

## Словарь

Kinds – виды, разновидность.

Buoyancy forces – сила Архимеда.

Drag forces – капиллярные силы.

underrelaxation factor – коэффициент нижней релаксации.

Mimicking the formulation – составить линейную комбинацию из уравнений.

Body force – массовая сила.

guessed pressure – предварительно определенное поле давления (промежуточное поле давлений не являющееся решением системы уравнений – это поле результат незавершенного итерационного процесса, это лишь некое незавершенное приближение к истинному распределению).

Кратко об авторе статьи (Ибрагим Сезай):

С 1973 по 1978 года учился в техническом университете на среднем востоке. С 2006 года по настоящее время: Профессор, инженер механик в Восточном Средиземном Университете. Занимается преподавательской деятельностью.



## **Полунеявная процедура для связывающих уравнений неразрывности и скорость-давление (SIMPLE) при расчёте несжимаемых течений на совмещенных сетках.**

Ибрагим Сезай (I. Sezai) - Восточный Средиземноморский Университет, Департамент Инженеров Механиков, Мерсин 10 – Турция. Правлено в январе 2011 года.

### **1. Введение.**

Обычно для решения задач динамики жидкости используются два механизма организации разностной сетки – шахматные (разнесенные) или совмещенные сетки. Для совмещённой сетки векторные переменные и скалярные переменные хранятся в одних и тех же узлах (геометрических позициях), в то время как для шахматных сеток векторные переменные и скалярные переменные хранятся в разных местах (геометрических позициях), сдвинутых на половину контрольного объема в каждом координатном направлении. Шахматные сетки популярны из-за их способности предотвращать несоответствующие физическому смыслу шахматные осцилляции поля давления, которые возникают при решении уравнения сохранения импульса. Тем не менее, программная реализация на шахматных сетках испытывает определенные трудности, так как  $x$  и  $y$  компоненты уравнения сохранения импульса аппроксимируются для различных контрольных объёмов (позиционно геометрически) смещенных от основного контрольного объема (в котором хранятся такие скаляры как температура или давление) в различных координатных направлениях. Трудности

программной реализации сильно возрастают, когда речь заходит о криволинейных или неструктурированных сетках. В результате почти все программные коды, предназначенные для гидродинамических задач на криволинейных или неструктурированных сетках, не используют шахматные сетки.

С другой стороны, совмещённые сетки способны приводить к неправильным распределениям поля давления – шахматные осцилляции (расслоения) поля давления, если не будут приняты специальные меры. По этой причине в начале 1980-х годов и ранее совмещённые сетки практически не применялись для расчёта гидродинамических задач. Тем не менее, с 1983 года совмещённые сетки стали использоваться более широко, после того как Рхи и Чоу (1983) предложили метод сеточной аппроксимации уравнений сохранения импульса для устранения проблемы с шахматной осцилляцией поля давления.

### 1. Математическая постановка задачи.

Основными уравнениями для двумерного переноса потоков тепла и массы (жидкой среды под которой понимаются как жидкости, так и газы) в прямоугольных координатах для среды с постоянными теплофизическими свойствами (теплопроводностью, и т.п.) являются

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

х-компонента уравнения сохранения импульса:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + s_u \quad (2)$$

у-компонента уравнения сохранения импульса:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + s_v \quad (3)$$

уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + s_T \quad (4)$$

Уравнения (2)-(4) могут быть представлены в обобщённом виде (который предложил проф. Б. Сполдинг)

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + s_\phi \quad (5)$$

где  $u$  и  $v$  компоненты скорости,  $T$  – температура,  $\phi$  - обобщенная переменная (может принимать роль  $u, v$  или  $T$ ),  $t$ ,  $\rho$ ,  $\Gamma$  и  $s_\phi$  это время, плотность, коэффициент диффузии, и источниковый член в единице объема, соответственно. Кроме того, источниковые члены  $s_u$  и  $s_v$  представляют собой капиллярные силы, силу Архимеда (плавучесть) и другие. Обратите внимание, что для уравнения неразрывности  $\phi=1$ ,  $\Gamma=0$ , и  $s_\phi = 0$ . При численных расчётах источниковые члены записываются в линеаризованной форме  $s = s_c + s_p\phi$ .

Например, при моделировании естественной конвекции правая часть в уравнении для  $y$ -компоненты сохранения импульса содержит дополнительный член  $-\rho_{ref}\vec{g}\beta(T - T_\infty)$  для которого член  $s_c = -\rho_{ref}|g_y|\beta_T(T - T_{ref})$ , а  $s_p = 0$ . Точно также для задач, связанных с выделением тепла в правую часть уравнения сохранения энергии, записывается дополнительный источниковый член  $\dot{q}$ , который является скоростью генерации энергии в единице объёма. Тогда в этом случае  $s_c = \dot{q}$ ,  $s_p=0$ .

Основные уравнения аппроксимированы на совмещённой сетке с помощью метода контрольного объёма, при таком способе все переменные хранятся в центре контрольного объема (см. рис. 1). Проинтегрируем соотношение (5) по контрольному объёму, который ограничен гранями ячейки  $e$ ,  $w$ ,  $n$  и  $s$ , которые окружают центр объема (точку)  $P$ , у нас есть:

$$\begin{aligned} \frac{\rho\Delta x\Delta y}{\Delta t}(\phi_P - \phi_P^0) + [(\rho u\phi)_e - (\rho u\phi)_w]\Delta y + [(\rho v\phi)_n - (\rho v\phi)_s]\Delta x = \\ \left[ \frac{\Gamma_e}{\delta x_e}(\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w}{\delta x_w}(\phi_P - \phi_W) \right] \Delta y + \left[ \frac{\Gamma_n}{\delta y_n}(\phi_N - \phi_P) - \frac{\Gamma_s}{\delta y_s}(\phi_P - \phi_S) \right] \Delta x \\ + s_c\Delta x\Delta y + s_p\phi_P\Delta x\Delta y \end{aligned} \quad (6)$$

где индекс 0 относится к предыдущему временному слою и  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\delta x_e$ ,  $\delta x_w$ ,  $\delta y_n$  и  $\delta y_s$  геометрические длины как показано на рисунке 1.

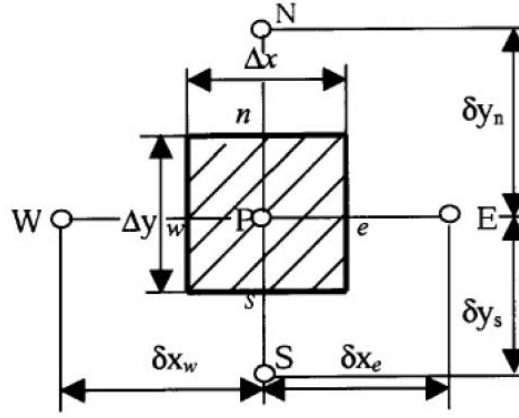


Рисунок 1 - Организация совмещённой сетки.

Конечно-разностное представление уравнения неразрывности для несжимаемых течений имеет вид

$$(\rho u_e)\Delta y - (\rho u_w)\Delta y + (\rho v_n)\Delta x - (\rho v_s)\Delta x = 0 \quad (7)$$

Значения обобщенной переменной  $\phi_e, \phi_w$  на гранях контрольного объема рассчитываются с помощью схемы Леонарда QUICK или любой другой схемы высокого порядка, с помощью применения метода отложенной коррекции. Подставив эти значения в уравнение (6) и приводя подобные слагаемые, получаем окончательную форму дискретного аналога для обобщенной переменной  $\phi$ , в следующей форме.

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_P^0 \phi_P^0 + b + pterm \quad (8)$$

где

$$a_E = \frac{\Gamma_e \Delta y}{\delta x_e} + \max[-(\rho u)_e \Delta y, 0]$$

$$a_W = \frac{\Gamma_w \Delta y}{\delta x_w} + \max[(\rho u)_w \Delta y, 0]$$

$$a_N = \frac{\Gamma_n \Delta x}{\delta y_n} + \max[-(\rho v)_n \Delta x, 0]$$

$$a_S = \frac{\Gamma_s \Delta x}{\delta y_s} + \max[(\rho v)_s \Delta x, 0]$$

$$a_P^0 = \frac{\rho \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_p + \Delta F$$

$$\Delta F = (\rho u)_e \Delta y - (\rho u)_w \Delta y + (\rho v)_n \Delta x - (\rho v)_s \Delta x$$

$$b = (s_c)_{eqn} \Delta x \Delta y + b_1$$

$$S_p = (s_p)_{eqn} \Delta x \Delta y + (S_p)_{bc}$$

$$b_1 = S_{dc} + (S_c)_{bc} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
S_{dc} = & -\max[(\rho u)_e \Delta y, 0](\phi_e - \phi_P) + \max[-(\rho u)_e \Delta y, 0](\phi_e - \phi_E) \\
& -\max[-(\rho u)_w \Delta y, 0](\phi_w - \phi_P) + \max[(\rho u)_w \Delta y, 0](\phi_w - \phi_W) \\
& -\max[(\rho v)_n \Delta x, 0](\phi_n - \phi_P) + \max[-(\rho v)_n \Delta x, 0](\phi_n - \phi_N) \\
& -\max[-(\rho v)_s \Delta x, 0](\phi_s - \phi_P) + \max[(\rho v)_s \Delta x, 0](\phi_s - \phi_S)
\end{aligned}$$

$$p_{term} = \begin{cases} = -(p_e - p_w) \Delta y & \text{для } x - \text{компоненты сохранения импульса} \\ = -(p_n - p_s) \Delta x & \text{для } y - \text{компоненты сохранения импульса} \\ = 0 & \text{для других уравнений} \end{cases}$$

$(S_p)_{eqn}, (S_c)_{eqn}$  = источниковые члены в единице объема в дифференциальных уравнениях (для сил плавучести (Архимеда), и капиллярных сил (сил поверхностного натяжения и др.)

$(S_p)_{bc}, (S_c)_{bc}$  = источниковые члены в граничных узлах.

где  $b$  представляет дискретизованные вклады всех источниковых членов, за исключением источникового члена, который представляет собой перепад давления. Источниковый член  $S_{dc}$  представляет собой результат применения метода отложенной коррекции для каждого значения искомой переменной  $\phi$  на грани контрольного объема,  $\phi_p^0$  значение переменной  $\phi_p$  с предыдущего шага по времени (дело в том, что в системе алгебраических уравнений может быть неявно учтена лишь противопоточная часть, а дополнение до схемы высокой разрешающей способности, такой как схема Леонарда QUICK, может быть учтена лишь явно, отсюда использование источникового члена  $S_{dc}$  и значений переменных с предыдущего временного слоя).  $\phi_e, \phi_w, \phi_n, \phi_s$  рассчитываются из подходящей схемы высокой разрешающей способности, такой как QUICK.  $S_{bc}$  это вклад в источниковый член для узлов соседствующих с граничными. Например, если на западной границе стоит условие Дирихле (задано значение функции)  $\phi = \phi_w$  то для точки внутри области соседствующей с заданной точкой на западной границе вклад в источниковый член будет  $S_{bc} = a_w \phi_w$ , где  $a_w$  будет коэффициент, как если бы граничная точка обрабатывалась однообразно с внутренней. Точно также, как  $(S_p)_{bc}$  является вкладом в источниковый член для внутренней точки, соседствующей с граничным узлом.

Кроме того, обратите внимание, что источниковые члены, обозначенные маленькими буквами, приводятся на единицу объема. То есть,  $S = s \Delta V$ ,  $S_c = s_c \Delta V$ , и  $S_p = s_p \Delta V$ , где  $\Delta V$  объём контрольного объема.

Можно увидеть, что коэффициенты дискретного аналога для  $x$  и  $y$  компонент уравнения сохранения импульса одинаковы, на совмещенных сетках (за исключением узлов сетки соседствующих с границей), при условии, что коэффициенты диффузии  $\Gamma$  одинаковые в  $x$  и  $y$ -направлениях.

Для того, чтобы замедлить изменения зависимых переменных в итерационном (последовательном) решателе, в дискретный аналог вводится коэффициент нижней релаксации  $\alpha_\phi$  следующим образом:

$$\frac{a_p}{\alpha_\phi} \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_p^0 \phi_p^0 + b + pterm + \frac{(1 - \alpha_\phi)}{\alpha_\phi} a_p \phi_p^{n-1} \quad (10)$$

где верхний индекс (n-1) относится к предыдущей итерации. В этом случае, формулы расчёта в уравнении (9) переопределены следующим образом

$$\begin{cases} b \leftarrow b + (1 - \alpha) \frac{a_p}{\alpha} \phi_p^{n-1} \\ a_p \leftarrow \frac{a_p}{\alpha} \end{cases}$$

Уравнение (10) может быть записано следующим образом

$$\phi_p = \frac{\alpha_\phi}{a_p} (a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b_p + a_p^0 \phi_p^0) + (1 - \alpha_\phi) \phi_p^{n-1} + \frac{\alpha_\phi pterm}{a_p} \quad (11)$$

или

$$\phi_p = \frac{\alpha_\phi}{a_p} (a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + B_p) + \frac{\alpha_\phi pterm}{a_p} \quad (12)$$

где

$$B_p = b_p + a_p^0 \phi_p^0 + \frac{(1 - \alpha_\phi)}{\alpha_\phi} a_p \phi_p^{n-1} \quad (13)$$

#### 4. Интерполяция скорости на грань контрольного объёма.

##### 4.1. Интерполяция скорости на грань контрольного объёма при моделировании установившихся во времени течений.

Обратите внимание, что для стационарных задач  $B_p = b_p + [(1 - \alpha_u)/\alpha_u] a_p u_p^{n-1}$  [Уравнение (13)]. Для горизонтальной скорости  $u$  в узлах P и E уравнение (12) можно записать в виде

$$u_P = \frac{\alpha_u (\sum_i a_i u_i + B_p)_P}{(a_p)_P} - \frac{\alpha_u \Delta y (p_e - p_w)_P}{(a_p)_P} \quad (14)$$

$$u_E = \frac{\alpha_u (\sum_i a_i u_i + B_p)_E}{(a_p)_E} - \frac{\alpha_u \Delta y (p_e - p_w)_E}{(a_p)_E} \quad (15)$$

Комбинируя выражения для узлов Е и Р для горизонтальной скорости  $u$  на грани  $e$  общей для контрольных объемов Р и Е, можно получить следующее выражение:

$$u_e = \frac{\alpha_u (\sum_i a_i u_i + B_p)_e}{(a_p)_e} - \frac{\alpha_u \Delta y (p_E - p_P)}{(a_p)_e} \quad (16)$$

где для слагаемых в правой части с индексом  $e$  должна проводиться интерполяция на грань контрольного объема надлежащим образом. Скорости на других гранях контрольного объема, таких как  $w$ ,  $n$  и  $s$  могут быть получены аналогичным образом.

В Рхи и Чоу интерполяции скорости на грань ячейки контрольного объема, первый числитель и, во-вторых, оба знаменателя в уравнении (16) равные  $1/(a_p)_e$  получены методом линейной интерполяции с помощью соотношений (14) и (15):

$$\left( \frac{\sum_i a_i u_i + B_p}{a_p} \right)_e = f_e^+ \left( \frac{\sum_i a_i u_i + B_p}{a_p} \right)_E + (1 - f_e^+) \left( \frac{\sum_i a_i u_i + B_p}{a_p} \right)_P \quad (17)$$

$$\frac{1}{(a_p)_e} = f_e^+ \frac{1}{(a_p)_E} + (1 - f_e^+) \frac{1}{(a_p)_P} \quad (18)$$

где  $f_e^+$  коэффициент линейной интерполяции, который определяется как

$$f_e^+ = \frac{\Delta x_P}{2\delta x_e} \quad (19)$$

Для того чтобы иметь более подходящую форму уравнения (16), подставим  $((\sum_i a_i u_i + B_p)/a_p)_e$  из уравнения (17) и  $((\sum_i a_i u_i + B_p)/a_p)_P$ ,  $((\sum_i a_i u_i + B_p)/a_p)_E$  из уравнений (14) и (15) в уравнение (16), и опуская член  $a_p^0 u_P^0$ , мы получаем в итоге

$$u_e = [f_e^+ u_E + (1 - f_e^+) u_P] + \left\{ -\frac{\alpha_u \Delta y (p_E - p_P)}{(a_p)_e} + f_e^+ \frac{\alpha_u \Delta y (p_e - p_w)_E}{(a_p)_E} + (1 - f_e^+) \frac{\alpha_u \Delta y (p_e - p_w)_P}{(a_p)_P} \right\} \quad (20)$$

Уравнения (16) и (20), по существу эквивалентны. Однако уравнение (20) разделяет выражение для скорости на грани контрольного объема на две части: в первой части осуществляется линейная интерполяция скорости на грань контрольного объема, а во второй части представлено дополнительное корректирующее слагаемое. Слагаемое в первых квадратных скобках уравнения (20) является взвешенным средним арифметическим двух значений (линейная интерполяция) скоростей в ячейках совмещенной сетки соседствующих по грани  $e$  в прилегающих контрольных объемах. Слагаемое в фигурных скобках может рассматриваться в качестве поправочного члена, который подавляет не соответствующие физическому смыслу осцилляции поля давления.

Уравнения (16) с (17) и (18) или выражение (20) представляют собой оригинальный метод интерполяции скорости на грань контрольного объема (ОМІМ – Original Momentum Interpolation Method), который как раз и предложили Рхи и Чоу. Маджумдар (Majumdar) (1988) сообщил, что при моделировании установившихся во времени течений с использованием поправки Рхи-Чоу (ОМІМ) наблюдается зависимость полученного решения от коэффициента нижней релаксации. Для устранения зависимости решения от коэффициента нижней релаксации в итерационном алгоритме было предложено вычислять скорость на грани контрольного объема для стационарных задач следующим образом:

$$u_e = \frac{\alpha_u (\sum_i a_i u_i + b_P)_e}{(a_P)_e} - \frac{\alpha_u \Delta u (p_E - p_P)}{(a_P)_e} + (1 - \alpha_u) [u_e^{n-1} + f_e^+ u_E^{n-1} - (1 - f_e^+) u_P^{n-1}] \quad (21)$$

где индекс  $n-1$  относится к значениям переменных с предыдущей итерации. Эта реализация итерационной процедуры способна рассчитать единственное решение, которое не зависит от коэффициента нижней релаксации.

#### **4.2. Интерполяция скорости на грань контрольного объема при моделировании неустановившихся во времени течений (нестационарных, когда интересен переходной процесс).**

Чой (Choi) (1999) сообщил, что решение задачи по нахождению поля течения жидкости с использованием оригинального Рхи и Чоу метода интерполяции скорости на грань ячейки зависит от размера шага по времени. Он следующим предложил модифицированную Рхи и Чоу схему интерполяции скорости на грань ячейки для нестационарного моделирования полей течения жидкости и его формулировка очень похожа на схему Маджумдара для установившихся во времени течений:



$$u_e = \alpha_u \left( \frac{\sum_i a_i u_i + b_p}{a_p} \right)_e - \frac{\alpha_u \Delta y (p_E - p_P)}{(a_P)_e} + (1 - \alpha_u) u_e^{n-1} + \frac{\alpha_u a_e^0}{(a_P)_e} u_e^0 \quad (22)$$

в которой

$$a_e^0 = \frac{\rho \delta x_e \Delta y}{\Delta t} \quad (23)$$

Следует отметить, что мы пренебрегли, для простоты изложения, массовыми силами в источниковом члене. По аналогии с интерполяцией примененной Маджумдаром в уравнении (21), из уравнения (22) можно получить

$$u_e = [f_e^+ u_E + (1 - f_e^+) u_P] + \left\{ \begin{aligned} & - \frac{\alpha_u \Delta y (p_E - p_P)}{(a_P)_e} + f_e^+ \frac{\alpha_u \Delta y (p_e - p_w)_E}{(a_P)_E} \\ & + (1 - f_e^+) \frac{\alpha_u \Delta y (p_e - p_w)_P}{(a_P)_P} \\ & + (1 - \alpha_u) [u_e^{n-1} + f_e^+ u_E^{n-1} - (1 - f_e^+) u_P^{n-1}] \\ & + \left[ \frac{\alpha_u a_e^0}{(a_P)_e} u_e^0 - f_e^+ \frac{\alpha_u (a_P^0)_E}{(a_P)_E} u_E^0 - (1 - f_e^+) \frac{\alpha_u (a_P^0)_P}{(a_P)_P} u_P^0 \right] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Согласно Юу (Yu) с соавторами (2002), решения нестационарных уравнений Навье-Стокса, полученные на основе схемы с привлечением соотношения (24), всё еще зависят от величины шага по времени, правда, эта зависимость довольно слабая. Они предложили другую технику интерполяции скорости на грань ячейки для слагаемых, входящих в уравнение (22), и решение, полученное с помощью их интерполяции, кажется не зависит как от параметра нижней релаксации, так и от величины шага по времени. В этом методе первое слагаемое правой части уравнения (22) интерполируется следующим образом:

$$\left( \frac{\sum_i a_i u_i + b_p}{a_p} \right)_e = \frac{f_e^+ (\sum_i a_i u_i + b_1)_E + (1 - f_e^+) (\sum_i a_i u_i + b_1)_P + [f_e^+ (s_c)_E + (1 - f_e^+) (s_c)_P] \delta x_e \Delta y}{f_e^+ (\sum_i a_i)_E + (1 - f_e^+) (\sum_i a_i)_P} - [f_e^+ (s_p)_E + (1 - f_e^+) (s_p)_P] \delta x_e \Delta y + a_e^0 \quad (25)$$

где  $b_1$  определено в уравнении (9).

Кроме того, знаменатель второго и четвертого слагаемого в уравнении (22) интерполируется следующим образом:

$$(a_P)_e = f_e^+ \left( \sum_i a_i \right)_E + (1 - f_e^+) \left( \sum_i a_i \right)_P - [f_e^+ (s_P)_E + (1 - f_e^+) (s_P)_P] \delta x_e \Delta y + a_e^0 \quad (26)$$

Уравнение (22) в сочетании с формулой (25) и уравнением (26) представляют собой новую схему интерполяции скорости на грань ячейки контрольного объёма, которая и была предложена Юу с соавторами (2002). Подставляя соотношение (25) в уравнение (22) получаем следующее уравнение:

$$u_e = \frac{1}{(a_p)_e} \left\{ \begin{aligned} & [f_e^+(a_p)_E u_E + (1 - f_e^+)(a_p)_P u_P] \\ & + \alpha_u \left[ (f_e^+(s_c)_E + (1 - f_e^+)(s_c)_P) \delta x_e \Delta y - f_e^+(s_c)_E \Delta x_E \Delta y \right] \\ & - (1 - f_e^+)(s_c)_P \Delta x_P \Delta y \\ & + \alpha_u [-\Delta y (p_E - p_P) + f_e^+ \Delta y (p_e - p_w)_E + (1 - f_e^+) \Delta y (p_e - p_w)_P] \\ & + (1 - \alpha_u) [(a_p)_e u_e^{n-1} - f_e^+(a_p)_E u_E^{n-1} - (1 - f_e^+)(a_p)_P u_P^{n-1}] \\ & + \alpha_u [a_e^0 u_e^0 - f_e^+(a_p)_E u_E^0 - (1 - f_e^+)(a_p)_P u_P^0] \end{aligned} \right. \quad (27)$$

где  $(a_p)_e$  находится из соотношения (26). Следует отметить, что член в скобке, который умножается на  $(1 - \alpha_u)$  в работе Юу и соавторов (2002) указан неверно.

Следует также отметить, что скорости на грани контрольного объёма, найденные с помощью оригинального метода интерполяции Рхи-Чоу, используются для определения потоков массы через грань контрольного объёма. Они не должны использоваться для значения независимой переменной  $\phi$  на грани контрольного объёма в методе отложенной коррекции (см. поправочный член  $b_{dc}$  в уравнении (9)) в случае, когда  $\phi$  обозначает горизонтальную или вертикальную компоненты вектора скорости в  $x$  или  $y$  проекциях уравнения сохранения импульса. Значения независимой переменной  $\phi$  на грани контрольного объёма вычисляются с помощью подходящей схемы аппроксимации конвективного члена, например, противопоточной схемы (UPWIND) или схемы Б.П. Леонарда (QUICK).

### Полунеявная процедура для связывающих уравнений неразрывность и скорость-давление (SIMPLE).

Приближённо найденному в ходе вычислительного процесса полю давления  $p^*$  соответствует скорость  $u_e^*$  на грани  $e$  контрольного объёма, она может быть записана с помощью уравнения (22) как:

$$u_e^* = \frac{\alpha_u (\sum_i a_i u_i^* + b_p)_e}{(a_p)_e} - \frac{\alpha_u \Delta y (p_E^* - p_P^*)}{(a_p)_e} + (1 - \alpha_u) u_e^{n-1} + \frac{\alpha_u a_e^0}{(a_p)_e} u_e^0 \quad (28)$$

Аналогичное соотношение можно записать для скорости  $v_n^*$  на грани  $n$  контрольного объёма. Теперь определим поправку давления  $p'$  как разницу

между правильным полем давления  $p$  и приближённо рассчитанным полем давления в ходе неоконченного вычислительного процесса  $p^*$  так что

$$p = p^* + p' \quad (29)$$

Аналогично определяются поправки скорости  $u'$  (для горизонтальной компоненты) и  $v'$  (для вертикальной компоненты) как

$$u_e = u_e^* + u_e' \quad (30)$$

$$v_n = v_n^* + v_n' \quad (31)$$

Вычитая уравнение (28) из уравнения (22) получим

$$u_e' = \frac{\alpha_u (\sum_i a_i u_i' + b_p)_e}{(a_p)_e} - \frac{\alpha_u \Delta y (p_E' - p_P')}{(a_p)_e} \quad (32)$$

Основная идея SIMPLE (полу неявной процедуры для связывающих уравнений неразрывность и скорость-давление) алгоритма заключается в пренебрежении первым членом в вышеприведенном уравнении, что даёт

$$u_e' = d_e^u (p_p' - p_E') \quad (33)$$

где

$$d_e^u = \frac{\alpha_u A_e}{(a_p)_e} \quad (34)$$

где  $A_e = \Delta y$  это площадь восточной е грани контрольного объёма. Точно так же

$$v_n' = d_n^v (p_p' - p_N') \quad (35)$$

где

$$d_n^v = \frac{\alpha_v A_n}{(a_p)_n} \quad (36)$$

Тогда скорректированные значения скоростей вычисляются следующим образом

$$u_e = u_e^* + d_e^u (p_p' - p_E') \quad (37)$$

$$v_n = v_n^* + d_n^v (p_p' - p_N') \quad (38)$$

Подставляя скорректированные значения скоростей на грани контрольного объёма, которые даются выражениями (37) и (38), в дискретный аналог уравнения неразрывности (непрерывности) (7) мы получим

$$a_P p_P' = a_W p_W' + a_E p_E' + a_S p_S' + a_N p_N' + b \quad (39)$$

где

$$a_E = (\rho A d)_e \quad a_W = (\rho A d)_w \quad a_N = (\rho A d)_n \quad a_S = (\rho A d)_s \quad (40)$$

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n$$

После нахождения поля поправки давления  $p'$  из уравнения (39) скорости на грани контрольного объёма корректируются, используя уравнения (37) и (38), а также корректируется поле давления, используя

$$p = p^* + \alpha_p p' \quad (41)$$

где  $\alpha_p$  параметр нижней релаксации для поля давления, который выбирают из интервала (0,1). Обычно  $\alpha_p = 0.3$ , а коэффициент релаксации на скорость  $\alpha_u = 1 - \alpha_p = 0.7$ .

Точно также скорости в узлах сетки (центрах контрольных объёмов) корректируются с помощью

$$u_p = u_p^* + d_p^u (p'_w - p'_e) \quad (42)$$

$$v_p = v_p^* + d_p^v (p'_s - p'_n) \quad (43)$$

где

$$d_p^u = \frac{\alpha_u A_e}{(a_p)_p} \text{ и } d_p^v = \frac{\alpha_v A_n}{(a_p)_p} \quad (44)$$

Поправки давления на гранях контрольного объёма в формулах (42) и (43) вычисляются с помощью линейной интерполяции на основе узловых значений в центрах контрольных объёмов по следующему правилу

$$p'_w = f_w^+ p'_p + (1 - f_w^+) p'_W \quad (45)$$

$$p'_e = f_e^+ p'_p + (1 - f_e^+) p'_E \quad (46)$$

$$p'_s = f_s^+ p'_p + (1 - f_s^+) p'_S \quad (47)$$

$$p'_n = f_n^+ p'_p + (1 - f_n^+) p'_N \quad (48)$$

### Граничные условия для давления.

Поскольку для давления нет уравнения, то никаких граничных условий для него не требуется, а в граничных узлах давление может быть восстановлено с помощью линейной интерполяции на основе двух ближайших к границе узлов сетки.

### Граничные условия для поправки давления в уравнении для поправки давления.

Когда скорости известны в граничных узлах расчетной области, то нет никакой необходимости производить их коррекцию на основе решения уравнения для поправки давления. Например, если скорость известна на западной границе из граничных условий, то тогда в контрольном объёме около западной границы мы получим

$$u_e = u_e^* + d_e^u (p'_p - p'_E) \quad (49)$$

$$u_w = u_{wall} \quad (50)$$

$$v_n = v_n^* + d_n^v (p'_p - p'_N) \quad (51)$$

$$v_s = v_s^* + d_s^v (p'_p - p'_S) \quad (52)$$

Подставляя соотношения (49)-(52) в дискретный аналог уравнения неразрывности (7) мы получаем следующее уравнение для поправки давления для контрольного объёма около западной границы

$$a_P p'_P = a_W p'_W + a_E p'_E + a_S p'_S + a_N p'_N + b \quad (53)$$

в котором

$$\begin{aligned} a_E &= (\rho A d)_e \quad a_W = 0 \quad a_N = (\rho A d)_n \quad a_S = (\rho A d)_s \\ a_P &= a_W + a_E + a_S + a_N \\ b &= (\rho u A)_{wall} - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n \end{aligned} \quad (54)$$

Сравнение уравнений (53)-(54) с уравнениями (39)-(40) показывает, что для контрольных объёмов, расположенных рядом с границей расчётной области, мы получаем те же самые коэффициенты дискретного аналога в уравнении для поправки давления, что и для внутренних контрольных объёмов за исключением того, что один коэффициент ( $a_W$  в данном случае для западной границы) мы принимаем равным нулю, а в правой части  $b$  мы используем на месте правой границы скорость на этой границе  $u_{wall}$  (в слагаемом  $(\rho u A)_{wall}$  для  $b$  на западной границе).

Вышеупомянутая формулировка граничного условия на поправку давления, соответствует граничному условию Неймана  $\partial p' / \partial n = 0$ , где  $n$  нормаль к границе. В результате никакое конкретное числовое значение для поправки давления ( $p'_W$ ) на границе не потребовалось.

Однако, числовое значение для поправки давления необходимо, для того, чтобы скорректировать скорости во внутреннем контрольном объёме, примыкающем к граничному контрольному объёму. Например, для того, чтобы скорректировать горизонтальную скорость во внутреннем узле  $P$ , около западной границы расчётной области, поправка давления на западной границе  $p'_W$  необходима в соответствии с уравнением (42). Это значение поправки давления может быть получено при помощи соотношения  $\partial p' / \partial n = 0$  на границе, которое означает  $p'(1, j) = p'(2, j)$  в реалиях западной границы.

### **Библиографический список на английском языке первоисточника.**

[1] Choi S. K., "Note on the Use of Momentum Interpolation Method for Unsteady Flows",

*Numerical. Heat Transfer* Part, A, vol. 36, pp. 545-550, 1999.

[2] Majumdar S., "Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of

Flow with Nonstaggered Grids", *Numerical Heat Transfer*, Part B, vol. 13, pp. 125-132, 1988.

[3] Rhie C. M. and Chow W. L., "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation", *AIAA Journal*, vol. 21, no 11, pp. 1525-1535, 1983.

[4] Yu B., Tao W., and Wei J., "Discussion on Momentum Interpolation Method for Collocated Grids of Incompressible Flow", *Numerical. Heat Transfer Part B*, vol. 42, pp. 141-166, 2002.