

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 4 "Линейная фильтрация"

по дисциплине Частотные методы

Выполнил: студент гр. **R3242**

Мареев П. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

1	Задание 1. Линейные фильтры.	3
1.1	Фильтр первого порядка	4
1.1.1	Выводы.	17
1.2	Режекторный полосовой фильтр.	18
1.2.1	Выводы.	34
1.3	Выводы.	35
2	Задание 2. Сглаживание биржевых данных.	36
2.1	Выводы.	40
3	Выводы по лабораторной работе	41

Вступление

Линейная фильтрация является фундаментальным методом обработки сигналов, позволяющим выделять полезную информацию, подавлять шумы и анализировать частотные характеристики систем. В современных условиях её применение охватывает широкий спектр областей: от телекоммуникаций и биомедицинских исследований до финансовой аналитики. Данная лабораторная работа направлена на изучение принципов линейной фильтрации, а также на практическое освоение методов проектирования и анализа фильтров с использованием математического аппарата и программных инструментов.

Основная цель работы – исследование эффективности фильтров первого порядка и режекторных полосовых фильтров при обработке зашумленных сигналов. В рамках задания предусмотрено моделирование сигналов с добавлением белого шума и гармонических помех, их фильтрация, а также сравнение результатов с исходными данными. Особое внимание уделяется анализу влияния параметров фильтров на качество восстановления сигнала.

Отдельное задание посвящено сглаживанию биржевых данных с использованием фильтра первого порядка, что демонстрирует применимость методов фильтрации в реальных задачах финансового анализа.

Таким образом, анализ полученных данных позволит сделать выводы о выборе оптимальных параметров для различных сигналов.

Работа способствует развитию навыков моделирования, критического анализа результатов и понимания взаимосвязи между теоретическими расчетами и их практической реализацией. Проведенные наблюдения могут быть использованы в дальнейшем при решении задач, связанных с обработкой сигналов, проектированием систем управления или анализом временных рядов.

1 Задание 1. Линейные фильтры.

Рассмотрим такой же сигнал, как и в предыдущей работе. Зададимся числами a, t_1, t_2 , такими, что $t_1 < t_2$ и построим функцию

$$g(t) = \begin{cases} a, & t \in [t_1, t_2] \\ 0, & t \notin [t_1, t_2] \end{cases}$$

и ее зашумленную версию

$$u(t) = g(t) + b\xi(t) + c \sin(dt), \quad (1)$$

где $\xi(t) \sim \mathcal{U}[-1, 1]$ – равномерное распределение, представляющее белый шум, а значения b, c, d – параметры возмущения.

Выберем $a = 5, t_1 = 0, t_2 = 5$, тогда имеем следующую функцию:

$$g(t) = \begin{cases} 5, & t \in [0, 5] \\ 0, & t \notin [0, 5] \end{cases}$$

В данной работе используем унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω .

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

1.1 Фильтр первого порядка

Примем $c = 0$. Запишем формулу (1) для данного случая

$$u(t) = g(t) + b\xi(t).$$

Выберем постоянную времени $T > 0$, а также положим $b = 0.35$, установив оптимальный уровень шума.

Обратимся к **советам по использованию Матлаба** и напишем **программу** для выполнения данного задания. С ее помощью выполним фильтрацию, а также построим требуемые графики, которые используем для оценки полученных результатов.

Рассмотрим сначала $T = 0.2$ совместно с множеством значений параметра a .

$$a = \{0.75, 5\}$$

Пропустим сигнал $u(t)$ через линейный фильтр первого порядка:

$$W_1(p) = \frac{1}{Tp + 1} = \frac{1}{0.2p + 1}$$

Построим график АЧХ выбранного фильтра на рисунке 1.

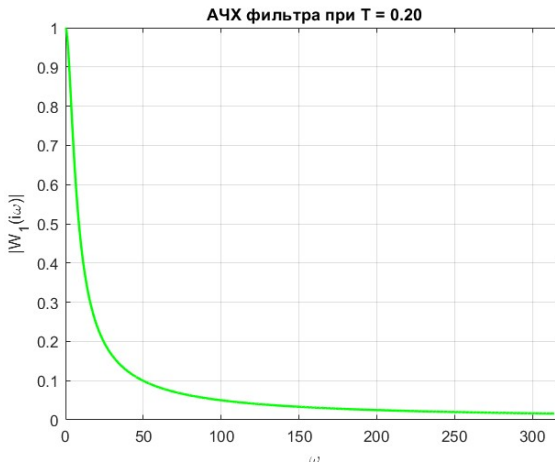


Рис. 1. График АЧХ фильтра для $T = 0.2$.

Отметим, что при помощи построенного графика АЧХ можно определить частоту среза фильтра первого порядка, которая характеризует успешность подавления частот, превосходящих ее:

$$\omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ рад/с}$$

Иначе говоря, фильтр подавляет частоты выше 5 рад/с , сохраняя низкочастотные компоненты сигнала.

Заметим, что белый шум является равномерным и присутствует на всех частотах. Фильтр ослабляет высокочастотную часть шума, но не влияет на низкочастотные компоненты.

Построим сравнительные графики исходного $g(t)$, зашумленного $u(t)$ и фильтрованного сигналов на одном рисунке для каждой комбинации параметров a и T . Затем приведем графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\omega)$, зашумленного $\hat{u}(\omega)$ и фильтрованного сигналов на одном рисунке.

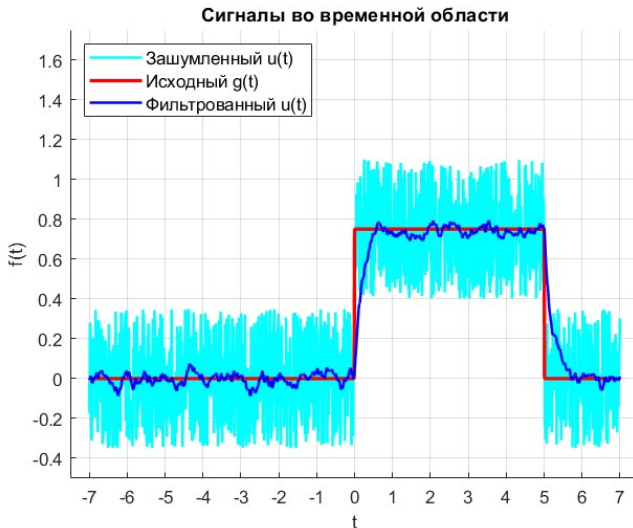


Рис. 2. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $a = 0.75$ и $T = 0.2$.

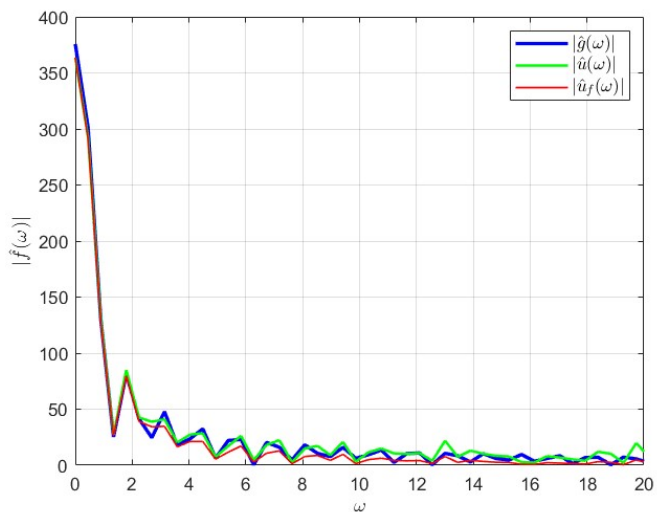


Рис. 3. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\omega)$, зашумленного $\hat{u}(\omega)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\omega)$ сигналов при $a = 0.75$ и $T = 0.2$.

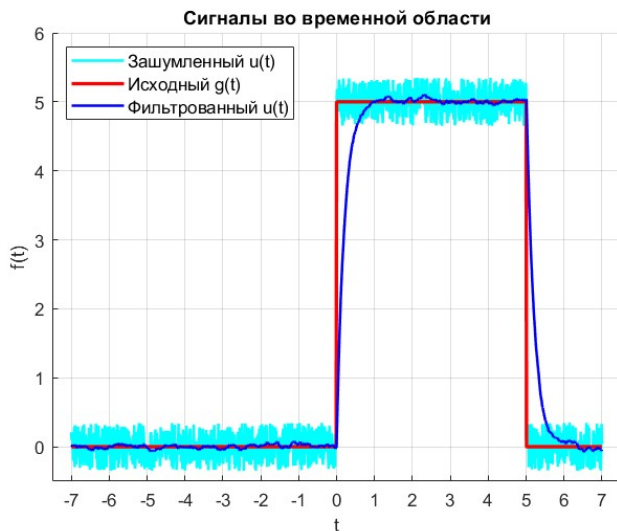


Рис. 4. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $a = 5$ и $T = 0.2$.

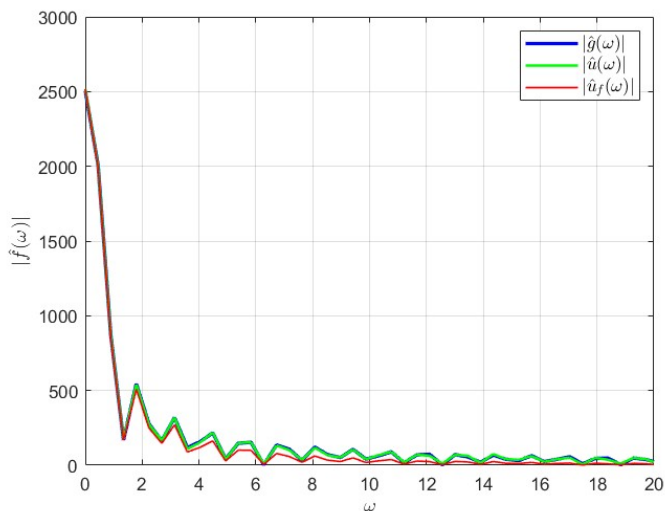


Рис. 5. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{f}(\omega)$, зашумленного $\hat{u}(\omega)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\omega)$ сигналов при $a = 5$ и $T = 0.2$.

Охарактеризуем построенные графики.

На рисунке 2 сигнал подвержен сильному влиянию шума. Высокочастотный шум частично подавляется, но низкочастотные шумовые компоненты остаются, оставляя сигнал зашумленным. На рисунке 3 сигналы различаются, а значит, фильтр не способен эффективно восстановить форму сигнала. Таким образом, фильтрованный сигнал будет содержать шумы, но сохранит конфигурацию исходного прямоугольного импульса.

На рисунке 4 форма сигнала сохраняется, но края импульса сглаживаются, переходы становятся пологими. Высокочастотный шум значительно ослаблен, низкочастотные компоненты шума перекрываются полезным сигналом. На рисунке 5 совпадение графиков говорит о средней эффективности фильтрации. Иначе говоря, сигнал сохраняется, его края сглаживаются, низкочастотный шум все еще присутствует.

Построим сравнительные графики фильтрованного сигнала $u_f(t)$ и сигнала, полученного после обратного преобразования Фурье произведения частотной передаточной функции фильтра и образа зашумленного сигнала $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))(t)$.

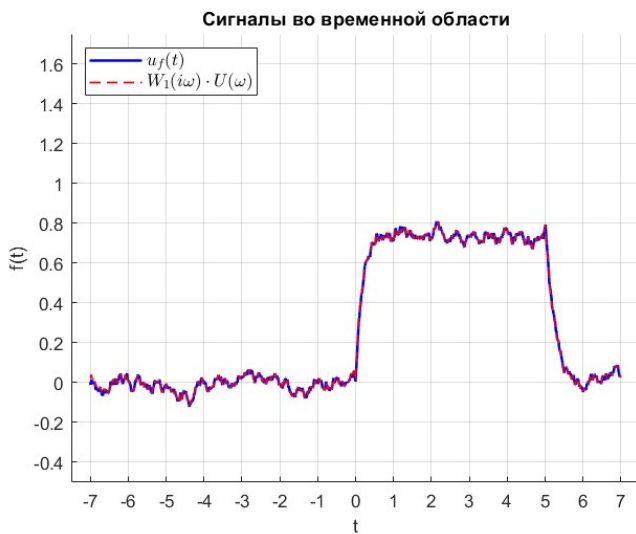


Рис. 6. Сравнительные графики $u_f(t)$ и $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))(t)$ при $a = 0.75$ и $T = 0.2$.

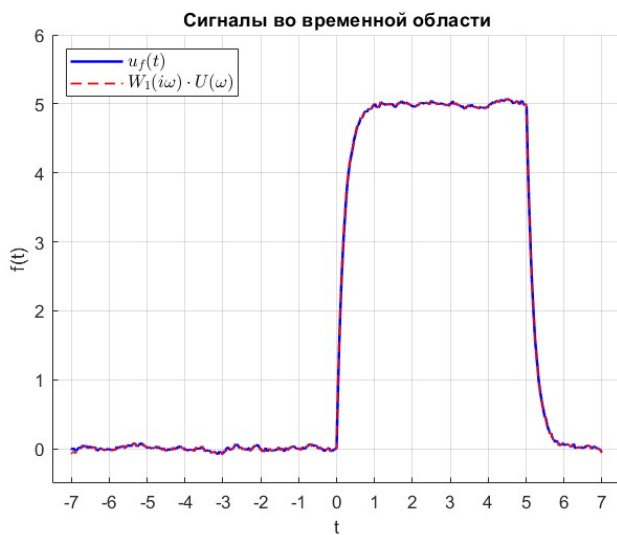


Рис. 7. Сравнительные графики $u_f(t)$ и $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))(t)$ при $a = 5$ и $T = 0.2$.

Оценим результаты фильтрации при помощи имеющихся графиков сравнения. На рисунке 6 фильтрованный сигнал $u_f(t)$ имеет малую амплитуду, что делает его практически неразличимым на фоне шума. Фильтр частично подавляет высокочастотный шум, но низкочастотные шумовые компоненты остаются. Сигнал, полученный в результате обратного преобразования Фурье, практически не отличается от $u_f(t)$. Заметны остаточные колебания из-за краевых эффектов преобразования Фурье. Значит, оба способа дают почти идентичные зашумленные кривые.

На рисунке 7 фильтрованный сигнал $u_f(t)$ частично сохраняет форму полезного сигнала, но края исходного импульса сглаживаются. Высокочастотный шум удается подавить, остаточный шум почти незаметен. Сигнал, полученный в результате обратного преобразования Фурье, полностью совпадает с фильтрованным. По краям импульса присутствуют незначительные искажения, вызванные дискретизацией. Следовательно, методы демонстрируют сохранение амплитуды исходного сигнала с малыми шумами.

Выполним аналогичное сравнение при помощи графиков модуля Фурье-образов.

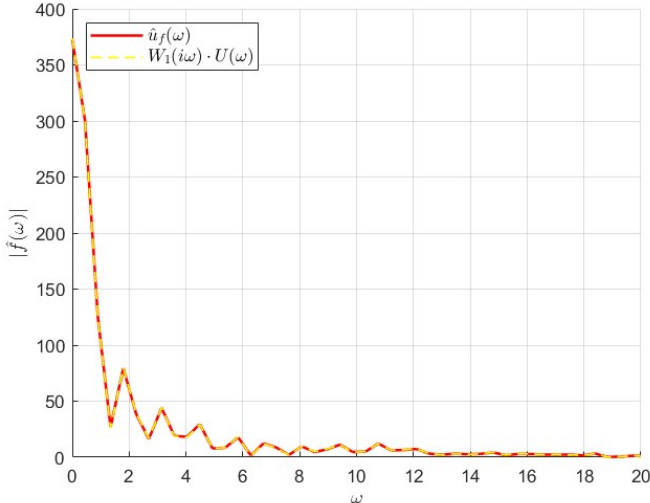


Рис. 8. Сравнительные графики $\hat{u}_f(\omega)$ и $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ при $a = 0.75$ и $T = 0.2$.

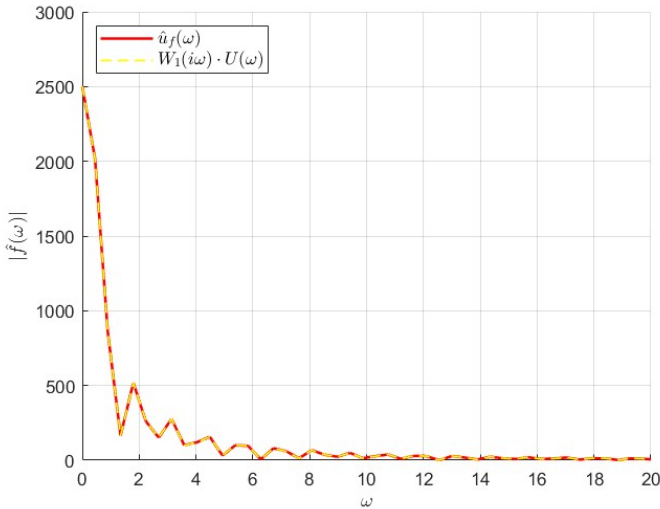


Рис. 9. Сравнительные графики $\hat{u}_f(\omega)$ и $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ при $a = 5$ и $T = 0.2$.

Проанализируем полученные результаты.

На рисунке 8 видно, что высокочастотные компоненты $\omega > 5 \text{ рад/с}$ успешно подавлены, что соответствует АЧХ фильтра. Однако низкочастотные компоненты шума сохраняются, перекрывая полезный сигнал. График произведения $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ полностью совпадает с графиком $\hat{u}_f(\omega)$. Таким образом, фильтрация корректна, но неэффективна: в сигнале сохраняются шумы.

На рисунке 9 заметно подавление высокочастотных шумов и сглаживание низкочастотной части спектра. График произведения $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ совпадает с графиком $\hat{u}_f(\omega)$. Незначительные расхождения связаны с дискретизацией. Следовательно, фильтр эффективно подавляет шум, сохраняя основную информацию о сигнале.

Таким образом, фильтр первого порядка с при $T = 0.2$ демонстрирует достаточный уровень эффективности: подавление высокочастотного шума и сохранение низкочастотных компонентов. При высокой амплитуде сигнала фильтр позволяет уменьшить шумы и сохранить сигнал, при малой амплитуде сигнал остается зашумленным.

Теперь положим $T = 3$ и выберем следующее множество значений параметра a .

$$a = \{0.15, 9\}$$

Воспользуемся линейным фильтром первого порядка, пропустив через него сигнал $u(t)$.

$$W_1(p) = \frac{1}{Tp + 1} = \frac{1}{3p + 1}$$

Приведем график АЧХ данного фильтра на рисунке 10.

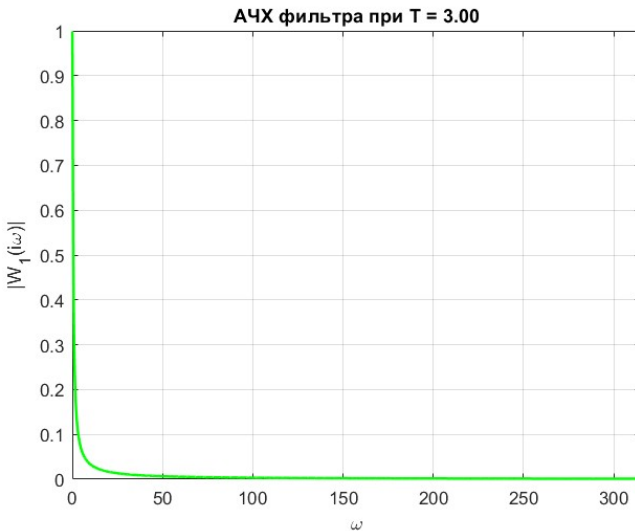


Рис. 10. График АЧХ фильтра для $T = 3$.

С помощью имеющегося графика АЧХ найдем частоту среза фильтра первого порядка:

$$\omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{3} \text{ рад/с}$$

Таким образом, фильтр ослабляет частоты выше $\frac{1}{3} \text{ рад/с}$.

Приведем сравнительные графики исходного $g(t)$, зашумленного $u(t)$ и фильтрованного сигналов на одном рисунке для каждой комбинации параметров a и T . Также построим графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\omega)$, зашумленного $\hat{u}(\omega)$ и фильтрованного сигналов на одном рисунке.

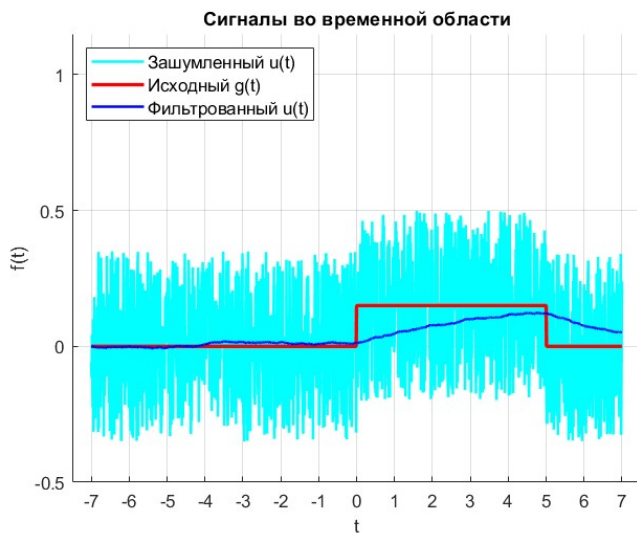


Рис. 11. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $a = 0.15$ и $T = 3$.

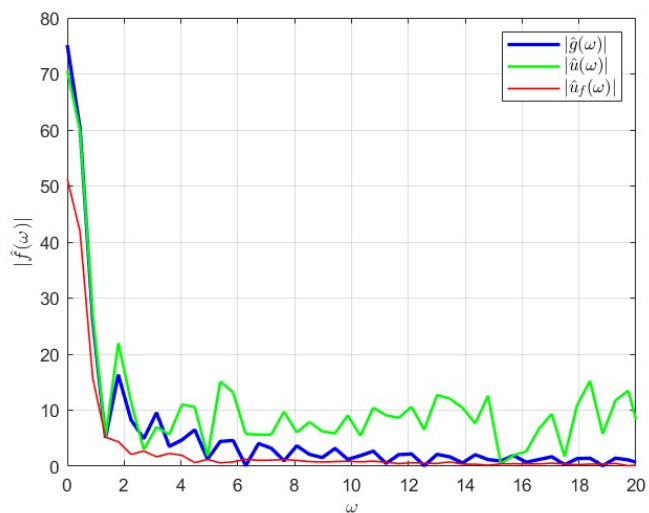


Рис. 12. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\omega)$, зашумленного $\hat{u}(\omega)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\omega)$ сигналов при $a = 0.15$ и $T = 3$.

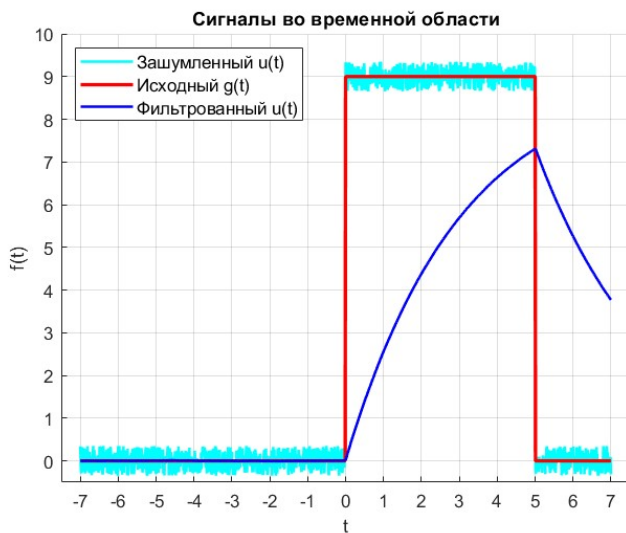


Рис. 13. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $a = 9$ и $T = 3$.

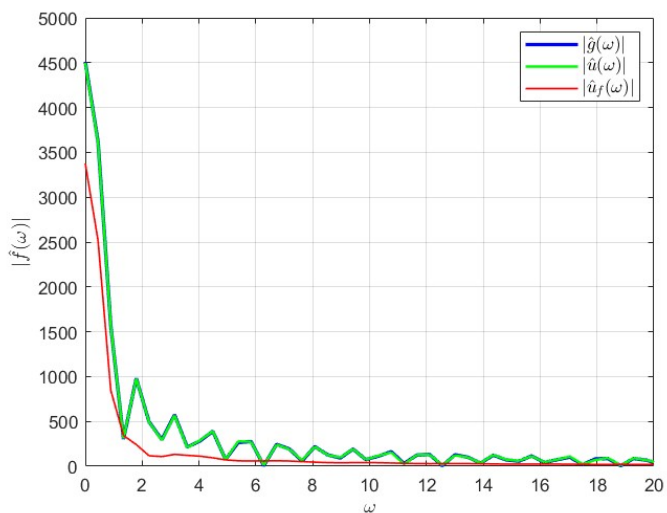


Рис. 14. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\omega)$, зашумленного $\hat{u}(\omega)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\omega)$ сигналов при $a = 9$ и $T = 3$.

Проанализируем полученные результаты.

На рисунке 11 видно, что малая амплитуда исходного сигнала делает его практически неразличимым после фильтрации. Высокочастотные компоненты подавлены, но низкочастотный шум по-прежнему вносит сильные искажения в сигнал. Графики модуля Фурье-образа на рисунке 12 почти не совпадают, что указывает на низкую эффективность фильтрации. Таким образом, фильтрованный сигнал сохраняет шумы и не передает форму исходного прямоугольного импульса.

На рисунке 13 фильтрованный сигнал лишь отдаленно напоминает исходный. Фильтр подавляет высокочастотные шумы, однако при это теряет-ся значительная часть полезного сигнала. На рисунке 14 заметны различия в графиках, что указывает на сравнительно малую эффективность фильтрации. Значит, фильтрованный сигнал сравнительно близок к исходному, но его края чрезмерно сглажены, шумы почти незаметны.

Приведем сравнительные графики фильтрованного сигнала $u_f(t)$ и сигнала, полученного после обратного преобразования Фурье произведения частотной передаточной функции фильтра и образа зашумленного сигнала $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))(t)$.

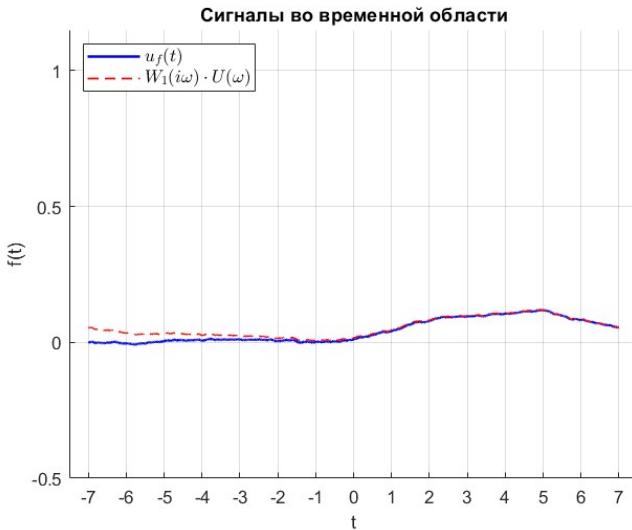


Рис. 15. Сравнительные графики $u_f(t)$ и $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))(t)$ при $a = 0.15$ и $T = 3$.

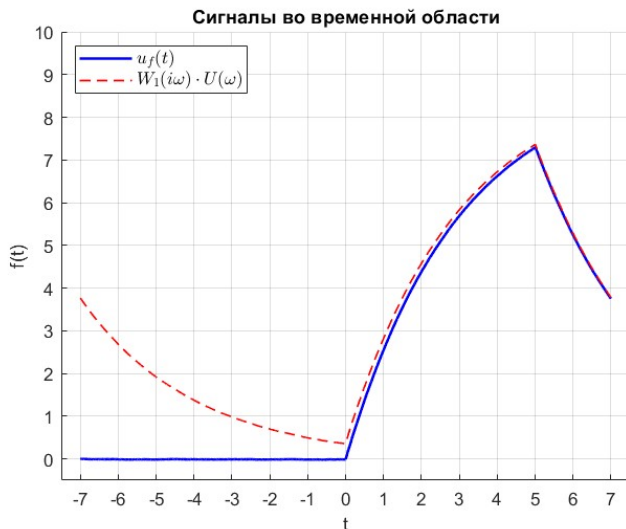


Рис. 16. Сравнительные графики $u_f(t)$ и $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))(t)$ при $a = 9$ и $T = 3$.

Проанализируем результаты фильтрации на основе предложенных сравнительных графиков. На рисунке 15 видны лишь очертания исходного сигнала, шумы преобладают над ним из-за малой амплитуды и довольно «агрессивного» значения параметра T . Это приводит не только к подавлению высокочастотных шумов, но и потере исходного сигнала. Сигнал, полученный в результате обратного преобразования Фурье, преимущественно совпадает с фильтрованным, но несколько отличается от него из-за численных погрешностей и краевых эффектов. Значит, фильтрация с такими параметрами для данного сигнала неэффективна.

На рисунке 16 фильтрованный сигнал дает небольшое представление о форме исходного сигнала. Низкочастотные шумы подавлены, а края сигнала сглажены. «Агрессивное» значение $T = 3$ приводит к сильному сглаживанию фронтов прямоугольного импульса. Сигнал, полученный в результате обратного преобразования Фурье, совпадает с фильтрованным на основном участке исходного сигнала. За его пределами сигналы различаются из-за численных погрешностей, связанных с реализацией функции `lsim`. Таким образом, в этом случае фильтр показывает низкую эффективность.

Теперь проведем сравнение с помощью графиков модуля Фурье-образов.

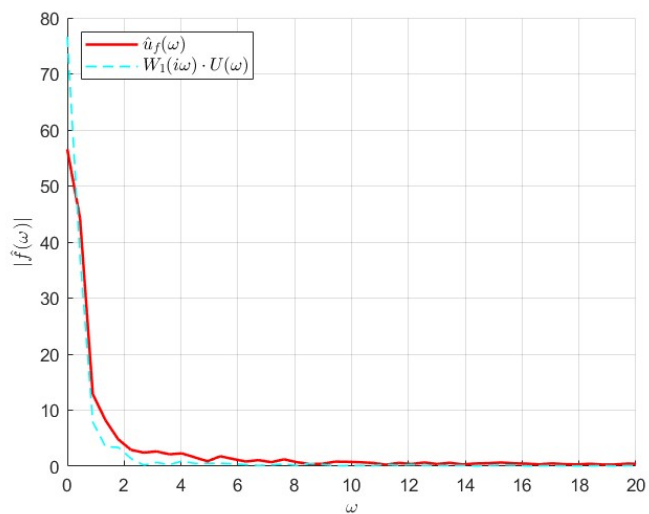


Рис. 17. Сравнительные графики $\hat{u}_f(\omega)$ и $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ при $a = 0.15$ и $T = 3$.

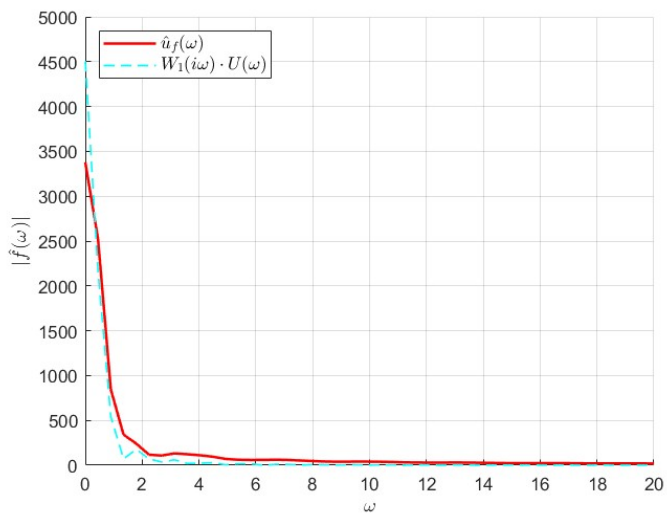


Рис. 18. Сравнительные графики $\hat{u}_f(\omega)$ и $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ при $a = 9$ и $T = 3$.

Охарактеризуем имеющиеся результаты.

На рисунке 17 видно, что фильтр качественно подавляет высокочастотные шумы. Низкочастотные шумы все еще присутствуют, исходный сигнал перекрывается. График произведения $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ слегка отличается от графика $\hat{u}_f(\omega)$. Следовательно, наблюдается низкая эффективность фильтрации, поскольку исходный сигнал практически не удалось сохранить.

На рисунке 18 высокочастотные шумы подавлены, а низкочастотные компоненты шума ослаблены. График фильтрованного сигнала $\hat{u}_f(\omega)$ и график произведения $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ частично различаются. Значит, наблюдается частичное сохранение формы исходного сигнала, сглаживание его краев и уменьшение уровня шума.

Таким образом, фильтр первого порядка при $T = 3$ подходит для сигналов с высокой амплитудой: удастся успешно восстановить сигнал с умеренными искажениями. При работе со слабыми сигналами требуется более тонкая настройка параметров.

1.1.1 Выводы.

Сделаем выводы на основе выполнения данного задания.

Параметр T обеспечивает компромисс между подавлением шума и сохранением формы сигнала: его увеличение делает фильтрацию более агрессивной. Чем больше T , тем ниже частота среза, и тем сильнее фильтр подавляет высокочастотные компоненты. Оптимальное значение зависит от амплитуды сигнала и уровня шума.

Параметр a задает амплитуду исходного сигнала, определяет его устойчивость к шуму: чем выше a , тем проще выделить сигнал после фильтрации. Увеличение a при неизменном уровне шума облегчает фильтрацию. Уменьшение параметра a делает сигнал менее различимым на фоне шума.

Если a велико и выбрано оптимальное T , фильтр эффективно подавляет шум, сохраняя полезный сигнал. При малом a даже оптимальное значение параметра T не позволит полностью восстановить сигнал.

Совпадение модуля Фурье-образа фильтрованного сигнала $\hat{u}_f(\omega)$ с произведением $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ подтверждает корректность фильтрации.

1.2 Режекторный полосовой фильтр.

Примем $b = 0$. Рассмотрим линейный фильтр вида

$$W_2(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_2}{p^2 + b_1 p + b_2},$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Заметим, что для обнуления АЧХ фильтра на некоторой частоте удобно положить $a_1 = 0$. Тогда пусть $a_2 = 100$, а значит, $\omega_0 = 10 \text{ рад/с}$.

Рассмотрим следующий предел, который возникает из условий, накладываемых на фильтр, и преобразуем его.

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{(i\omega)^2 + a_1 i\omega + a_2}{(i\omega)^2 + b_1 i\omega + b_2} &= 1 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{a_2}{b_2} = 1 &\implies \boxed{a_2 = b_2} \end{aligned}$$

Таким образом, удастся определить все коэффициенты, требуемые для исследования влияния параметра b_1 .

$$a_1 = 0 \quad b_2 = a_2 \quad a_2, b_1 \in \mathbb{R}$$

Запишем итоговое выражение для построенного фильтра.

$$W_2(p) = \frac{p^2 + a_2}{p^2 + b_1 p + a_2}.$$

Кроме того, заметим, что фильтр при $b_2 \leq 0$ не имеет смысла рассматривать, поскольку не удастся обеспечить его устойчивость.

Выберем множество значений параметра b_1 , которое позволит оценить его влияние на АЧХ.

$$b_1 = \{3, 12.5, 19\}. \quad (2)$$

Зафиксируем значение параметра a_2 , обеспечивающее устойчивость знаменателя дроби.

$$a_2 = 100 \implies b_2 = 100$$

Обратим внимание, что данные значения параметров удовлетворяют всем значениям из множества (2), то есть, сохраняют устойчивость.

Построим графики АЧХ для каждого значения из множества (2) при помощи программы.

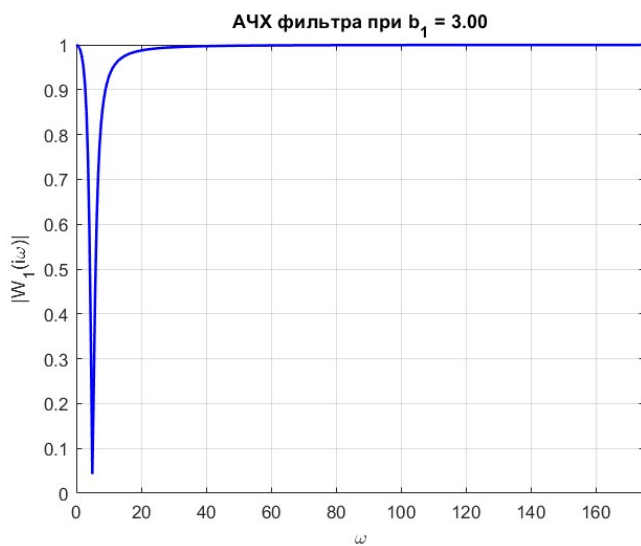


Рис. 19. График АЧХ фильтра при $b = 3$.

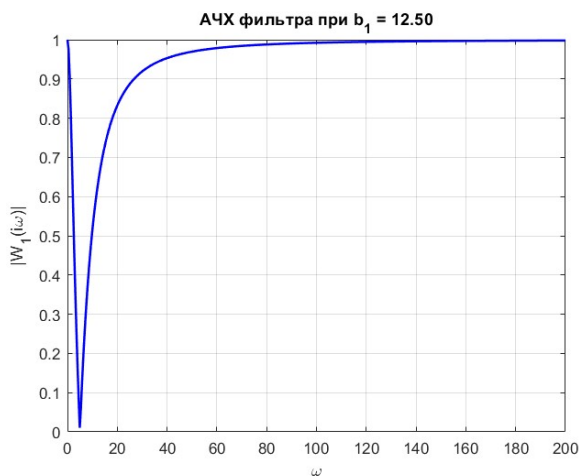


Рис. 20. График АЧХ фильтра при $b = 12.5$.

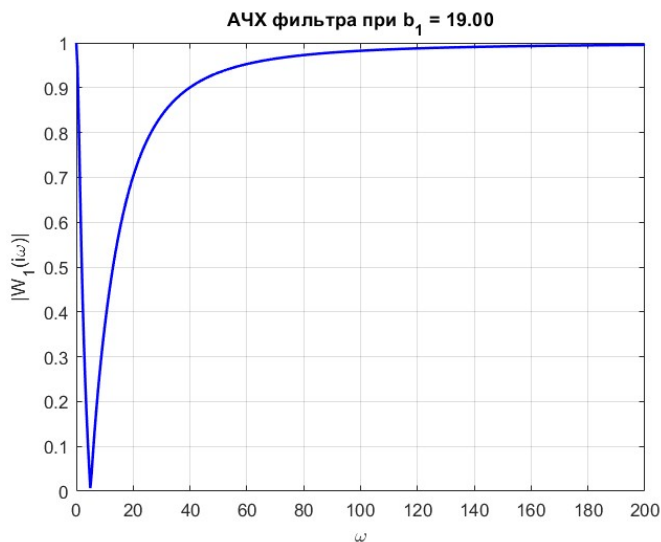


Рис. 21. График АЧХ фильтра при $b = 19$.

Проанализируем на основании приведенных графиков влияние параметра b_1 на АЧХ фильтра.

На рисунке 19 видна узкая полоса пропускания и резкий пик вблизи ω_0 . Фильтр обладает высокой избирательностью по отношению к сигналу, малым коэффициентом демпфирования.

На рисунке 20 заметно умеренное демпфирование и расширение полосы пропускания. Фильтр демонстрирует баланс между избирательностью и устойчивостью.

На рисунке 21 представлена широкая полоса пропускания при сильном демпфировании. У фильтра низкая избирательность, но высокая устойчивость.

Таким образом, параметр b_1 позволяет управлять демпфированием и устойчивостью фильтра. Увеличение его значения повышает коэффициент демпфирования, снижая резонансные явления и уменьшая амплитуду колебаний в переходных процессах. Уменьшение значения параметра ослабляет демпфирование, что может привести к возникновению резонансных пиков и неустойчивости.

Зафиксируем $b_1 = 8.95$ и амплитуду сигнала $a = 10$ и рассмотрим наборы пар значений параметров c и d , чтобы оценить их влияние на эффек-

тивность фильтрации.

$$c = 12 \quad d = 10$$

$$c = 1.5 \quad d = 2.2$$

Построим сравнительные графики исходного $g(t)$, зашумленного $u(t)$ и фильтрованного сигналов на одном рисунке для каждого набора параметров. Воспользуемся для выполнения этого задания данной [программой](#).

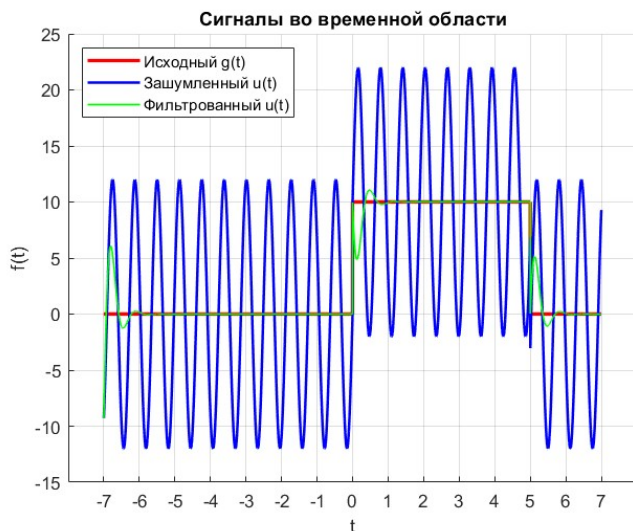


Рис. 22. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $c = 12$ и $d = 10$.

Оценим полученные графические результаты. На рисунке 22 частота помехи d совпадает с частотой ω_0 и фильтр демонстрирует максимальную эффективность. Помеха полностью подавляется и сигнал практически не искажается. На рисунке 23 видно, что рассматриваемая гармоника успешно подавлена: ее амплитуда ослаблена фильтром.

Таким образом, фильтр показывает высокую эффективность, подавляя гармонику и сохраняя исходный сигнал.

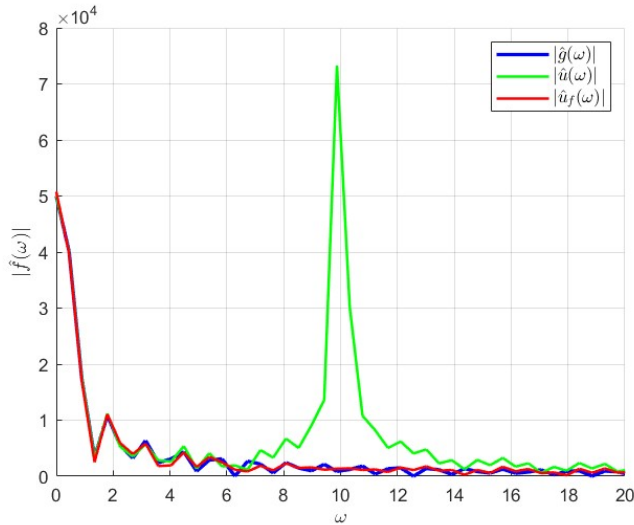


Рис. 23. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\omega)$, зашумленного $\hat{u}(\omega)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\omega)$ сигналов при $c = 12$ и $d = 10$.

Продолжим анализ эффективности фильтрации, сравнив графики фильтрованного сигнала u_f с графиком произведения $(W_2(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ во временной и в частотной областях.

На рисунке 24 видно полное совпадение графиков и сохранение сигнала при минимальных искажениях. Кроме того, совпадение графиков на рисунке 25 говорит о корректности фильтрации и ее высокой эффективности. Таким образом, использование режекторного фильтра позволяет практически избавиться от помехи, сохранив исходный сигнал.

Иначе говоря, использование режекторного фильтра довольно эффективно при подавлении помехи. Стоит также заметить, что такая фильтрация будет эффективной лишь в случае, когда частота сигнала не перекрывается с частотой подавляемой помехи.

Выполним аналогичное исследование для второго набора параметров.

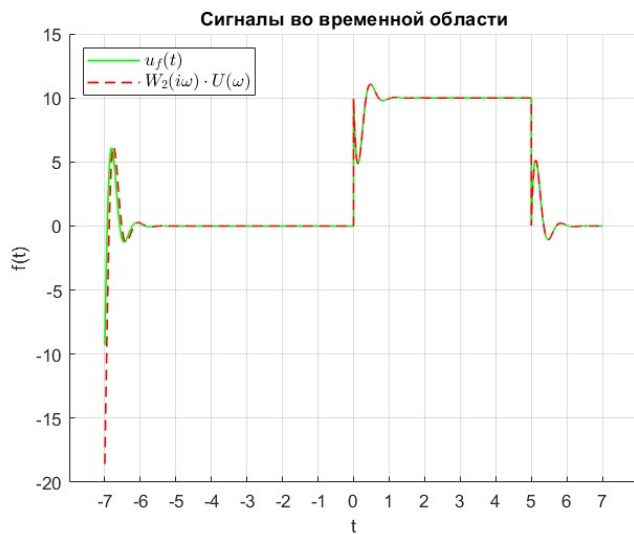


Рис. 24. Сравнительные графики $u_f(t)$ и $(W_2(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))(t)$ при $c = 12$ и $d = 10$.

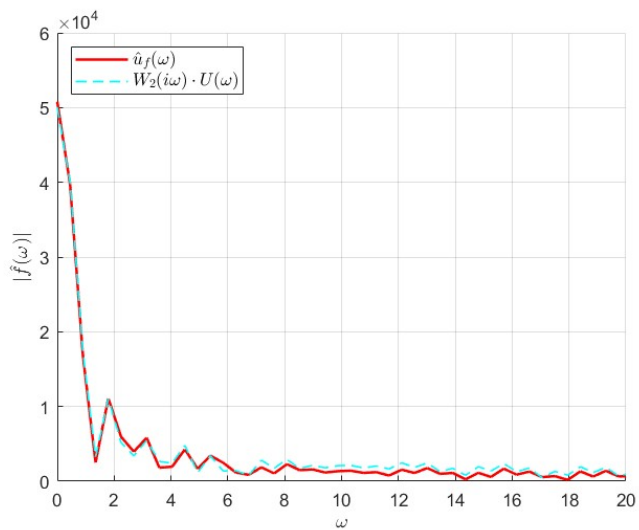


Рис. 25. Сравнительные графики $\hat{u}_f(\omega)$ и $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ при $c = 12$ и $d = 10$.

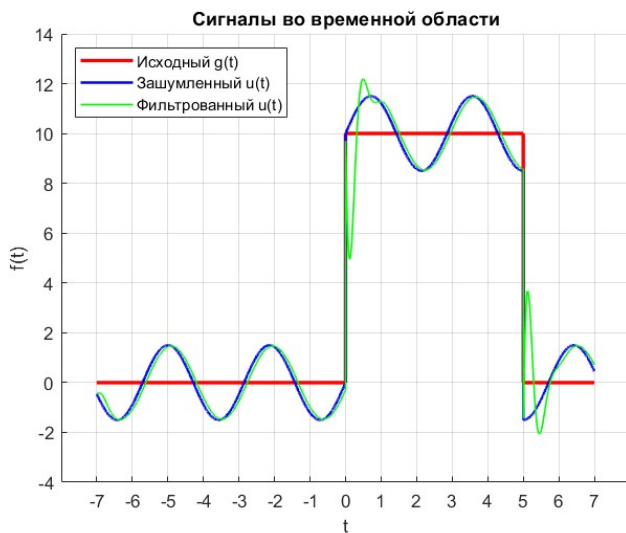


Рис. 26. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $c = 1.5$ и $d = 2.2$.

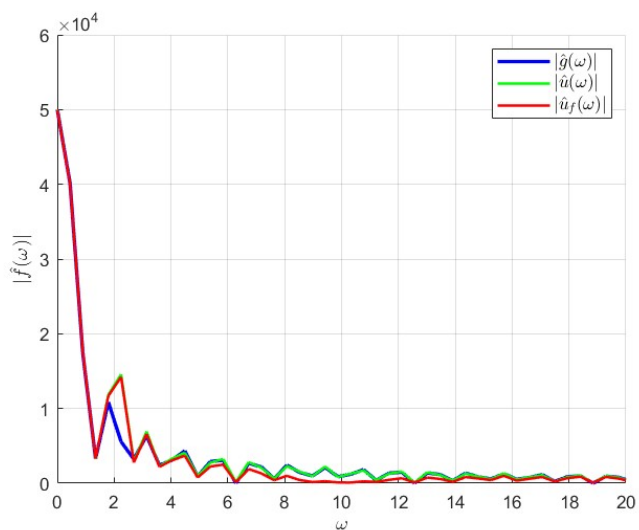


Рис. 27. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\omega)$, зашумленного $\hat{u}(\omega)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\omega)$ сигналов при $c = 1.5$ и $d = 2.2$.

Проанализируем полученные графики. На рисунке 26 видно, что фильтрованный сигнал содержит помеху. Это также подтверждает рисунок 27, на котором заметно сохранение помехи в фильтрованном сигнале. Иначе говоря, фильтрация неэффективна, поскольку фильтр настроен на другую частоту и не справляется с задачей.

Оценим эффективность фильтрации при помощи графиков фильтрованного сигнала u_f и произведения $(W_2(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ во временной и в частотной областях.

Совпадение графиков и во временной области на рисунке 28 и в частотной на рисунке 29 говорит о корректности фильтрации. Однако они оба отражают сохранение помехи, а значит, искажение исходного сигнала. Таким образом, фильтрация неэффективна из-за некорректной настройки параметров фильтра.

Сделанные наблюдения позволяют охарактеризовать влияние параметров c и d на эффективность фильтрации.

Параметр c определяет амплитуду гармонической помехи. С увеличением его значения помеха становится более выраженной, что требует более агрессивного подавления. При уменьшении значения параметра помеха ослабевает и даже неидеальный фильтр может обеспечить приемлемое качество сигнала. Если фильтр недостаточно эффективен на частоте помехи, она будет заметной в фильтрованном сигнале.

Параметр d определяет частоту, на которой действует гармоническая помеха. Эффективность подавления зависит от настройки фильтра и ширины полосы подавления. Кроме того, при совпадении d с ω_0 фильтр полностью подавляет помеху.

Таким образом, правильная настройка фильтра с учетом значений параметров c и d позволяет обеспечить эффективную фильтрацию.

Зафиксируем теперь значения параметров c и d .

$$c = 2 \quad b = 8$$

Выберем множество значений параметра b_1 .

$$b_1 = \{1.2, 11, 30\} \quad (3)$$

Выполним аналогичное исследование, выбрав в качестве значения параметра b_1 каждый элемент множества (3). Последовательно построим требуемые графики, попутно проанализировав их.

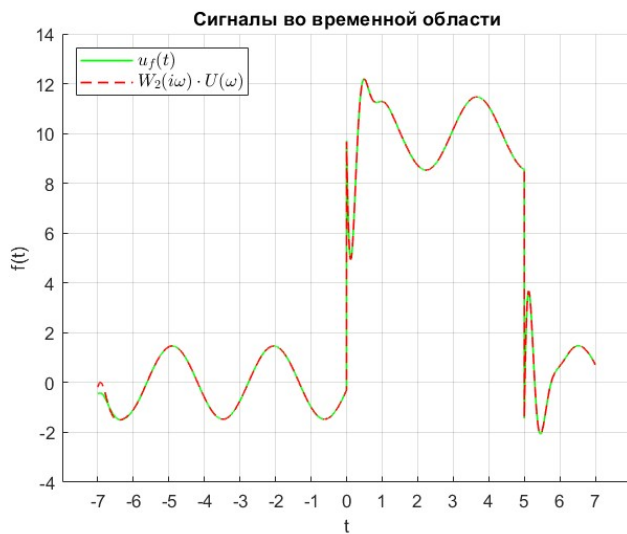


Рис. 28. Сравнительные графики $u_f(t)$ и $(W_2(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))(t)$ при $c = 1.5$ и $d = 2.2$.

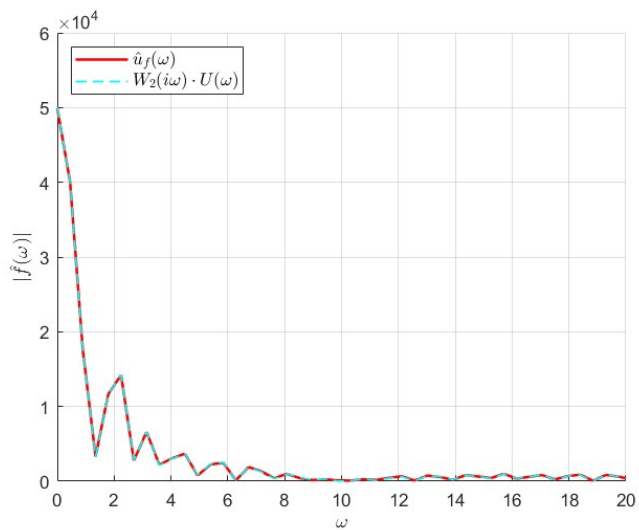


Рис. 29. Сравнительные графики $\hat{u}_f(\omega)$ и $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ при $c = 1.5$ и $d = 2.2$.

Проанализируем полученные результаты.

На рисунке 30 фильтр неэффективен, поскольку шум практически не подавляется. Фактически фильтрованный сигнал ничем не отличается от зашумленного. На рисунке 33 видно, что подавление отсутствует. Таким образом, фильтрация не дает никаких результатов.

На рисунке 31 заметно уменьшение амплитуды помехи в фильтрованном сигнале. Восстановленный сигнал все еще содержит шумы. На рисунке 34 видно, что помеха ослаблена, но искажения в сигнале по-прежнему присутствуют. Следовательно, сигнал сохраняется, но помеха все еще заметна.

На рисунке 32 видно, что фильтр демонстрирует самый качественный результат в сравнении со случаями, рассмотренными ранее в этом исследовании. Удастся более успешно подавить помеху, уменьшить искажения сигнала. На рисунке 35 заметно, что помеха подавляется, а искажения сигнала практически незаметны. Значит, удастся обеспечить приемлемое качество фильтрованного сигнала и подавить помеху.

Охарактеризуем эффективность фильтрации при помощи графиков фильтрованного сигнала u_f и произведения $(W_2(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ во временной и в частотной областях.

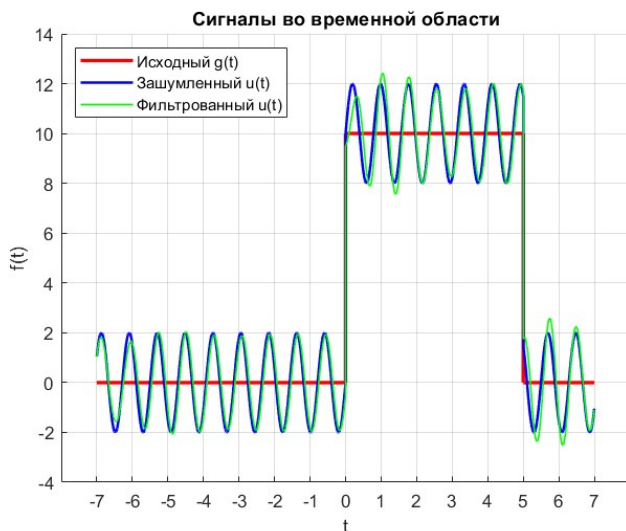


Рис. 30. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $b = 1.2$.

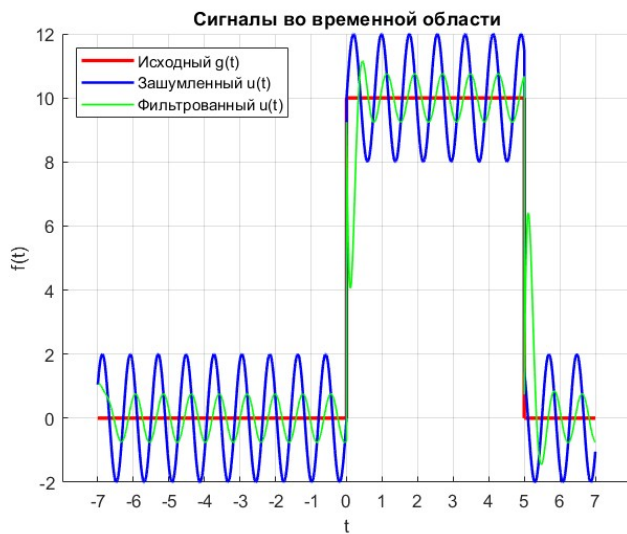


Рис. 31. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $b = 11$.

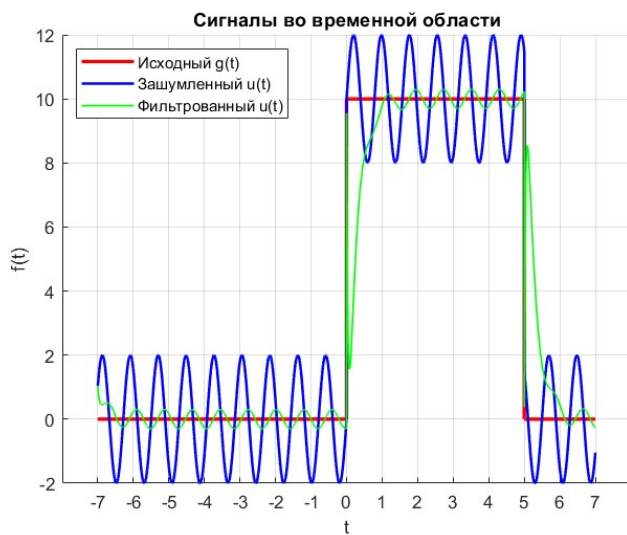


Рис. 32. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $b = 30$.

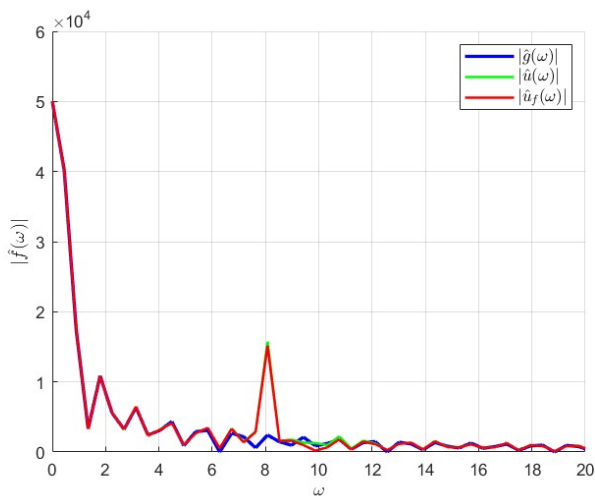


Рис. 33. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\omega)$, зашумленного $\hat{u}(\omega)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\omega)$ сигналов при $b = 1.2$.

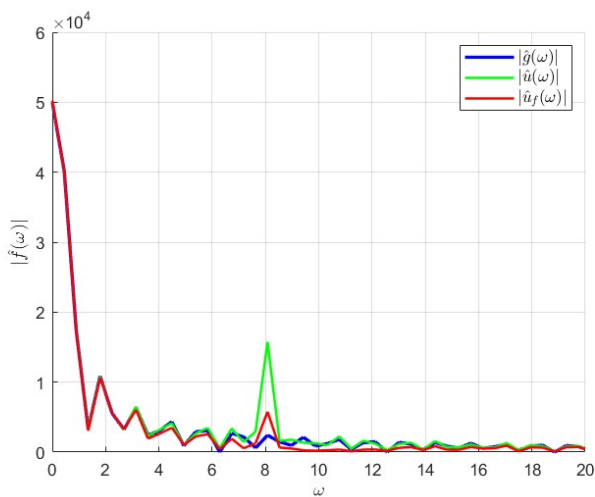


Рис. 34. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\omega)$, зашумленного $\hat{u}(\omega)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\omega)$ сигналов при $b = 11$.

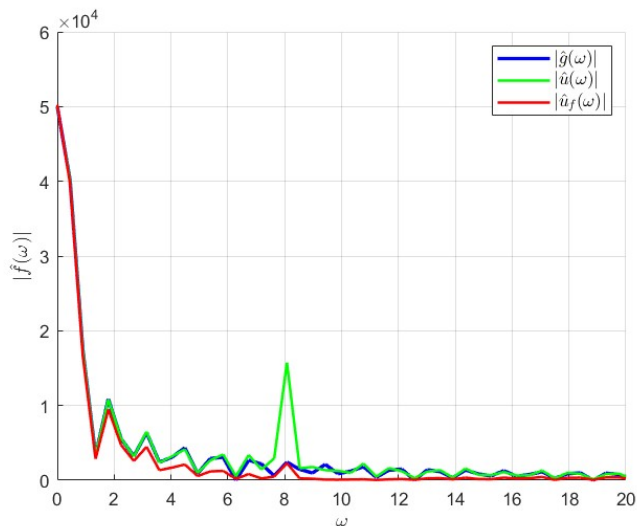


Рис. 35. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\omega)$, зашумленного $\hat{u}(\omega)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\omega)$ сигналов при $b = 30$.

Оценим построенные графики, чтобы определить эффективность фильтрации.

На рисунке 36 видно уменьшение амплитуды помехи и сохранение формы исходного сигнала. Заметны шумы, малые искажения. На рисунке 37 помеха сохраняется и не ослабляется фильтром. Совпадение графиков на обоих рисунках указывает на корректность использования фильтра. Следовательно, фильтрация довольно неэффективна, удовлетворительные результаты фактически отсутствуют.

На рисунке 38 заметно ослабление амплитуды помехи и сохранение конфигурации сигнала. Искажения в сигнале по-прежнему присутствуют, сохраняются шумы. На рисунке 39 видно, что помеха заметно ослаблена. Графики совпадают в обеих областях, а значит, фильтрация корректна. Таким образом, фильтр недостаточно хорошо справляется с задачей, оставляя искажения сигнала и шумы.

На рисунке 40 помеха подавлена довольно качественно, а рисунок 41 указывает на минимальные искажения фильтрованного сигнала. Графики совпадают, следовательно, фильтрация корректна. А значит, фильтр демонстрирует средний уровень эффективности.

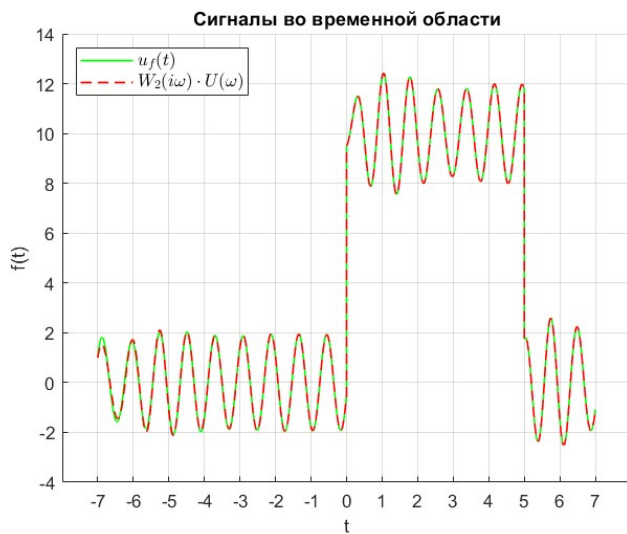


Рис. 36. Сравнительные графики $u_f(t)$ и $(W_2(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))(t)$ при $b = 1.2$.

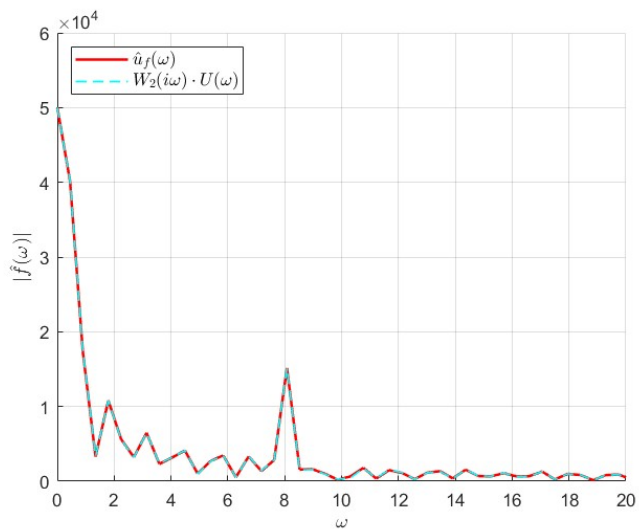


Рис. 37. Сравнительные графики $\hat{u}_f(\omega)$ и $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ при $b = 1.2$.

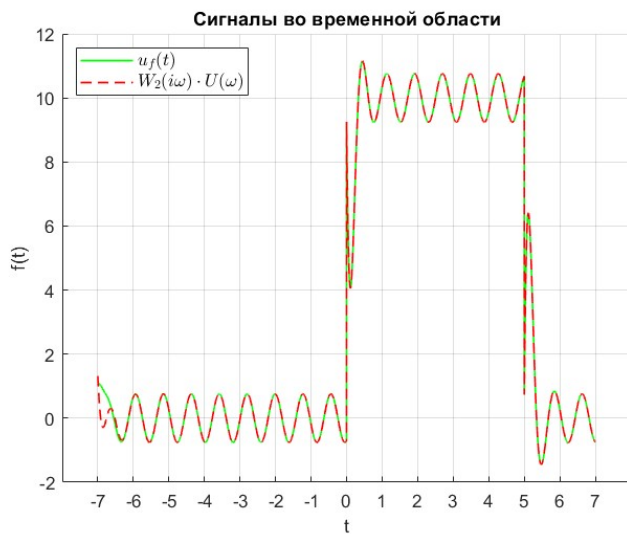


Рис. 38. Сравнительные графики $u_f(t)$ и $(W_2(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))(t)$ при $b = 11$.

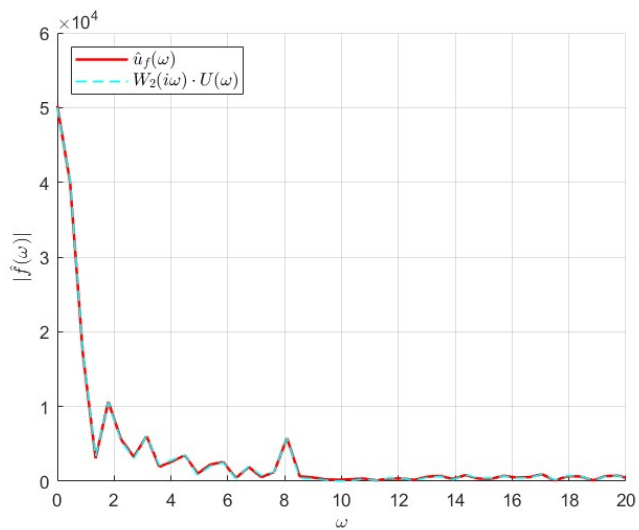


Рис. 39. Сравнительные графики $\hat{u}_f(\omega)$ и $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ при $b = 11$.

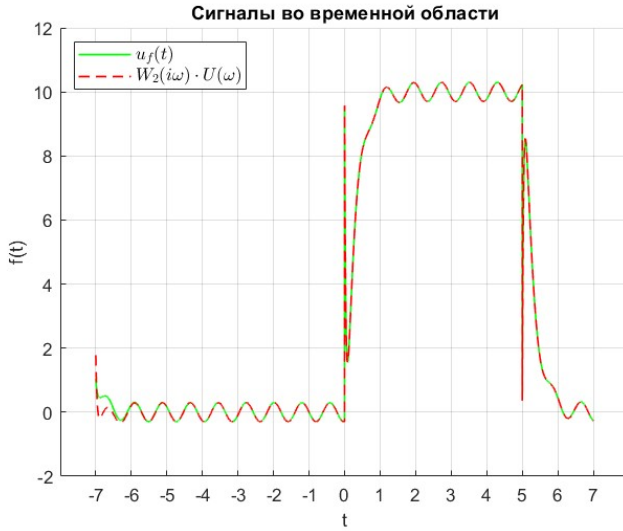


Рис. 40. Сравнительные графики $u_f(t)$ и $(W_2(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))(t)$ при $b = 30$.

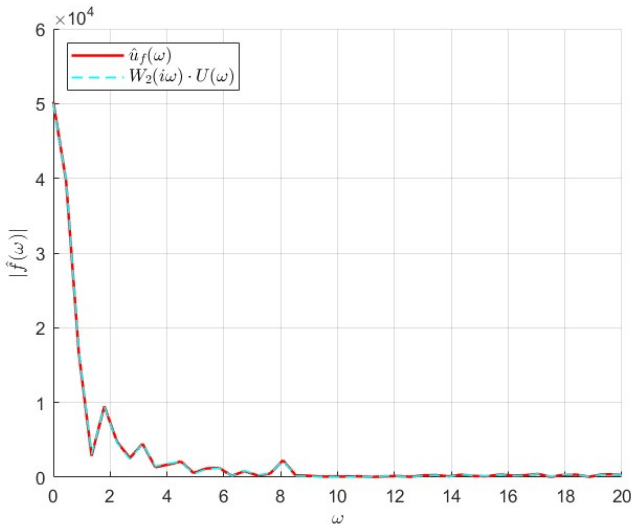


Рис. 41. Сравнительные графики $\hat{u}_f(\omega)$ и $(W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega))$ при $b = 30$.

1.2.1 Выводы.

Обобщим результаты выполнения данного задания.

Режекторный полосовой фильтр требует детальной настройки параметров для получения качественных результатов фильтрации. Он эффективно устраняет гармонические помехи на строго заданной частоте ω_0 .

Глубина подавления зависит от точности настройки коэффициента демпфирования b_1 . Малые значения параметра b_1 повышают избирательность фильтра, а большие значения его устойчивость к изменениям сигнала.

Параметр c регулирует амплитуду помехи. Чем больше d , тем выше требования к подавлению.

Параметр d определяет частоту помехи, что требует более тонкой настройки фильтра.

Данный фильтра находит свое применение в биомедицине и радиосвязи. На практике применяется там, где нужно точно устранить мешающий тон, не затрагивая остальной сигнал.

Фильтр хуже справляется с белым шумом, чем, например, фильтр нижних частот или другие инструменты жесткой фильтрации.

При конструировании фильтра важно учитывать компромисс между избирательностью и устойчивостью.

Режекторный полосовой фильтр – это инструмент, который отлично справляется с узкополосными помехами, но не универсален. Его настройка должна быть тщательной, а применение – обоснованным.

1.3 Выводы.

Сделаем выводы на основе результатов выполнения задания 1:

1. Увеличение значения параметра T снижает частоту среза, усиливая подавление высокочастотных шумов, но приводит к сглаживанию краев полезного сигнала.
2. При больших a фильтр эффективно сохраняет форму сигнала, подавляя шумы. При малых a сигнал теряется в шуме даже после фильтрации.
3. Сравнение графиков фильтрованного сигнала $u_f(t)$ и результата обратного преобразования Фурье $W_1(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega)$ подтверждает совпадение результатов, что доказывает корректность методов фильтрации.
4. Для подавления помехи на частоте ω_0 необходимо точное соответствие $a_2 = \omega_0^2$.
5. Увеличение значения b_1 расширяет полосу подавления, снижая избирательность: фильтр становится устойчивым, но теряет способность точно подавлять помехи.
6. Фильтр первого порядка неэффективен для низкочастотных шумов, а режекторный полосовой фильтр бесполезен при широкополосных помехах.
7. Малые b_1 обеспечивают узкую полосу подавления, но могут вызывать резонансные пики. Большие b_1 стабилизируют систему, снижая точность.
8. Использование Фурье-образов позволяет наглядно представить подавление шумов.

2 Задание 2. Сглаживание биржевых данных.

Скачаем из предложенного источника файл с данными о стоимости акций Сбербанка за достаточно продолжительный период – 2 года. Загрузим данные в MATLAB и применим к ним линейную фильтрацию с помощью фильтра первого порядка. Последовательно возьмем следующие значения постоянной времени T : 1 день, 1 неделя, 1 месяц, 3 месяца, 1 год. Построим сравнительные графики исходного и фильтрованного сигналов.

Для этого используем [программу](#), написанную при помощи пакета MATLAB. Выберем требуемые данные из файла, применим фильтрацию и построим необходимые графики.

Приведем график исходных данных о стоимости акций на рисунке [42](#).

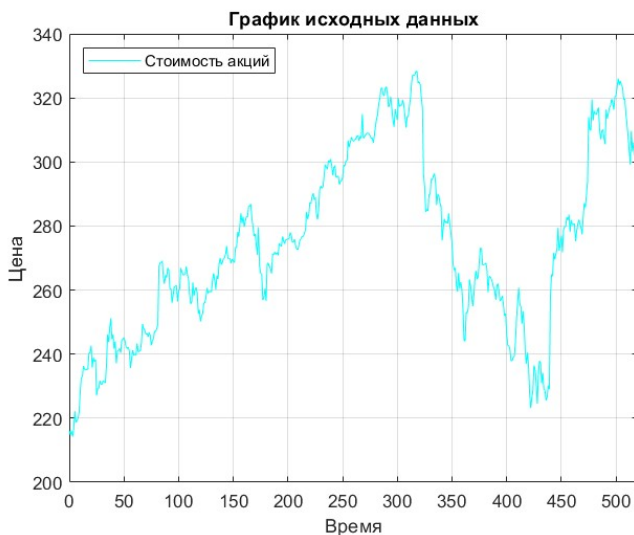


Рис. 42. График исходных данных о стоимости акций с 03.04.2023 по 03.04.2025.

Построим сравнительные графики биржевых данных без сглаживания и после сглаживания на одном рисунке для каждого значения параметра T из следующего множества. Выразим каждое значение постоянной времени в днях.

$$T = \{1, 7, 31, 93, 365\}.$$

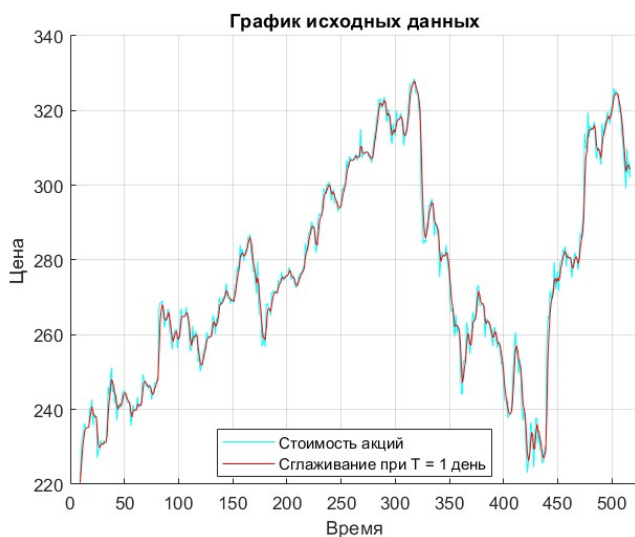


Рис. 43. Исходный и сглаженный графики при $T = 1$ день.



Рис. 44. Исходный и сглаженный графики при $T = 1$ неделя.



Рис. 45. Исходный и сглаженный графики при $T = 1$ месяц.

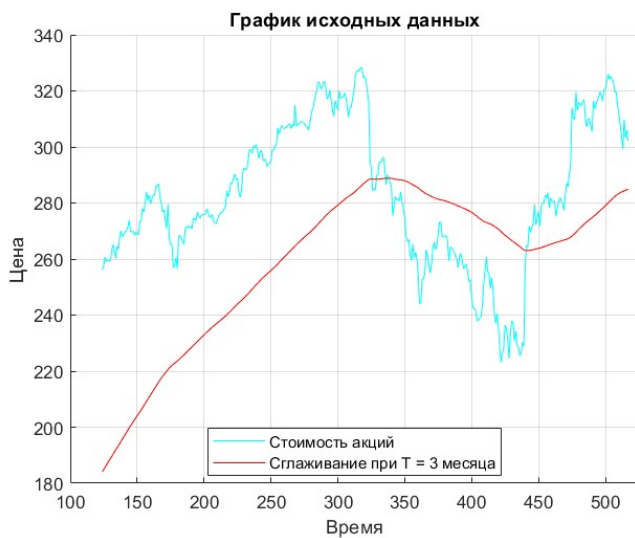


Рис. 46. Исходный и сглаженный графики при $T = 3$ месяца.

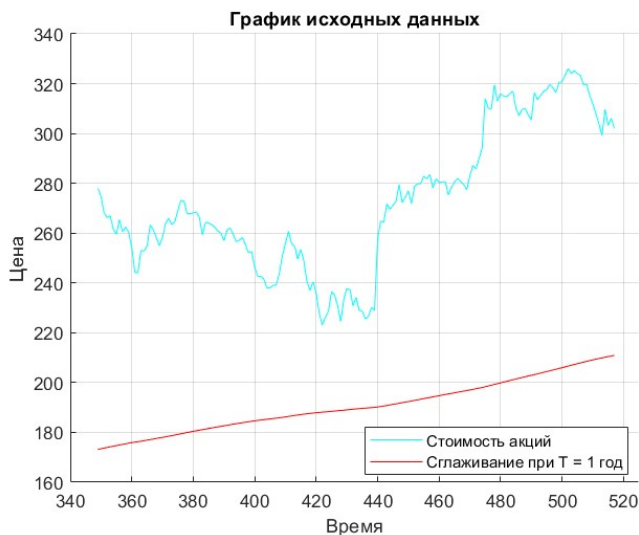


Рис. 47. Исходный и сглаженный графики при $T = 1$ год.

Проанализируем полученные результаты.

Графики позволяют понять, что фильтр первого порядка характеризуется постоянной времени T , которая определяет инерционность системы: чем больше значение параметра, тем медленнее фильтр реагирует на изменения входного сигнала.

На рисунке 43 фильтр почти повторяет исходный сигнал, сохраняя скачкообразный характер исходных данных. С увеличением значения параметра T на рисунках 44 и 45 видно, что фильтр эффективнее подавляет шумы и краткосрочные колебания, показывая при этом долгосрочные тренды.

На рисунках 46 и 47 заметно увеличение задержки реакции. Фильтр «запаздывает», не успевает за быстрыми изменениями исходного сигнала, что приводит к сглаживанию всех скачков. Отчетливо виден общий тренд, а график становится почти прямой линией с минимальными колебаниями.

2.1 Выводы.

Обобщим наблюдения, сделанные на основании результатов выполнения данного задания.

Выбор значения параметра T определяется конкретной задачей. Если требуется проанализировать тренд какого-либо актива, то следует использовать большие значения T . Средние значения параметра позволят убрать шумы, вызванные изменением ситуации на рынке, без потери ключевых деталей. При необходимости реагировать на краткосрочные изменения следует использовать малые значения T .

Фильтр первого порядка с постоянной времени T позволяет адаптировать уровень сглаживания под конкретные задачи. Это делает его универсальным инструментом не только для анализа финансовых данных, но и для обработки сигналов в других областях, например, метеорологии, инженерии и биомедицине.

Компромисс между интенсивностью реакции и точностью, который достигается за счет оптимального выбора значения параметра T может быть использован в автоматизированных системах управления или навигационном оборудовании.

Иначе говоря, фильтрация первого порядка – это инструмент для задач разного масштаба, который в зависимости от параметра T может быть либо «тонким скальпелем», либо «широкой кистью».

3 Выводы по лабораторной работе

Сформулируем общие выводы, которые можно сделать на основании результатов выполнения лабораторной работы:

1. Эффективность линейных фильтров напрямую зависит от соответствия их параметров характеристикам сигнала и шума: выбор постоянной времени T и коэффициентов демпфирования требует анализа амплитуды, частотного состава и уровня шумов.
2. Фильтры первого порядка демонстрируют компромисс между подавлением шума и сохранением формы сигнала: малые T сохраняют детали, но слабо устраняют шумы, а большие T эффективнее сглаживают шумы, но искажают резкие изменения сигнала.
3. Режекторные полосовые фильтры наиболее эффективны для узкополосных помех, но их избирательность зависит от точности настройки коэффициента демпфирования b_1 , где малые значения повышают резонансные свойства, а большие – устойчивость.
4. Анализ в частотной области подтверждает корректность фильтрации: совпадение спектров фильтрованного сигнала и произведения передаточной функции на спектр зашумленного сигнала указывает на отсутствие ошибок.
5. Для слабых по амплитуде сигналов даже оптимальные параметры фильтров не гарантируют восстановления формы, что подчеркивает важность использования методов, адаптированных под конкретную задачу.
6. В финансовом анализе фильтр первого порядка позволяет выделять тренды различной длительности: малые T сохраняют краткосрочную изменчивость, а большие T отражают долгосрочные тенденции.

7. Универсальность линейной фильтрации проявляется в её применимости к разнородным данным, но требует адаптации параметров под специфику области.
8. Краевые эффекты при преобразовании Фурье и дискретизации сигнала могут приводить к артефактам, что необходимо учитывать при интерпретации результатов фильтрации.
9. Сравнение временной и частотной областей при оценке фильтрации повышает надёжность выводов, позволяя выявить как маскируемые шумом искажения, так и спектральные изменения.
10. Оптимизация фильтров требует баланса между техническими ограничениями и требованиями к качеству сигнала, что делает целесообразным использование итерационных методов настройки.

Приложение

```

1 Time = 14; % Большой интервал времени
2 dt = 0.01; % Маленький шаг дискретизации
3 t = -Time/2 : dt : Time/2; % Набор временных шагов
4 N = length(t);
5 omega = (0:N-1)*(2*pi/dt)/N; % Набор угловых частот для FFT
6
7 %Параметры функции
8 a = 9;
9 t_1 = 0;
10 t_2 = 5;
11 b = 0.35;
12 c = 0;
13 d = 0;
14
15 g = zeros(size(t)); % Инициализация нулями
16 g(t >= t_1 & t <= t_2) = a; % Значения функции g(t)
17 xi = 2*rand(size(t))- 1; % Дискретные значения шума
18 u = g + b*xi + c*sin(d*t); % Зашумленная версия g(t)
19
20 % Создание фильтра первого порядка
21 T = 0.2; % Постоянная времени
22 W1 = tf(1, [0,T,1]); % Передаточная функция
23
24 % Фильтрация сигнала
25 [filtered_u, t_filter] = lsim(W1, u, t);
26
27 % Расчет Фурье-образов
28 G = fft(g);
29 U = fft(u);
30 Filtered_U = fft(filtered_u);
31
32 % Расчет произведения
33 W1_freq = 1 ./ (1 + 1i*T*omega);
34 Y_theoretical_freq = W1_freq .* U;
35
36 % Обратное преобразование Фурье
37 y_theoretical = ifft(Y_theoretical_freq, 'symmetric');
38
39 % Построение графика во временной области
40 figure;
41 hold on;
42 %plot(t, u, 'LineWidth', 1.5, 'Color','c');
43 %plot(t, g, 'LineWidth', 2, 'Color','r');
44 plot(t_filter, filtered_u, 'LineWidth', 1.5, 'Color','b');
45 plot(t_filter, y_theoretical, 'LineWidth', 1, 'Color','r', "
    LineStyle","--");
46 set(legend( '$$u_{f}(t)$$', '$$W_{f}(i\omega)\cdot U(\omega)$$'),'

```

```

47     'Interpreter','Latex','FontSize', 10, 'Location', 'northwest');
48 %legend('Исходный g(t)', 'Зашумленный u(t)', 'Фильтрованный u(t)',
49         'Location', 'northwest');
50 grid on;
51 xlabel('t');
52 ylabel('f(t)');
53 xticks(-Time/2:1:Time/2);
54 xlim([-Time/2 - 0.5, Time/2 + 0.5]);
55 ylim([-0.5, a+1]);
56 title('Сигналы во временной области');
57
58 % Построение АЧХ фильтра
59 figure;
60 [hw, w] = freqs(1, [0,T,1], omega);
61 plot(w, abs(hw), 'k', 'LineWidth', 1.5, 'Color', 'green');
62 title(sprintf('АЧХ фильтра при T = %.2f', T));
63 xlabel('\omega'); ylabel('|W_1(i\omega)|');
64 xlim([0, 320]);
65 grid on;
66
67 % Графики модулей Фурье-образов
68 figure;
69 hold on;
70 % plot(omega, abs(G), 'b', 'LineWidth', 2); hold on;
71 % plot(omega, abs(U), 'g', 'LineWidth', 1.5);
72 plot(omega, abs(Filtered_U), 'r', 'LineWidth', 1.5);
73 plot(omega, abs(Y_theoretical_freq), 'yellow', 'LineWidth', 1, '
74     LineStyle', '--');
75 grid on;
76 xlim([0, 20]);
77 xlabel('$\omega$', 'Interpreter', 'latex');
78 ylabel('$|\hat{f}(\omega)|$', 'Interpreter', 'latex');
79 set(legend('$$\hat{u}_f(\omega)$$', '$$W_{1}(i\omega)\cdot U(\omega)$$'),
80     'Interpreter','Latex','FontSize', 10, 'Location', '
81     northwest');
82 % set(legend('$$|\hat{g}(\omega)|$$', '$$|\hat{u}(\omega)|$$', '$$|\hat{u}_f(\omega)|$$'),
83     'Interpreter','Latex','FontSize', 10,
84     'Location', 'northwest');

```

Листинг 1. Программа, используемая для выполнения задания 1.1.

```
1 Time = 14; % Большой интервал времени
2 dt = 0.001; % Маленький шаг дискретизации
3 t = -Time/2 : dt : Time/2; % Набор временных шагов
4 N = length(t);
5 omega = (0:N-1)*(2*pi/dt)/N; % Набор угловых частот для FFT
6
7 %Параметры функции
8 a = 9;
9 t_1 = 0;
10 t_2 = 5;
11 b = 0;
12 c = 0;
13 d = 0;
14
15 g = zeros(size(t)); % Инициализация нулями
16 g(t >= t_1 & t <= t_2) = a; % Значения функции g(t)
17 xi = 2*rand(size(t))- 1; % Дискретные значения шума
18 u = g + b*xi + c*sin(d*t); % Зашумленная версия g(t)
19
20 % Создание фильтра первого порядка
21 a_1 = 0;
22 a_2 = 100;
23 b_1 = 1;
24 b_2 = a_2;
25
26 % Передаточная функция
27 W2 = tf([1, a_1, a_2], [1, b_1, b_2]);
28
29 % Построение АЧХ фильтра
30 figure;
31 [hw, w] = freqs([1, a_1, a_2], [1, b_1, b_2], omega);
32 plot(w, abs(hw), 'k', 'LineWidth', 1.5, 'Color', 'green');
33 title(sprintf('АЧХ фильтра при b_1 = %.2f', b_1));
34 xlabel('\omega'); ylabel('|W_1(i\omega)|');
35 xlim([0, 300]);
36 grid on;
```

Листинг 2. Программа, используемая для построения графиков АЧХ режекторного полосового фильтра.

```
1 Time = 14; % Большой интервал времени
2 dt = 0.001; % Маленький шаг дискретизации
3 t = -Time/2 : dt : Time/2; % Набор временных шагов
4 N = length(t);
5 omega = (0:N-1)*(2*pi/dt)/N; % Набор угловых частот для FFT
6
7 %Параметры функции
8 a = 10;
9 t_1 = 0;
10 t_2 = 5;
11 b = 0;
12 c = 1.5;
13 d = 2.2;
14
15 g = zeros(size(t)); % Инициализация нулями
16 g(t >= t_1 & t <= t_2) = a; % Значения функции g(t)
17 xi = 2*rand(size(t))- 1; % Дискретные значения шума
18 u = g + b*xi + c*sin(d*t); % Зашумленная версия g(t)
19
20 % Создание фильтра первого порядка
21 a_1 = 0;
22 a_2 = 100;
23 b_1 = 8.95;
24 b_2 = a_2;
25 W2 = tf([1, a_1, a_2], [1, b_1, b_2]); % Передаточная функция
26
27 % Фильтрация сигнала
28 [filtered_u, t_filter] = lsim(W2, u, t);
29
30 % Расчет Фурье-образов
31 G = fft(g);
32 U = fft(u);
33 Filtered_U = fft(filtered_u);
34
35 % Расчет частотной характеристики полосового фильтра W2
36 % Числитель
37 numerator = (-omega.^2) + 1i*a_1*omega + a_2;
38 % Знаменатель
39 denominator = (-omega.^2) + 1i*b_1*omega + b_2;
40 W2_freq = numerator ./ denominator;
41
42 % Произведение
43 Y_theoretical_freq = W2_freq .* U;
44
45 % Обратное преобразование Фурье
46 y_theoretical = ifft(Y_theoretical_freq, 'symmetric');
47
48
49 % Построение графика во временной области
50 figure;
```

```

51 hold on;
52 plot(t, g, 'LineWidth', 2, 'Color',"r");
53 plot(t, u, 'LineWidth', 1.5, 'Color',"b");
54 plot(t_filter, filtered_u, 'LineWidth', 1, 'Color',"g");
55 %plot(t_filter, y_theoretical, 'LineWidth', 1, 'Color',"r", "
    LineStyle","--");
56 set(legend( '$$u_{f}(t)$$', '$$W_{2}(i\omega)\cdot U(\omega)$$'), '
    Interpreter','Latex','FontSize', 10, 'Location', 'northwest');
57 legend('Исходный g(t)', 'Зашумленный u(t)', 'Фильтрованный u(t)', '
    Location', 'northwest');
58 grid on;
59 xlabel('t');
60 ylabel('f(t)');
61 xticks(-Time/2:1:Time/2);
62 %xlim([-Time/2 - 0.5, Time/2 + 0.5]);
63 %ylim([-0.5, a+1]);
64 title('Сигналы во временной области');
65
66 % Графики модулей Фурье-образов
67 figure;
68 hold on;
69 plot(omega, abs(G), 'b', 'LineWidth', 2); hold on;
70 plot(omega, abs(U), 'g', 'LineWidth', 1.5);
71 plot(omega, abs(Filtered_U), 'r', 'LineWidth', 1.5);
72 %plot(omega, abs(Y_theoretical_freq), 'c', 'LineWidth', 1, '
    LineStyle', '--');
73 grid on;
74 xlim([0, 20]);
75 xlabel('$\omega$', 'Interpreter', 'latex');
76 ylabel('$|\hat{f}(\omega)|$', 'Interpreter', 'latex');
77 %set(legend('$$\hat{u}_f(\omega)$$', '$$W_{2}(i\omega)\cdot U(\omega)$$'), 'Interpreter','Latex','FontSize', 10, 'Location', '
    northwest');
78 set(legend( '$$|\hat{g}(\omega)|$$', '$$|\hat{u}(\omega)|$$', '$$|\hat{u}_f(\omega)|$$'), 'Interpreter','Latex','FontSize', 10);

```

Листинг 3. Программа, используемая выполнения задания 1.2.


```
1 % Подготовка данных
2 data = readtable('SBER_230402_250402.csv', 'Delimiter', ',');
3 close_prices = data.CLOSE;
4 N = length(close_prices);
5 t = (0:N-1);
6
7 % Значения T (в днях)
8 T_values = [1, 7, 31, 93, 365]; % 1 день, 1 неделя, 1 месяц, 3 месяца, 1 год
9 labels = {'1 день', '1 неделя', '1 месяц', '3 месяца', '1 год'};
10
11 i = 1;
12 T = T_values(i);
13 shift = 10;
14
15 % Передаточная функция
16 W = tf(1, [T, 1]);
17
18 % Фильтрация сигнала
19 [filtered_u, t_filter] = lsim(W, close_prices, t);
20
21 % Построение графиков
22 figure;
23 hold on;
24 plot(t(shift:end), close_prices(shift:end), 'Color', 'c');
25 plot(t_filter(shift:end), filtered_u(shift:end), 'Color', 'r');
26 title('График исходных данных');
27 ylabel('Цена');
28 xlabel('Время');
29 grid on;
30 legend('Стоимость акций', ['Сглаживание при T = ', labels{i}], 'Location', 'best');
31 xlim([0, 525]);
```

Листинг 4. Программа, используемая для выполнения задания 2.