Увеличение быстродействия построения ilu(p) сглаживателя алгебраического многосеточного метода.

Иванов Кирилл Андреевич

МАИ, Россия, Москва

email: kirill7785@mail.ru

Введение

Задачи вычислительной теплопередачи приводят к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большого размера, например, $5*10^7$ неизвестных. Для решения подобных СЛАУ автор предлагает использовать алгоритм BiCGStab, предобусловленный классическим алгебраическим многосеточным методом (CAMG). В качестве сглаживателя в CAMG предлагается использовать ilu(p) разложение. Ilu(p) разложение реализовано в библиотеке SPARSKIT2 Ю.Саада. Узким местом предлагаемого алгоритма ilu(p) разложения является строка с линейным поиском минимального элемента в списке. Список - структура данных в информатике. Замедление быстродействия построения ilu(p) разложения проявляется на матрицах с большим значением nnz/n, например 60-125. Здесь nnz – число ненулевых коэффициентов в матрице, n – число неизвестных. Данные матрицы с большим значением nnz/n создаются CAMG алгоритмом на средних по «глубине» уровнях, построенной иерархии сетки.

Линейный поиск предлагается заменить на комбинацию двоичной кучи и хеш таблицы. Двоичная куча и хеш таблица – структуры данных в информатике. Двоичная куча позволяет за время $O(\log_2(n))$ извлекать наименьший элемент. Для поддержания порядка кучи используются вспомогательные операции fixUp и fixDouwn с быстродействием $O(\log_2(n))$ каждая. Здесь n – число элементов в куче. Для быстрого доступа к элементу кучи по значению ключа используется соединение кучи и хеш таблицы (См. в тексте статьи). Данная статья посвящена описанию предлагаемого подхода.

Алгоритм ilu(p) разложения. Строка кода с низким быстродействием – линейным поиском.

Листинг 1. Алгоритм из библиотеки SPARSKIT2 Ю.Саада.

```
// Сдержит медленный линейный поиск и из-за этого непригодна.
/* ----------------------------------------------------------------------- */
/* Subroutine */ integer iluk_(integer n, doublereal* &a, integer* &ja, integer* &ia,
```

```
                                                integer lfil, doublereal* &alu, integer*
&jlu, integer* &ju,
       integer* &levs, integer iwk, doublereal* &w, integer* &jw, integer &ierr)
{
    /* System generated locals */
    integer i__1, i__2, i__3, i__4;

    /* Local variables */
    integer i__, j, k;
    doublereal s, t;
    integer j1, j2, n2, ii, jj, ju0;
    doublereal fact;
    integer lenl, jlev, lenu, jpos, jrow;

/* ----------------------------------------------------------------------* */
/*     SPARSKIT ROUTINE ILUK -- ILU WITH LEVEL OF FILL-IN OF K (ILU(k)) * */
/* ----------------------------------------------------------------------* */

/* on entry: */
/* ========== */
/* n       = integer. The row dimension of the matrix A. The matrix */

/* a,ja,ia = matrix stored in Compressed Sparse Row format. */

/* lfil    = integer. The fill-in parameter. Each element whose */
/*           leve-of-fill exceeds lfil during the ILU process is dropped. */
/*           lfil must be .ge. 0 */

/* tol     = real*8. Sets the threshold for dropping small terms in the */
/*           factorization. See below for details on dropping strategy. */

/* iwk     = integer. The minimum length of arrays alu, jlu, and levs. */

/* On return: */
/* =========== */

/* alu,jlu = matrix stored in Modified Sparse Row (MSR) format containing */
/*           the L and U factors together. The diagonal (stored in */
/*           alu(1:n) ) is inverted. Each i-th row of the alu,jlu matrix */
/*           contains the i-th row of L (excluding the diagonal entry=1) */
/*           followed by the i-th row of U. */

/* ju      = integer array of length n containing the pointers to */
/*           the beginning of each row of U in the matrix alu,jlu. */

/* levs    = integer (work) array of size iwk -- which contains the */
/*           levels of each element in alu, jlu. */

/* ierr    = integer. Error message with the following meaning. */
/*           ierr  = 0    --> successful return. */
/*           ierr .gt. 0  --> zero pivot encountered at step number ierr. */
/*           ierr  = -1   --> Error. input matrix may be wrong. */
/*                            (The elimination process has generated a */
/*                            row in L or U whose length is .gt.  n.) */
/*           ierr  = -2   --> The matrix L overflows the array al. */
/*           ierr  = -3   --> The matrix U overflows the array alu. */
/*           ierr  = -4   --> Illegal value for lfil. */
/*           ierr  = -5   --> zero row encountered in A or U. */

/* work arrays: */
/* ============= */
/* jw      = integer work array of length 3*n. */
/* w       = real work array of length n */
```

```
/* Notes/known bugs: This is not implemented efficiently storage-wise. */
/*       For example: Only the part of the array levs(*) associated with */
/*       the U-matrix is needed in the routine.. So some storage can */
/*       be saved if needed. The levels of fills in the LU matrix are */
/*       output for information only -- they are not needed by LU-solve. */

/* ----------------------------------------------------------------------- */
/* w, ju (1:n) store the working array [1:ii-1 = L-part, ii:n = u] */
/* jw(n+1:2n)  stores the nonzero indicator. */

/* Notes: */
/* ------ */
/* All the diagonal elements of the input matrix must be  nonzero. */

/* ----------------------------------------------------------------------* */
/*     locals */
    /* Parameter adjustments */
    --jw;
    --w;
    --ju;
    --ia;
    --a;
    --ja;
    --alu;
    --jlu;
    --levs;

    /* Function Body */
    if (lfil < 0) {
       goto L998;
    }
/* ----------------------------------------------------------------------- */
/*     initialize ju0 (points to next element to be added to alu,jlu) */
/*     and pointer array. */
/* ----------------------------------------------------------------------- */
    n2 = n + n;
    ju0 = n + 2;
    jlu[1] = ju0;

/*     initialize nonzero indicator array + levs array -- */

    i__1 = n << 1;
    for (j = 1; j <= i__1; ++j) {
       jw[j] = 0;
/* L1: */
    }
/* ----------------------------------------------------------------------- */
/*     beginning of main loop. */
/* ----------------------------------------------------------------------- */
    i__1 = n;
    for (ii = 1; ii <= i__1; ++ii) {
       j1 = ia[ii];
       j2 = ia[ii + 1] - 1;

/*     unpack L-part and U-part of row of A in arrays w */

       lenu = 1;
       lenl = 0;
       jw[ii] = ii;
       w[ii] = 0.f;
       jw[n + ii] = ii;

       i__2 = j2;
       for (j = j1; j <= i__2; ++j) {
```

```
            k = ja[j];
            t = a[j];
            if (t == 0.f) {
               goto L170;
            }
            if (k < ii) {
               ++lenl;
               jw[lenl] = k;
               w[lenl] = t;
               jw[n2 + lenl] = 0;
               jw[n + k] = lenl;
            } else if (k == ii) {
               w[ii] = t;
               jw[n2 + ii] = 0;
            } else {
               ++lenu;
               jpos = ii + lenu - 1;
               jw[jpos] = k;
               w[jpos] = t;
               jw[n2 + jpos] = 0;
               jw[n + k] = jpos;
            }
L170:
            ;
        }

        jj = 0;

/*      eliminate previous rows */

L150:
        ++jj;
        if (jj > lenl) {
            goto L160;
        }
/* ---------------------------------------------------------------------- */
/*      in order to do the elimination in the correct order we must select */
/*      the smallest column index among jw(k), k=jj+1, ..., lenl. */
/* ---------------------------------------------------------------------- */
        jrow = jw[jj];
        k = jj;

/*      determine smallest column index */

        i__2 = lenl;
        // Дьявольски медленный поиск минимума. Это линейный поиск.
        //printf("jj=%d\n",jj);// jj==1 далеко не всегда.
        // Это означает что нужно поддерживать удаление элемента по ключу.
        //getchar();
        for (j = jj + 1; j <= i__2; ++j) {
            if (jw[j] < jrow) {
               jrow = jw[j];
               k = j;
            }
/* L151: */
        }

        if (k != jj) {
/*      exchange in jw */
            j = jw[jj];
            jw[jj] = jw[k];
            jw[k] = j;
/*      exchange in jw(n+  (pointers/ nonzero indicator). */
            jw[n + jrow] = jj;
```

```
            jw[n + j] = k;
/*      exchange in jw(n2+  (levels) */
            j = jw[n2 + jj];
            jw[n2 + jj] = jw[n2 + k];
            jw[n2 + k] = j;
/*      exchange in w */
            s = w[jj];
            w[jj] = w[k];
            w[k] = s;
        }

/*      zero out element in row by resetting jw(n+jrow) to zero. */

        jw[n + jrow] = 0;

/*      get the multiplier for row to be eliminated (jrow) + its level */

        fact = w[jj] * alu[jrow];
        jlev = jw[n2 + jj];
        if (jlev > lfil) {
            goto L150;
        }

/*      combine current row and row jrow */

        i__2 = jlu[jrow + 1] - 1;
        for (k = ju[jrow]; k <= i__2; ++k) {
            s = fact * alu[k];
            j = jlu[k];
            jpos = jw[n + j];
            if (j >= ii) {

/*      dealing with upper part. */

                if (jpos == 0) {

/*      this is a fill-in element */

                    ++lenu;
                    if (lenu > n) {
                       goto L995;
                    }
                    i__ = ii + lenu - 1;
                    jw[i__] = j;
                    jw[n + j] = i__;
                    w[i__] = -s;
                    jw[n2 + i__] = jlev + levs[k] + 1;
                } else {

/*      this is not a fill-in element */

                    w[jpos] -= s;
/* Computing MIN */
                    i__3 = jw[n2 + jpos], i__4 = jlev + levs[k] + 1;
                    jw[n2 + jpos] = min(i__3,i__4);
                }
            } else {

/*      dealing with lower part. */

                if (jpos == 0) {

/*      this is a fill-in element */
```

```
                    ++lenl;
                    if (lenl > n) {
                       goto L995;
                    }
                    jw[lenl] = j;
                    jw[n + j] = lenl;
                    w[lenl] = -s;
                    jw[n2 + lenl] = jlev + levs[k] + 1;
                } else {

/*     this is not a fill-in element */

                    w[jpos] -= s;
/* Computing MIN */
                    i__3 = jw[n2 + jpos], i__4 = jlev + levs[k] + 1;
                    jw[n2 + jpos] = min(i__3,i__4);
                }
            }
/* L203: */
        }
        w[jj] = fact;
        jw[jj] = jrow;
        goto L150;
L160:

/*     reset double-pointer to zero (U-part) */

        i__2 = lenu;
        for (k = 1; k <= i__2; ++k) {
            jw[n + jw[ii + k - 1]] = 0;
/* L308: */
        }

/*     update l-matrix */

        i__2 = lenl;
        for (k = 1; k <= i__2; ++k) {
            if (ju0 > iwk) {
               goto L996;
            }
            if (jw[n2 + k] <= lfil) {
               alu[ju0] = w[k];
               jlu[ju0] = jw[k];
               ++ju0;
            }
/* L204: */
        }

/*     save pointer to beginning of row ii of U */

        ju[ii] = ju0;

/*     update u-matrix */

        i__2 = ii + lenu - 1;
        for (k = ii + 1; k <= i__2; ++k) {
            if (jw[n2 + k] <= lfil) {
               jlu[ju0] = jw[k];
               alu[ju0] = w[k];
               levs[ju0] = jw[n2 + k];
               ++ju0;
            }
/* L302: */
        }
```

```
       if (fabs(w[ii]) < 1.0e-30) {
              printf("w[%d]=%e\n",ii,w[ii]);
           goto L999;
       }

       alu[ii] = 1.0 / w[ii];

/*     update pointer to beginning of next row of U. */

       jlu[ii + 1] = ju0;
/* ---------------------------------------------------------------------- */
/*     end main loop */
/* ---------------------------------------------------------------------- */
/* L500: */
    }

       ++jw;
    ++w;
    ++ju;
    ++ia;
    ++a;
    ++ja;
    ++alu;
    ++jlu;
    ++levs;

       ierr = 0;
    return 0;

/*     incomprehensible error. Matrix must be wrong. */

L995:
       ++jw;
    ++w;
    ++ju;
    ++ia;
    ++a;
    ++ja;
    ++alu;
    ++jlu;
    ++levs;

    ierr = -1;
    return 0;

/*     insufficient storage in L. */

L996:
       ++jw;
    ++w;
    ++ju;
    ++ia;
    ++a;
    ++ja;
    ++alu;
    ++jlu;
    ++levs;

    ierr = -2;
    return 0;

/*     insufficient storage in U. */

/* L997: */
```

```
   // ierr = -3;
   // return 0;

/*     illegal lfil entered. */

L998:
       ++jw;
    ++w;
    ++ju;
    ++ia;
    ++a;
    ++ja;
    ++alu;
    ++jlu;
    ++levs;

    ierr = -4;
    return 0;

/*     zero row encountered in A or U. */

L999:
       ++jw;
    ++w;
    ++ju;
    ++ia;
    ++a;
    ++ja;
    ++alu;
    ++jlu;
    ++levs;

    ierr = -5;
    return 0;
/* ----------------end-of-iluk--------------------------------------------- */
/* ------------------------------------------------------------------------ */
} /* iluk_ */
```

Способ замены линейного поиска на комбинацию двоичной кучи и хеш таблицы.

Используется следующий интерфейс абстрактного типа данных:

Листинг 2.

```
// Очередь по приоритетам в соединении с хеш таблицей.
//PQ(integer maxN, integer max_key_size); // конструктор
//~PQ(); // деструктор
// Есть ли элемент с данным ключём в таблице ?
//bool isfound(integer key);
//bool empty() const; // проверка на пустоту.
// Очищаем содержимое и она снова готова к использованию.
//void clear();
// Вернуть элемент с заданным ключём:
// Обязательно предполагается что ключ существует внутри таблицы.
//Item get(integer key);
// прочитать максимальный элемент.
//Item readmax();
// Прочитать значение ключа максимального элемента.
//integer readkeymaxelm();
// Вставить элемент item в очередь по
// приоритетам если элемент item имеет ключ key.
//template <class Item>
```

```
//void insert(Item item, integer key);
// Возвратить максимальный элемент
// и удалить его.
//Item getmax();
// Заменяет элемент с ключём key на элемент val с тем же ключём key.
// При этом ключ key должен быть уникальным.
//void modify(integer key, Item val);
// Удаление элемента с заданным значением ключа.
//void remove(integer key);
// У элемента изменть значение старого ключа на новый ключ
// при этом меняется и само содержимое элемента.
//void change(integer key_serch, integer key_new, integer item_new);
//  Меняет местами значения элементов с ключами i и j.
// Сохраняет порядок кучи.
//void exchange(integer i, integer j);
```

Реализация ilu(p) разложения, использующая описанный абстрактный тип данных.

Листинг 3.

```
// Медленный линейный поиск ликвидирован.
/* ----------------------------------------------------------------------- */
/* Subroutine */ integer iluk_(integer n, doublereal* &a, integer* &ja, integer* &ia,
        integer lfil, doublereal* &alu, integer* &jlu, integer* &ju,
        integer* &levs, integer iwk, doublereal* &w, integer* &jw, integer &ierr)
{
        /* System generated locals */
        integer i__1, i__2, i__3, i__4;

        /* Local variables */
        integer i__, j, k;
        doublereal s, t;
        integer j1, j2, n2, ii, jj, ju0;
        doublereal fact;
        integer lenl, jlev, lenu, jpos, jrow;

        // Переменные для проверки корректности исходного кода.
        integer jrow1, jrow2, k1, k2;

        /* ----------------------------------------------------------------------* */
        /*     SPARSKIT ROUTINE ILUK -- ILU WITH LEVEL OF FILL-IN OF K (ILU(k)) * */
```

```
/* ----------------------------------------------------------------------* */

/* on entry: */
/* ========== */
/* n      = integer. The row dimension of the matrix A. The matrix */

/* a,ja,ia = matrix stored in Compressed Sparse Row format. */

/* lfil    = integer. The fill-in parameter. Each element whose */
/*           leve-of-fill exceeds lfil during the ILU process is dropped. */
/*           lfil must be .ge. 0 */

/* tol     = real*8. Sets the threshold for dropping small terms in the */
/*           factorization. See below for details on dropping strategy. */

/* iwk     = integer. The minimum length of arrays alu, jlu, and levs. */

/* On return: */
/* =========== */

/* alu,jlu = matrix stored in Modified Sparse Row (MSR) format containing */
/*           the L and U factors together. The diagonal (stored in */
/*           alu(1:n) ) is inverted. Each i-th row of the alu,jlu matrix */
/*           contains the i-th row of L (excluding the diagonal entry=1) */
/*           followed by the i-th row of U. */

/* ju      = integer array of length n containing the pointers to */
/*           the beginning of each row of U in the matrix alu,jlu. */

/* levs    = integer (work) array of size iwk -- which contains the */
/*           levels of each element in alu, jlu. */
```

```
/* ierr    = integer. Error message with the following meaning. */
/*         ierr  = 0    --> successful return. */
/*         ierr .gt. 0  --> zero pivot encountered at step number ierr. */
/*         ierr  = -1   --> Error. input matrix may be wrong. */
/*                          (The elimination process has generated a */
/*                          row in L or U whose length is .gt.  n.) */
/*         ierr  = -2   --> The matrix L overflows the array al. */
/*         ierr  = -3   --> The matrix U overflows the array alu. */
/*         ierr  = -4   --> Illegal value for lfil. */
/*         ierr  = -5   --> zero row encountered in A or U. */

/* work arrays: */
/* ============= */
/* jw      = integer work array of length 3*n. */
/* w       = real work array of length n */

/* Notes/known bugs: This is not implemented efficiently storage-wise. */
/*       For example: Only the part of the array levs(*) associated with */
/*       the U-matrix is needed in the routine.. So some storage can */
/*       be saved if needed. The levels of fills in the LU matrix are */
/*       output for information only -- they are not needed by LU-solve. */

/* ---------------------------------------------------------------------- */
/* w, ju (1:n) store the working array [1:ii-1 = L-part, ii:n = u] */
/* jw(n+1:2n)  stores the nonzero indicator. */

/* Notes: */
/* ------ */
/* All the diagonal elements of the input matrix must be  nonzero. */

/* ----------------------------------------------------------------------* */
/*     locals */
```

```
/* Parameter adjustments */
--jw;
--w;
--ju;
--ia;
--a;
--ja;
--alu;
--jlu;
--levs;

// Целочисленная очередь по приоритетам.
PQ<integer>  pq(n + 1, n + 1);

/* Function Body */
if (lfil < 0) {
        goto L998;
}
/* ---------------------------------------------------------------------- */
/*    initialize ju0 (points to next element to be added to alu,jlu) */
/*    and pointer array. */
/* ---------------------------------------------------------------------- */
n2 = n + n;
ju0 = n + 2;
jlu[1] = ju0;

/*    initialize nonzero indicator array + levs array -- */

i__1 = n << 1;
for (j = 1; j <= i__1; ++j) {
        jw[j] = 0;
        /* L1: */
```

```
}



/* ---------------------------------------------------------------------- */
/*     beginning of main loop. */
/* ---------------------------------------------------------------------- */
i__1 = n;
for (ii = 1; ii <= i__1; ++ii) {



        j1 = ia[ii];
        j2 = ia[ii + 1] - 1;

        /*     unpack L-part and U-part of row of A in arrays w */

        lenu = 1;
        lenl = 0;
        jw[ii] = ii;



        w[ii] = 0.f;
        jw[n + ii] = ii;

        i__2 = j2;
        for (j = j1; j <= i__2; ++j) {
                k = ja[j];
                t = a[j];
                if (t == 0.f) {
                        goto L170;
```

```
            }
            if (k < ii) {
                        ++lenl;
                        jw[lenl] = k;

                        // push jw
                        pq.insert(-k, lenl);



                        w[lenl] = t;
                        jw[n2 + lenl] = 0;
                        jw[n + k] = lenl;
            }
            else if (k == ii) {
                        w[ii] = t;
                        jw[n2 + ii] = 0;
            }
            else {
                        ++lenu;
                        jpos = ii + lenu - 1;
                        jw[jpos] = k;
                        w[jpos] = t;
                        jw[n2 + jpos] = 0;
                        jw[n + k] = jpos;
            }
L170:
            ;
}

jj = 0;

/*    eliminate previous rows */
```

```
L150:

        // remove in jw
        pq.remove(jj);


        ++jj;
        if (jj > lenl) {
                goto L160;
        }
        /* ---------------------------------------------------------------------- */
        /*     in order to do the elimination in the correct order we must select */
        /*     the smallest column index among jw(k), k=jj+1, ..., lenl. */
        /* ---------------------------------------------------------------------- */
        jrow = jw[jj];
        k = jj;


        /*     determine smallest column index */


        i__2 = lenl;


        if (0) {
        // Дьявольски медленный поиск минимума. Это линейный поиск.
        //printf("jj=%d\n",jj);// jj==1 далеко не всегда.
        // Это означает, что нужно поддерживать удаление элемента по ключу.


                // Чрезвычайно медленный линейный поиск.
                for (j = jj + 1; j <= i__2; ++j) {
                        if (jw[j] < jrow) {
                                jrow = jw[j];
                                k = j;
                        }
```

```
            }
        }
        else {
            if (0) {

                // Проверочный участок кода.
                // Раскоментировать если нужно проверить код.

                jrow1 = jrow;
                k1 = k;

                for (j = jj + 1; j <= i__2; ++j) {
                    if (jw[j] < jrow1) {
                        jrow1 = jw[j];
                        k1 = j;
                    }
                }

                if (jj + 1 <= i__2) {
                    // remove in jw
                    pq.remove(jj);
                    integer jrow3 = jrow, k3 = k;
                    // на основе очереди по приоритетам в сочетании с хеш
таблицей.
                    if (jrow > (-pq.readmax())) {
                        jrow = -pq.readmax();
                        k = pq.readkeymaxelm();
                    }
                    pq.insert(-jrow3, k3);
                }
```

```
                jrow2 = jrow;
                k2 = k;

                if ((jrow1 != jrow2) || (k1 != k2)) {
                        for (j = jj; j <= i__2; ++j) {
                                printf("jw[%d]=%d ", j, jw[j]);
                        }
                        printf("\n");
                        pq.print_log('s');
                        printf("k1=%d k2=%d jrow1=%d jrow2=%d\n", k1, k2, jrow1,
jrow2);
                        getchar();
                }

        }
        else {
                jrow = -pq.readmax();
                k = pq.readkeymaxelm();
                /*
                if (jj + 1 <= i__2) {
                        // remove in jw
                        pq.remove(jj);
                        integer jrow3 = jrow, k3 = k;
                        // на основе очереди по приоритетам в сочетании с хеш
таблицей.
                        if (jrow > (-pq.readmax())) {
                                jrow = -pq.readmax();
                                k = pq.readkeymaxelm();
                        }
                        pq.insert(-jrow3, k3);
                }
                */
        }
```

```
}

if (k != jj) {
        /*    exchange in jw */
        j = jw[jj];
        jw[jj] = jw[k];
        jw[k] = j;
        /*    exchange in jw(n+  (pointers/ nonzero indicator). */
        jw[n + jrow] = jj;
        jw[n + j] = k;
        /*    exchange in jw(n2+  (levels) */
        j = jw[n2 + jj];
        jw[n2 + jj] = jw[n2 + k];
        jw[n2 + k] = j;
        /*    exchange in w */
        s = w[jj];
        w[jj] = w[k];
        w[k] = s;


        pq.exchange_speshial_for_Saad(jj, k);
}

/*    zero out element in row by resetting jw(n+jrow) to zero. */

jw[n + jrow] = 0;

/*    get the multiplier for row to be eliminated (jrow) + its level */

fact = w[jj] * alu[jrow];
jlev = jw[n2 + jj];
```

```
if (jlev > lfil) {
        goto L150;
}

/*    combine current row and row jrow */

i__2 = jlu[jrow + 1] - 1;
for (k = ju[jrow]; k <= i__2; ++k) {
        s = fact * alu[k];
        j = jlu[k];
        jpos = jw[n + j];
        if (j >= ii) {

                /*    dealing with upper part. */

                if (jpos == 0) {

                        /*    this is a fill-in element */

                        ++lenu;
                        if (lenu > n) {
                                goto L995;
                        }
                        i__ = ii + lenu - 1;
                        jw[i__] = j;
                        jw[n + j] = i__;
                        w[i__] = -s;
                        jw[n2 + i__] = jlev + levs[k] + 1;
                }
                else {

                        /*    this is not a fill-in element */
```

```
                w[jpos] -= s;
                /* Computing MIN */
                i__3 = jw[n2 + jpos], i__4 = jlev + levs[k] + 1;
                jw[n2 + jpos] = min(i__3, i__4);
            }
        }
        else {

            /*    dealing with lower part. */

            if (jpos == 0) {

                /*    this is a fill-in element */

                ++lenl;
                if (lenl > n) {
                    goto L995;
                }

                // push jw
                pq.insert(-j, lenl);

                jw[lenl] = j;
                jw[n + j] = lenl;
                w[lenl] = -s;
                jw[n2 + lenl] = jlev + levs[k] + 1;
            }
            else {

                /*    this is not a fill-in element */
```

```
                        w[jpos] -= s;
                        /* Computing MIN */
                        i__3 = jw[n2 + jpos], i__4 = jlev + levs[k] + 1;
                        jw[n2 + jpos] = min(i__3, i__4);
                    }
                }
                /* L203: */
            }
            w[jj] = fact;

            //pq.remove(jj);
            //pq.insert(-jrow, jj);

            jw[jj] = jrow;
            goto L150;
L160:

            /*    reset double-pointer to zero (U-part) */

            i__2 = lenu;
            for (k = 1; k <= i__2; ++k) {
                jw[n + jw[ii + k - 1]] = 0;
                /* L308: */
            }

            /*    update l-matrix */

            i__2 = lenl;
            for (k = 1; k <= i__2; ++k) {
                if (ju0 > iwk) {
                    goto L996;
                }
```

```
            if (jw[n2 + k] <= lfil) {
                        alu[ju0] = w[k];
                        jlu[ju0] = jw[k];
                        ++ju0;
            }
            /* L204: */
}

/*    save pointer to beginning of row ii of U */

ju[ii] = ju0;

/*    update u-matrix */

i__2 = ii + lenu - 1;
for (k = ii + 1; k <= i__2; ++k) {
            if (jw[n2 + k] <= lfil) {
                        jlu[ju0] = jw[k];
                        alu[ju0] = w[k];
                        levs[ju0] = jw[n2 + k];
                        ++ju0;
            }
            /* L302: */
}
if (fabs(w[ii]) < 1.0e-30) {
            printf("w[%d]=%e\n", ii, w[ii]);
            //w[ii] = 1.0;
            //printf("k1=%d k2=%d jrow1=%d jrow2=%d\n",k1,k2,jrow1,jrow2);
            getchar();
            goto L999;
}
```

```
            alu[ii] = 1.0 / w[ii];

            /*     update pointer to beginning of next row of U. */

            jlu[ii + 1] = ju0;
            /* ---------------------------------------------------------------------- */
            /*     end main loop */
            /* ---------------------------------------------------------------------- */
            /* L500: */
        }

        ++jw;
        ++w;
        ++ju;
        ++ia;
        ++a;
        ++ja;
        ++alu;
        ++jlu;
        ++levs;


        ierr = 0;
        return 0;

        /*     incomprehensible error. Matrix must be wrong. */

L995:
        ++jw;
        ++w;
        ++ju;
        ++ia;
```

```
        ++a;
        ++ja;
        ++alu;
        ++jlu;
        ++levs;


        ierr = -1;
        return 0;

        /*     insufficient storage in L. */

L996:
        ++jw;
        ++w;
        ++ju;
        ++ia;
        ++a;
        ++ja;
        ++alu;
        ++jlu;
        ++levs;


        ierr = -2;
        return 0;

        /*     insufficient storage in U. */

        /* L997: */
        // ierr = -3;
        // return 0;
```

```
        /*     illegal lfil entered. */

L998:
        ++jw;
        ++w;
        ++ju;
        ++ia;
        ++a;
        ++ja;
        ++alu;
        ++jlu;
        ++levs;


        ierr = -4;
        return 0;

        /*     zero row encountered in A or U. */

L999:
        ++jw;
        ++w;
        ++ju;
        ++ia;
        ++a;
        ++ja;
        ++alu;
        ++jlu;
        ++levs;
```

```
        ierr = -5;

        return 0;

        /* ----------------end-of-iluk---------------------------------------- */

        /* ---------------------------------------------------------------------- */

} /* iluk_quick */
```

Компьютерная реализация двоичной кучи с хеш таблицей.

Листинг 4.

```
// Используется в алгебраическом многосеточном методе.
// Используются только следующие функции:
// clear, remove, insert, readkeymaxelm.

// Соединяем с быстродействующей хеш таблицей.
template <class Item>
void exch(integer i, integer j, Item* &pq, integer* &qp, integer* &hash) {
       // exchange
       /*
       // begin
       integer t;

       Item buf1 = pq[qp[i]];
       Item buf2 = pq[qp[j]];
       t = qp[i];

       qp[i] = qp[j];
       qp[j] = t;

       pq[qp[i]] = buf1;
       pq[qp[j]] = buf2;

       // end
       */
       //printf("exchange\n");

       Item t;

       t = pq[j];
       pq[j] = pq[i];
       pq[i] = t;

       integer p;

       p = hash[qp[i]];
       hash[qp[i]] = hash[qp[j]];
       hash[qp[j]] = p;

       p = qp[j];
       qp[j] = qp[i];
       qp[i] = p;



}

// Восходящая установка структуры сортирующего дерева.
// Роберт Седжвик с. 366 в книге 2002 года.
template <class Item>
```

```
void fixUp(Item* &a, integer* &inda, integer* &hash, integer k)
{
	while (k > 1 && a[k / 2] < a[k])
	{
		integer kdiv2 = k / 2;

		exch(k, kdiv2, a, inda, hash);

		k = kdiv2;
	}
}

// Нисходящая установка структуры сортирующего дерева.
template <class Item>
void fixDown(Item* &a, integer* &inda, integer* &hash, integer k, integer N)
{
	while (2 * k <= N)
	{


		integer j = 2 * k;
		if (j < N&&a[j] < a[j + 1]) j++;
		if (!(a[k] < a[j])) break;


		exch(k, j, a, inda, hash);

		k = j;
	}
}

//PQ(integer maxN, integer max_key_size);
//~PQ();
// Есть ли элемент с данным ключём в таблице ?
//bool isfound(integer key);
//bool empty() const;
// Очищаем содержимое и она снова готова к использованию.
//void clear();
// Вернуть элемент с заданным ключём:
// Обязательно предполагается что ключ существует внутри таблицы.
//Item get(integer key);
//Item readmax();
//integer readkeymaxelm();
// Вставить элемент item в очередь по
// приоритетам если элемент item имеет ключ key.
//template <class Item>
//void insert(Item item, integer key);
// Возвратить максимальный элемент
// и удалить его.
//Item getmax();
// Заменяет элемент с ключём key на элемент val с тем же ключём key.
// При этом ключ key должен быть уникальным.
//void modify(integer key, Item val);
// Удаление элемента с заданным значением ключа.
//void remove(integer key);
// У элемента изменть значение старого ключа на новый ключ
// при этом меняется и само содержимое элемента.
//void change(integer key_serch, integer key_new, integer item_new);


// Ключи должны быть уникальны, целочисленны и различны.
// Двух одинаковых ключей быть недолжно, иначе коллизия в хеш таблице.

template <class Item>
```

```
class PQ
{
private:
	// Хранение binary heap.
	Item *pq;
	// Обратный доступ по номеру в qp на ячейку в hash.
	integer *qp; // Ссылка на хеш таблицу.
	// Доступ по ключу к полю в pq.
	integer *hash; // Хеш таблица !!!
	integer N;
	integer isize;
	integer ihash_size;

public:
	PQ(integer maxN, integer max_key_size)
	{
		isize = maxN;
		pq = new Item[maxN + 1];
		qp = new integer[maxN + 1];
		for (integer i_1 = 0; i_1 < maxN + 1; i_1++) {
			// Инициализация: таблица пуста т.к. поле 0
			// в массиве pq никогда не используется.
			qp[i_1] = 0;
		}
		N = 0;
		// Хеш таблица !!!
		ihash_size = max_key_size;
		hash = new integer[max_key_size+2];
		for (integer i_1 = 0; i_1 < max_key_size + 2; i_1++) {
			// Инициализация: таблица пуста т.к. поле 0
			// в массиве pq никогда не используется.
			hash[i_1] = 0;
		}
	}
	~PQ()
	{
		if (pq != NULL) delete[] pq;
		N = 0;
		if (qp != NULL) delete[] qp;
		if (hash != NULL) delete[] hash;
	}
	void print_log(char ch) {
		printf("%c\n",ch);
		for (integer i_1 = 1; i_1 <= N; i_1++) {
#if doubleintprecision == 1
			printf("[%lld %lld] ",pq[i_1],qp[i_1]);
#else
			printf("[%d %d] ", pq[i_1], qp[i_1]);
#endif
		}
		printf("\n");
		system("PAUSE");
	}

	// Меняет местами значения элементов с ключами i и j.
	// Сохраняет порядок кучи.
	void exchange_speshial_for_Saad(integer i, integer j) {

		//Item t;



		//t = pq[hash[j]];
		//pq[hash[j]] = pq[hash[i]];
```

```
        //pq[hash[i]] = t;

        // Этот обмен местами сохраняет порядок кучи.
        Item t1 = get(i);
        //Item t2 = get(j);

        //this->remove(i);
        //this->remove(j);
        //this->insert(t1, j);
        //this->insert(t2, i);

        // быстродействущая модификация
        this->remove(j);
        this->insert(t1, j);

}

// Очищаем содержимое и она снова готова к использованию.
void clear()
{
        for (integer i_1 = 0; i_1 < N + 1; i_1++) {
                // Ускоренная очистка хеш таблицы.
                hash[qp[i_1]] = 0;
        }
        for (integer i_1 = 0; i_1 < isize + 1; i_1++) {
                // Инициализация: таблица пуста т.к. поле 0
                // в массиве pq никогда не используется.
                qp[i_1] = 0;
        }
        N = 0;
        /*
        for (integer i_1 = 0; i_1 < ihash_size + 2; i_1++) {
                // Инициализация: таблица пуста т.к. поле 0
                // в массиве pq никогда не используется.
                hash[i_1] = 0;
        }
        */
}
bool empty() const
{
        return N == 0;
}
// Есть ли элемент с данным ключём в таблице ?
bool isfound(integer key) {
        if (hash[key] == 0) {
                // Элемент отсутствует в хеш таблице.
                return false;
        }
        return true;
}
// Вернуть элемент с заданным ключём:
// Обязательно предполагается что ключ существует внутри таблицы.
Item get(integer key) {
        if (hash[key] == 0) {
                // Элемент отсутствует в хеш таблице.
                printf("priority queue get ERROR: get element not found.\n");
                system("pause");
                exit(1);
        }
        return pq[hash[key]];
}
// Просто прочитать масимальный элемент.
Item readmax()
{
```

```
		return pq[1];
	}
	integer readkeymaxelm() {
		return qp[1];
	}



	// Вставить элемент item в очередь по
	// приоритетам если элемент item имеет ключ key.
	template <class Item>
	void insert(Item item, integer key)
	{
		if (N + 1 > isize) {
			printf("ERROR!!! priority_queue stack overflow...\n");
#if doubleintprecision == 1
			printf("N=%lld\n",N);
#else
			printf("N=%d\n", N);
#endif
			system("pause");
			exit(1);
		}
		else {
			pq[++N] = item;
			hash[key] = N;
			qp[N] = key;
			fixUp(pq, qp, hash, N);
		}
		//print_log('i');
	}



	// Возвратить максимальный элемент
	// и удалить его.
	Item getmax()
	{
		exch(1, N, pq, qp, hash);

		fixDown(pq, qp, hash, 1, N - 1);
		return pq[N--];
	}



	// Заменяет элемент с ключём key на элемент val с тем же ключём key.
	// При этом ключ key должен быть уникальным.
	void modify(integer key, Item val)
	{
		if (hash[key] == 0) {
			// Элемент отсутствует в хеш таблице.
			printf("priority queue modify ERROR: get element not found.\n");
			system("pause");
			exit(1);
		}

		pq[hash[key]] = val;
		// Теперь необходимо восстановить порядок кучи.
		integer i = hash[key];
		fixUp(pq, qp, hash, i);
		fixDown(pq, qp, hash, i, N);
	}
```

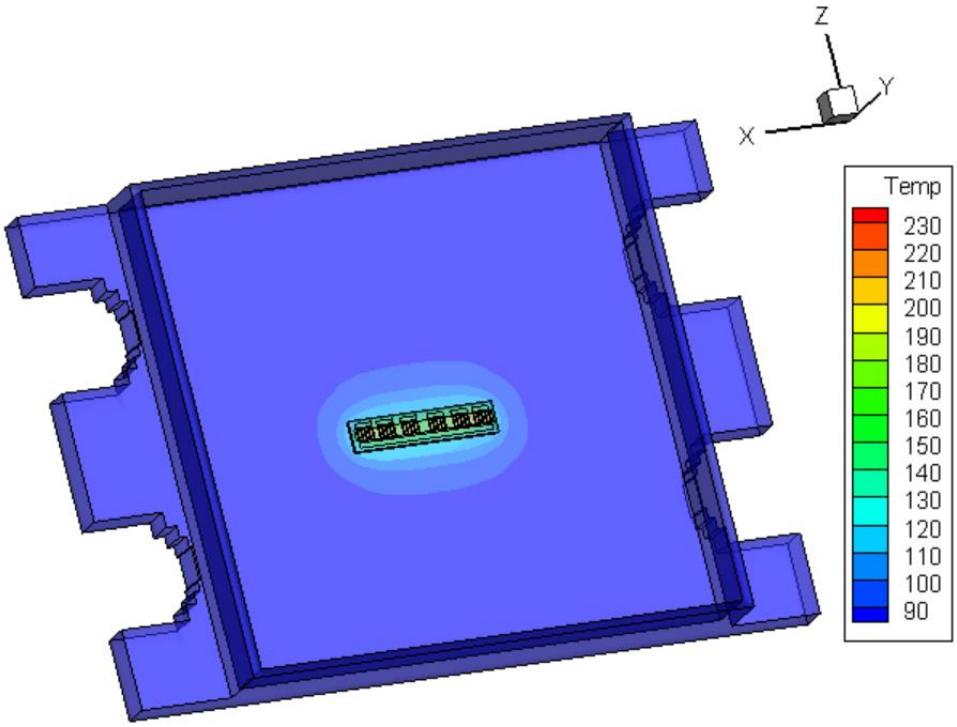
```
// Удаление элемента с заданным значением ключа.
void remove(integer key)
{
	if (N > 0) {
		if (hash[key] == 0) {
			// Элемент отсутствует в хеш таблице.
			// Ничего не делаем т.к. элемента уже нет.
		}
		else {

			// Удаление.
			if (hash[key] == N) {
				N--;
				hash[key] = 0;
				qp[N + 1] = 0;
				// Ключ исключён из таблицы.
			}
			else {

				integer i = hash[key];

				exch(hash[key], N, pq, qp, hash);

				hash[qp[N]] = 0;
				qp[N] = 0;
				N--;

				// Теперь необходимо восстановить порядок кучи.
				fixUp(pq, qp, hash, i);
				fixDown(pq, qp, hash, i, N);

			}

		}
	}
	//print_log('r');

}

// У элемента изменть значение старого ключа на новый ключ
// при этом меняется и само содержимое элемента.
void change(integer key_serch, integer key_new, integer item_new)
{
	if (hash[key_serch] == 0) {
		// Элемент отсутствует в хеш таблице.
		if (hash[key_new] != 0) {
			// Элемент присутствует в хеш таблице.
			pq[hash[key_new]] = item_new;
			// Теперь необходимо восстановить порядок кучи.
			fixUp(pq, qp, hash, hash[key_new]);
			fixDown(pq, qp, hash, hash[key_new], N);
		}
		else {
			// Вставка нового ключа с новыми данными.
			insert(item_new, key_new);
		}
	}
	else {
		if (hash[key_new] != 0) {
			// удаление старого ключа со всем его содержимым.
```

```
                        remove(key_search);
                        // Элемент присутствует в хеш таблице.
                        pq[hash[key_new]] = item_new;
                        // Теперь необходимо восстановить порядок кучи.
                        fixUp(pq, qp, hash[key_new]);
                        fixDown(pq, qp, hash[key_new], N);

                }
                else {
                        // key_new отсутствует.

                        hash[key_new] = hash[key_search];
                        hash[key_search] = 0; // исключение из дерева.
                        pq[hash[key_new]] = item_new;
                        qp[hash[key_new]] = key_new;
                        // Теперь необходимо восстановить порядок кучи.
                        fixUp(pq, qp, hash, hash[key_new]);
                        fixDown(pq, qp, hash, hash[key_new], N);

                }
        }
    }


};

// Все операции O(1) и только операция delete log2(N).
```

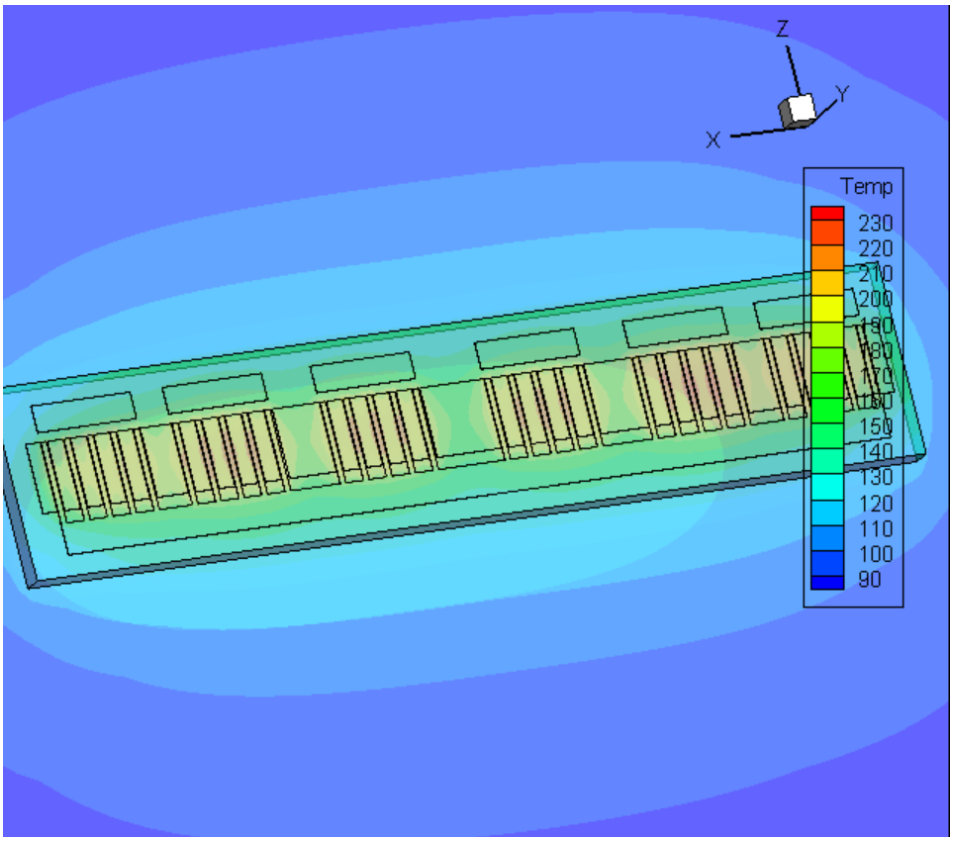
Результаты расчётов.

Таблица 1.

Задача	Время, с		
	Линейный поиск	Двоичная куча и хеш таблица	И то и другое совместно
Задача №1	14мин 36с (5мин 30с)	10мин 50с (1мин 45с)	16 мин 22с (7мин 15с)



а).



б).

Рис. 1. Поле температур в задаче 1, °С.

Выводы.

Предложен работающий программный код на языке C++ предлагающий решение проблемы быстродействия нахождения ilu(p) разложения в условиях работы BiCGStab+CAMG алгоритма.

Предлагаемое использование структуры данных двоичной кучи и хеш таблицы действительно быстрее чем простой линейный поиск, что продемонстрировано в Таблице 1.

Литература

[1]. Ю.Саад Итерационные методы. М. МГУ, 2013.

[2]. Роберт Седжвик Фундаментальные алгоритмы на C++.