

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 3 "Жёсткая фильтрация"

по дисциплине Частотные методы

Выполнил: студент гр. **R3242**

Мареев П. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

1	Задание 1. Жёсткие фильтры.	3
1.1	Убираем высокие частоты.	4
1.1.1	Выводы.	21
1.2	Убираем специфические частоты.	22
1.2.1	Выводы.	40
1.3	Убираем низкие частоты?	41
1.3.1	Выводы.	45
1.4	Выводы.	46
2	Задание 2. Фильтрация звука.	47
2.1	Выводы.	50
3	Выводы по лабораторной работе.	51

Вступление

Современные технологии обработки сигналов играют ключевую роль в решении задач выделения полезной информации на фоне помех. Фильтрация, как один из основных методов, позволяет устранять шумы, гармонические искажения и другие нежелательные компоненты, сохраняя структуру исходного сигнала. В данной лабораторной работе изучаются методы жесткой фильтрации, основанные на частотном анализе с использованием преобразования Фурье.

Целью работы является освоение принципов обработки сигналов в частотной области: выделение полезных компонент путем обнуления спектральных составляющих, соответствующих помехам. В рамках задания рассматриваются различные типы фильтров – низких, высоких и специфических частот, – что позволяет исследовать их влияние на качество восстановленного сигнала.

Практическая часть включает два этапа. В первом задании анализируется синтетический сигнал, искаженный белым шумом и гармонической помехой. С помощью преобразования Фурье выполняется фильтрация, а результаты представляются в виде графиков временных и спектральных характеристик. Во втором задании методы применяются к аудиосигналу, что демонстрирует важность жесткой фильтрации в обработке звука.

Особое внимание уделяется исследованию параметров фильтров, таких как частота среза и амплитуда помех. Это позволяет оценить компромисс между степенью подавления шумов и сохранением полезного сигнала.

Выполнение работы предоставляет возможность детальнее понять связь между временной и частотной областей, а также формирует умение выбирать оптимальные фильтры для конкретных задач. Рассматриваемые методы могут быть применены в телекоммуникациях, обработке аудио, биомедицинских системах и других областях, где требуется точное восстановление сигналов.

1 Задание 1. Жёсткие фильтры.

Выберем числа a, t_1, t_2 , такими, что $t_1 < t_2$ и рассмотрим функцию

$$g(t) = \begin{cases} a, & t \in [t_1, t_2] \\ 0, & t \notin [t_1, t_2] \end{cases}$$

и ее зашумленную версию

$$u(t) = g(t) + b\xi(t) + c\sin(\omega t), \quad (1)$$

где $\xi(t) \sim \mathcal{U}[-1, 1]$ – равномерное распределение, представляющее белый шум, а значения b, c, ω – параметры возмущения.

Пусть $a = 2, t_1 = 1, t_2 = 5$, тогда имеем следующую функцию:

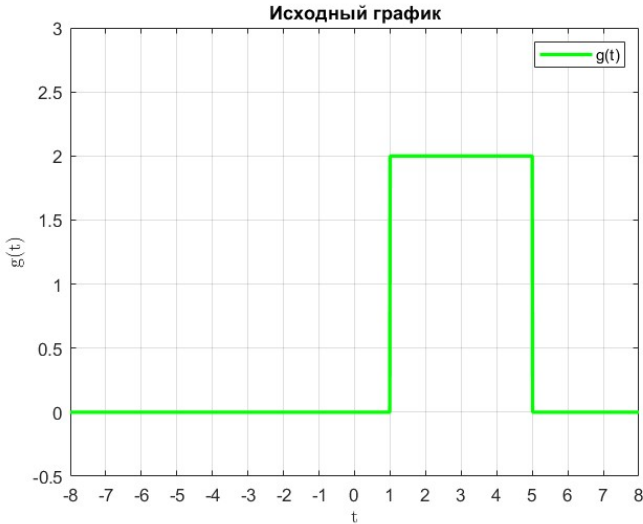
$$g(t) = \begin{cases} 2, & t \in [1, 5] \\ 0, & t \notin [1, 5] \end{cases}$$

В данном задании требуется выполнить жесткую фильтрацию указанного сигнала. Для выполнения фильтрации будем поступать так:

1. Найдем Фурье-образ сигнала $u(t)$.
2. Обнулим его значения на выбранных диапазонах частот.
3. Восстановим сигнал с помощью обратного преобразования.

Воспользуемся *советами по использованию Матлаба* и построим [график](#) исходной функции при помощи [программы](#), написанной с использованием пакета прикладных программ MATLAB.

Выберем $T = 16$ – большой интервал времени, который не только позволит построить график рассматриваемой функции $g(t)$, но и получить набор частот для `fft`.

Рис. 1. График исходной функции $g(t)$.

1.1 Убираем высокие частоты.

Примем $c = 0$. Тогда зашумленная версия сигнала будет иметь вид:

$$u(t) = g(t) + b\xi(t).$$

Найдем Фурье-образ сигнала $u(t)$. Оставим его неизменным для некоторого диапазона частот $[-\nu, \nu]$, однако обнулим его значения на всех остальных частотах (т.е. применим фильтр нижних частот), после чего выполним обратное преобразование Фурье.

Для выполнения этого задания воспользуемся программой на языке MATLAB. Зафиксируем коэффициент $b = 2.5$ и найдем наиболее показательные значения ν_0 , при которых фильтрация максимально эффективна. Для этого выберем множество значений ν_0 .

$$\nu_0 = \{1, 2, 5, 10, 1.75, 1.9\}$$

Построим графики исходного сигнала $g(t)$, зашумленного и фильтрованного сигнала $u(t)$ на одном рисунке и также графики модуля Фурье-образов исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного сигналов $\hat{u}_f(\nu)$ для этих значений параметров при помощи программы.

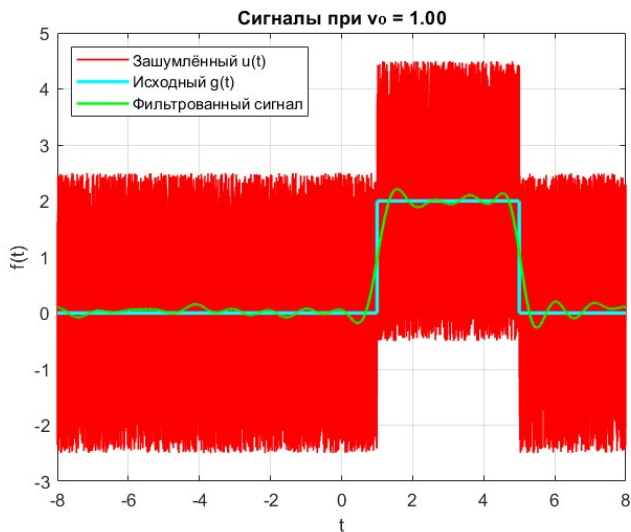


Рис. 2. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $\nu_0 = 1$ Гц.

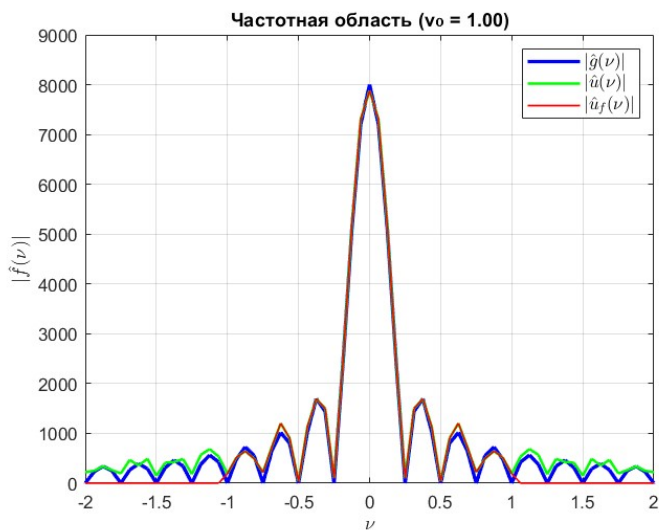


Рис. 3. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов при $\nu = 1$ Гц.

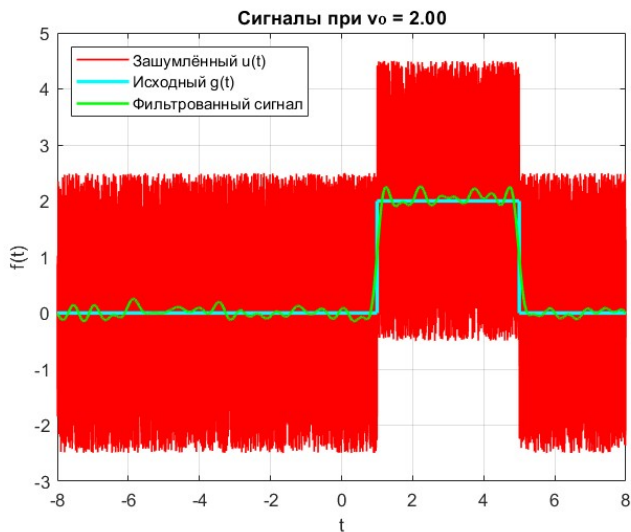


Рис. 4. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $\nu_0 = 2$ Гц.

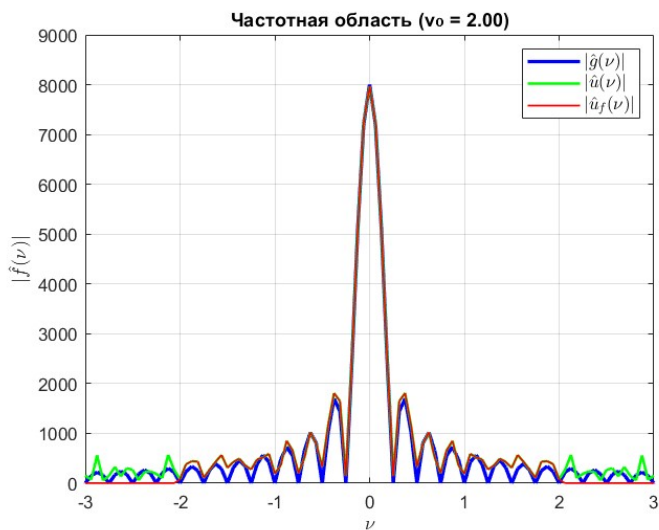


Рис. 5. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов при $\nu = 2$ Гц.

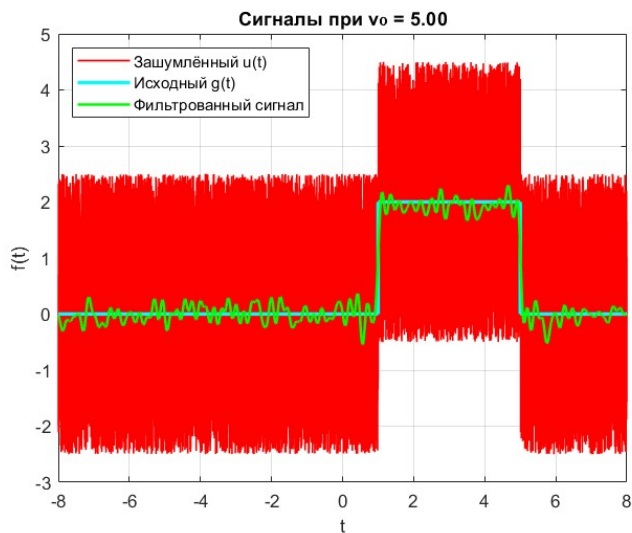


Рис. 6. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $\nu_0 = 5$ Гц.

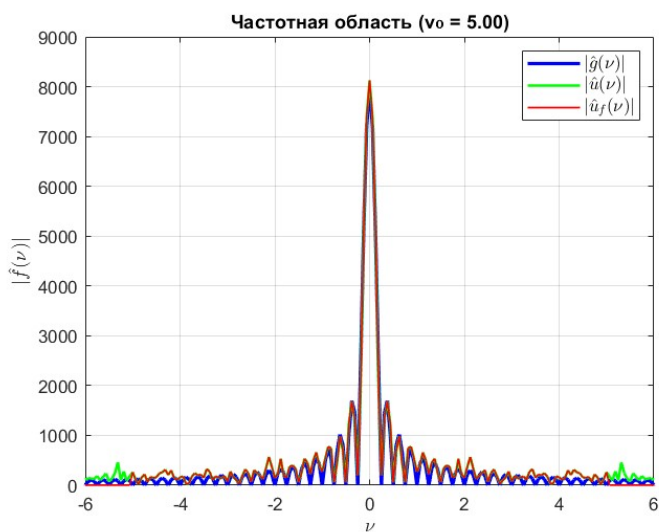


Рис. 7. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов при $\nu = 5$ Гц.

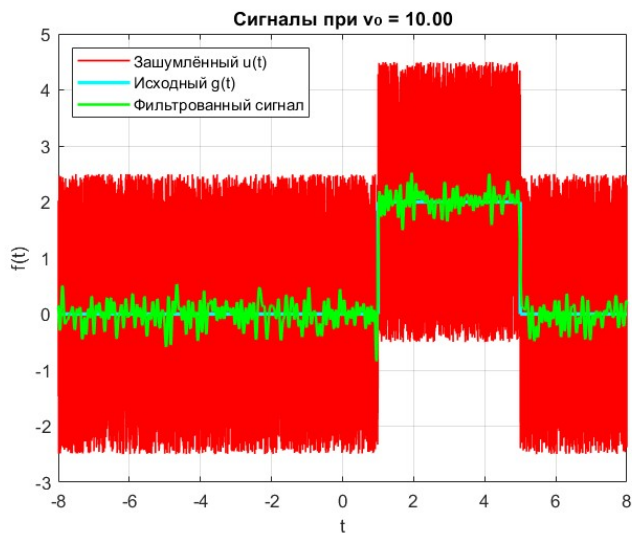


Рис. 8. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $\nu_0 = 10$ Гц.

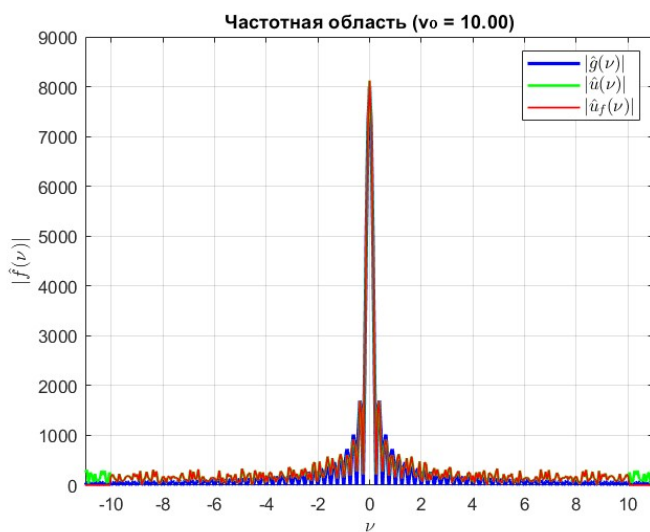


Рис. 9. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов при $\nu = 10$ Гц.

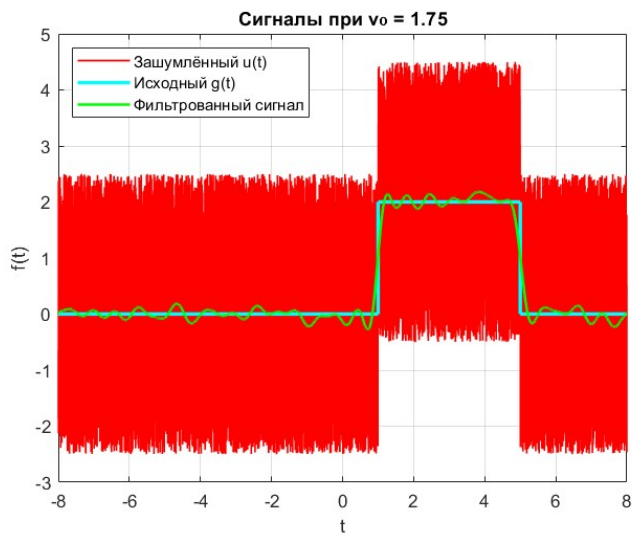


Рис. 10. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $\nu_0 = 1.75$ Гц.

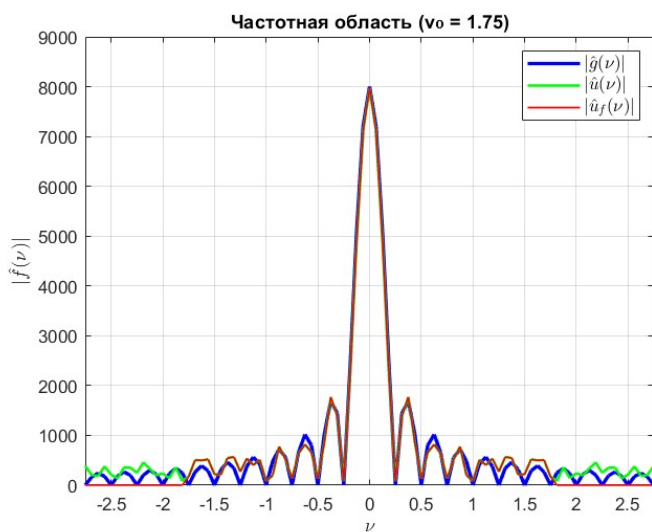


Рис. 11. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов при $\nu = 1.75$ Гц.

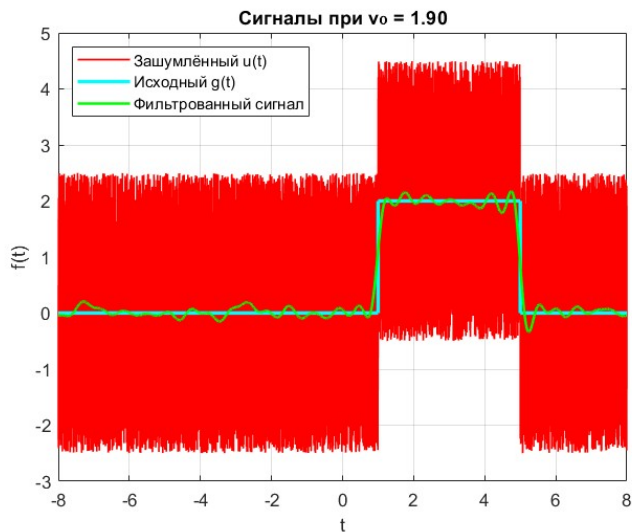


Рис. 12. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $\nu_0 = 1.9$ Гц.

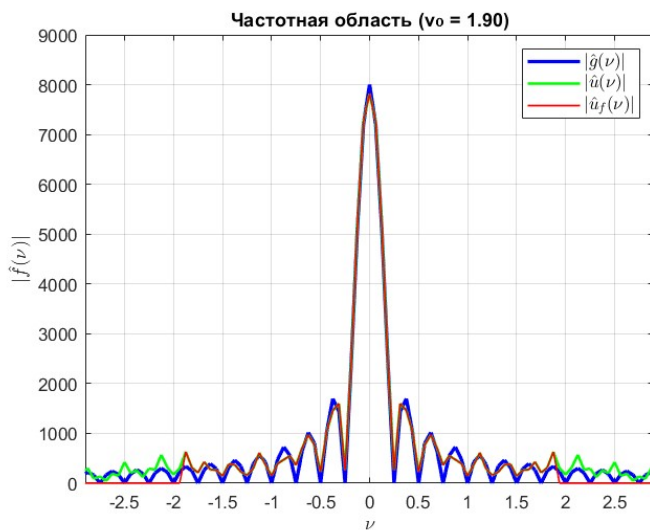


Рис. 13. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов при $\nu = 1.9$ Гц.

Проанализируем полученные графики. На рисунке 2 при $\nu_0 = 1$ фильтр подавляет почти все частоты, включая часть полезного сигнала. Шум частично подавлен, но остаются низкочастотные помехи. На рисунке 3 видны различия между графиками, что говорит о явном различии сигналов. Иначе говоря, сигнал сильно искажен, шум уменьшен, но не устранен полностью.

На рисунке 4 при $\nu_0 = 2$ фильтр сохраняет больше высоких частот, чем на рисунке 2. На рисунке 5 форма сигнала уже слегка близка к исходному, но шум остается заметным. То есть, улучшено сохранение сигнала, но шум все еще влияет на результат.

При $\nu_0 = 5$ на рисунке 6 фильтр пропускает часть спектра сигнала. Импульс почти не искажается, но шум сильно проявляется. На рисунке 7 совпадение графиков говорит о средней эффективности фильтрации. Таким образом, сигнал сохраняется, но шум по-прежнему превалирует.

На рисунке 8 при $\nu_0 = 10$ фильтр малоэффективен: почти весь спектр, включая шум, проходит. На рисунке 9 видны заметные отличия в графиках исходного и восстановленного сигнала. То есть, фильтрованный сигнал практически совпадает с зашумленным. Следовательно, такая фильтрация бесполезна.

При $\nu_0 = 1.75$ на рисунке 10 фильтр тоже пропускает часть спектра сигнала. Рисунок 11 показывает, что эффективность фильтра выше, чем в ситуации на рисунке 4: шум подавлен гораздо лучше. Таким образом, такая фильтрация нормально справляется с шумом.

При $\nu_0 = 1.9$ на рисунке 12 шум подавлен лучше, чем в ситуации на рисунке 10, что подтверждает рисунок 13. Следовательно, эффективность используемого фильтра сравнительно высока.

Таким образом, при $b = 2.5$ оптимальным для фильтрации будет следующий диапазон значений ν_0 :

$$\nu_0 \in [1.5, 2]$$

Отметим, что выбранное $b = 2.5$ определяет довольно высокий уровень шумов, что, возможно, не дает фильтру показать себя в полной мере.

Продемонстрируем на рисунке 14 результаты использования фильтра нижних частот для наиболее показательных значений – $b = 2.5$, $\nu_0 = 1.95$. В этом случае удастся не только эффективно выполнить фильтрацию, но и качественно сохранить сигнал.

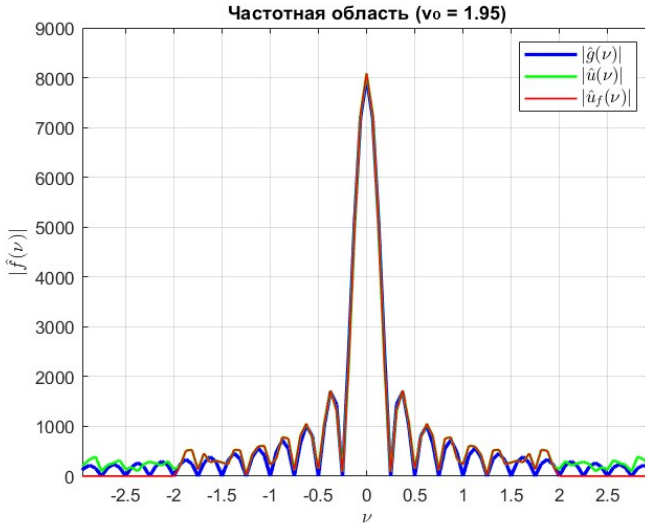


Рис. 14. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов для наиболее показательных значений.

Зафиксируем теперь значение $\nu_0 = 12$, чтобы определить наиболее показательные значения b , при которых фильтрация максимально эффективна. Зададимся множеством значений b .

$$b = \{10, 2.5, 1.25, 0.25, 0.1, 0.05\}$$

Приведем графики исходного сигнала $g(t)$, зашумленного и фильтрованного сигнала $u(t)$ на одном рисунке и также графики модуля Фурье-образов исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного сигналов $\hat{u}_f(\nu)$ для этих значений параметров, построенные при помощи программы, которая аналогична использованной ранее.

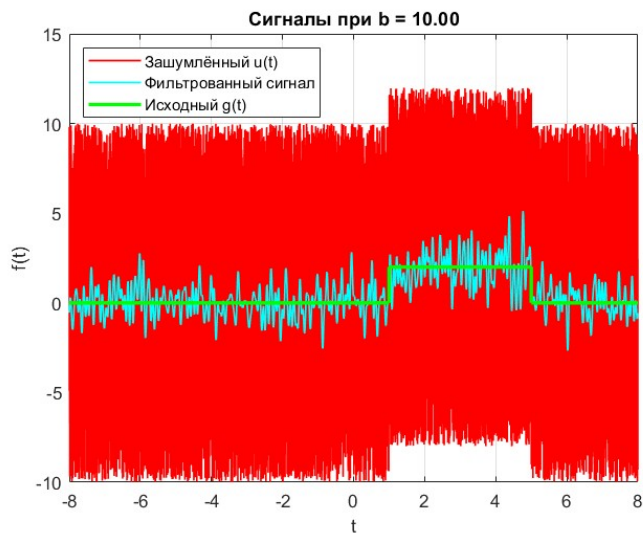


Рис. 15. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $b = 10$.

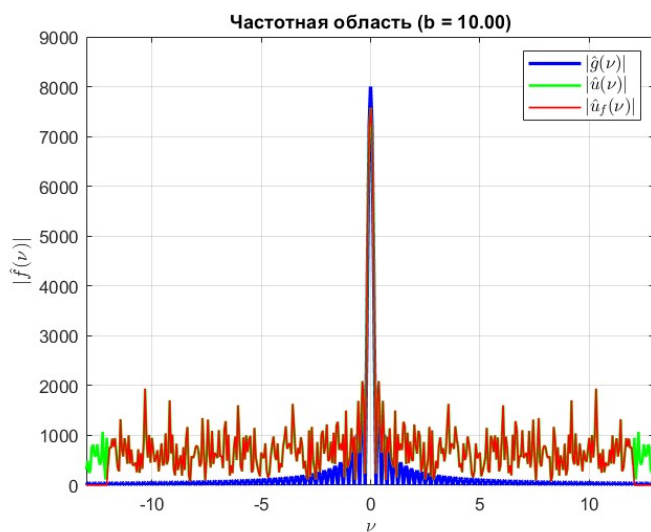


Рис. 16. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов при $b = 10$.

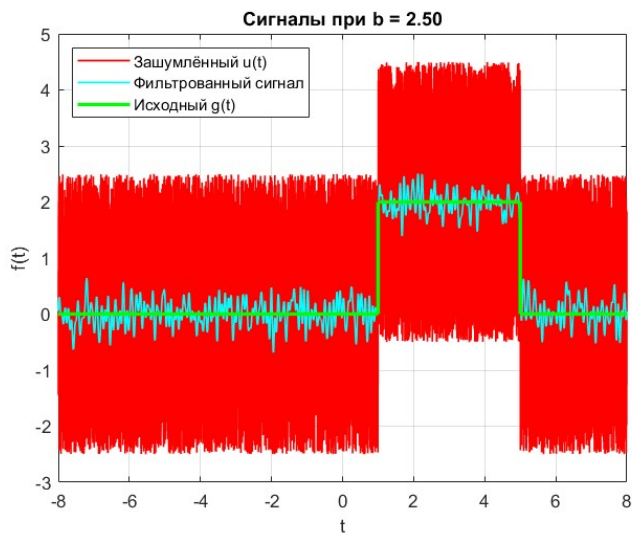


Рис. 17. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $b = 2.5$.

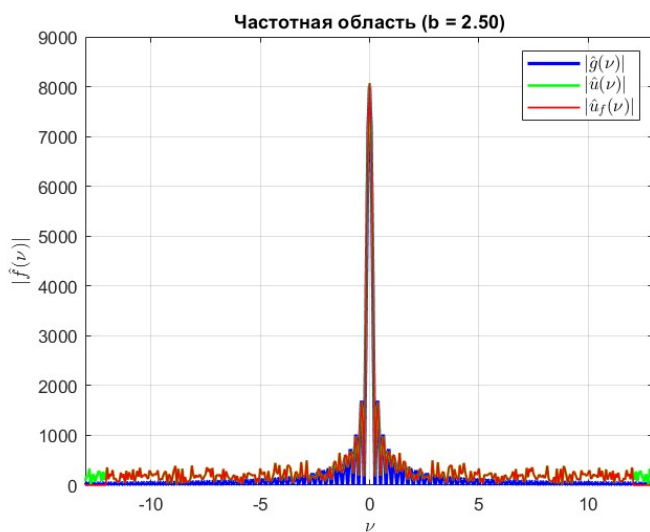


Рис. 18. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов при $b = 2.5$.

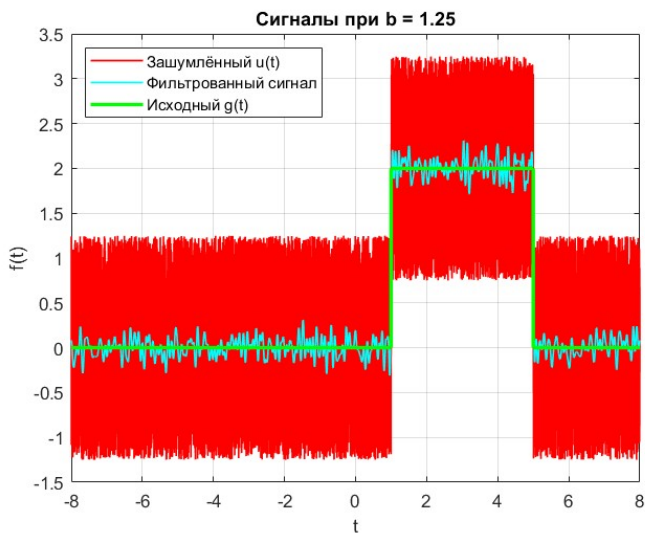


Рис. 19. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $b = 1.25$.

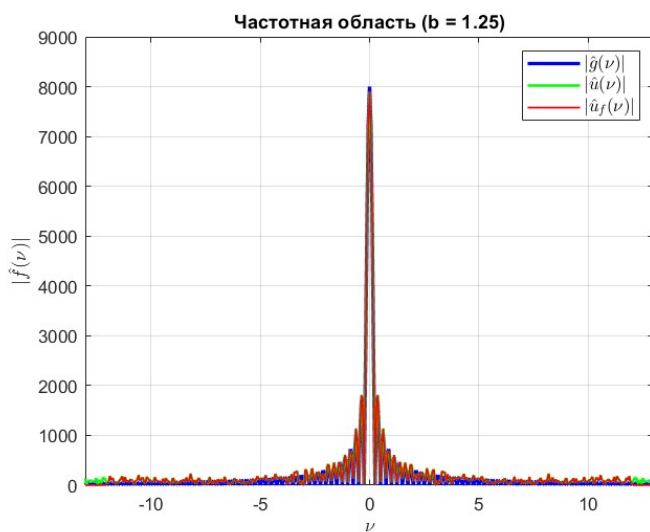


Рис. 20. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов при $b = 1.25$.

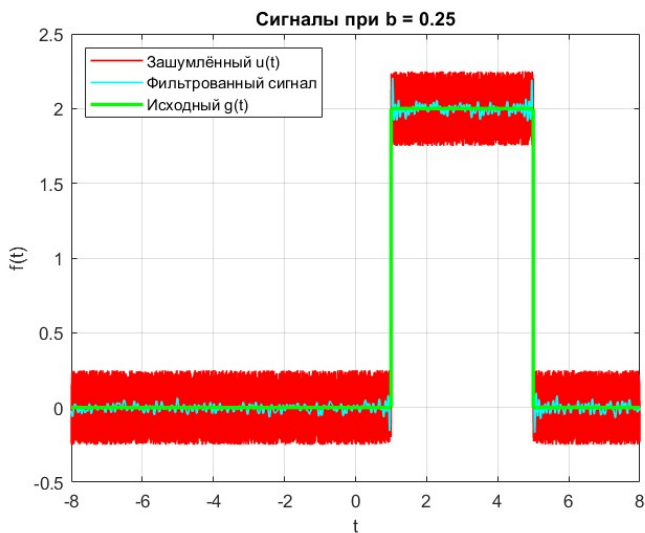


Рис. 21. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $b = 0.25$.

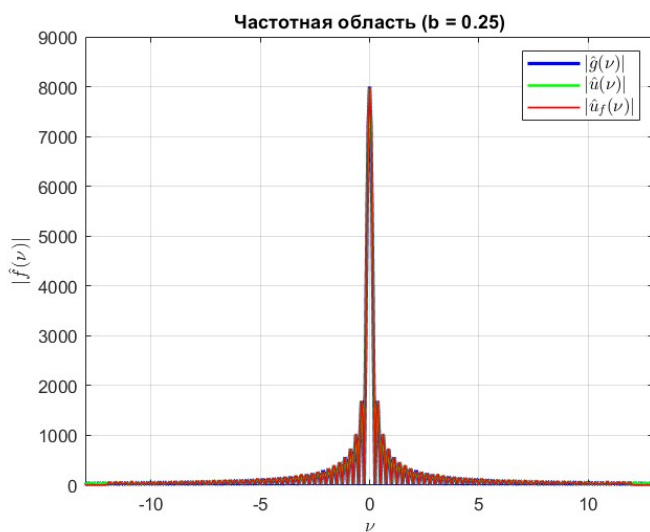


Рис. 22. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов при $b = 0.25$.

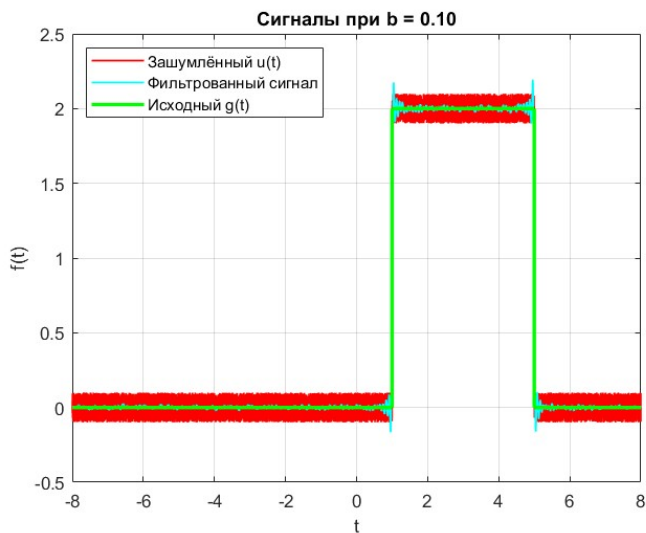


Рис. 23. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $b = 0.1$.

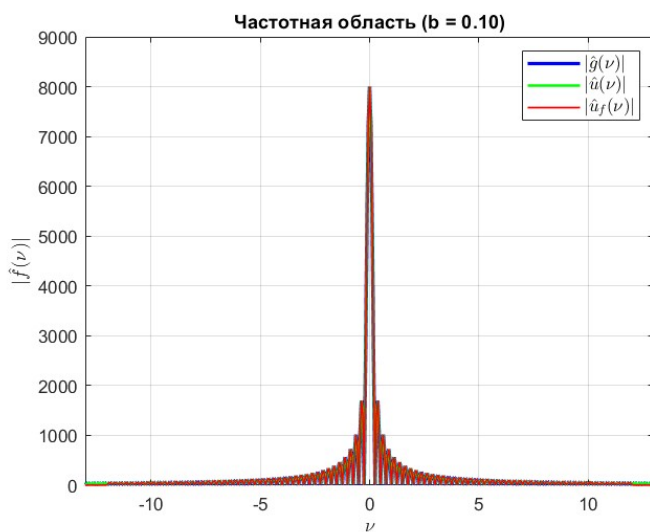


Рис. 24. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов при $b = 0.1$.

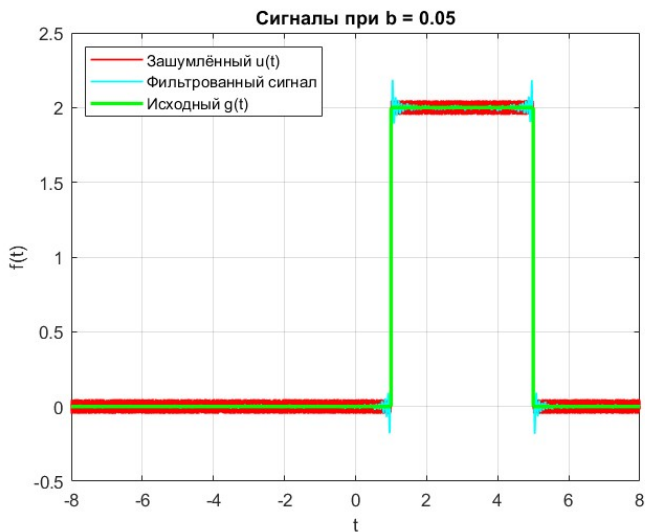


Рис. 25. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $b = 0.05$.

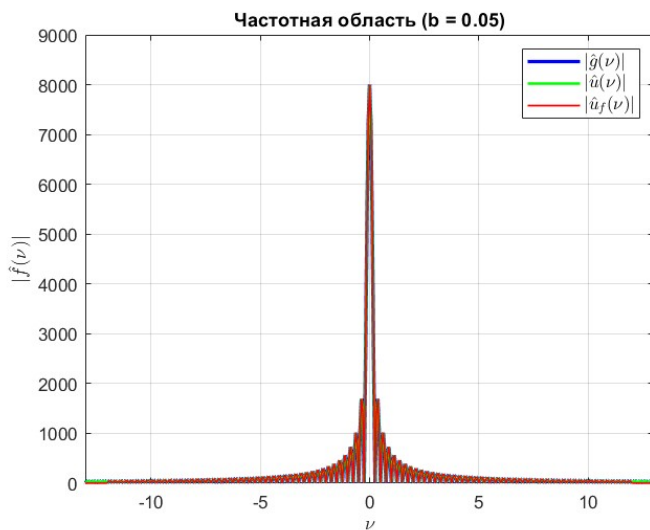


Рис. 26. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов при $b = 0.05$.

Охарактеризуем имеющиеся графические результаты.

На рисунке 15 при $b = 10$ шум доминирует над сигналом, импульс практически незаметен. Фильтр не подавляет шум из-за широкополосного спектра. Графики модулей сигналов на рисунке 16 сильно различаются, значит, сигнал не сохраняется, присутствует довольно сильный шум. Следовательно, фильтрованный сигнал сильно зашумлен, фильтрация неэффективна.

При $b = 2.5$ на рисунке 17 шум заметен, но импульс различим. Фильтр все еще неэффективен. На рисунке 18 видны различия между исходным и восстановленным сигналом: он сохраняется, но искажения присутствуют. Таким образом, для лучшего подавления шума можно, например, уменьшить ν_0 .

На рисунке 19 при $b = 1.25$ шум ослаблен, но все еще сильно влияет на качество сигнала. Фильтр проявляет себя лучше, чем в ситуации на рисунке 17. На рисунке 20 заметны явные отличия между графиками, что говорит о низкой эффективности фильтрации. Значит, фильтр с $\nu_0 = 12$ слишком широкий для такого уровня шума.

На рисунках 21, 23, 25 при $b = 0.25$, $b = 0.1$ и $b = 0.05$ соответственно видны лишь небольшие искажения сигнала. Различия между графиками исходного и фильтрованного сигналов на рисунках 9, 11 и 13 минимальны, что говорит о высокой эффективности фильтрации, а также показывает, что шум становится незначительным. На рисунке 21 сигнал после фильтрации все еще содержит небольшие шумы. Однако уже при $b = 0.1$ и $b = 0.05$ шумы ослабевают, графики модуля Фурье-образа исходного и фильтрованного сигналов полностью совпадают, а исходный сигнал успешно сохраняется.

Таким образом, можно утверждать, что с уменьшением параметра b , иначе говоря с ослаблением шумов, возрастает эффективность фильтрации.

Приведем на рисунке 27 результаты применения фильтра нижних частот для наиболее показательных значений – $b = 0.25$, $\nu_0 = 12$.

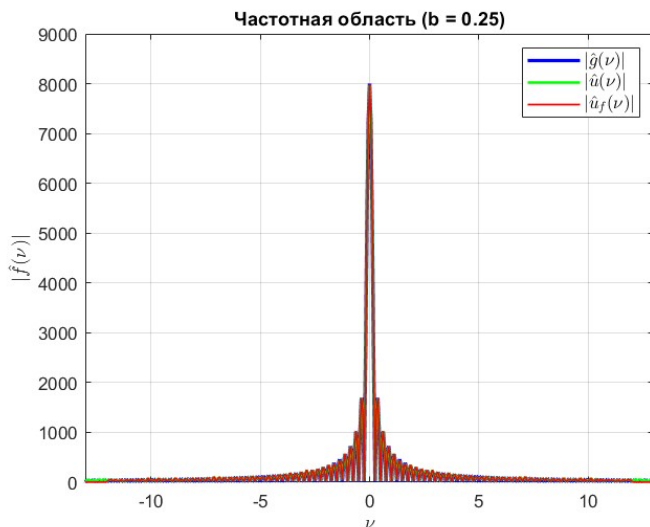


Рис. 27. Графики модуля Фурье-образа исходного $\hat{g}(\nu)$, зашумленного $\hat{u}(\nu)$ и фильтрованного $\hat{u}_f(\nu)$ сигналов для наиболее показательных значений.

Таким образом, можно отметить, что на рисунке 27 видно практически полное совпадение графиков модулей, что говорит о высокой эффективности фильтра и отличном сохранении полезного сигнала.

Заметим, что фильтр эффективно подавляет высокочастотный шум, но при слишком малом ν_0 может возникать потеря деталей сигнала.

Кроме того, резкое обнуление частот приводит к колебаниям во временной области, возникает эффект Гиббса. Это проявляется в «размытии» импульса. Следовательно, использование плавных фильтров (например, Гауссова) помогает уменьшить искажения.

1.1.1 Выводы.

Обобщим результаты выполнения данного задания.

Параметр ν_0 связывает подавление шума и сохранение сигнала: при малых ν_0 шум удастся подавить, но сигнал подвергается искажениям. При больших ν_0 сигнал сохраняется, но шумы все-таки присутствуют.

Параметр b определяет степень зашумленности сигнала: при большом значении параметра, то есть при значительных шумах, требуется использовать узкий фильтр для подавления шума. В случае же малых b можно взять фильтр пошире, поскольку шум слабый.

Фильтрация – это баланс между сохранением сигнала и подавлением шума. Значит, для импульсных сигналов с широким спектром лучше использовать плавные фильтры вместо прямоугольных, чтобы минимизировать эффект Гиббса.

При сильном шуме $b \geq 1$ стоит уменьшать ν_0 и отслеживать искажения сигнала. При слабом шуме $b \leq 0.5$ можно использовать широкий фильтр для точного восстановления сигнала.

Следовательно, частотная фильтрация является мощным инструментом сохранения полезного сигнала, который требует тщательного подбора параметров.

1.2 Убираем специфические частоты.

Примем все параметры b, c, ω ненулевыми. Пусть их значения будут следующими.

$$b = 0.35, \quad c = 1.2, \quad \omega = 0.75 \cdot 2\pi$$

Приведем [график](#) зашумленного сигнала при таких параметрах.

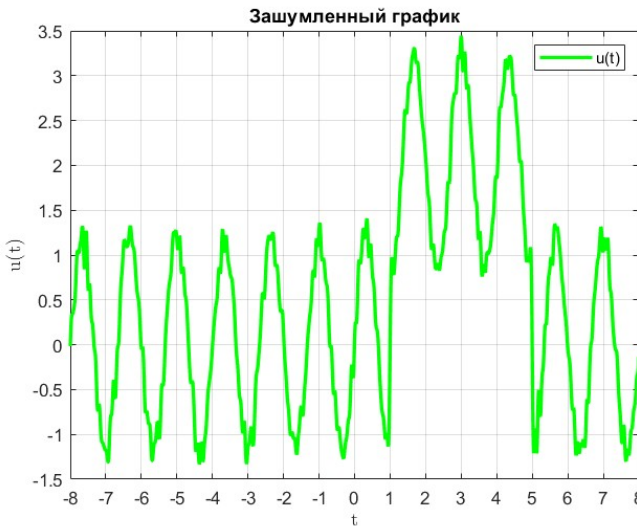


Рис. 28. График зашумленного сигнала при $b = 0.35, c = 1.2, \omega = 0.75 \cdot 2\pi$.

Сконструируем совмещенный фильтр, выбрав сначала гармонику, которую будем подавлять.

$$\nu_{harmonic} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0.75 \cdot 2\pi}{2\pi} = 0.75 \text{ Гц}$$

Выберем теперь множество значений ν_0 .

$$\nu_0 = \{0.5, 3.95, 8, 12\}$$

Найдем Фурье-образ сигнала и обнулим его значения совмещенным фильтром, подавляющим независимо случайные помехи и определенную гармонику. Затем выполним обратное преобразование Фурье. Построим графики для обозначенных значений и всех частот среза из множества.

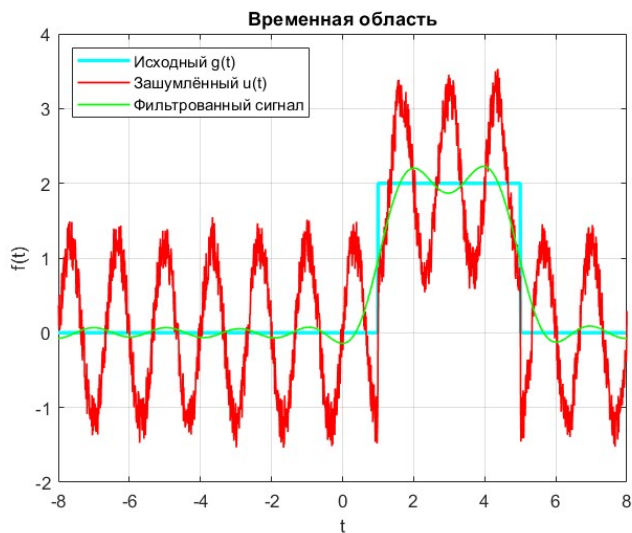


Рис. 29. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $\nu_0 = 0.5$ Гц.

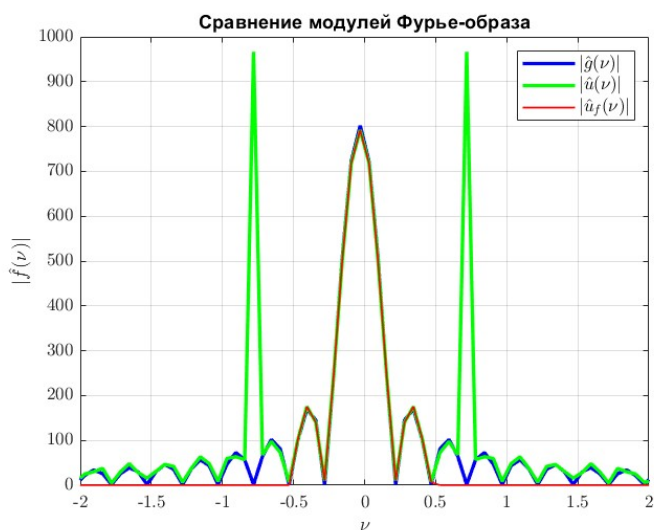


Рис. 30. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $\nu_0 = 0.5$ Гц.

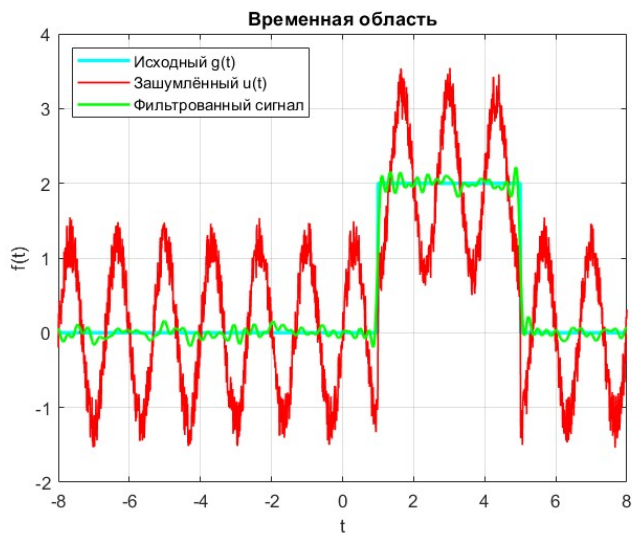


Рис. 31. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $\nu_0 = 3.95$ Гц.

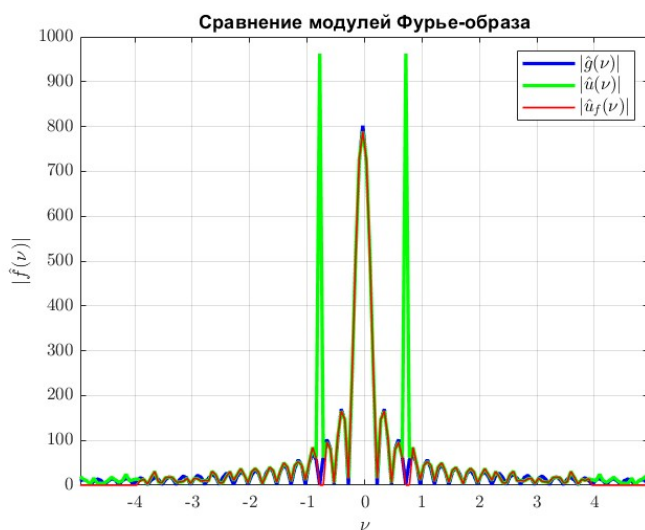


Рис. 32. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $\nu_0 = 3.95$ Гц.

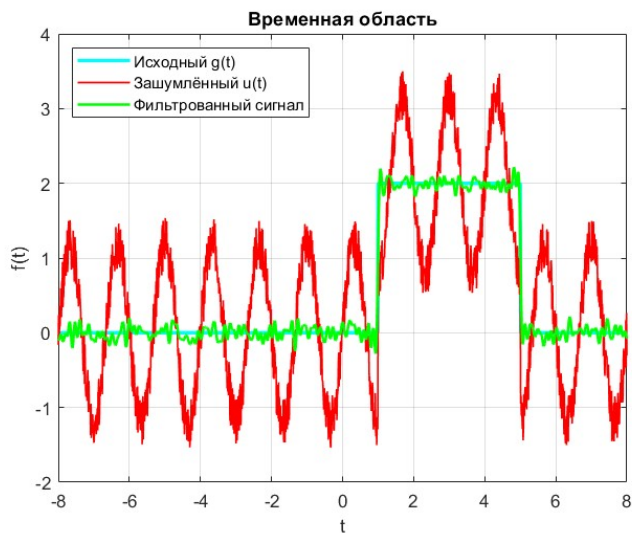


Рис. 33. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $\nu_0 = 8$ Гц.

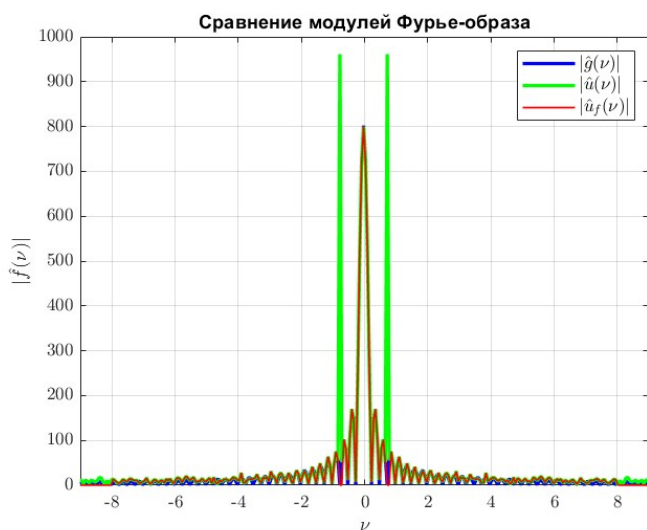


Рис. 34. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $\nu_0 = 8$ Гц.

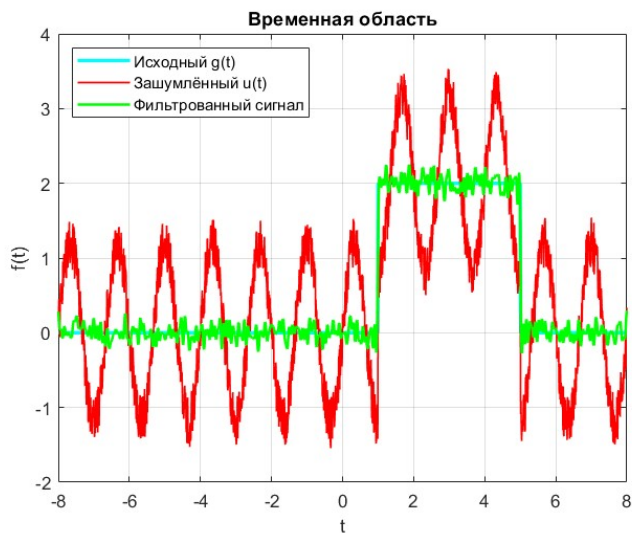


Рис. 35. Исходный, зашумленный и фильтрованный сигнал при $\nu_0 = 12$ Гц.

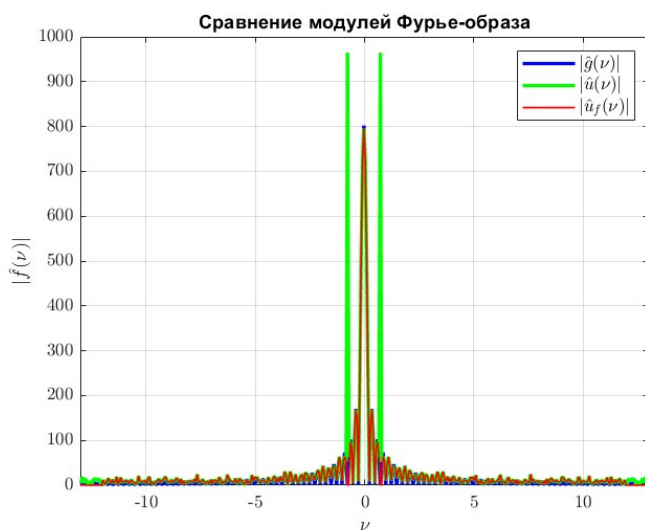


Рис. 36. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $\nu_0 = 12$ Гц.

Проанализируем полученные графики и опишем влияние частоты среза на вид помехи и эффективность фильтрации.

На рисунке 29 при $\nu_0 = 0.5 \text{ Гц}$ фильтр показывает высокую эффективность: он подавляет все частоты выше, включая значительную часть шума. На рисунке 30 видно, что гармоника $\nu_{harmonic}$ полностью подавлена: фильтр ослабляет её амплитуду. Сигнал имеет искажения, поскольку высокие частоты обрезаны, края импульса размыты. Таким образом, удастся подавить шум, однако форма сигнала нарушена, выбранная гармоника ослаблена полностью.

На рисунке 31 при $\nu_0 = 3.95 \text{ Гц}$ фильтр подавляет шум с умеренной эффективностью подавления шума: он сохраняет больше высокочастотных компонент, шум все еще присутствует. На рисунке 32 видно, что подавление гармоники $\nu_{harmonic}$ выполнено приемлемо: искажения сигнала по-прежнему присутствуют. Следовательно, сигнал сохранён, но гармоническая помеха и шум остаются заметными.

При $\nu_0 = 8 \text{ Гц}$ на рисунке 33 фильтр малоэффективен: шум практически не подавляется. На рисунке 34 заметно удовлетворительное подавление гармоники $\nu_{harmonic}$. Значит, хоть гармоника и подавлена, шум вызывает заметные искажения в сигнале.

При $\nu_0 = 12 \text{ Гц}$ на рисунке 35 ситуация практически не отличается от случая на рисунке 33: присутствует сильный шум, фильтр фактически бесполезен. Подавление гармоники $\nu_{harmonic}$ на рисунке 36 слабо влияет на общую сохранность сигнала: все помехи сохраняются. Таким образом, при сравнительно больших ν_0 фильтрация становится крайне неэффективной, оставляя сигнал зашумленным.

Выберем в качестве наиболее показательного значения $\nu_0 = 2.2 \text{ Гц}$: оно позволяет достичь компромисса между подавлением шума и сохранением сигнала.

Перейдем к исследованию влияния других параметров – b, c, ω . Начнем с рассмотрения случая $b = 0$, который в соответствии с формулой (1) отвечает ситуации, где отсутствует белый шум. Приведем наборы значений параметров c, ω , чтобы оценить их влияние на вид помехи и эффективность фильтрации:

$$c = 0.4, \quad \omega = 3.2 \cdot 2\pi$$

$$c = 2.2, \quad \omega = 5 \cdot 2\pi$$

$$c = 1, \quad \omega = 2 \cdot 2\pi.$$

Построим графики для выбранных наборов значений параметров.

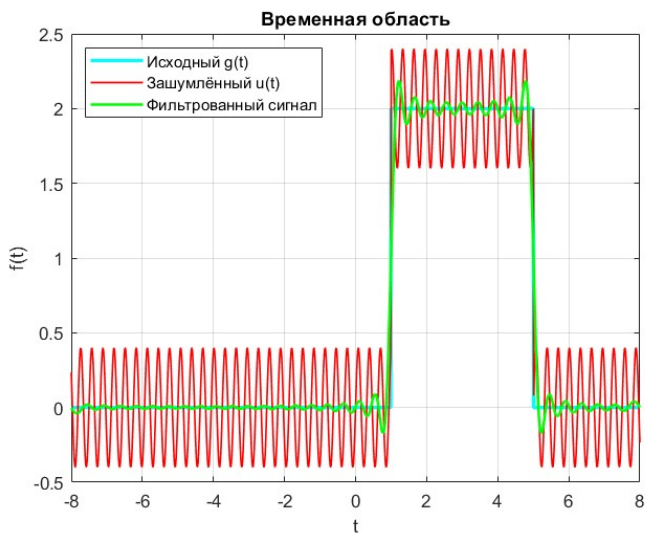


Рис. 37. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $c = 0.4, \omega = 3.2 \cdot 2\pi$.

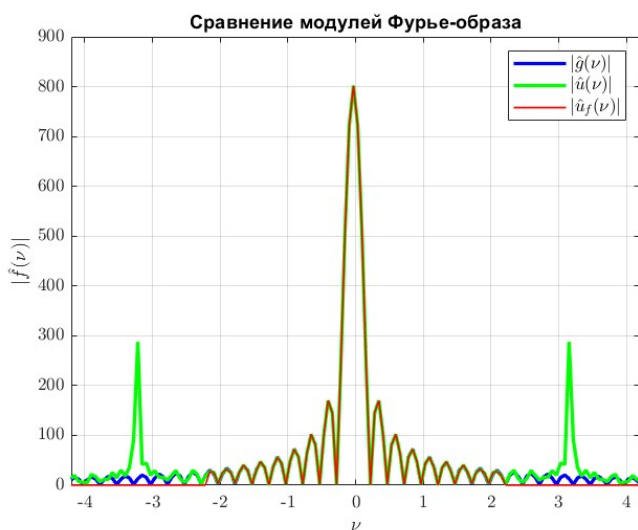


Рис. 38. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $c = 0.4, \omega = 3.2 \cdot 2\pi$.

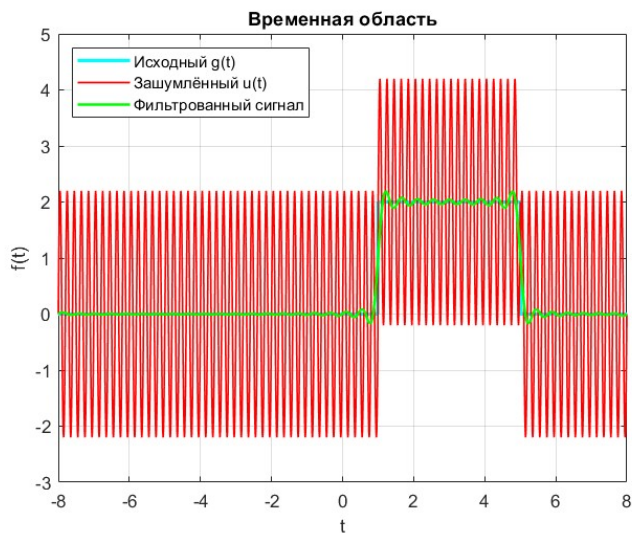


Рис. 39. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $c = 2.2, \omega = 5 \cdot 2\pi$.

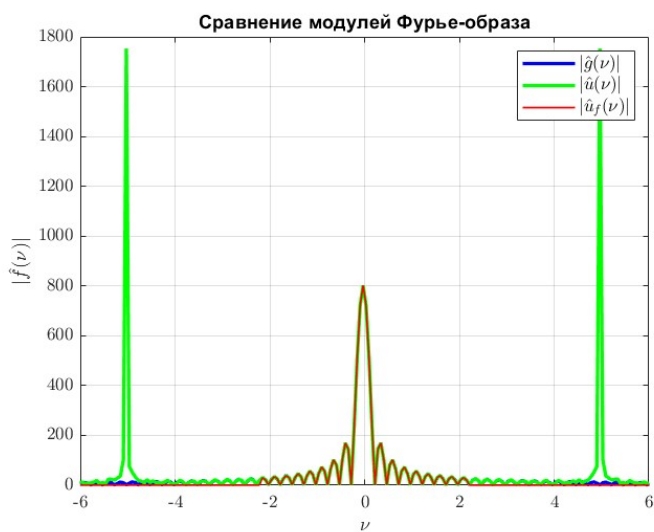


Рис. 40. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $c = 2.2, \omega = 5 \cdot 2\pi$.

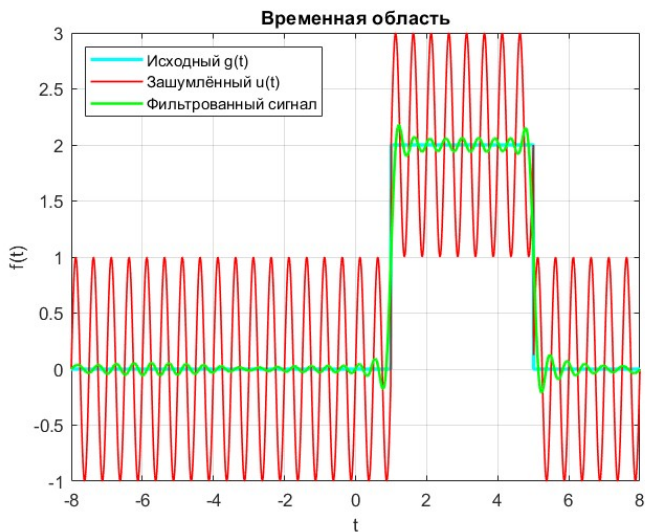


Рис. 41. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $c = 1, \omega = 2 \cdot 2\pi$.

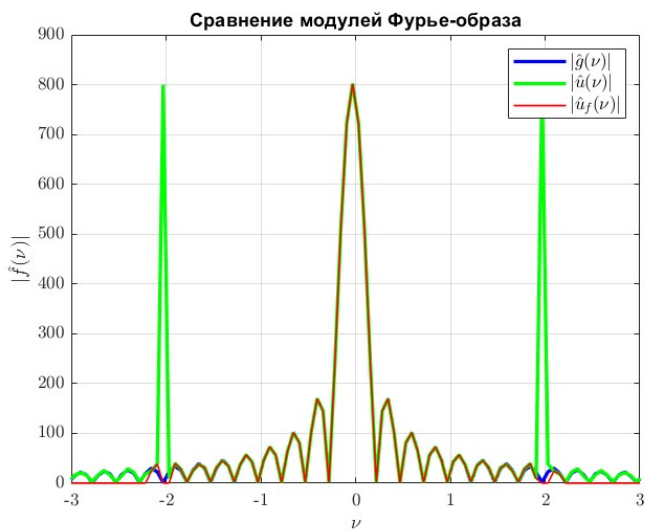


Рис. 42. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $c = 1, \omega = 2 \cdot 2\pi$.

Проанализируем полученные графические результаты.

На рисунке 37 помеха имеет небольшую амплитуду и высокую частоту. Гармоника, имеющая частоту $\nu_{\text{harmonic}} = 3.2 \text{ Гц}$, полностью подавляется фильтром на рисунке 38. Искажения сигнала минимальны, поскольку сигнал сосредоточен в низкочастотной области. Таким образом, фильтр показывает высокую эффективность, сигнал сохраняется с минимальными искажениями.

На рисунке 39 представлена ситуация, где высокочастотная помеха имеет большую амплитуду. Фильтр ослабляет амплитуду гармоник с частотой $\nu_{\text{harmonic}} = 5 \text{ Гц}$ на рисунке 40. Эффективность фильтрации сравнительно высока: помеха подавляется, низкочастотные компоненты полезного сигнала сохраняются. Значит, качественная фильтрация и сохранение исходного сигнала обеспечиваются тщательной настройкой фильтра.

На рисунке 41 представлена помеха со средней частотой и умеренной амплитудой. Она увеличивает колебания полезного сигнала. На рисунке 42 гармоника частоты $\nu_{\text{harmonic}} = 2 \text{ Гц}$ подавляется фильтром, что вносит малые изменения в сигнал. Эффективность фильтрации высока: помехи подавляются, исходный сигнал сохраняется. Следовательно, использование совмещенного фильтра обеспечивает лучший баланс подавления шума и сохранения сигнала.

Кроме того, можно отметить, что из-за $b = 0$, то есть отсутствия белого шума, применение фильтра нижних частот не требуется. Шумы отсутствуют, следовательно, фильтрация бессмысленна.

Сделаем вывод о влиянии параметров c и ω на вид помехи и эффективность фильтрации.

1. Параметр c .

С увеличением c возрастает амплитуда помехи, что увеличивает зашумленность исходного сигнала. Высокая амплитуда помехи требует более жесткого подавления. Это может привести к искажению полезного сигнала, особенно если спектр помехи частично перекрывается с ним. Для таких случаев предпочтительнее использовать [режекторные фильтры](#) с увеличенной шириной полосы подавления.

2. Параметр ω .

Параметр ω определяет частоту помехи – быстроту осцилляции. Высокочастотные помехи легко подавляются фильтром нижних частот, так как их спектр находится в зоне, которую можно обнулить без существенной потери полезного сигнала. Низкочастотные помехи требуют применения режекторного фильтра.

Рассмотрим ситуацию с сильным шумом при $b = 1.1$ и следующих значениях параметров c и ω :

$$c = 1.2, \quad \omega = 0.8 \cdot 2\pi$$

$$c = 0.6, \quad \omega = 1.5 \cdot 2\pi.$$

Построим графики, которые позволят проанализировать влияние каждого из параметров b, c, ω .

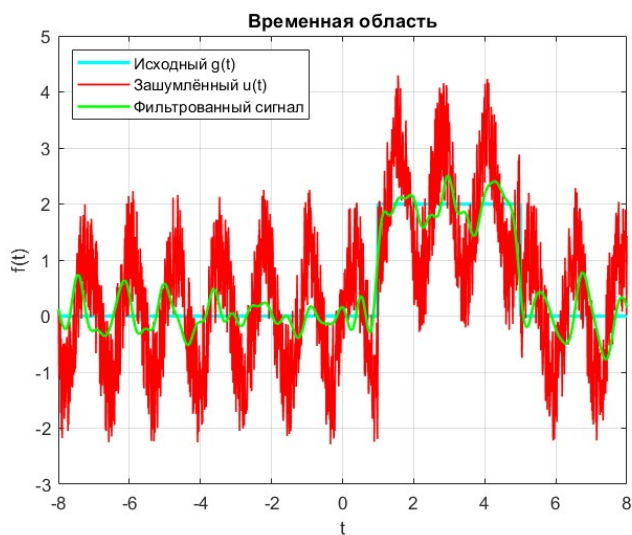


Рис. 43. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $b = 1.1, c = 1.2, \omega = 0.8 \cdot 2\pi$.

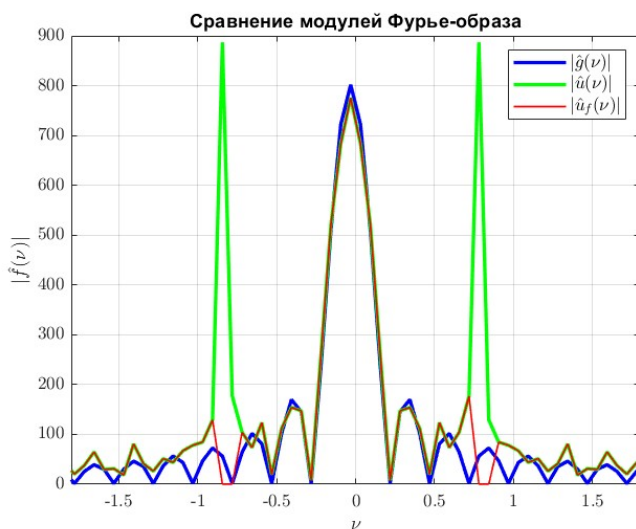


Рис. 44. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $b = 1.1$, $c = 1.2$, $\omega = 0.8 \cdot 2\pi$.

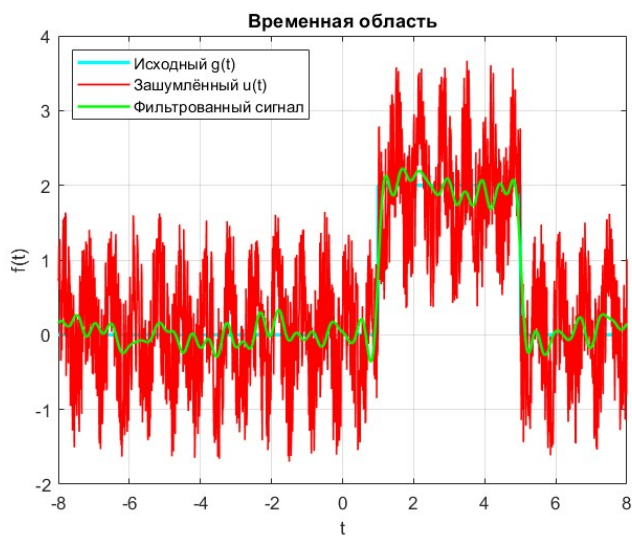


Рис. 45. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $b = 1.1, c = 0.6, \omega = 1.5 \cdot 2\pi$.

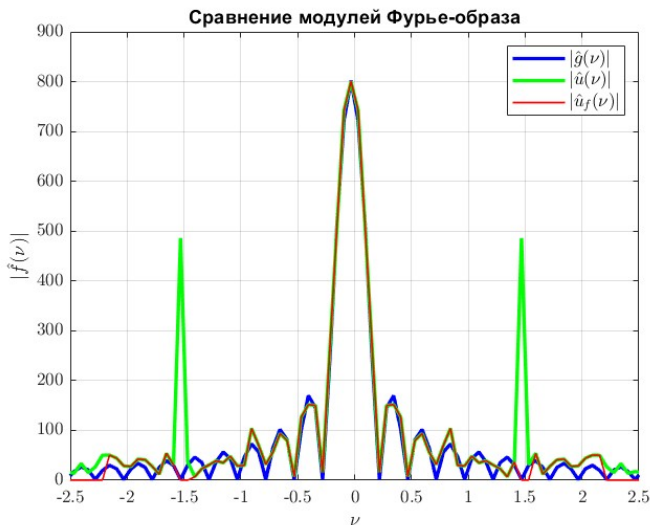


Рис. 46. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $b = 1.1$, $c = 0.6$, $\omega = 1.5 \cdot 2\pi$.

Оценим приведенные графики.

На рисунке 43 рассматривается низкочастотная помеха, имеющая сравнительно высокую амплитуду. Она вызывает медленные колебания, накладываясь на полезный сигнал. Высокая амплитуда делает её доминирующей в низкочастотной части спектра. На рисунке 44 гармоника $\nu_{harmonic} = 0.8 \text{ Гц}$ подавлена, но фильтр неэффективен: присутствует искажения сигнала, сохраняются шумы. Таким образом, фильтр посредственно справляется с задачей, сохраняя шумы и добавляя искаженность сигнала.

На рисунке 45 представлена помеха со средней частотой и низкой амплитудой, которая вызывает умеренные колебания, частично перекрываясь со спектром полезного сигнала. Гармоника $\nu_{harmonic} = 1.5 \text{ Гц}$ подавлена на рисунке 46, что приводит к малым искажениям сигнала. Фильтр показывает среднюю степень эффективности: шум и помеха подавлены, однако присутствуют умеренные искажения сигнала. Следовательно, для обеспечения качественной фильтрации требуется точная настройка совмещенного фильтра.

Опишем влияние каждого из коэффициентов на вид помехи и эффективность фильтрации.

1. Параметр b .

Он определяет степень зашумленности сигнала, в зависимости от которой стоит применить определенный фильтр. С увеличением параметра b возрастает шум, увеличивается сложность фильтрации и снижается эффективность фильтра.

2. Параметр c .

Он регулирует амплитуду помехи: высокая амплитуда, то есть относительно большое значение параметра усложняет фильтрацию, а низкая амплитуда, иначе говоря, малая величина параметра, упрощает подавление.

3. Параметр ω .

Он влияет на частоту помехи: низкочастотные помехи требуют фильтра, подавляющего гармонику, помехи средней частоты могут быть подавлены совмещенным фильтром, а высокочастотные помехи без труда удаляются фильтром низких частот.

Заметим, что полученные результаты согласуются со сделанными ранее [наблюдениями](#).

Выберем умеренный уровень шума $b = 0.6$ и следующие значения параметров c и ω :

$$c = 3, \quad \omega = 3 \cdot 2\pi$$

$$c = 2, \quad \omega = 1 \cdot 2\pi$$

Приведем графики, чтобы проанализировать влияние параметров b, c, ω .

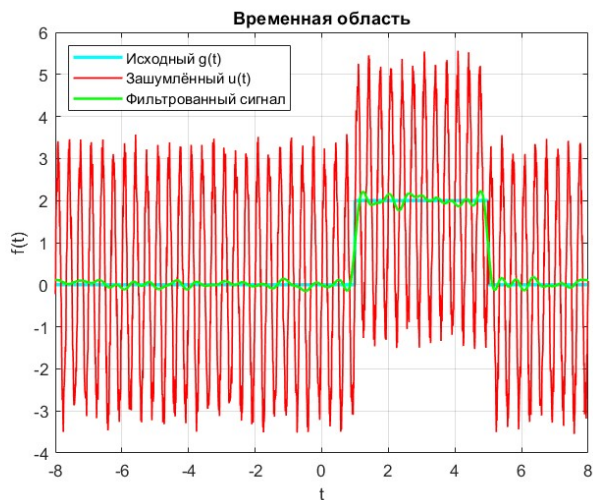


Рис. 47. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $b = 0.6, c = 3, \omega = 2 \cdot 2\pi$.

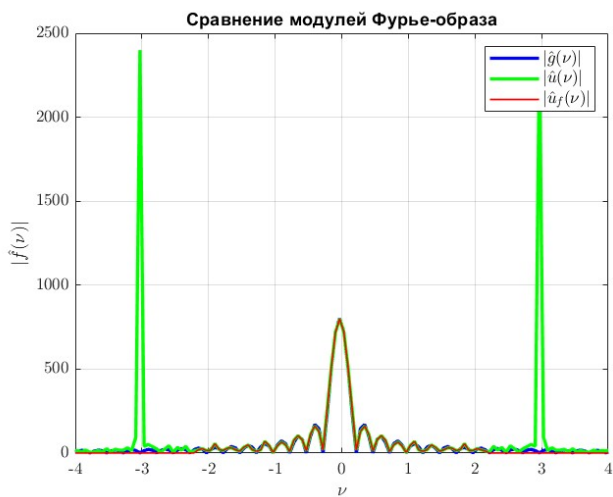


Рис. 48. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $b = 0.6, c = 3, \omega = 2 \cdot 2\pi$.

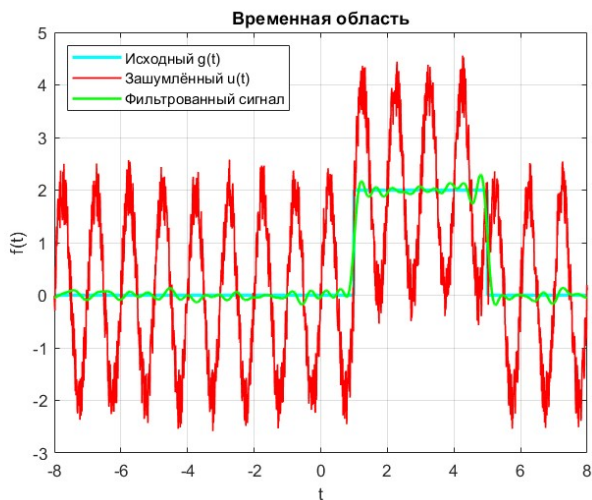


Рис. 49. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $b = 0.6, c = 2, \omega = 1 \cdot 2\pi$.



Рис. 50. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $b = 0.6, c = 2, \omega = 1 \cdot 2\pi$.

Проанализируем имеющиеся графические результаты.

На рисунке 47 представлена высокочастотная помеха с высокой амплитудой. Она добавляет высокочастотные колебания с большой амплитудой, искажая полезного сигнала. На рисунке 48 видно подавление гармоник $\nu_{harmonic} = 2 \Gamma_{\mathcal{U}}$, которое снижает искажения сигнала. Эффективность фильтрации высока: помеха полностью устраняется, высокочастотные компоненты полезного сигнала сглаживаются. Таким образом, удается частично подавить шум, обеспечив приемлемое сохранение сигнала.

На рисунке 49 рассматривается низкочастотная помеха с высокой амплитудой, которая вызывает медленные колебания, искажающие полезный сигнал. Амплитуда гармоник $\nu_{harmonic} = 1 \Gamma_{\mathcal{U}}$ обнулена на рисунке 50, что минимизирует искажения сигнала. Фильтрация выполнена довольно эффективно: помеха устранена полностью, сигнал сохраняется, но присутствуют малые шумы. Таким образом, фильтрация выполнена оптимально и качественно.

Отметим влияние каждого из параметров на вид помехи и эффективность фильтрации.

1. Параметр b .

Определяет уровень шума в сигнале: чем больше b , тем сильнее шум и сложнее фильтрация.

2. Параметр c .

Регулирует амплитуду помехи: чем больше c , тем выше амплитуда и труднее фильтрация.

3. Параметр ω .

Влияет на частоту помехи: чем ниже частота помехи, тем тщательнее должен быть процесс фильтрации.

Отметим, что в этом случае выводы подтверждают замечания сделанные выше.

1.2.1 Выводы.

Сделаем выводы на основе имеющихся результатов.

Частота среза ν_0 отвечает за соблюдение баланса между подавлением шумов и сохранением исходного сигнала.

Изменение коэффициентов b , c и ω оказывает влияние на характер помех и эффективность их фильтрации. Коэффициент b , отвечающий за уровень белого шума, определяет общую зашумленность сигнала. При увеличении b шум становится более выраженным, что требует применения более жестких методов фильтрации, например, сужения полосы пропускания фильтра нижних частот. Однако это может привести к искажению полезного сигнала из-за эффекта Гиббса. Для минимизации таких искажений можно использовать плавные фильтры.

Коэффициент c , задающий амплитуду гармонической помехи, влияет на заметность помехи в сигнале. Высокие значения c делают гармонику доминирующей в спектре, что затрудняет выделение полезного сигнала. В таких случаях критически стоит применять фильтр, подавляющий конкретную частоту помехи.

Частота гармоники ω определяет, в какой области спектра сосредоточена помеха. Низкочастотные помехи сложно отделить от полезного сигнала, так как их спектры перекрываются. Для их подавления необходим фильтр, подавляющий гармонику. Высокочастотные помехи легче устранить с помощью фильтра низких частот, но при высокой амплитуде они могут искажать исходный сигнал. Помехи средней частоты требуют использования совмещенного фильтра.

Коэффициенты c и ω определяют сложность задачи фильтрации. Высокая амплитуда или низкая частота помехи требуют более тщательной фильтрации, например, **адаптивные фильтры**, чтобы минимизировать искажения полезного сигнала.

Таким образом, совмещенный фильтр позволяет соблюдать баланс между подавлением помех и сохранением исходного сигнала, что дает возможность достичь высокой точности и минимальных искажений.

1.3 Убираем низкие частоты?

Рассмотрим фильтр, который обнуляет Фурье-образ на всех частотах в некоторой окрестности точки $\nu = 0$. Иначе говоря, требуется использовать фильтр верхних частот. Определим параметры рассматриваемого сигнала.

$$b = 0.4, \quad c = 0.5, \quad \omega = 15 \cdot 2\pi.$$

Рассмотрим множество частот среза ν_0 .

$$\nu_0 = \{0.0001, 0.8, 2\}$$

Воспользуемся программой для выполнения фильтрации и построения соответствующих графиков для разных частот среза.

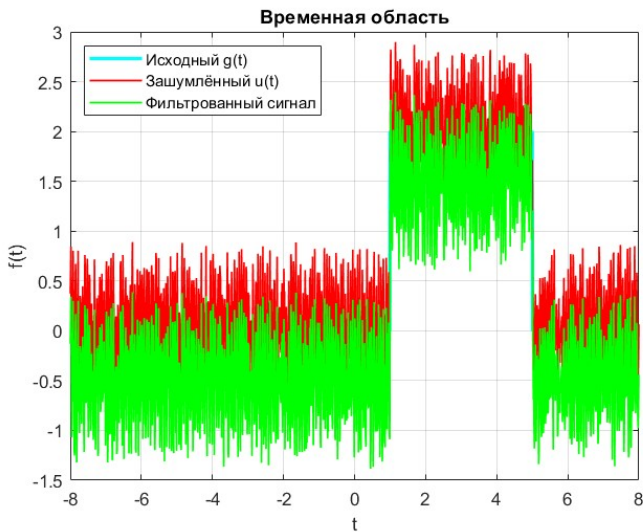


Рис. 51. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $\nu_0 = 0.0001$ Гц.

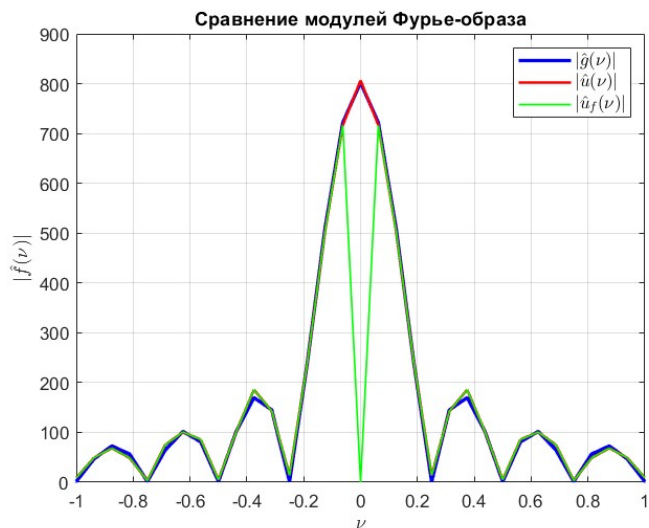


Рис. 52. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $\nu_0 = 0.0001$ Гц.

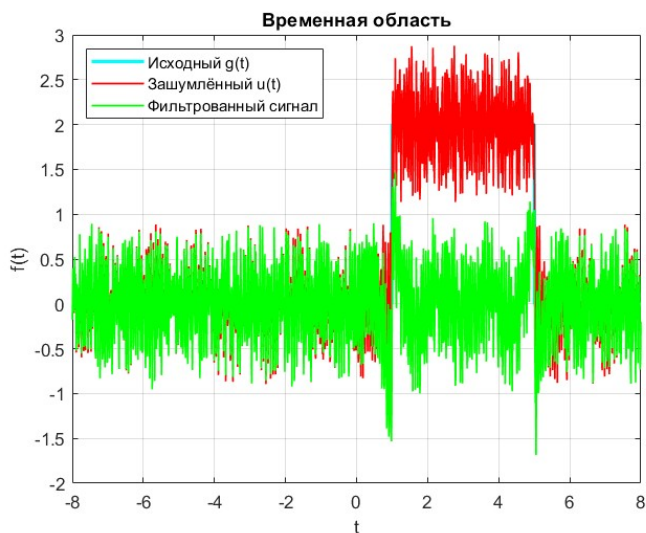


Рис. 53. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $\nu_0 = 0.8$ Гц.



Рис. 54. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $\nu_0 = 0.8$ Гц.

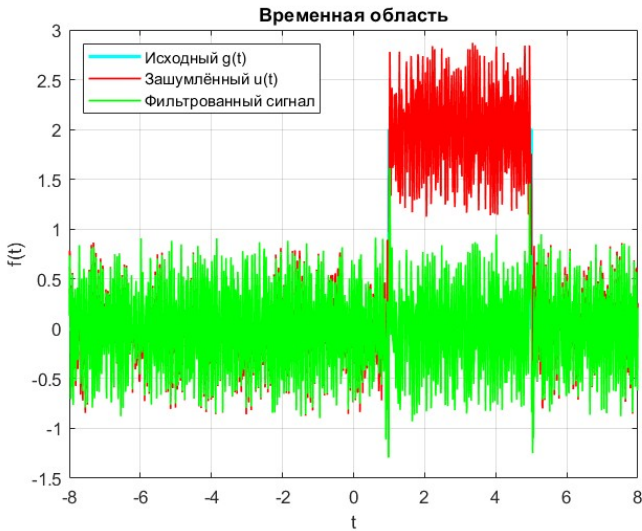


Рис. 55. Исходный, зашумленный, фильтрованный сигнал при $\nu_0 = 2$ Гц.



Рис. 56. Графики модуля Фурье-образа исходного, зашумленного и фильтрованного сигналов при $\nu_0 = 2$ Гц.

Сделаем выводы на основании имеющихся графиков.

На рисунке 51 использование фильтра высоких частот самое эффективное среди рассматриваемых случаев. Такая высокая эффективность связана с очень маленьким значением ν_0 , а значит с малым диапазоном частот, где они подавляются. На рисунке 52 видно довольно хорошее совпадение графиков, что связано с выбором наиболее показательной частоты для использования фильтра верхних частот в случае рассматриваемой конфигурации сигнала. Таким образом, при $\nu_0 = 0.0001$ Гц фильтрованный сигнал слегка похож на зашумленный: шумы остаются и фильтрацию не удастся выполнить.

При $\nu_0 = 0.8$ на рисунке 53 и $\nu_0 = 2$ на рисунке 55 фильтрованный сигнал сильно отличается от зашумленного при $t \in [1, 5]$, иначе говоря, использование фильтра верхних частот сильно искажает сигнал, оставляет шумы, что делает фильтрацию бессмысленной. На рисунках 54 и 56 графики модуля Фурье-образа исходного и фильтрованного сигналов практически не совпадают в наиболее значимой части спектра частот, доказывая неэффективность использования такого фильтра.

Таким образом, использование фильтра верхних частот для прямоугольного сигнала бессмысленно, поскольку не только не решает задачу фильтрации, но и искажает исходный сигнал.

1.3.1 Выводы.

Сделаем выводы, проанализировав полученные результаты.

Анализ работы фильтра верхних частот с различными частотами среза показал его неэффективность для подавления шумов в прямоугольном сигнале. При крайне малой частоте среза ($\nu_0 = 0.0001 \Gamma_{\text{ц}}$) фильтр практически не влияет на зашумленный сигнал: шумы сохраняются, а форма сигнала слегка близка к исходной. Это связано с минимальным диапазоном подавляемых частот, что делает фильтрацию бессмысленной.

При увеличении частоты среза до ($\nu_0 = 0.8 \Gamma_{\text{ц}}$) и ($\nu_0 = 2 \Gamma_{\text{ц}}$) фильтр начинает существенно искажать полезный сигнал, особенно в интервале $t \in [1, 5]$. Наблюдается сглаживание сигнала, при этом шумы не устраняются. Сравнение спектров исходного и фильтрованного сигналов демонстрирует отсутствие совпадения в значимой части частотного диапазона, что подтверждает неэффективность фильтра верхних частот.

1.4 Выводы.

Сделаем выводы на основе результатов выполнения задания 1:

1. Частота среза фильтра ν_0 позволяет достичь компромисс между подавлением шума и сохранением полезного сигнала. При малых ν_0 фильтр искажает сигнал, а при больших значениях становится неэффективным против шума.
2. Уровень шума b определяет необходимость ужесточения фильтрации. При значительных шумах требуется использовать малую частоту среза ν_0 , тогда как при слабых шумах допустимо использование широкополосных фильтров.
3. Гармонические помехи с высокой амплитудой требуют применения фильтров, подавляющих гармонику, тогда как для низких достаточно фильтра нижних частот.
4. Низкочастотные помехи сложно отделить от полезного сигнала, что требует тщательной настройки фильтра. Высокочастотные помехи эффективно подавляются фильтром нижних частот.
5. Использование фильтра верхних частот для прямоугольных сигналов приводит к сильным искажениям и не решает задачу подавления шума.
6. Совмещённые фильтры демонстрируют наилучшую эффективность при наличии как шума, так и гармонических помех.
7. Спектральный анализ позволяет увидеть зоны перекрытия полезного сигнала и помех, что упрощает выбор параметров фильтрации.

2 Задание 2. Фильтрация звука.

Скачаем предложенный в задании файл, прослушаем его. Требуется выполнить фильтрацию сигнала таким образом, чтобы остался только голос.

Приведем график исходного сигнала.

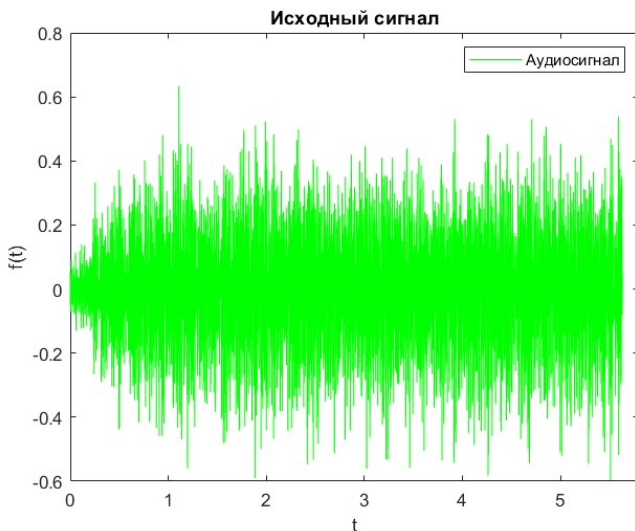


Рис. 57. График файла МУНА.wav.

На рисунке 57 видно, что исходный график содержит значительные шумы.

Построим график модуля Фурье-образа исходного сигнала. Отчетливо видно, что присутствуют значительные шумы.

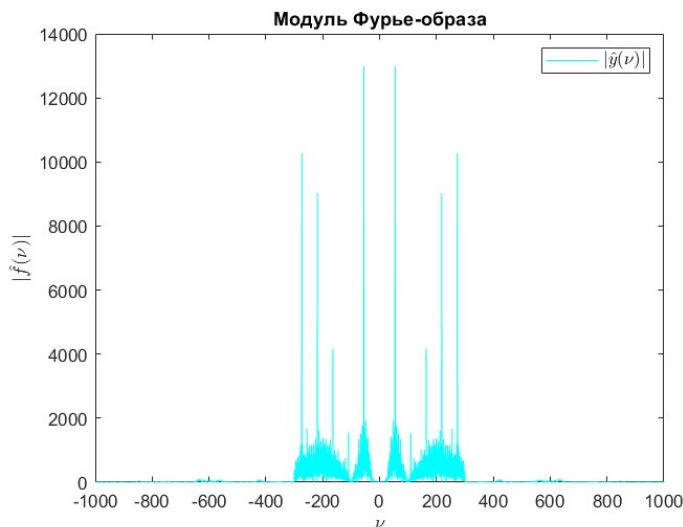


Рис. 58. График модуля Фурье-образа МУНА.wav.

Попробуем избавиться от шума, сконструировав комбинированный фильтр: фильтр низких частот и верхних частот. Использование такого фильтра позволит избавиться как от высокочастотных, так и от низкочастотных шумов, которые заметны на [графике](#) модуля Фурье-образа.

Выберем две частоты среза: ν_t для фильтра высоких частот и ν_l для фильтра низких частот соответственно.

$$\nu_t = 450 \text{ Гц}$$

$$\nu_l = 6500 \text{ Гц}$$

Для выполнения фильтрации обратимся к **советам по использованию Матлаба** и реализуем [программу](#), написанную с использованием пакета прикладных программ MATLAB.

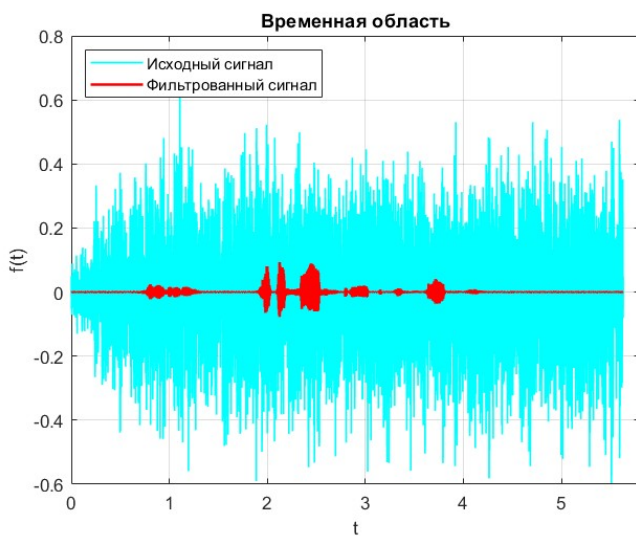


Рис. 59. График исходного и фильтрованного сигналов.

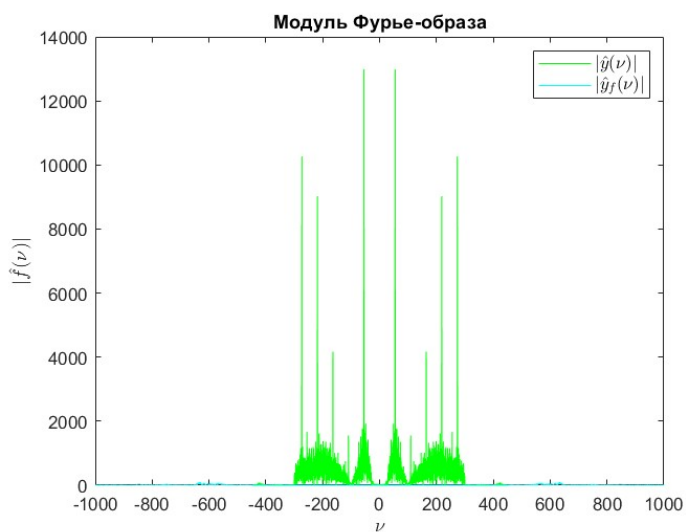


Рис. 60. Графики модуля исходного и фильтрованного сигналов.

На рисунке 59 представлены результаты фильтрации. Видно, что звук стал чище: удалось не только подавить шумы, но и сохранить сигнал. Рисунок 60 показывает высокую эффективность фильтрации – шумы практически отсутствуют.

Таким образом, использование комбинированного фильтра позволило сохранить сигнал и подавить шумы разной частоты.

2.1 Выводы.

Подведем итоги выполнения задания 2.

Использование комбинированного фильтра позволило подавить как высокочастотные, так и низкочастотные шумы. Это подтверждается графиками модуля Фурье-образа (рисунки 58, 60), где спектр отфильтрованного сигнала демонстрирует значительное уменьшение помех.

Выбор $\nu_t = 450 \text{ Гц}$ обеспечил сохранение основных частот голоса, а $\nu_l = 6500 \text{ Гц}$ устранил высокочастотные шумы. Такая тщательная настройка позволила сохранить речевой сигнал и минимизировать его искажения.

Сравнение исходного (рисунок 57) и фильтрованного (рисунок 59) сигналов во временной области показало значительное снижение амплитуды шумов. График после фильтрации (рисунок 60) подтвердил устранение шумовых компонентов в диапазонах фильтрации.

Жёсткая фильтрация с использованием частотных масок эффективна для задач выделения голоса.

Рассмотренный метод применим в системах шумоподавления, телекоммуникациях и обработке аудиозаписей, где требуется точное сохранение речевого сигнала.

3 Выводы по лабораторной работе.

Сделаем выводы на основании результатов выполнения лабораторной работы:

1. Уровень шума определяет необходимость выбора параметров фильтрации. При высоких значениях b требуется ужесточение фильтрации, а при слабом шуме допустимо использование широкополосных фильтров для точного сохранения сигнала.
2. Гармонические помехи с высокой амплитудой требуют применения фильтров, подавляющих конкретную гармонику. Низкочастотные помехи сложнее отделить от полезного сигнала, что требует точной настройки фильтров.
3. Фильтр верхних частот демонстрирует неэффективность для прямоугольных сигналов, так как вызывает значительные искажения и не устраняет шумы.
4. Использование жестких фильтров вызывает эффект Гиббса, который проявляется в «размытии» сигнала. Для минимизации искажений можно применять плавные фильтры.
5. Совмещённые фильтры, сочетающие подавление гармонических помех и шумов, показывают высокую эффективность. При этом достигается баланс между сохранением сигнала и устранением помех.
6. Спектральный анализ позволяет увидеть зоны перекрытия полезного сигнала и помех, что упрощает выбор частот среза и определение параметров фильтрации.
7. Для аудиосигналов комбинированные фильтры, состоящие из фильтров низких и высоких частот, эффективно устраняют широкополосные шумы. При этом достигается подавление шума и сохранение исходного сигнала.
8. Низкочастотные помехи требуют узкополосной фильтрации, тогда как высокочастотные успешно подавляются фильтрами нижних частот.
9. Практическим барьером фильтрации является требуемый компромисс между уровнем подавления шума и сохранением сигнала.
10. Имеется необходимость адаптации параметров фильтра под конкретные условия: анализ спектра для его настройки, выбор плавных фильтров для минимизации искажений или комбинирование фильтров.

Приложение

```
1 % Параметры временной и частотной осей
2 T = 16; % Большой интервал времени
3 dt = 0.01; % Маленький шаг дискретизации
4 t = -T/2 : dt : T/2; % Набор временных шагов
5 V = 1/dt; % Ширина диапазона частот
6 dv = 1/T; % Шаг частоты
7 v = -V/2 : dv : V/2; % Набор частот для FFT
8
9 %Параметры функции
10 a = 2;
11 t_1 = 1;
12 t_2 = 5;
13 b = 0;
14 c = 0;
15 w = 0;
16
17 g = zeros(size(t)); % Инициализация нулями
18 g(t >= t_1 & t <= t_2) = a; % Значения функции g(t)
19 xi = 2*rand(size(t))- 1; % Дискретные значения шума
20 u = g + b*xi + c*sin(w*t); % Зашумленная версия g(t)
21
22 % Построение графика во временной области
23 figure;
24 plot(t, g, 'LineWidth', 2, 'Color','green');
25 legend('g(t)');
26 grid on;
27 xlabel('t');
28 ylabel('g(t)');
29 xticks(-T/2:1:T/2);
30 xlim([-T/2, T/2]);
31 ylim([-0.5, a+1]);
```

Листинг 1. Программа, используемая для построения графика исходной функции.

```

1 % Параметры временной и частотной осей
2 T = 16; % Большой интервал времени
3 dt = 0.001; % Маленький шаг дискретизации
4 t = -T/2 : dt : T/2; % Набор временных шагов
5 V = 1/dt; % Ширина диапазона частот
6 dv = 1/T; % Шаг частоты
7 v = -V/2 : dv : V/2; % Набор частот для FFT
8
9 %Параметры функции
10 a = 2;
11 t_1 = 1;
12 t_2 = 5;
13 b = 0.25;
14 c = 0;
15 w = 0;
16 nu0 = 12;
17 %nu_0 = [1, 2, 5, 10, 1.75, 1.9];
18 %bs = [10, 2.5, 1.25, 0.25, 0.1, 0.05];
19
20 for i = 1:length(nu_0)
21     g = zeros(size(t)); % Инициализация нулями
22     g(t >= t_1 & t <= t_2) = a; % Значения функции g(t)
23     xi = 2*rand(size(t))- 1; % Дискретные значения шума
24     u = g + b*xi + c*sin(w*t); % Зашумленная версия g(t)
25
26     U = fftshift(fft(u)); % Прямое преобразование Фурье
27     G = fftshift(fft(g)); % Прямое преобразование Фурье
28
29     U_filtered = U;
30
31     U_filtered(v < -nu0) = 0; % Обнуление значений за пределами отрезка [-nu0, nu0]
32     U_filtered(v > nu0) = 0; % Обнуление значений за пределами отрезка [-nu0, nu0]
33
34     u_filtered = ifft(ifftshift(U_filtered)); % Обратное преобразование Фурье
35
36 % Построение графиков
37 figure;
38 plot(t, u, 'r', 'LineWidth', 1); hold on;
39 plot(t, u_filtered, 'c', 'LineWidth', 1);
40 plot(t, g, 'g', 'LineWidth', 2);
41 xlim([-T/2, T/2]);
42 grid on;
43 xlabel('t');
44 ylabel('f(t)');
45 legend('Зашумлённый u(t)', 'Фильтрованный сигнал', 'Исходный g(t)', 'Location','northwest');
46 %title(sprintf('Сигналы при %f', nu0));

```

```

47 title(sprintf('Сигналы при b = %.2f', b));
48
49 figure;
50 plot(v, abs(G), 'b', 'LineWidth', 2); hold on;
51 plot(v, abs(U), 'g', 'LineWidth', 1.5);
52 plot(v, abs(U_filtered), 'r', 'LineWidth', 1);
53 xlim([-nu0 - 1, nu0 + 1]); grid on;
54 xlabel('$\nu$', 'Interpreter', 'latex');
55 ylabel('$|\hat{f}(\nu)|$', 'Interpreter', 'latex');
56 set(legend('$$|\hat{g}(\nu)|$$', '$$|\hat{u}(\nu)|$$', '$$|\hat{u}_{-f}(\nu)|$$'), 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', 10);
57 %title(sprintf('Частотная область (      = %.2f)', nu0));
58 title(sprintf('Частотная область (b = %.2f)', b));
59 end

```

Листинг 2. Программа, используемая для выполнения задания 1.1.

```

1 % Параметры сигнала
2 a = 2;           % Амплитуда импульса
3 t1 = 1;          % Начало импульса
4 t2 = 5;          % Конец импульса
5 b = 0.25;        % Амплитуда шума
6 nu0 = 12;        % Частота среза фильтра
7
8 % Определение параметров сеток
9 T = 10;          % Общее время
10 dt = 0.01;       % Шаг времени
11 t = -T/2 : dt : T/2;
12 V = 1/dt;        % Максимальная частота
13 dv = 1/T;        % Шаг частоты
14 nu = -V/2 : dv : V/2; % Вектор частот
15
16 % Создание сигналов
17 g = zeros(size(t));
18 g(t >= t1 & t <= t2) = a; % Исходный сигнал
19 xi = 2 * rand(size(t)) - 1; % Белый шум U[-1, 1]
20 u = g + b * xi;      % Зашумлённый сигнал
21
22 % Вычисление Фурье-образов
23 G = fftshift(fft(g)); % Спектр исходного сигнала
24 U = fftshift(fft(u)); % Спектр зашумлённого сигнала
25 u_filtered = U;
26
27 % Применение фильтра нижних частот
28 u_filtered(nu < -nu0) = 0; % Обнуление значений за пределами отрезка
   a [-nu0, nu0]
29 u_filtered(nu > nu0) = 0; % Обнуление значений за пределами отрезка
   [-nu0, nu0]
30
31 % Построение графиков
32 figure;
33 set(gca, 'TickLabelInterpreter', 'latex'); % Включить LaTeX для осей
34 plot(nu, abs(G), 'b', 'LineWidth', 2); hold on;
35 plot(nu, abs(U), 'r', 'LineWidth', 2.5);
36 plot(nu, abs(u_filtered), 'g', 'LineWidth', 1.5);
37 xlim([-2, 2]); % Ограничение для наглядности
38 grid on;
39 xlabel('$\nu$', 'Interpreter', 'latex');
40 ylabel('$|\hat{f}(\nu)|$', 'Interpreter', 'latex');
41 set(legend( '$$|\hat{g}(\nu)|$$', '$$|\hat{u}(\nu)|$$', '$$|\hat{u}_{\{f}(\nu)|$$'), 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', 10);
42 title('Сравнение модулей Фурье-образов');

```

Листинг 3. Программа, используемая для построения графиков модуля Фурье-образа.


```

1 % Параметры сигнала
2 a = 2;           % Амплитуда импульса
3 t1 = 1;          % Начало импульса
4 t2 = 5;          % Конец импульса
5 b = 0.4;         % Амплитуда шума
6 c = 0.5;         % Амплитуда помехи
7 w = 15*2*pi;     % Частота помехи
8 nu0 = 12.3;      % Частота среза фильтра
9
10 % Временная сетка
11 T = 16;          % Общее время
12 dt = 0.01;       % Шаг времени
13 t = -T/2 : dt : T/2;
14
15 % Создание сигналов
16 g = zeros(size(t));
17 g(t >= t1 & t <= t2) = a;           % Исходный сигнал
18 xi = 2 * rand(size(t)) - 1;          % Белый шум U[-1, 1]
19 u = g + b * xi + c*sin(w*t);          % Зашумлённый сигнал
20
21 % Вычисление Фурье-образов
22 G = fftshift(fft(g));                 % Спектр исходного сигнала
23 U = fftshift(fft(u));                 % Спектр зашумлённого сигнала
24 U_filtered = U;
25
26 % Частотная ось
27 V = 1/dt;                             % Максимальная частота
28 dv = 1/T;                             % Шаг частоты
29 nu = -V/2 : dv : V/2;                 % Вектор частот
30
31 % Применение фильтра верхних частот
32 U_filtered(abs(nu) < nu0) = 0; % Обнуление значений внутри отрезка
    [-nu0, nu0]
33
34 % Восстановление сигнала из фильтрованного спектра
35 u_filtered = ifft(ifftshift(U_filtered));
36
37 % Дополнительный график во временной области
38 figure;
39 plot(t, g, 'c', 'LineWidth', 2); hold on;
40 plot(t, u, 'r', 'LineWidth', 1);
41 plot(t, u_filtered, 'g', 'LineWidth', 1);
42 xlim([-T/2, T/2]);
43 grid on;
44 xlabel('t');
45 ylabel('f(t)');
46 legend('Исходный g(t)', 'Зашумлённый u(t)', 'Фильтрованный сигнал',
    'Location','northwest');
47 title('Временная область');
48

```

```
49 % Построение графиков
50 figure;
51 set(gca, 'TickLabelInterpreter', 'latex'); % Включить LaTeX для осей
52 plot(nu, abs(G), 'b', 'LineWidth', 2); hold on;
53 plot(nu, abs(U), 'r', 'LineWidth', 2.5);
54 plot(nu, abs(u_filtered), 'g', 'LineWidth', 1.5);
55 xlim([-2, 2]); % Ограничение для наглядности
56 grid on;
57 xlabel('$\nu$', 'Interpreter', 'latex');
58 ylabel('$|\hat{f}(\nu)|$', 'Interpreter', 'latex');
59 set(legend( '$$|\hat{g}(\nu)|$$', '$$|\hat{u}(\nu)|$$', '$$|\hat{u}_{f}(\nu)|$$'), 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', 10);
60
61 title('Сравнение модулей Фурье-образа');
```

Листинг 4. Программа, используемая для выполнения задания 1.3.

```

1 % Загрузка аудиосигнала
2 [signal, Fs] = audioread('МУНА.wav');
3 signal = mean(signal, 2); % Конвертация в моно
4 t = (0:length(signal)-1)/Fs; % Временная ось
5 N = length(signal);
6 freq = (-Fs/2:Fs/N:Fs/2-Fs/N); % Частотная ось
7
8 % Вычисление Фурье-образа
9 Y_f = fftshift(fft(signal));
10 Y = Y_f;
11
12 % Фильтр нижних частот
13 n_low = 6500; % Частота среза
14 Y(freq > n_low) = 0;
15 Y(freq < -n_low) = 0;
16
17 % Фильтр верхних частот
18 nu_high = 450; % Частота среза
19 Y(abs(freq) < nu_high) = 0;
20 res = ifft(ifftshift(Y));
21
22 % Визуализация результатов
23 figure;
24 plot(t, signal, 'c', 'LineWidth', 1); hold on;
25 plot(t, res, 'r', 'LineWidth', 1.5);
26 xlim([0, 5.8]);
27 grid on;
28 xlabel('t');
29 ylabel('f(t)');
30 legend('Исходный сигнал', 'Фильтрованный сигнал', 'Location','northwest');
31 title('Временная область');
32
33 % Построение графика
34 figure;
35 plot(freq, abs(Y_f), 'Color','g'); hold on;
36 plot(freq, abs(Y), 'Color','c');
37 title('Модуль Фурье-образа');
38 xlabel('$\nu$', 'Interpreter', 'latex');
39 ylabel('$|\hat{f}(\nu)|$', 'Interpreter', 'latex');
40 xlim([-1000, 1000]);
41 set(legend('$|\hat{y}(\nu)|$', '$|\hat{y}_f(\nu)|$', 'Interpreter','Latex','FontSize', 10));
42
43 sound(res, Fs); % Прослушать фильтрованный сигнал
44 audiowrite('RESULT.wav', res, Fs); % Сохранение результата в файл

```

Листинг 5. Программа, используемая для выполнения задания 2.