K	400K	300K	500K
$J_W, \text{Вт/м}^2$	$J_E, \text{Вт/м}^2$	$J_S, \text{Вт/м}^2$	$J_N, \text{Вт/м}^2$	$J_B, \text{Вт/м}^2$	$J_T, \text{Вт/м}^2$
2000.86	2000.86	2000.86	2000.86	947.6	3055.4

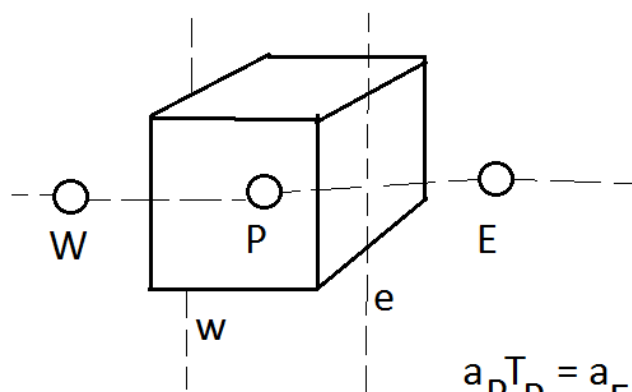


История сходимости при нахождении плотностей тепловых потоков излучения.

TW	TE	TS	TN	TB	TT
450K	450K	450K	450K	300K	600K
$J_W, \text{Вт/м}^2$	$J_E, \text{Вт/м}^2$	$J_S, \text{Вт/м}^2$	$J_N, \text{Вт/м}^2$	$J_B, \text{Вт/м}^2$	$J_T, \text{Вт/м}^2$
3901.92	3901.92	3901.92	3901.92	1549.88	6257.57



Плотности тепловых лучистых потоков ориентированы внутрь вакуумного промежутка. Плотности тепловых лучистых потоков учитываются при сборке матрицы СЛАУ для граней являющихся границами вакуумных Prism Object промежутков в соответствии со следующим рисунком.



$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b.$$

кондукционная связь:

$$+k_e(T_E - T_P)/dx_e - k_w(T_P - T_W)/dx_w = \text{генерация мощности в ячейке. Вт.}$$

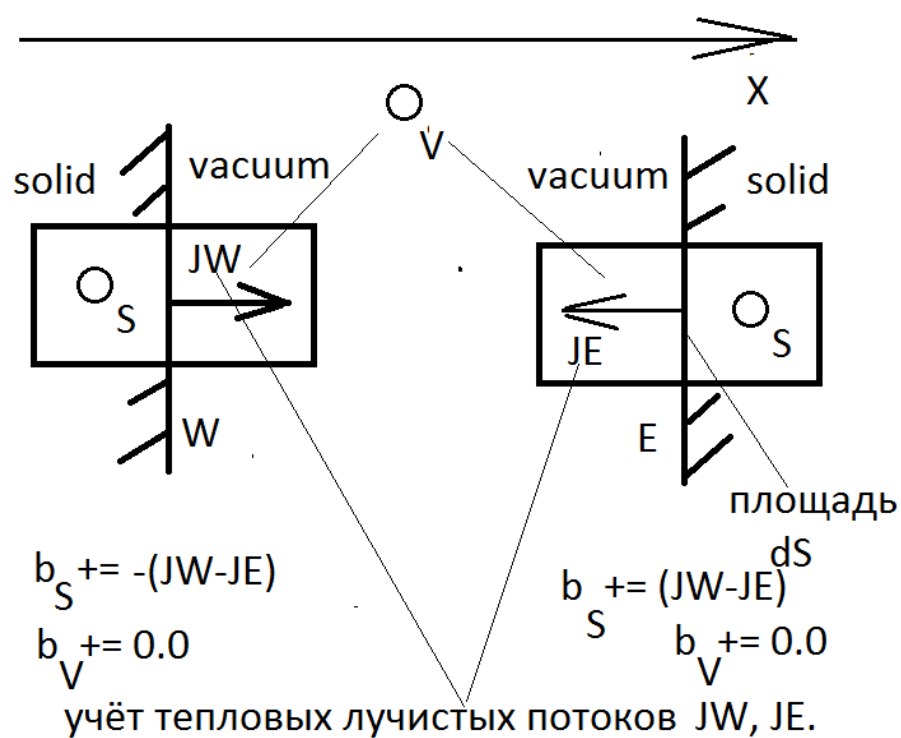
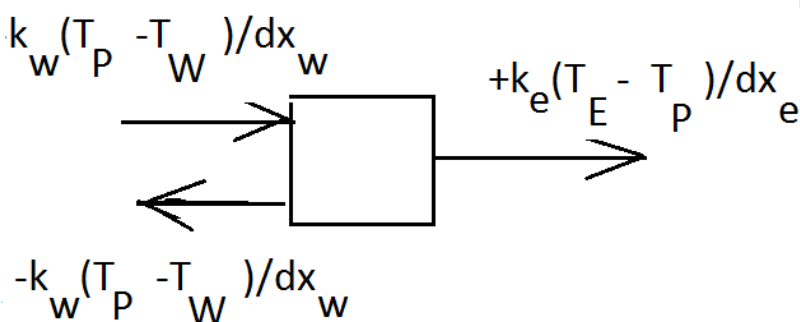
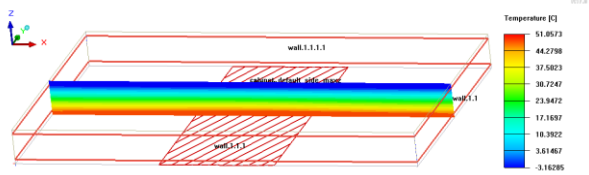
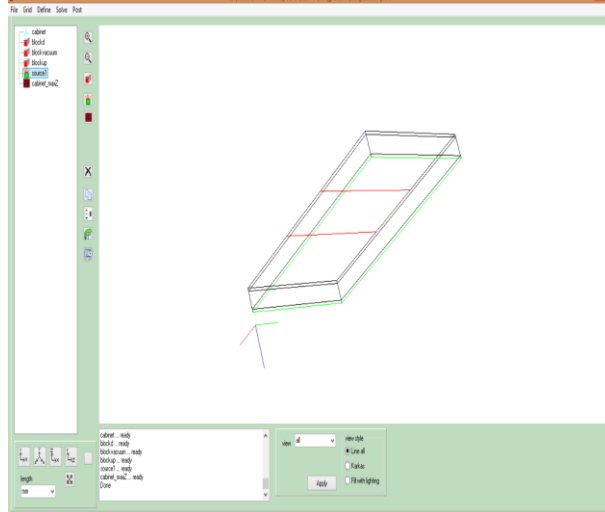


Рис. Учёт плотностей лучистых тепловых потоков в правой части матрицы СЛАУ.

Тестовые примеры для непрерывного режима работы (тепловая мощность в источнике выделяется постоянно в течение всего времени):

Т.1.(Первый тест) Тестовый пример для модели, содержащей одиночный вакуумный промежуток толщиной 18мм. На верхней стенке расчётной области дополнительно выставлено условие Стефана-Больцмана излучения на температуру 4К с коэффициентом излучения 0.8 (это одинарный промежуток с дополнительным условием Стефана – Больцмана, условий Дирихле нигде не приложено). Коэффициенты излучения на верхней и нижней гранях вакуумного промежутка (граней активно участвующих в переизлучениях) равны $\epsilon_{\text{miss}}=0.9$. Источник тепла имеет геометрические размеры $80.32 \times 177.6 \text{ мм}^2$.

Внешний вид расчётной модели представлен на рисунке ниже:

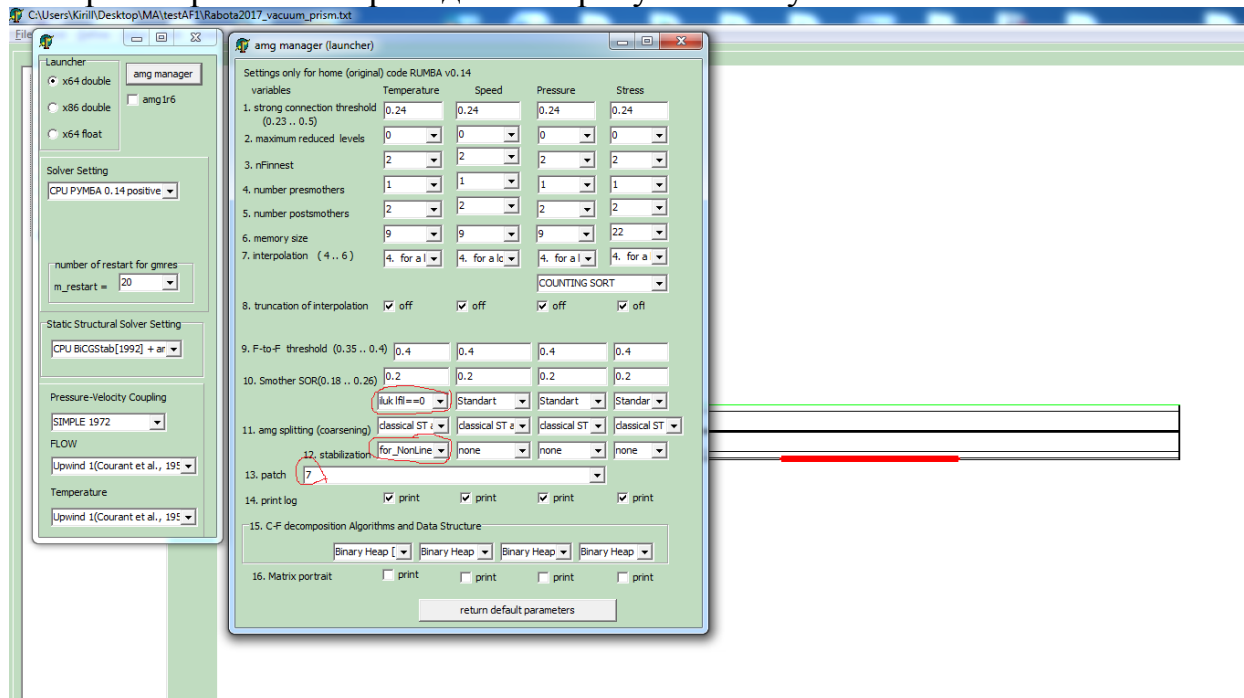
	
ANSYS Icepak 17.0	AliceFlow_v0_24, AliceMesh_v0_38, РУМБА_v0_14.

Результаты моделирования представлены в таблице:

Одинарный 18мм вакуумный промежуток между двумя 3мм металлическими пластинами площади $280.32 \times 177.6 \text{ мм}^2$. Источник тепла $80.32 \times 177.6 \text{ мм}^2$. В верхнем слое (через вакуумный промежуток) излучение на температуру 4К.						
	1Вт	2Вт	3Вт	4Вт	5Вт	6Вт
Icepak 17.0, °C	-128.086	-100.267	-81.8243	-67.558	-55.764	-45.6271
	-99.7981	-66.81	-44.6606	-27.5	-13.296	-1.06
AliceFlow _v0_24, РУМБА_0.14, °C	-126.321	-99.802	-81.7444	-67.7132	-56.0406	-45.9887
	-99.3195	-67.347	-45.6386	-28.7582	-14.7251	-2.62663
	7Вт	8Вт	9Вт	10Вт	11Вт	12Вт
Icepak 17.0, °C	-36.689	-28.663	-21.3584	-14.6395	-8.407	-2.5868
	9.72601	19.4315	28.2762	36.4213	43.985	51.057

AliceFlow _v0_24, РУМБА_0.14, °C	-37.0988	-29.1398	-22.0552	-14.946	-8.71793	-3.42907
	8.06562	17.7165	26.7788	34.3011	41.7951	49.6866

Настройки решателя приведены на рисунке снизу:



Температуры для вычисления правых частей уравнения обновляются с коэффициентом нижней релаксации **0.01**.

Внимание работает только iluk, k=0 smoother в многосеточном методе.

Т.2. (Второй тест) Тестовый пример для модели двойного вакуумного промежутка (два раза по 8.5мм). Промежутки соединены через металлическую перегородку толщиной 1мм. На верхней стенке расчётной области дополнительно выставлено условие Стефана-Больцмана излучения на температуру 4К с коэффициентом излучения 0.8 (это двойной промежуток с дополнительным условием Стефана – Больцмана, условий Дирихле нигде не приложено). Коэффициенты излучения на верхней и нижней гранях вакуумных промежутков (граней активно участвующих в переизлучениях) равны emiss=0.9. Источник тепла имеет геометрические размеры 80.32x177.6мм².

ANSYS Icepak 17.0	AliceFlow_v0_38, AliceMesh_v0_45, РУМБА_v0_14.

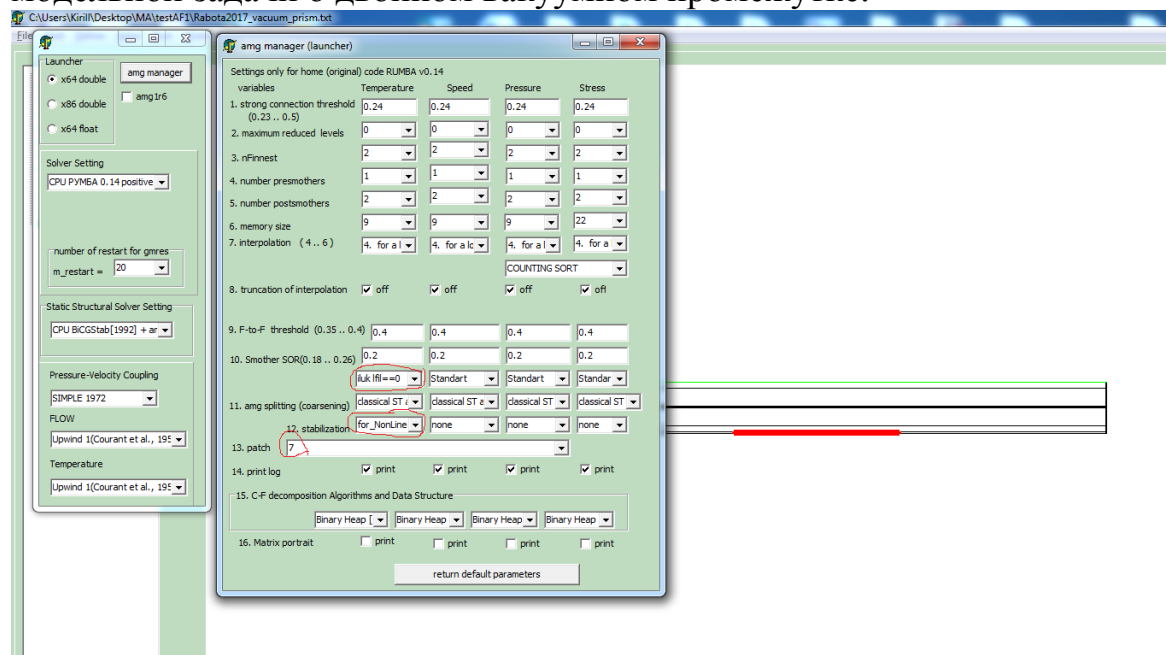
Результаты моделирования представлены в таблице:

Двойной вакуумный промежуток (по 8.5мм каждый) через 1мм металлическую пластину (площадь 280.32x177.6мм ²). Источник тепла 80.32x177.6мм ² . В верхнем слое (через двойной вакуумный промежуток) излучение на температуру 4К.						
	1Вт	2Вт	3Вт	4Вт	5Вт	6Вт
ANSYS Icepak 17.0, °C	-127.5	-99.937	-81.46	-67.1617	-55.343	-45.18
	-98.27	-64.989	-42.7	-25.4691	-11.228	1.009
	-78.87	-41.772	-16.888	2.379	18.3239	32.0427
AliceFlow_v0_38, РУМБА_0.14, °C	-127.75	-100.14	-81.67	-67,40	-54,28	-45,5
	-100.17	-67.05	-44.83	-28,18	-14,69	-1,91
	-81.45	-44.69	-17.24	1,06	16,25	27,93
	7Вт	8Вт	9Вт	10Вт	11Вт	12Вт
ANSYS Icepak 17.0, °C	-36.22	-28.1877	-20.868	-14.1351	-7.89	-2.057
	11.798	21.4846	30.3	38.4077	45.928	52.95
	44.1521	55.0363	64.953	74.0839	82.5612	90.486
AliceFlow_v0_38, РУМБА_0.14, °C	-36,56	-28,54	-21,13	-14,54	-8,32	-2,51
	8,76	18,33	28,61	34,7	42,12	49,1
	39,92	50,7	61,25	74,08	82,19	90,22

Теплопроводность вакуума 0.00025Вт/(м·К). Если сделать выше, то она будет оказывать влияние на теплообмен излучением, улучшая теплообмен через вакуум. Если сделать меньше, то решение потеряет монотонность, внутри вакуума ячейки будут иметь сильно меньшую температуру, определяемую, по-видимому, начальным приближением и не смогут достичь непрерывного по температуре решения за счет чрезвычайно слабой связи по диффузии. Внимание средний слой толщиной 1мм должен обязательно состоять не из одного блока, а из нескольких слоев блоков, это нужно для правильного

расчета правой части уравнения. Здесь используется 4 блока, формирующих средний слой толщиной 1мм.

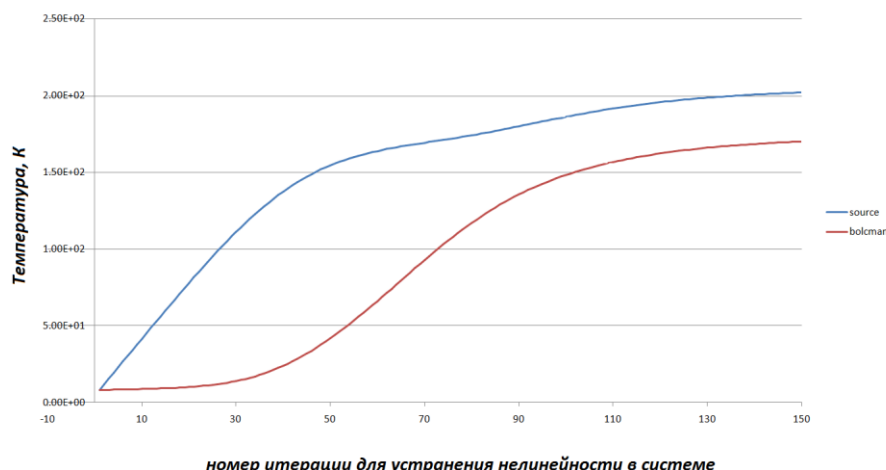
Настройки алгоритма РУМБА_v0_14 приведшие к успешному решению модельной задачи о двойном вакуумном промежутке.



Температуры для вычисления правых частей уравнения обновляются с коэффициентом нижней релаксации **0.01**.

К вопросу о сходимости численного метода для расчёта вакуумных промежутков.

Сходимость одинарного вакуумного промежутка с дополнительным условием Стефана-Больцмана на стенке.



Сходимость итерационного процесса для одинарного вакуумного промежутка.

Список литературы.

- [1]. Г.З.Гершуни, Е.М.Жуховицкий. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М. Наука 1972.
- [2]. А.В. Сибирь, С.И.Решетняк, В.И.Губинский. Моделирование гидродинамических процессов в регенеративном колодце с центральной горелкой. с. 313-323. 2006.
- [3]. А.А. Юн Теория и практика моделирования турбулентных течений с теплообменом, смешением, химическими реакциями и двухфазных течений. М. 2009.
- [4]. Anuar Ishak, Norfifah Bachok, Power-law Fluid Flow on a Moving Wall. European Journal of Scientific Research Vol. 34 №.1 (2009), pp.55-60.
- [5] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика VI. Гидродинамика. М. «Наука» 1988.
- [6] Интернет. Энциклопедия Википедия. <http://en.wikipedia.org/wiki>
- [7] Heat and Mass Transfer: Fundamentals & Applications. Fourth Edition. Yunus A. Cengel, Afshin J.Ghajar McGraw-Hill, 2011. Chapter 13. Radiation heat transfer. Mehmet Kanoglu. University of Gaziantep.
- [8] **Menter, F. R. (1993)**, "Zonal Two Equation $k-\omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows", AIAA Paper 93-2906.
- [9] **Menter, F. R. (1994)**, "Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications", AIAA Journal, vol. 32, no 8. pp. 1598-1605.