Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 2
"Преобразование Фурье"

по дисциплине Частотные методы

Выполнил: студент гр. **R3242**

Мареев П. А.

Преподаватель: *Перегудин Алексей Алексеевич*

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

Вступление

Преобразование Фурье является одним из фундаментальных инструментов математического анализа, широко применяемым в физике, инженерии, обработке сигналов и многих других областях. Его суть заключается в разложении произвольной функции времени на суперпозицию гармонических компонент, что позволяет перейти от временного представления сигнала к частотному. Такой подход открывает возможность анализа спектральных характеристик сигналов, выявления скрытых периодичностей и решения дифференциальных уравнений, описывающих волновые процессы.

Целью данной лабораторной работы является практическое освоение методов преобразования Фурье, исследование его свойств на примере классических функций, а также применение полученных знаний для анализа реальных данных. Работа разделена на три задания, каждое из которых направлено на углубление понимания ключевых аспектов преобразования. В первом задании изучаются Фурье-образы базовых функций, проводится проверка равенства Парсеваля и анализ влияния параметров на форму спектра. Второе задание посвящено исследованию эффекта временного сдвига функции и его отражения в частотной области. Третье задание имеет прикладной характер: с помощью численного преобразования Фурье анализируется аудиозапись музыкального аккорда, что позволяет связать математические методы с реальными задачами обработки звука.

Выполнение работы предполагает сочетание аналитических вычислений, численных методов и визуализации данных. Это способствует формированию навыков работы с интегральными преобразованиями, пониманию взаимосвязи между временной и частотной областями, а также развитию критического мышления при интерпретации результатов.

Лабораторная работа не только закрепляет теоретические знания, но и демонстрирует практическую значимость преобразования Фурье в решении актуальных инженерных и научных задач, таких как фильтрация сигналов, сжатие данных и спектральный анализ.

1 Задание 1. Вещественное.

В задании используется унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω.

Рассмотрим следующие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Для каждой приведенной функции $f(t)$ выполним исследование ее Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ и свойств преобразования Фурье.

Приведем основные формулы, которые которые характеризуют унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω. Запишем формулу прямого преобразования Фурье.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{1}$$

где $\hat{f}$ – Фурье-образ исходной функции, причем

$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

Представим также и формулу обратного преобразования Фурье.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \tag{2}$$

где f – исходная функция следующего вида

$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

1.1 Прямоугольная функция.

1.1.1 Аналитическое выражение оригинала функции.

Приведем выражение исходной функции.

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \leqslant b, \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

1.1.2 Аналитическое выражение Фурье-образа функции.

Получим аналитическое выражение Фурье-образа рассматриваемой функции при помощи формулы (1). Заметим, что в данном случае пределы интегрирования будут конечными, поскольку функция равна нулю почти везде на вещественной оси.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} a e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{a e^{-i\omega t}}{i\omega} \right) \Bigg|_{-b}^{b} = \\ = \frac{a \left(e^{i\omega b} - e^{-i\omega b} \right)}{i\omega\sqrt{2\pi}}$$

1.1.3 Построение графиков оригинала функции и ее Фурье-образа.

Выберем четыре набора значение параметров $a, b > 0$.

1. $a = 1, b = 4$
2. $a = 2, b = 6$
3. $a = 5, b = 3$
4. $a = 4, b = 7$

Приведем графики оригинала функции $f(t)$ и Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ для выбранного набора параметров. Выполним программную интерпретацию формулы (1) и получим требуемые графические результаты.

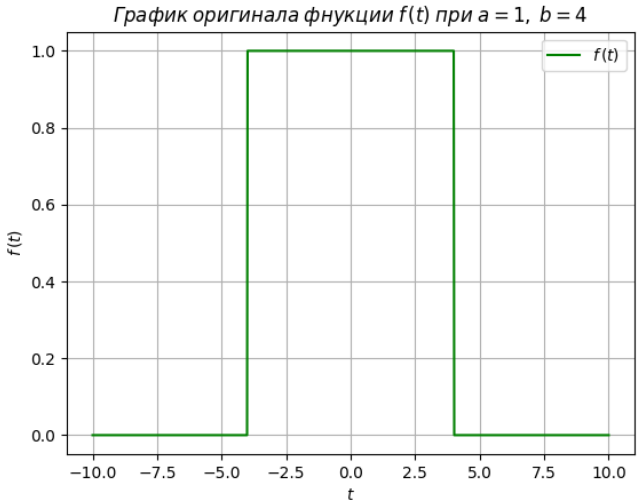

Рис. 1. График $f(t)$ при $a = 1, b = 4$.

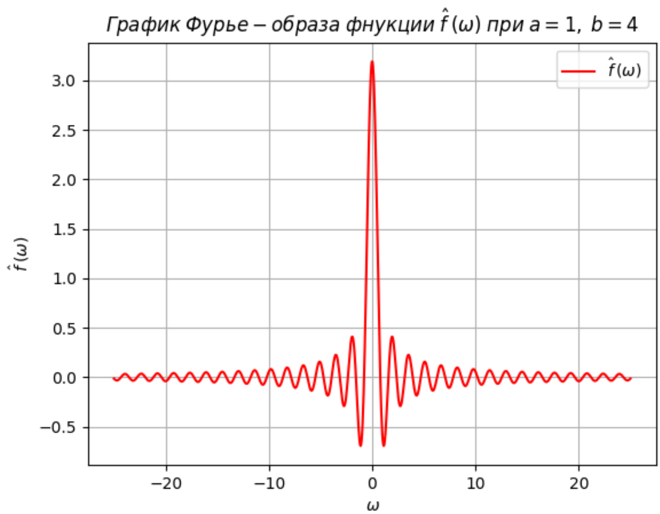

Рис. 2. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 1, b = 4$.

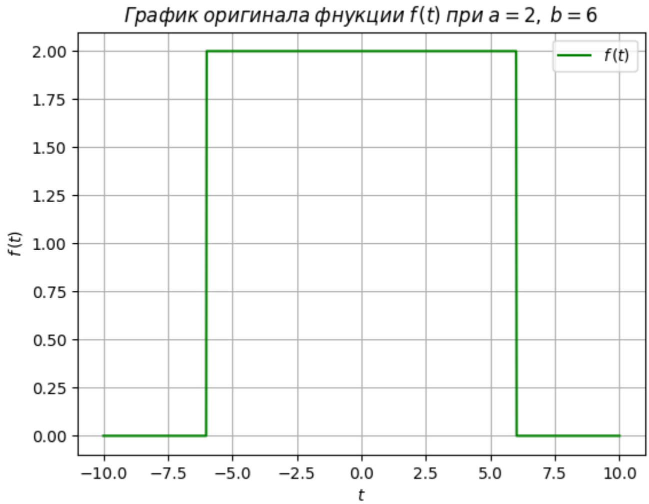

Рис. 3. График $f(t)$ при $a = 2, b = 6$.

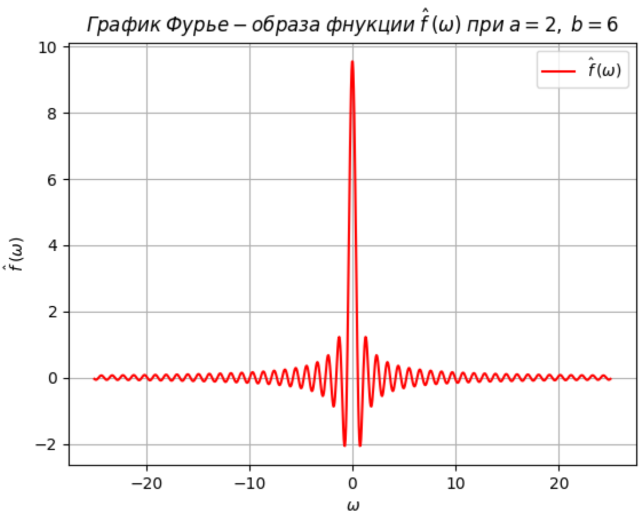

Рис. 4. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 2, b = 6$.

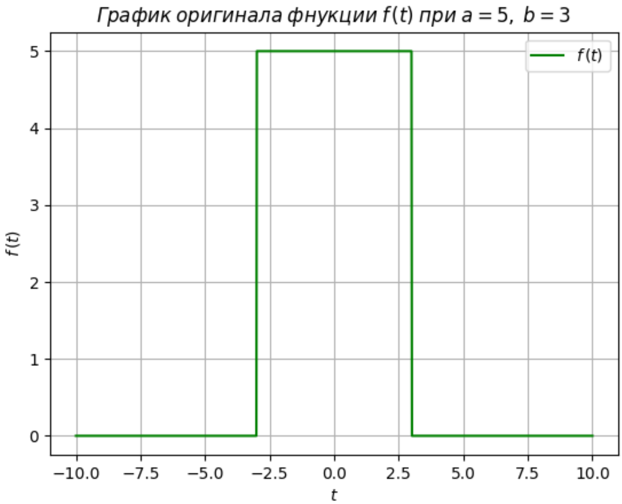

Рис. 5. График $f(t)$ при $a = 5, b = 3$.

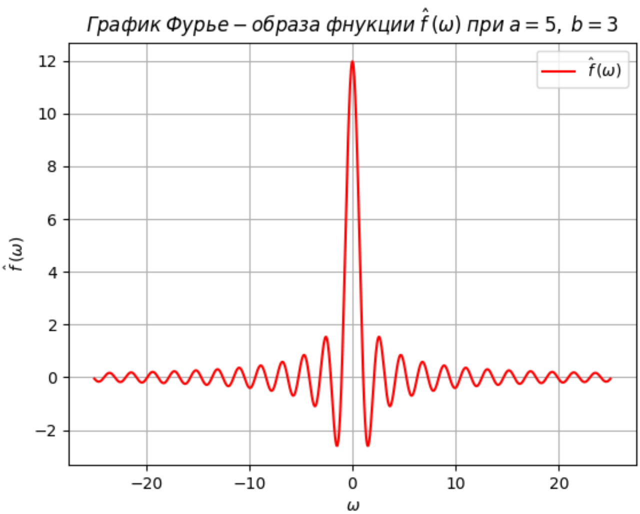

Рис. 6. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 5, b = 3$.

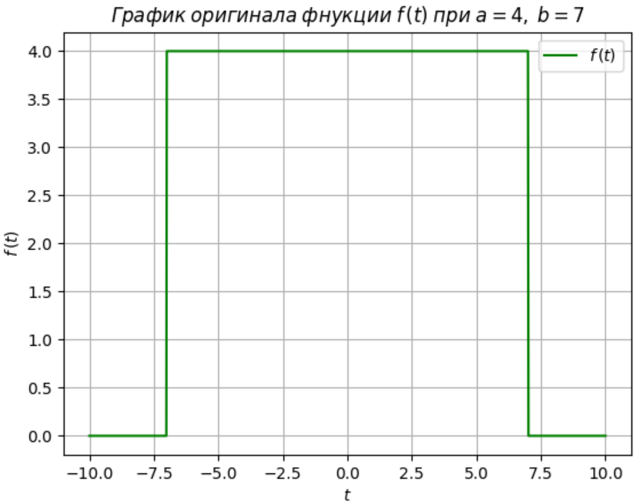

Рис. 7. График $f(t)$ при $a = 4, b = 7$.

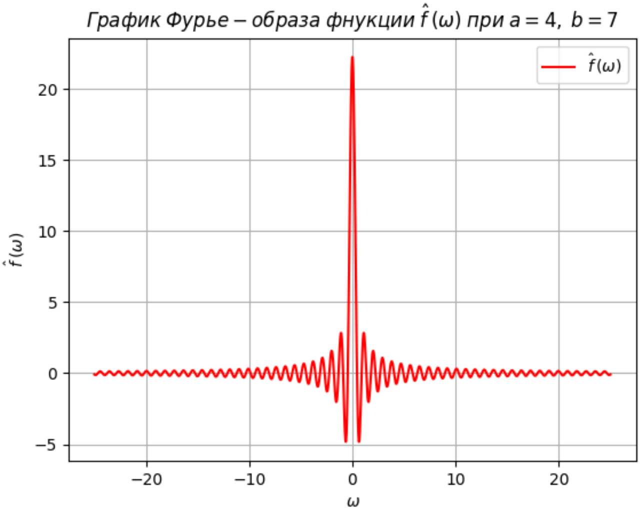

Рис. 8. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 4, b = 7$.

1.1.4 Проверка равенства Парсеваля.

Запишем равенство, которое требуется проверить в каждом из пунктов данного задания.

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2 \tag{3}$$

Оно утверждает, что энергия сигнала сохраняется при переходе из временной области в частотную. Рассмотрим отдельно правую и левую части этого равенства. Справа от знака равно расположен квадрат нормы исходной функции, который определяется естественным образом.

$$\|f\|_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt$$

С левой стороны расположен квадрат нормы Фурье-образа, определяемый аналогичным способом.

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega,$$

где $\hat{f}(\omega)$ – преобразование Фурье, заданное формулой (1).

Преобразуем исходное выражение и выполним интегрирование в пределах от $-T$ до T по времени и от $-\Omega$ до Ω по частоте. Тогда компоненты равенства (3) можно записать следующим образом.

$$\|f\|_2 = \int\limits_{-T}^{T} |f(t)|^2 \, dt$$

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \int\limits_{-\Omega}^{\Omega} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$

Воспользуемся программой и приведем результаты проверки равенства Парсеваля в виде таблицы.

a	b	$\|f\|_2$	$\|\mathcal{F}f\|_2$
1	4	8.0080	7.9766
2	6	48.0481	47.9219
5	3	150.1502	149.3606
4	7	224.2242	223.7229

Таблица 1. Результаты проверки равенства Парсеваля.

Видно, что разница между левой и правой частями равенства достаточно близка к нулю. Таким образом, равенство Парсеваля выполняется в данном случае с приемлемой точностью.

1.1.5 Интерпретация результатов.

Сделаем выводы на основании проделанной работы.

- **Роль параметров:**
  - Параметр a определяет амплитуду прямоугольного импульса. Увеличение a приводит к пропорциональному росту значений функции в пределах $[-b, b]$, что напрямую влияет на амплитуду Фурье-образа.
  - Параметр b задаёт ширину импульса во временной области. Чем больше b, тем шире интервал, на котором функция отлична от нуля. Это вызывает сужение основного лепестка Фурье-образа (функции $\operatorname{sinc}(\omega b)$), так как спектральная плотность концентрируется вблизи нулевой частоты.
- **Принцип неопределённости:**
  - Принцип проявляется в обратной зависимости между шириной импульса во времени ($2b$) и шириной основного лепестка спектра ($\sim \frac{1}{b}$).
  - Увеличение b (расширение импульса) уменьшает ширину спектра, улучшая частотную локализацию, но ухудшая временную. Уменьшение b даёт противоположный эффект.

- **Свойства преобразования Фурье:**
  - **Масштабирование:** Сжатие импульса ($b \to 0$) расширяет спектр ($\Delta\omega \to \infty$), что иллюстрирует свойство дуальности времени и частоты.
  - **Линейность:** Амплитуда Фурье-образа пропорциональна a, что соответствует линейности преобразования.
  - **Равенство Парсеваля:** Энергия сигнала сохраняется в частотной области, подтверждая унитарность преобразования.

1.2 Треугольная функция.

1.2.1 Аналитическое выражение оригинала функции.

Запишем выражение рассматриваемой функции.

$$f(t) = \begin{cases} a - |at/b|, & |t| \leqslant b, \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

1.2.2 Аналитическое выражение Фурье-образа функции.

Найдем аналитическое выражение Фурье-образа исходной функции при аналогично предыдущему пункту, по формулу (1).

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} \left(a - \left| \frac{at}{b} \right| \right) \cdot e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} a e^{-i\omega t} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} \left| \frac{at}{b} \right| \cdot e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{a\left(e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}\right)}{i\omega\sqrt{2\pi}} + \frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-b}^{0} t e^{-i\omega t} dt - \int\limits_{0}^{b} t e^{-i\omega t} dt \right) \boxed{=}$$

Найдем соответствующий неопределенный интеграл.

$$\int t e^{-i\omega t} dt = \left| \begin{matrix} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-i\omega t} dt \Rightarrow v = -\dfrac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \end{matrix} \right| = -\frac{t e^{-i\omega t}}{i\omega} + \int \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} dt =$$

$$= -\frac{t e^{-i\omega t}}{i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} + C = \frac{i\omega t + 1}{\omega^2 e^{i\omega t}} + C$$

Вычислим значения определенных интегралов.

$$\int\limits_{-b}^{0} t e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{i\omega t + 1}{\omega^2 e^{i\omega t}} \right|_{-b}^{0} =$$

$$= \frac{i\omega \cdot 0 + 1}{\omega^2 e^{i\omega \cdot 0}} - \frac{i\omega \cdot (-b) + 1}{\omega^2 e^{i\omega \cdot (-b)}} = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1 - i\omega b}{\omega^2 e^{-i\omega b}}$$

$$\int\limits_0^b te^{-i\omega t}dt = \left.\frac{i\omega t+1}{\omega^2 e^{i\omega t}}\right|_0^b =$$
$$= \frac{i\omega\cdot b+1}{\omega^2 e^{i\omega\cdot b}} - \frac{i\omega\cdot 0+1}{\omega^2 e^{i\omega\cdot 0}} = \frac{1+i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}} - \frac{1}{\omega^2}$$

Найдем значение исходного выражения.

$$\boxed{=}\ \frac{a\left(e^{i\omega b}-e^{-i\omega b}\right)}{i\omega\sqrt{2\pi}} + \frac{a}{b\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1-i\omega b}{\omega^2 e^{-i\omega b}} - \frac{1+i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}} + \frac{1}{\omega^2}\right) =$$
$$= \frac{a\left(e^{i\omega b}-e^{-i\omega b}\right)}{i\omega\sqrt{2\pi}} + \frac{a}{b\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega b}(1-i\omega b)}{\omega^2} - \frac{1+i\omega b}{\omega^2 e^{i\omega b}}\right) =$$
$$= \frac{a\left(e^{i\omega b}-e^{-i\omega b}\right)}{i\omega\sqrt{2\pi}} + \frac{a}{\omega^2 b\sqrt{2\pi}}\left(2 - e^{i\omega b}(1-i\omega b) - \frac{1+i\omega b}{e^{i\omega b}}\right) =$$
$$= \frac{a}{\omega^2 b\sqrt{2\pi}}\left(-i\omega b e^{i\omega b} + i\omega b e^{-i\omega b} + 2 - e^{i\omega b} + i\omega b e^{i\omega b} - e^{-i\omega b} - i\omega b e^{-i\omega b}\right) =$$
$$= \frac{a}{\omega^2 b\sqrt{2\pi}}\left(2 - e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}\right)$$

1.2.3 Построение графиков оригинала функции и ее Фурье-образа.

Построим графики оригинала функции $f(t)$ и Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$, используя ранее выбранный набор параметров.

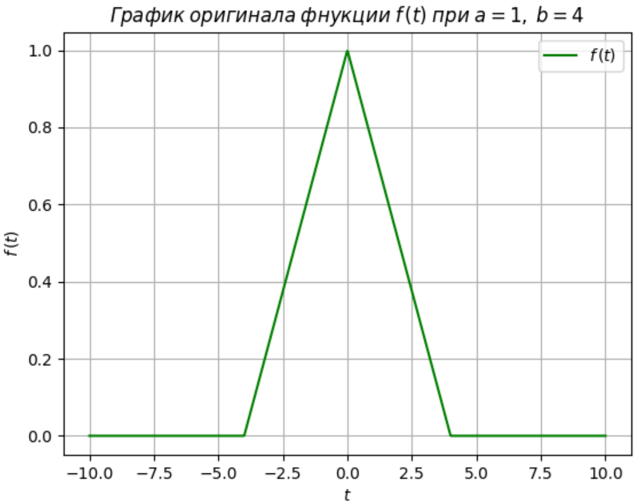

Рис. 9. График $f(t)$ *при* $a = 1, b = 4$.

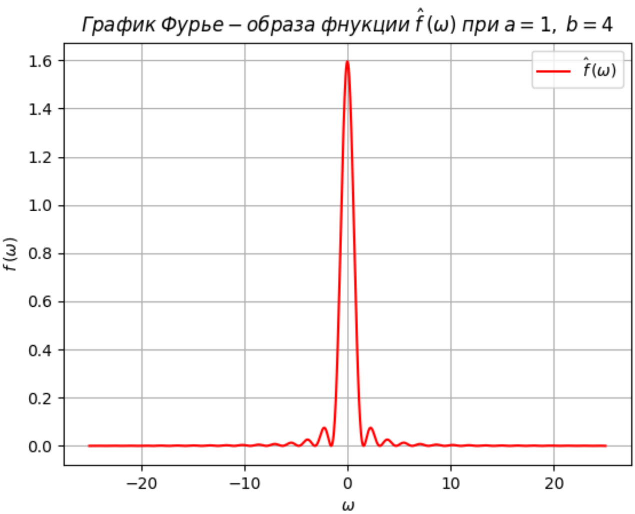

Рис. 10. График $\hat{f}(\omega)$ *при* $a = 1, b = 4$.

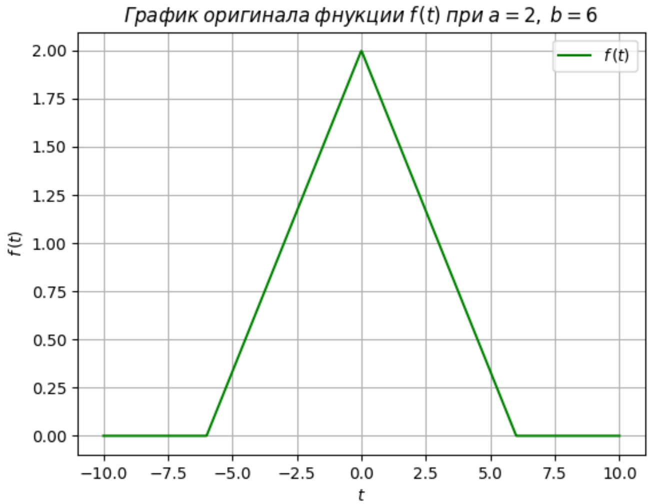

Рис. 11. График $f(t)$ при $a = 2, b = 6$.

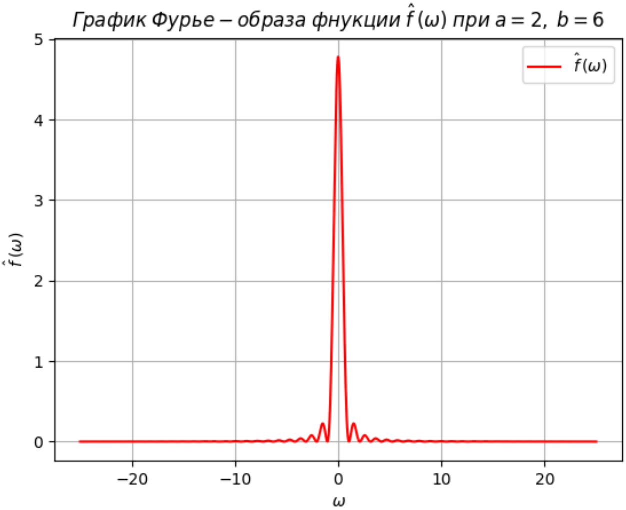

Рис. 12. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 2, b = 6$.

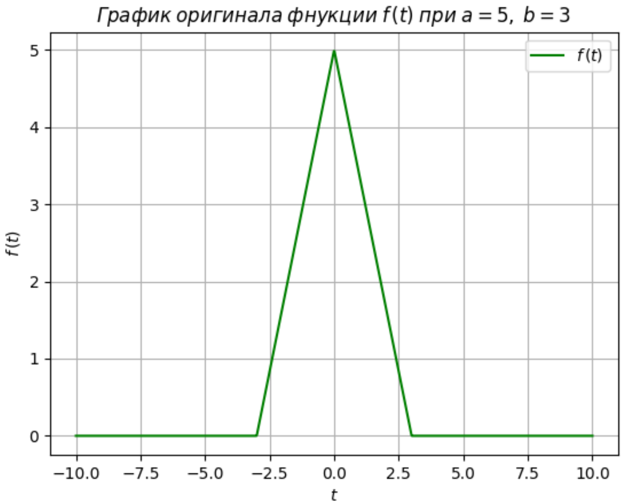

Рис. 13. График $f(t)$ при $a = 5, b = 3$.

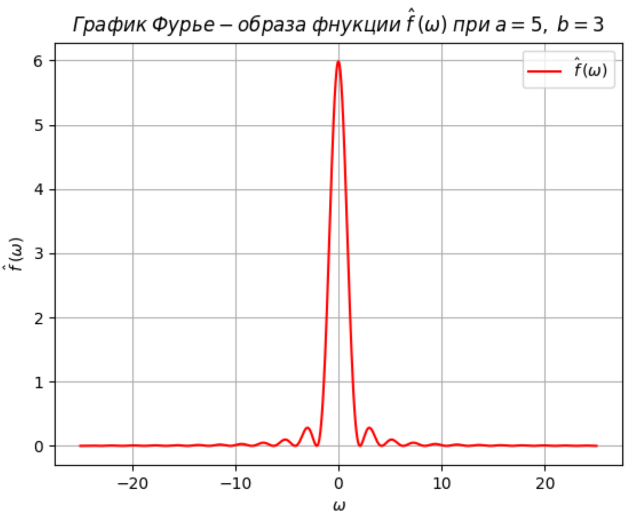

Рис. 14. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 5, b = 3$.

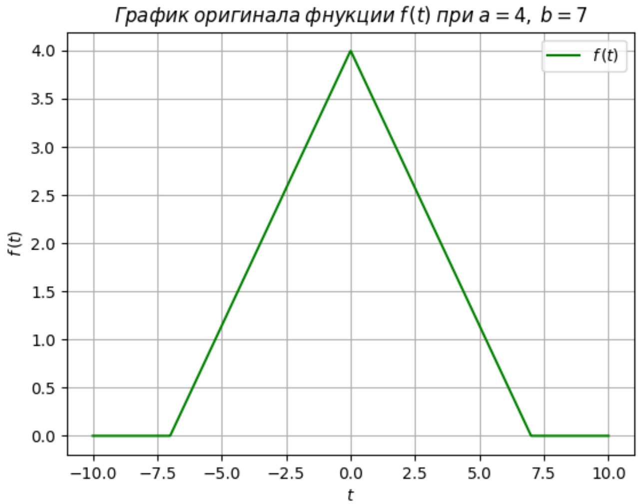

Рис. 15. График $f(t)$ при $a = 4, b = 7$.

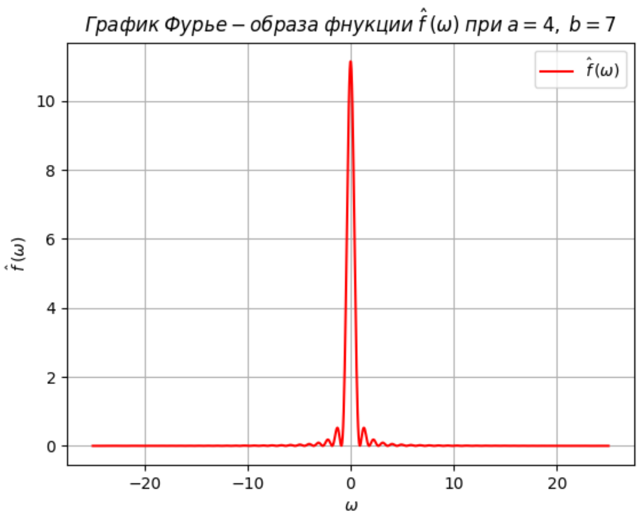

Рис. 16. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 4, b = 7$.

1.2.4 Проверка равенства Парсеваля.

Проверим равенство Парсеваля программным путем, выполним все действия аналогично этому пункту. Представим результаты в виде таблицы.

a	b	$\|f\|_2$	$\|\mathcal{F}f\|_2$
1	4	2.6666	2.6666
2	6	15.9999	15.9999
5	3	49.9994	49.9992
4	7	74.6665	74.6665

Таблица 2. Результаты проверки равенства Парсеваля.

Заметим, что значения совпадают с точностью до десятитысячных. Иначе говоря, равенство Парсеваля выполняется в данном случае с высокой точностью.

1.2.5 Интерпретация результатов.

Приведем выводы, которые можно сделать на основе данного пункта задания.

- **Роль параметров a и b:**
  - **Параметр a:** Определяет высоту треугольного импульса. Увеличение a приводит к пропорциональному росту амплитуды как исходной функции, так и её Фурье-образа. Например, при $a = 5$ (Рис. 13) амплитуда спектра выше, чем при $a = 1$ (Рис. 9).
  - **Параметр b:** Задаёт ширину основания треугольника. Увеличение b расширяет временной интервал, на котором функция отлична от нуля, что сужает основной лепесток спектра ($\sim \frac{1}{b}$). Например, при $b = 7$ (Рис. 15) спектр уже, чем при $b = 3$ (Рис. 13).
- **Принцип неопределённости Гейзенберга:**
  - Проявляется в обратной связи между шириной импульса ($\Delta t = 2b$) и шириной основного лепестка спектра ($\Delta\omega \sim \frac{1}{b}$).
  - Например, при $b = 6$ (Рис. 11) импульс шире ($\Delta t = 12$), а спектр уже ($\Delta\omega \approx 0.17$), тогда как при $b = 3$ (Рис. 13) импульс уже ($\Delta t = 6$), но спектр шире ($\Delta\omega \approx 0.33$).

- **Свойства преобразования Фурье:**
  - **Линейность:** Амплитуда Фурье-образа пропорциональна a, что видно при сравнении графиков для $a = 1$ (Рис. 10) и $a = 5$ (Рис. 14).
  - **Масштабирование:** Сужение импульса ($b \to 0$) расширяет спектр ($\Delta\omega \to \infty$), что демонстрирует дуальность времени и частоты. Например, при $b = 7$ (Рис. 16) спектр уже, чем при $b = 4$ (Рис. 10).
- **Изменения при варьировании параметров:**
  - **Свойство линейности (параметр a):** Увеличение a повышает амплитуду импульса и спектра, сохраняя форму. Например, при $a = 4$ (Рис. 15) спектр в 4 раза выше, чем при $a = 1$ (Рис. 9).
  - **Свойство масштабирования (параметр b):** Увеличение b расширяет импульс и сужает спектр. Например, при $b = 6$ (Рис. 11) спектр уже, чем при $b = 3$ (Рис. 13), несмотря на одинаковый параметр $a = 2$.

1.3 Кардинальный синус.

1.3.1 Аналитическое выражение оригинала функции.

Представим выражение исследуемой функции.

$$f(t) = a\,\mathrm{sinc}(bt)$$

1.3.2 Аналитическое выражение Фурье-образа функции.

Воспользуемся таблицей преобразований Фурье и приведем аналитическое выражение для Фурье-образа.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a\,\mathrm{sinc}(bt) e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{|b|} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \begin{cases} 1, \left(\frac{b}{\omega}\right)^2 > 1 \\ 0, \left(\frac{b}{\omega}\right)^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

1.3.3 Построение графиков оригинала функции и ее Фурье-образа.

Представим графики оригинала функции $f(t)$ и Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ на основе уже известного набора параметров.

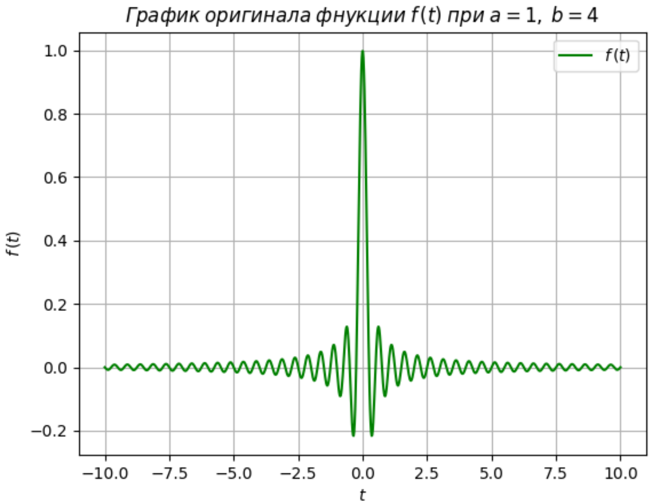

Рис. 17. График $f(t)$ при $a = 1, b = 4$.

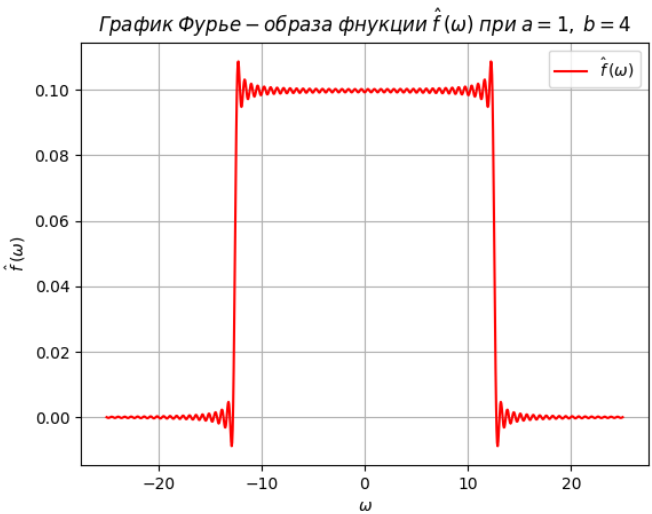

Рис. 18. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 1, b = 4$.

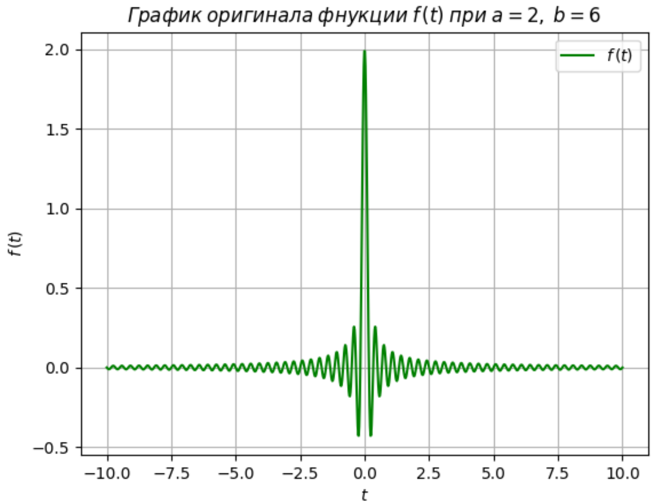

Рис. 19. График $f(t)$ при $a = 2, b = 6$.

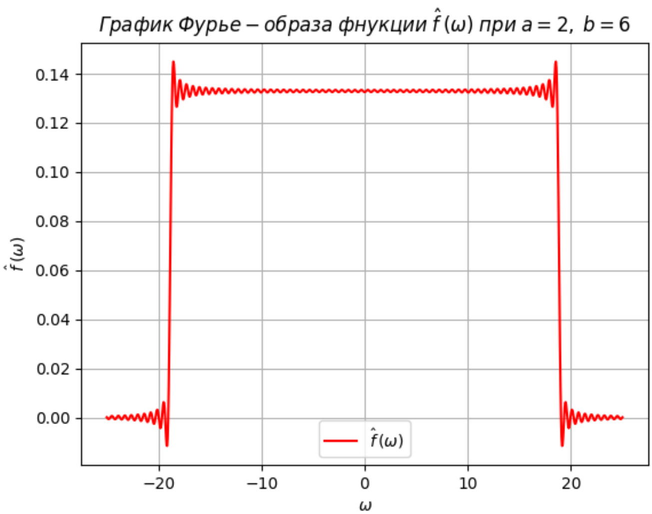

Рис. 20. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 2, b = 6$.

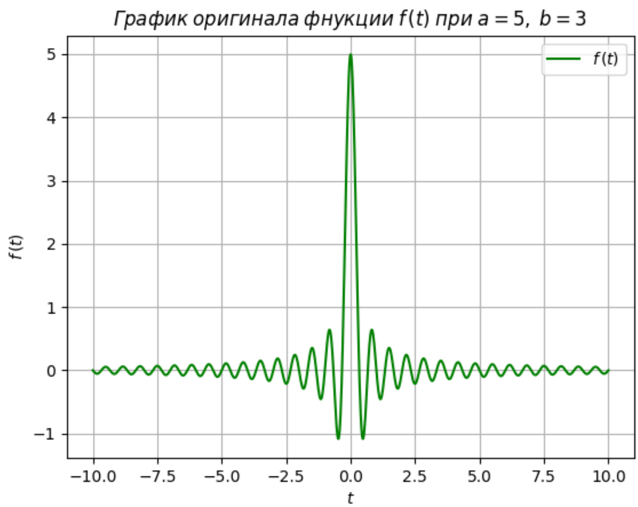

Рис. 21. График $f(t)$ при $a = 5, b = 3$.

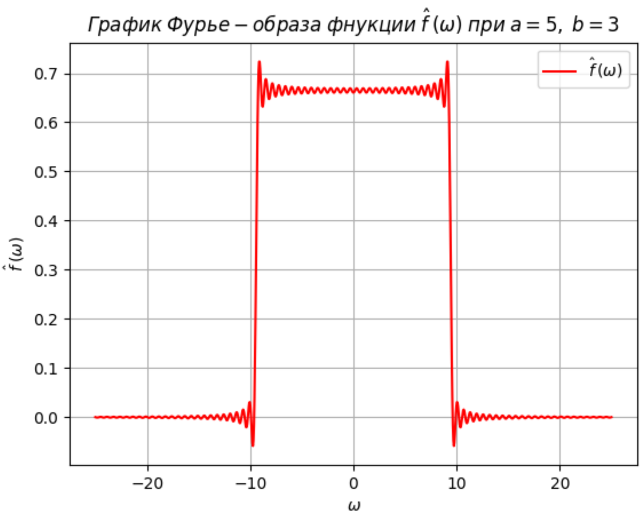

Рис. 22. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 5, b = 3$.

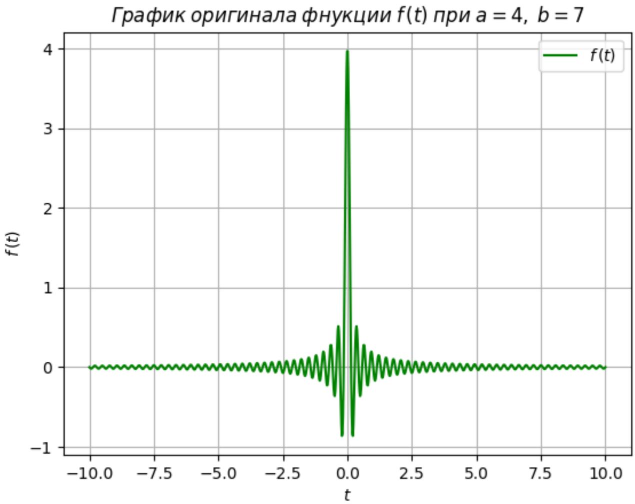

Рис. 23. График $f(t)$ при $a = 4, b = 7$.

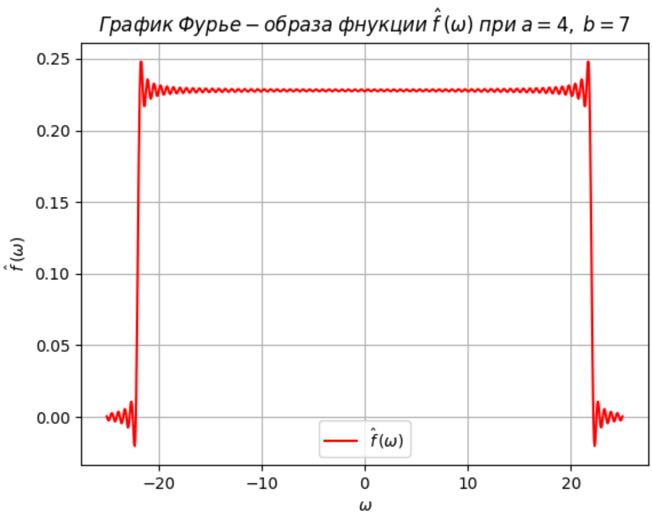

Рис. 24. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 4, b = 7$.

1.3.4 Проверка равенства Парсеваля.

Выполним проверку равенства Парсеваля при помощи программы, используя аналогичные этому пункту действия. Оформим результаты в виде таблицы.

a	b	$\|f\|_2$	$\|\mathcal{F}f\|_2$
1	4	0.2494	0.2494
2	6	0.6655	0.6655
5	3	8.3052	8.3052
4	7	2.2824	2.0797

Таблица 3. Результаты проверки равенства Парсеваля.

Заметим, что значения для всех, кроме одного набора параметров, совпадают даже в четвертом знаке после запятой. Следовательно, равенство Парсеваля выполняется в данном случае с достаточной точностью.

1.3.5 Интерпретация результатов.

Охарактеризуем результаты, которые были получены в ходе выполнения данного пункта.

- **Роль параметров a и b:**
  - **Параметр a:** Определяет амплитуду исходной функции $f(t) = a \cdot \mathrm{sinc}(bt)$. Увеличение a пропорционально повышает амплитуду Фурье-образа ($\hat{f}(\omega) \propto a$), сохраняя форму спектра. Например, при $a = 5$ (Рис. 20) спектр выше, чем при $a = 1$ (Рис. 17).
  - **Параметр b:** Регулирует ширину основного лепестка sinc-функции. Увеличение b сужает основной лепесток во временной области, что расширяет прямоугольный импульс в частотной области ($\Delta\omega \propto b$). Например, при $b = 7$ (Рис. 24) спектр шире, чем при $b = 4$ (Рис. 18).
- **Принцип неопределённости Гейзенберга:**
  - Проявляется в обратной зависимости между шириной основного лепестка sinc-функции ($\Delta t \sim \frac{1}{b}$) и шириной спектра ($\Delta\omega \sim b$). Например, при $b = 3$ (Рис. 22) спектр уже, чем при $b = 7$ (Рис. 24).

- **Свойства преобразования Фурье:**
  - **Линейность:** Амплитуда спектра прямо пропорциональна a, что подтверждает линейность преобразования. Например, при $a = 4$ (Рис. 23) спектр в 4 раза выше, чем при $a = 1$ (Рис. 17).
  - **Дуальность:** sinc-функция и прямоугольный импульс являются взаимными Фурье-образами. Это фундаментальное свойство используется в задачах восстановления сигналов и фильтрации.
- **Изменения при варьировании параметров:**
  - **Свойство линейности (параметр a):** Увеличение a не влияет на форму спектра, только на его масштаб. Например, спектры для $a = 2$ (Рис. 20) и $a = 1$ (Рис. 18) идентичны по форме, но отличаются амплитудой.
  - **Свойство масштабирования (параметр b):** Увеличение b сужает sinc-функцию и расширяет спектр. Например, при $b = 6$ (Рис. 20) спектр шире, чем при $b = 4$ (Рис. 18).

1.4 Функция Гаусса.

1.4.1 Аналитическое выражение оригинала функции.

Запишем выражение рассматриваемой функции.

$$f(t) = ae^{-bt^2} = a\exp\left(-bt^2\right)$$

1.4.2 Аналитическое выражение Фурье-образа функции.

Запишем аналитическое выражение для Фурье-образа на основе таблицы преобразований Фурье.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ae^{-bt^2} dt = \frac{a}{\sqrt{2b}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4b}\right)$$

1.4.3 Построение графиков оригинала функции и ее Фурье-образа.

Изобразим графики оригинала функции $f(t)$ и Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ с применением предварительно указанных наборов значений параметров.

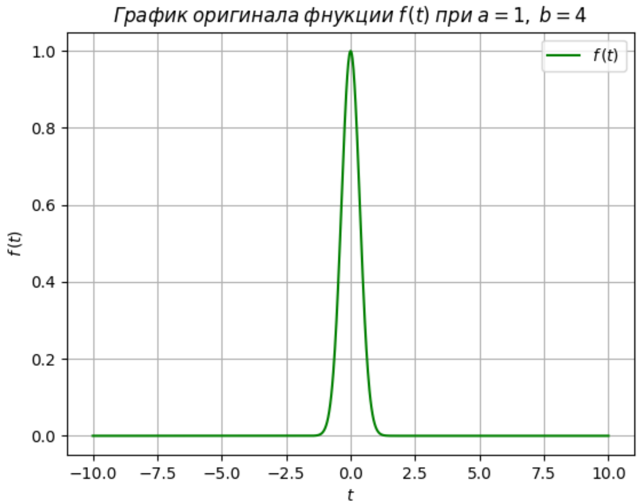

Рис. 25. График $f(t)$ при $a = 1, b = 4$.

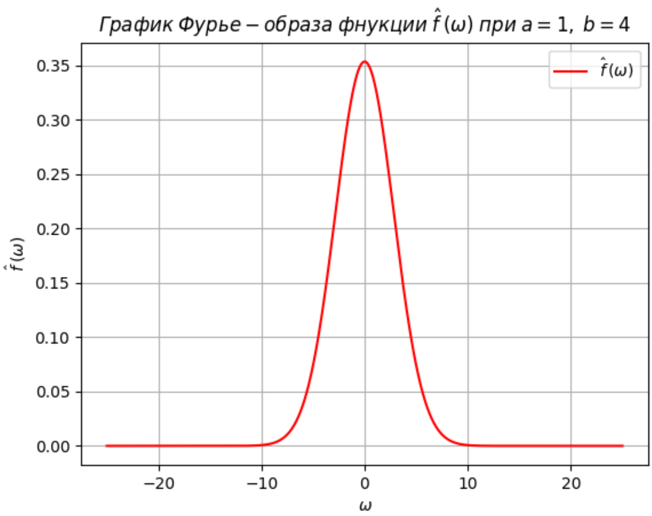

Рис. 26. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 1, b = 4$.

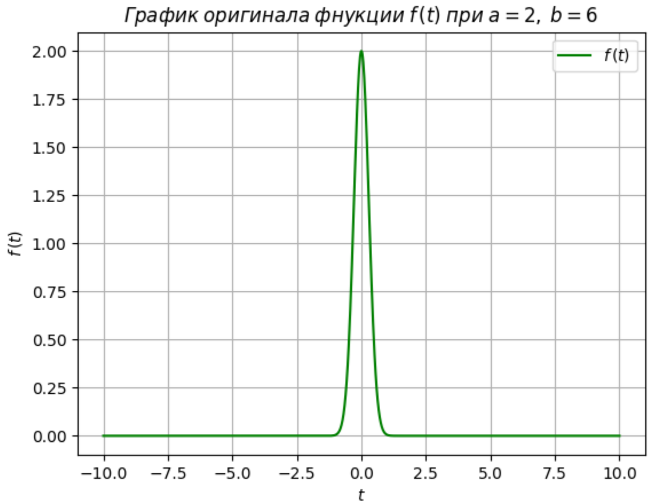

Рис. 27. График $f(t)$ при $a = 2, b = 6$.

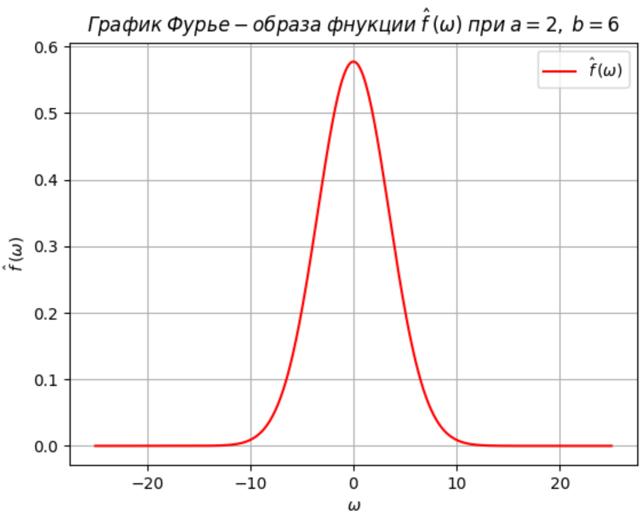

Рис. 28. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 2, b = 6$.

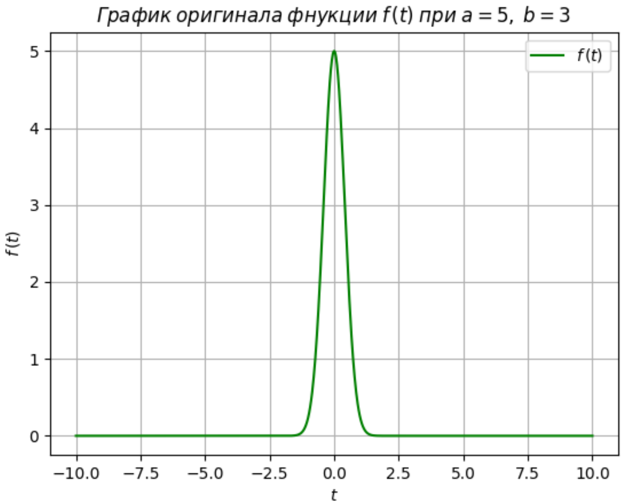

Рис. 29. График $f(t)$ при $a = 5, b = 3$.

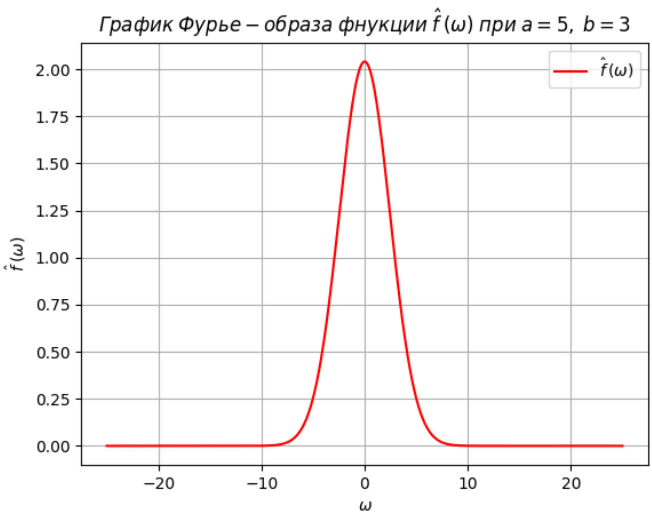

Рис. 30. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 5, b = 3$.

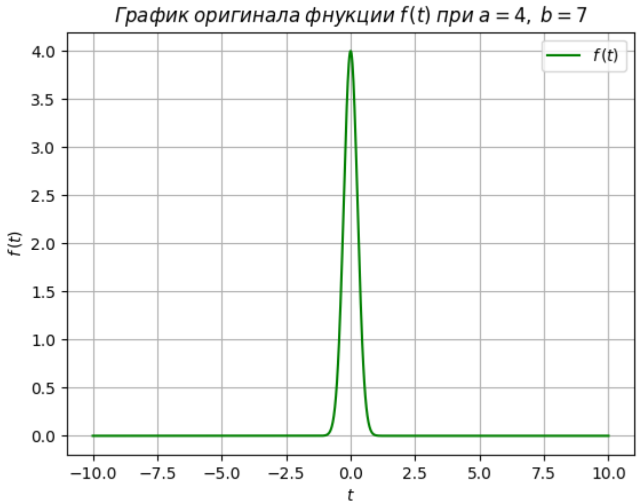

Рис. 31. График $f(t)$ при $a = 4, b = 7$.

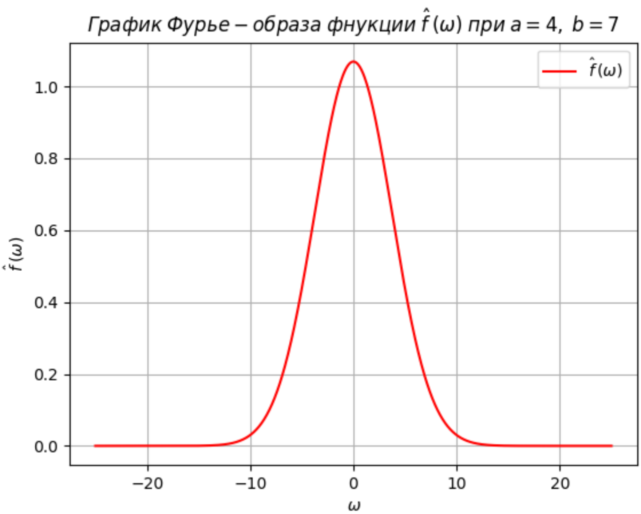

Рис. 32. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 4, b = 7$.

1.4.4 Проверка равенства Парсеваля.

Проверим равенство Парсеваля при помощи программы, делая те же шаги, что и в этом пункте. Представим результаты в виде таблицы.

a	b	$\|f\|_2$	$\|\mathcal{F}f\|_2$
1	4	0.6266	0.6266
2	6	2.0466	2.0466
5	3	18.0900	18.0900
4	7	7.5793	7.5793

Таблица 4. Результаты проверки равенства Парсеваля.

Заметим, что значения полностью совпадают при всех рассмотренных наборах параметров. Таким образом, равенство Парсеваля выполняется в данном случае с довольно высокой точностью.

1.4.5 Интерпретация результатов.

Отметим наблюдения, сделанные на основе выполнения данного пункта.

- **Роль параметров a и b:**
  - **Параметр a:** Определяет амплитуду функции Гаусса $f(t) = ae^{-bt^2}$. Увеличение a пропорционально повышает значения как исходной функции, так и её Фурье-образа ($\hat{f}(\omega) \propto a$), сохраняя форму спектра. Например, при $a = 5$ (Рис. 29) амплитуда в 5 раз выше, чем при $a = 1$ (Рис. 25).
  - **Параметр b:** Регулирует ширину Гауссова колокола. Увеличение b сужает импульс во временной области ($f(t)$ становится «острее»), что расширяет спектр в частотной области ($\Delta\omega \propto \sqrt{b}$). Например, при $b = 7$ (Рис. 31) спектр шире, чем при $b = 4$ (Рис. 25).
- **Принцип неопределённости Гейзенберга:**
  - Увеличение b сужает импульс ($\Delta t \to 0$), но расширяет спектр ($\Delta\omega \to \infty$), и наоборот. Например, при $b = 3$ (Рис. 29) импульс шире, а спектр уже, чем при $b = 7$ (Рис. 31).

- **Свойства преобразования Фурье:**
  - **Инвариантность:** Фурье-образ функции Гаусса также является Гауссовой функцией ($\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$), что подчёркивает её уникальную роль в теории преобразований.
  - **Линейность:** Амплитуда спектра пропорциональна a, как видно из сравнения графиков для $a = 2$ (Рис. 27) и $a = 1$ (Рис. 25).
  - **Масштабирование:** Сужение импульса ($b \to \infty$) расширяет спектр, что демонстрирует дуальность времени и частоты.
- **Изменения при варьировании параметров:**
  - **Свойство линейности (параметр a):** Увеличение a не влияет на ширину импульса или спектра, только на их амплитуду. Например, при $a = 4$ (Рис. 31) спектр в 4 раза выше, чем при $a = 1$ (Рис. 25), но ширина остаётся неизменной.
  - **Свойство масштабирования (параметр b):** Увеличение b сужает импульс и расширяет спектр. Например, при $b = 6$ (Рис. 27) спектр уже, чем при $b = 3$ (Рис. 29), несмотря на одинаковый $a = 2$.

Обратим внимание, что иногда функция Гаусса может полностью совпасть со своим Фурье-образом. Определим параметры, реализующие эту ситуацию.

$$f(t) = \hat{f}(\omega)$$
$$a \exp\left(-bt^2\right) = \frac{a}{\sqrt{2b}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4b}\right)$$

Здесь становится понятно, что на параметр a не накладывается никаких ограничений. Продолжим рассуждение.

$$\exp\left(-bt^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2b}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4b}\right)$$
$$1 = \frac{1}{\sqrt{2b}} \exp\left(b^2 t - \frac{\omega^2}{4b}\right)$$

Запишем соответствующую систему.

$$\begin{cases} \sqrt{2b} = 1 \\ \exp\left(b^2 t - \dfrac{\omega^2}{4b}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{2} \\ \left(b^2 t - \dfrac{\omega^2}{4b}\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{t^2}{2} = \dfrac{\omega^2}{2} \end{cases} \implies \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

Таким образом, функция Гаусса совпадает со своим Фурье-образом при любом значении параметра a и $b = \frac{1}{2}$, что подчёркивает её фундаментальное значение.

1.5 Двустороннее затухание.

1.5.1 Аналитическое выражение оригинала функции.

Приведем выражение исходной функции.

$$f(t) = ae^{-b|t|}$$

1.5.2 Аналитическое выражение Фурье-образа функции.

Сконструируем аналитическое выражение Фурье-образа рассматриваемой функции.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-b|t|}e^{-i\omega t}dt =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(b-i\omega)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(b+i\omega)t}dt \right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\left. \frac{e^{(b-i\omega)t}}{b-i\omega} \right|_{-\infty}^{0} + \left. \frac{e^{-(b+i\omega)t}}{-(b+i\omega)} \right|_{0}^{\infty} \right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{b+i\omega+b-i\omega}{b^2+\omega^2} = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}\,(b^2+\omega^2)}$$

1.5.3 Построение графиков оригинала функции и ее Фурье-образа.

Приведем графики оригинала функции $f(t)$ и Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$, используя рассмотренный ранее набор параметров.

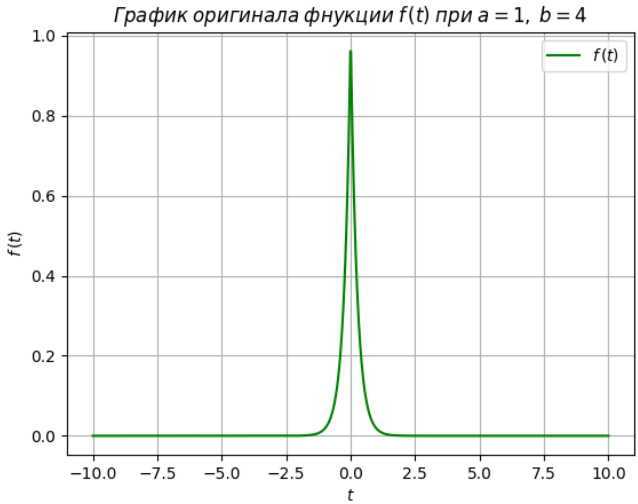

Рис. 33. График $f(t)$ при $a = 1, b = 4$.

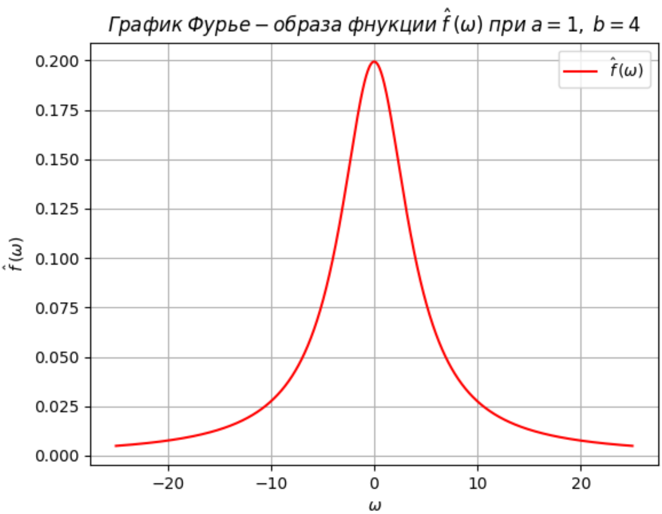

Рис. 34. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 1, b = 4$.

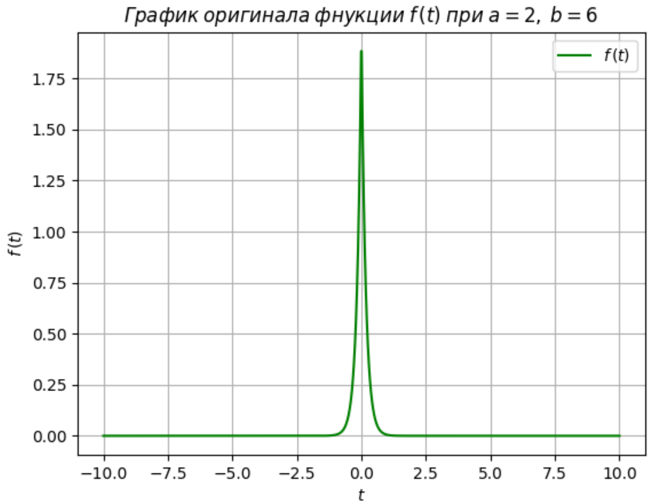

Рис. 35. График $f(t)$ при $a = 2, b = 6$.

Рис. 36. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 2, b = 6$.

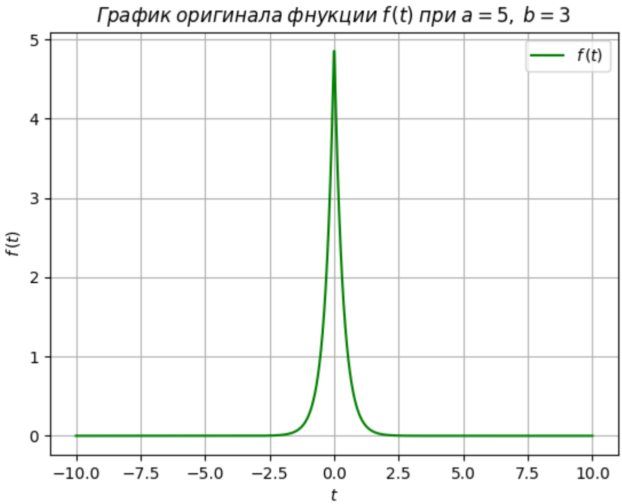

Рис. 37. График $f(t)$ при $a = 5, b = 3$.

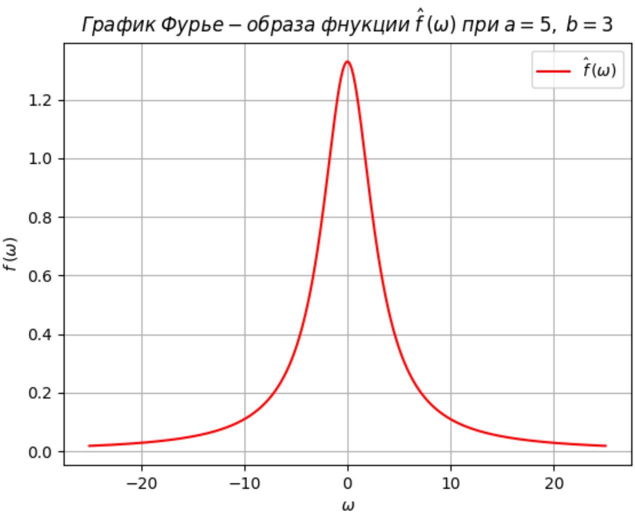

Рис. 38. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 5, b = 3$.

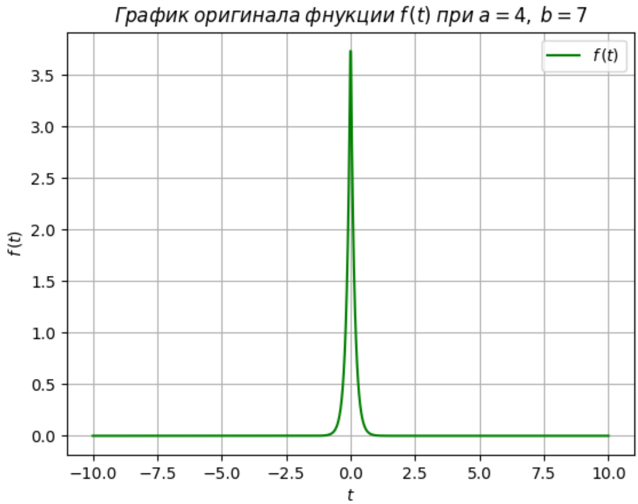

Рис. 39. График $f(t)$ при $a = 4, b = 7$.

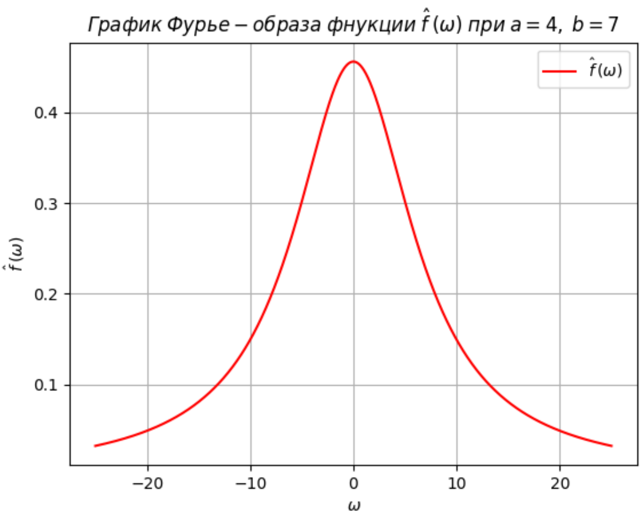

Рис. 40. График $\hat{f}(\omega)$ при $a = 4, b = 7$.

1.5.4 Проверка равенства Парсеваля.

Проведем проверку равенства Парсеваля с помощью программы и действий аналогичных этому пункту. Приведем результаты в виде таблицы.

a	b	$\|f\|_2$	$\|\mathcal{F}f\|_2$
1	4	0.2497	0.2490
2	6	0.6651	0.6585
5	3	8.3283	8.3171
4	7	2.2783	2.2436

Таблица 5. Результаты проверки равенства Парсеваля.

Заметим, что значения совпадают с точностью до сотых. Следовательно, равенство Парсеваля выполняется в данном случае с достаточной точностью.

1.5.5 Интерпретация результатов.

Сделаем выводы на основе выполнения данного пункта.

- **Роль параметров a и b:**
  - **Параметр a:** Определяет амплитуду исходной функции $f(t) = ae^{-b|t|}$. Увеличение a пропорционально повышает значения как функции во временной области, так и амплитуду Фурье-образа ($\hat{f}(\omega) \propto a$). Например, при $a = 5$ (Рис. 37) спектр выше, чем при $a = 1$ (Рис. 33).
  - **Параметр b:** Регулирует скорость затухания функции. Увеличение b ускоряет затухание во времени (импульс становится «уже»), что расширяет спектр в частотной области ($\Delta\omega \propto b$). Например, при $b = 7$ (Рис. 39) спектр шире, чем при $b = 4$ (Рис. 33).
- **Принцип неопределённости Гейзенберга:**
  - Проявляется в обратной зависимости между временной локализацией ($\Delta t \sim \frac{1}{b}$) и шириной спектра ($\Delta\omega \propto b$). Например, при $b = 3$ (Рис. 37) импульс шире ($\Delta t \approx 0.67$), а спектр уже ($\Delta\omega \approx 3$), тогда как при $b = 7$ (Рис. 39) импульс уже ($\Delta t \approx 0.29$), но спектр шире ($\Delta\omega \approx 7$).

- **Свойства преобразования Фурье:**
  - **Линейность:** Амплитуда Фурье-образа пропорциональна a, что подтверждается графиками для $a = 2$ (Рис. 35) и $a = 1$ (Рис. 33).
  - **Дуальность затухания:** Экспоненциальное затухание во времени соответствует функции Лоренца в частотной области

    $$\left(\hat{f}(\omega) = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2 + \omega^2)}\right),$$

    что характерно для сигналов с «тяжёлыми хвостами».
  - **Равенство Парсеваля:** Энергия сигнала сохраняется ($\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$), что подтверждается таблицей 5.
- **Изменения при варьировании параметров:**
  - **Свойство линейности (параметр a):** Увеличение a не влияет на форму спектра, только на его масштаб. Например, спектры для $a = 4$ (Рис. 39) и $a = 1$ (Рис. 33) идентичны по форме, но отличаются амплитудой.
  - **Свойство масштабирования (параметр b):** Увеличение b сужает импульс и расширяет спектр. Например, при $b = 6$ (Рис. 35) спектр шире, чем при $b = 4$ (Рис. 33), несмотря на одинаковый $a = 2$.

1.6 Выводы.

Зафиксируем выводы, которые можно сделать после выполнения данного задания лабораторной работы:

1. Преобразование Фурье является мощным инструментом для анализа сигналов, позволяющим переходить от временного представления к частотному и изучать спектральные характеристики функций.
2. Параметры функций a и b оказывают влияние на их форму: a определяет амплитуду, а b – ширину импульса или скорость затухания.
3. Равенство Парсеваля $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2$ подтвердило сохранение энергии сигнала при преобразовании Фурье. Результаты проверки для всех рассмотренных функций показали совпадение энергий с высокой точностью.
4. Принцип неопределенности Гейзенберга проявляется в обратной зависимости между функцией во временной области и шириной её спектра частот: сужение импульса во времени приводит к расширению частотного диапазона и наоборот.
5. Прямоугольная функция демонстрирует Фурье-образ в виде функции $\mathrm{sinc}(\omega)$, что подтверждает двойственность преобразования Фурье для прямоугольных и кардинальных волн.
6. Функция Гаусса обладает уникальным свойством: при $b = \frac{1}{2}$ она совпадает со своим Фурье-образом, что подчеркивает её значимость в теории преобразований.
7. Треугольная функция имеет Фурье-образ с более гладким затуханием по сравнению с прямоугольной, что связано с отсутствием резких разрывов в исходной функции.
8. Для кардинального синуса $\mathrm{sinc}(bt)$ Фурье-образ представляет собой прямоугольный импульс, ширина которого обратно пропорциональна параметру b.
9. Двустороннее затухание $ae^{-b|t|}$ имеет Фурье-образ, который убывает с увеличением частоты ω, что демонстрирует связь между скоростью затухания функции во временной области и шириной её спектра в частотной области.
10. Метод трапеций, использованный для интегрирования, показал высокую точность при расчете Фурье-образов и проверке равенства Парсеваля.

2 Задание 2. Комплексное.

В задании используется унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω.

Используем в данном задании функцию двустороннего затухания.

$$f(t) = ae^{-b|t|}$$

Зафиксируем набор параметров a и b.

$$a = 2, \quad b = 6$$

Рассмотрим сдвинутую функцию $g(t) = f(t+c)$ и проведем исследование ее Фурье-образа.

$$g(t) = f(t+c) = 2 \cdot e^{-6|t+c|} \tag{4}$$

2.1 Аналитическое выражение для Фурье-образа.

Найдем аналитическое выражение для Фурье-образа рассматриваемой функции при помощи формулы (1).

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-6|t+c|} \cdot e^{-i\omega t}dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{-c} e^{(6+6c-i\omega)t}dt + \int\limits_{-c}^{\infty} e^{(-6-6c-i\omega)t}dt \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{6c} \int\limits_{-\infty}^{-c} e^{(6-i\omega)t}dt + e^{-6c} \int\limits_{-c}^{\infty} e^{(-6-i\omega)t}dt \right) =$$

$$= \frac{2e^{-6c}}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{12c} \int\limits_{-\infty}^{-c} e^{(6-i\omega)t}dt + \int\limits_{-c}^{\infty} e^{(-6-i\omega)t}dt \right) =$$

$$= \frac{2e^{-6c}}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{12c} \cdot \frac{e^{(6-i\omega)t}}{6-i\omega} \bigg|_{-\infty}^{-c} - \frac{e^{-(6+i\omega)t}}{6+i\omega} \bigg|_{-c}^{\infty} \right) =$$

$$= \frac{2e^{-6c}}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{12c} \cdot \frac{e^{-(6-i\omega)c}}{6-i\omega} + \frac{e^{(6+i\omega)c}}{6+i\omega} \right) =$$

$$= \frac{2e^{-6c}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{(6c+i\omega c)}}{6-i\omega} + \frac{e^{(6c+i\omega c)}}{6+i\omega} \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i\omega c}}{6-i\omega} + \frac{e^{i\omega c}}{6+i\omega} \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{6e^{i\omega c} + i\omega e^{i\omega c} + 6e^{i\omega c} - i\omega e^{i\omega c}}{36+\omega^2} \right) = \frac{24e^{i\omega c}}{\sqrt{2\pi}(36+\omega^2)}$$

2.2 Построение графиков оригинала функции.

Выберем 4 различных значения параметра c.

$$C = \{-1, 1, -2, 3\}$$

Построим графики оригинала функции $g(t)$ и проанализируем влияние параметра c на оригинал.

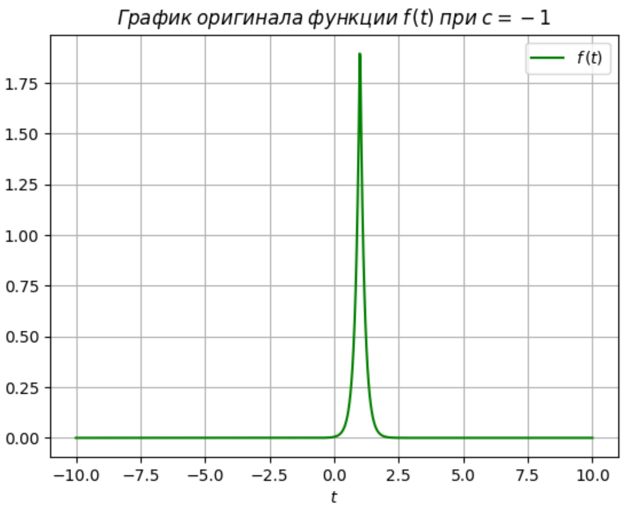

Рис. 41. График $g(t)$ при $c = -1$.

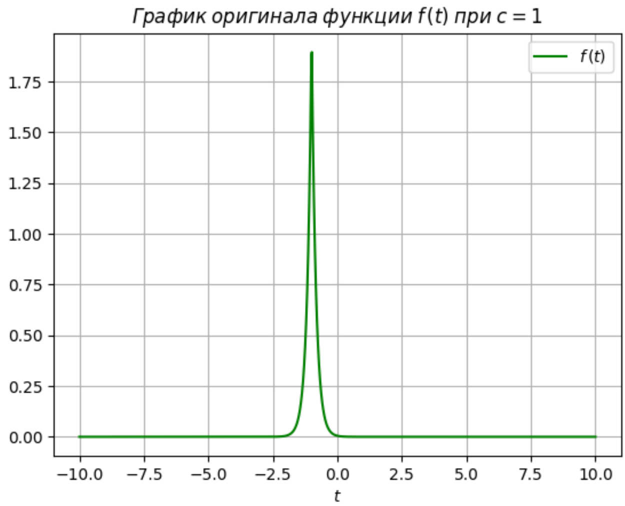

Рис. 42. График $g(t)$ при $c = 1$.

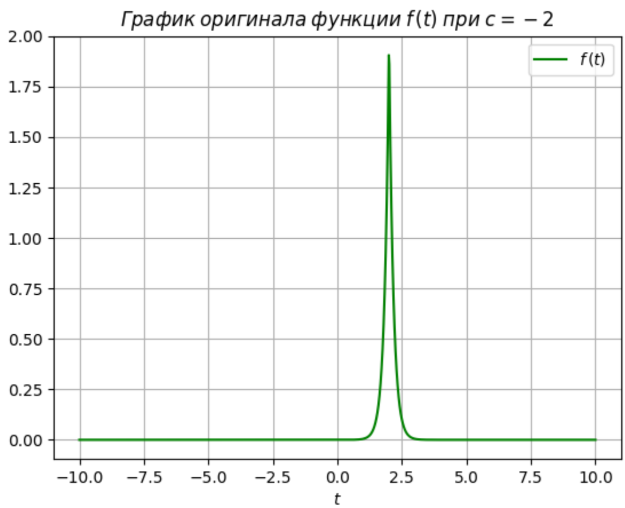

Рис. 43. График $g(t)$ при $c = -2$.

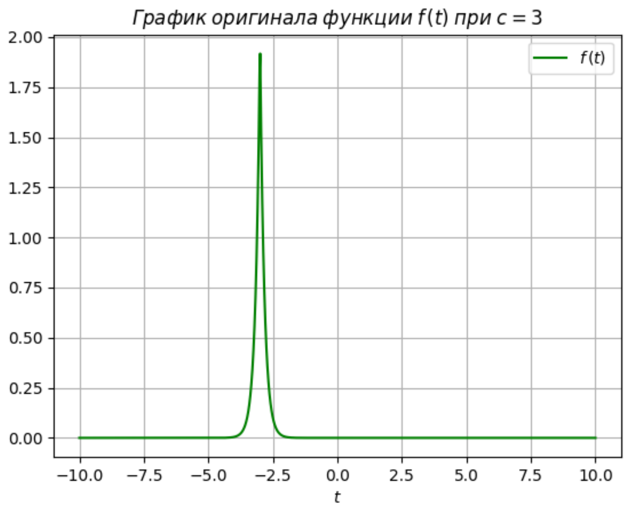

Рис. 44. График $g(t)$ при $c = 3$.

Оценим влияние параметра c на график функции $g(t)$.

- **Горизонтальный сдвиг:**
  - Параметр c смещает график функции вдоль оси t.
  - При $c > 0$ график сдвигается влево на c единиц.
  - При $c < 0$ график сдвигается вправо на $|c|$ единиц.
- **Форма графика:**
  - Форма функции остаётся неизменной: симметричный экспоненциальный спад относительно новой точки пика $t = -c$.
  - Коэффициент b в экспоненте ($e^{-b|t+c|}$) определяет скорость затухания: чем больше b, тем круче спад. Параметр c не влияет на скорость затухания.
- **Особенности:**
  - В точке $t = -c$ функция имеет максимум, а её производная терпит разрыв из-за модуля.

- График сохраняет симметрию относительно $t = -c$.

- **Практическое значение:**
  - Параметр c позволяет моделировать временные задержки сигналов. Например, в задачах обработки данных сдвиг c может соответствовать моменту возникновения события.

Таким образом, параметр c управляет положением пика функции на временной оси, не изменяя её форму или скорость затухания.

2.3 Построение графиков вещественной и мнимой компонент Фурье-образа.

Построим графики вещественной и мнимой компонент Фурье-образа, а затем проанализируем, как параметр c влияет на них.

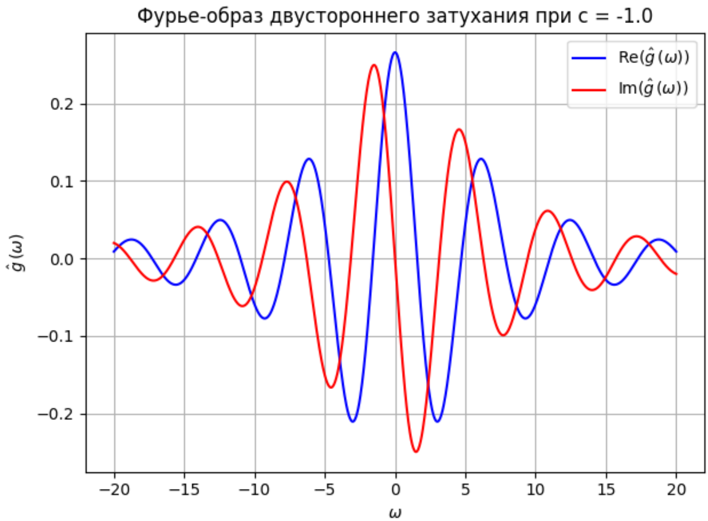

Рис. 45. График $\hat{g}(\omega)$ при $c = -1$.

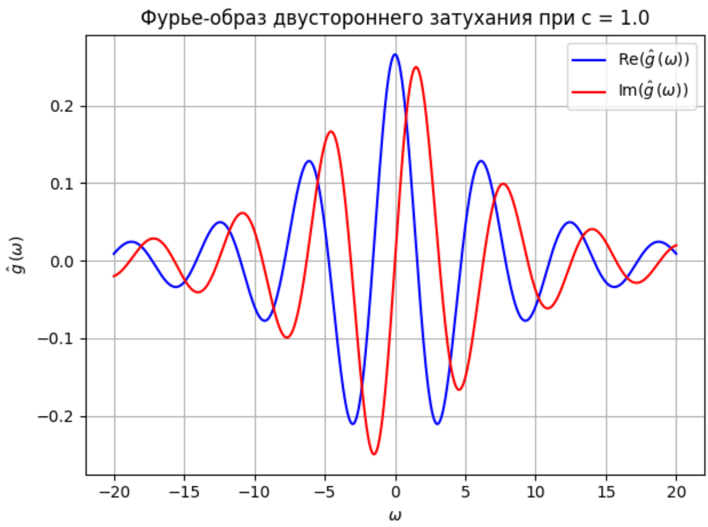

Рис. 46. График $\hat{g}(\omega)$ при $c = 1$.

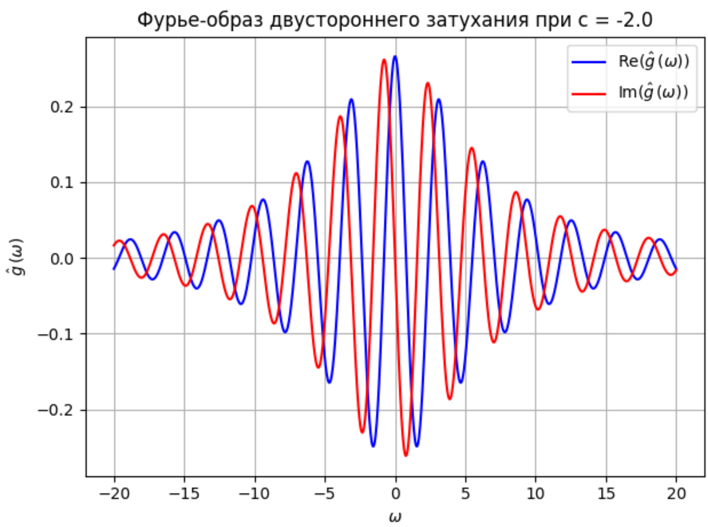

Рис. 47. График $\hat{g}(\omega)$ при $c = -2$.

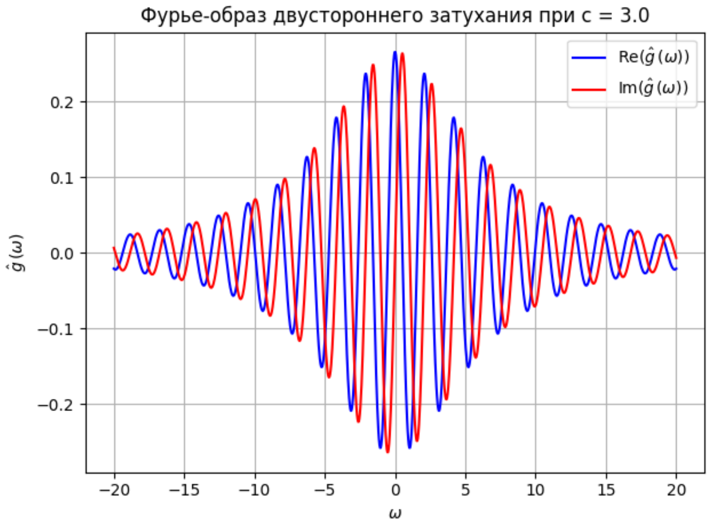

Рис. 48. График $\hat{g}(\omega)$ при $c = 3$.

Отметим следующее влияние параметра c на вещественную и мнимую компоненты Фурье-образа.

- **Фазовый сдвиг:** Параметр c вносит фазовый множитель $e^{-i\omega c}$ в Фурье-образ, что изменяет распределение вещественной $(\mathrm{Re}(\hat{g}(\omega)))$ и мнимой $(\mathrm{Im}(\hat{g}(\omega)))$ компонент.
- **Симметрия:**
  - При $c \neq 0$ симметрия нарушается, что приводит к появлению ненулевой мнимой компоненты.
- **Пример:** Для $c = 1$ и $c = -1$ вещественные компоненты зеркальны, а мнимые противоположны по знаку.

2.4 Построение графиков модуля Фурье-образа.

Теперь построим графики модуля Фурье-образа, чтобы оценить влияние параметра c на них.

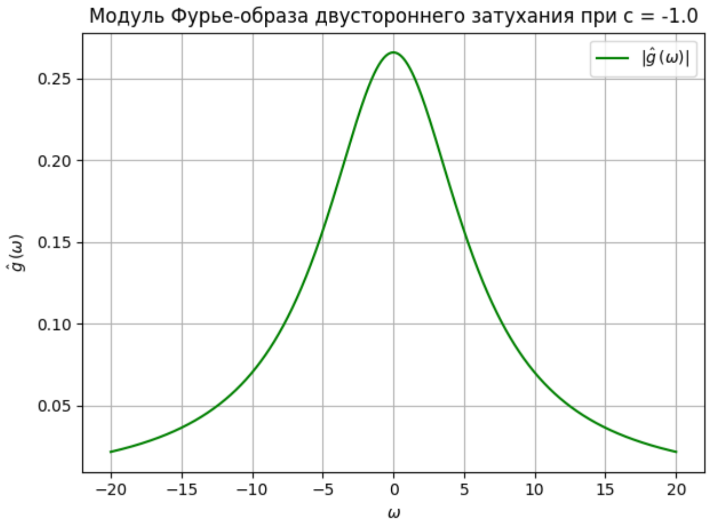

Рис. 49. График $|\hat{g}(\omega)|$ при $c = -1$.

Рис. 50. График $|\hat{g}(\omega)|$ *при* $c = 1$.

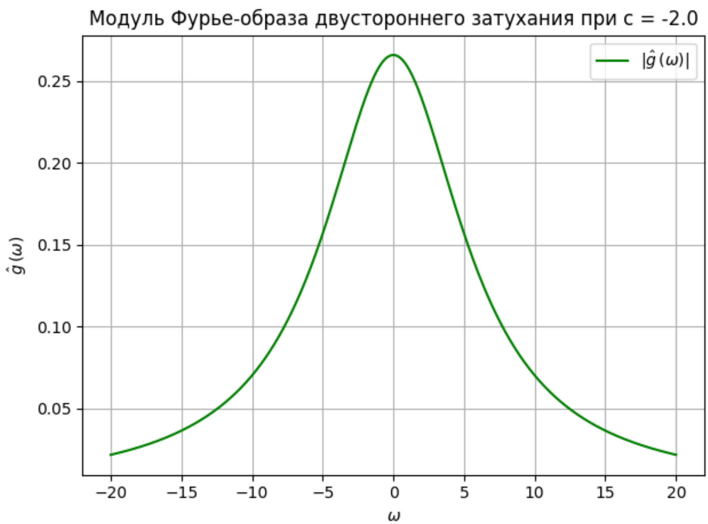

Рис. 51. График $|\hat{g}(\omega)|$ *при* $c = -2$.

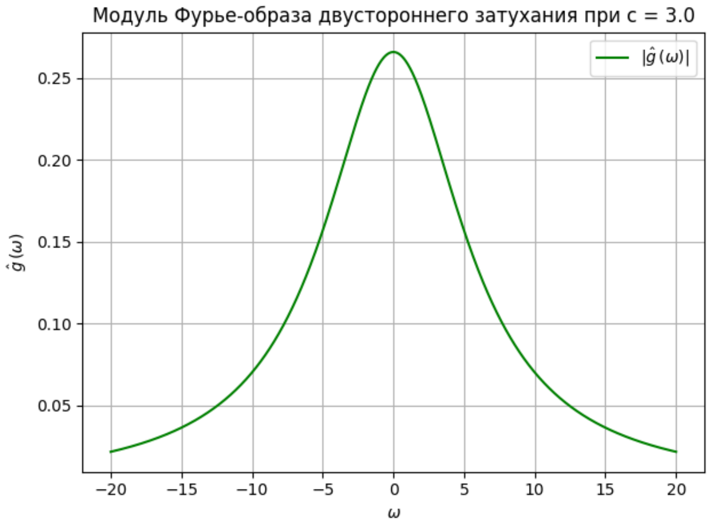

Рис. 52. График $|\hat{g}(\omega)|$ при $c = 3$.

Зафиксируем, как параметр c влияет на график модуля Фурье-образа.

- **Инвариантность:** Модуль $|\hat{g}(\omega)|$ остаётся неизменным при любом c, так как фазовый множитель $e^{-i\omega c}$ не влияет на амплитуду.
- **Подтверждение:** На графиках модуля для разных c (например, $c = -1$, $c = -2$, $c = 3$) кривые совпадают.

- **Анализ через свойства преобразования Фурье:**
  - **Сдвиг во времени:** $g(t + c) \leftrightarrow e^{-i\omega c}\hat{g}(\omega)$.
  - **Модуль:** $|e^{-i\omega c}\hat{g}(\omega)| = |\hat{g}(\omega)|$.
  - **Фаза:** $\arg(e^{-i\omega c}\hat{g}(\omega)) = \arg(\hat{g}(\omega)) - \omega c$.

2.5 Выводы.

Сформулируем выводы, которые можно сделать по результатам выполнения данного задания.

1. **Влияние сдвига (c):**
   - Сдвиг функции во времени ($g(t) = f(t+c)$) вносит фазовый множитель $e^{-i\omega c}$ в Фурье-образ, изменяя вещественную и мнимую компоненты, но не затрагивая модуль спектра.
2. **Модуль Фурье-образа:**
   - Инвариантен к временным сдвигам (c), что позволяет анализировать амплитудные характеристики сигнала независимо от его положения на временной оси.
3. **Экспоненциальное затухание:**
   - Двустороннее затухание $ae^{-b|t|}$ имеет Лоренцианоподобный спектр, характерный для систем с диссипацией энергии.
4. **Вещественная и мнимая компоненты Фурье-образа:**
   - Вещественная компонента ($\mathrm{Re}(\hat{f}(\omega))$ отражает вклад косинусоидальных гармоник, а мнимая ($\mathrm{Im}(\hat{f}(\omega))$) — синусоидальных.
   - Временной сдвиг ($c \neq 0$) нарушает симметрию, приводя к появлению ненулевой мнимой компоненты и асимметрии вещественной.
5. **Фазовый множитель и временной сдвиг:**
   - Сдвиг c во временной области проявляется как умножение Фурье-образа на фазовый множитель $e^{-i\omega c}$. Это приводит к:
     - Линейному накоплению фазы $\arg(\hat{g}(\omega)) \to \arg(\hat{g}(\omega)) - \omega c$;
     - Возникновению асимметрии в вещественной и мнимой компонентах спектра, что используется в фазовой модуляции и синхронизации сигналов.

3 Задание 3. Музыкальное.

В данном задании используется преобразование Фурье к обыкновенной частоте ν.

Выберем аккорд 13 для использования. Обработаем запись и построим график $f(t)$.

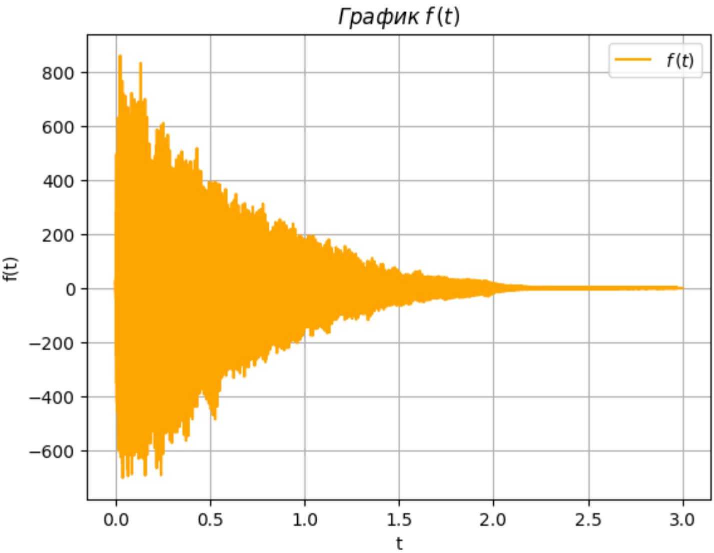

Рис. 53. График файла "Аккорд (13).mp3".

Найдем Фурье-образ $\hat{f}(\nu)$ при помощи численного интегрирования и программных средств, а затем построим график $|\hat{f}(\nu)|$.

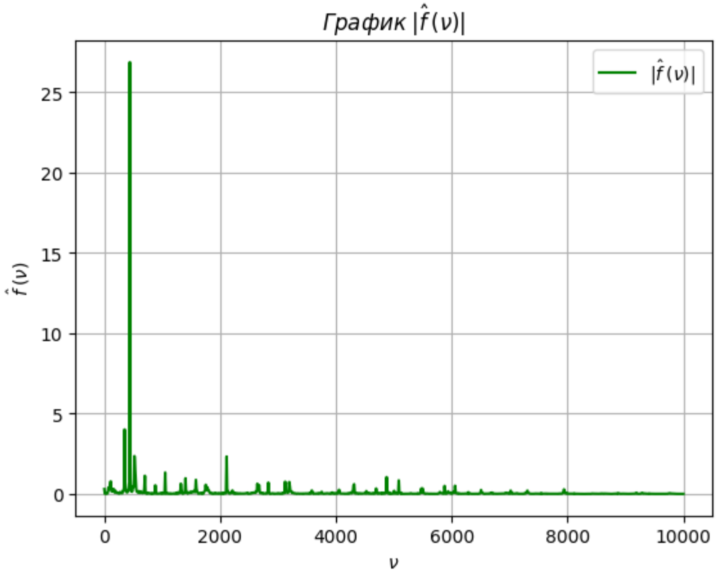

Рис. 54. График $|\hat{f}(\nu)|$.

Проанализируем график модуля Фурье-образа и найдем основные частоты, присутствующие в аккорде. Затем соотнесем частоты с музыкальными нотами при помощи таблицы соответствия нот и частот. Сделаем вывод о том, из каких нот составлен аккорд. Самым высоким пикам на графике соответствуют частоты: 440, 350 и 530 Гц. Следовательно, можно сделать вывод о соответствии нот. Наиболее подходящие ноты:

- **A** *Ля первой октавы* (частота 440.00 Гц).
- **F** *Фа первой октавы* (частота 350 Гц).
- **C** *До второй октавы* (частота 530 Гц).

3.1 Выводы

Сформулируем вывод на основе выполнения данного задания.

1. **Идентификация основных частот и нот:** Преобразование Фурье позволяет точно определить доминирующие частоты в аудиосигнале, что используется для распознавания нот, аккордов и инструментов. Например, частота 440 Гц соответствует ноте Ля (A4), а анализ спектра помогает выделить составные части сложных музыкальных фрагментов.

2. **Анализ гармоник и тембра:** Спектральное разложение выявляет обертоны и гармоники, формирующие уникальный тембр инструмента или голоса. Это критично для синтеза реалистичных звуков и изучения акустических характеристик.

3. **Фильтрация и очистка сигнала:** Частотное представление позволяет применять фильтры (низкочастотные, высокочастотные) для подавления шумов, удаления артефактов или выделения целевых компонентов.

4. **Сжатие аудиоданных:** Алгоритмы сжатия (MP3, AAC) используют Фурье-анализ для удаления малозаметных частот, сохраняя воспринимаемую слухом информацию. Это сокращает размер файлов без значительной потери качества.

5. **Визуализация и анализ звуковых волн:** Спектрограммы, построенные на основе преобразования Фурье, дают наглядное представление о динамике частот во времени. Это применяется в аудиоредакторах (Audacity, Ableton) и научных исследованиях акустических явлений.

4 Выводы по лабораторной работе

Сформулируем общие выводы, которые можно сделать после выполнения лабораторной работы:

1. **Роль параметров a и b:**
   - Параметр a определяет амплитуду исходной функции, пропорционально влияя на амплитуду Фурье-образа. Например, для прямоугольной функции увеличение a повышает высоту импульса и максимум спектра.
   - Параметр b регулирует ширину импульса во временной области. Увеличение b расширяет интервал, на котором функция отлична от нуля, что сужает основной лепесток Фурье-образа (например, для прямоугольной функции $\text{sinc}(\omega b)$).
2. **Равенство Парсеваля:**
   - Для всех рассмотренных функций (прямоугольной, треугольной, Гаусса и др.) равенство $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2$ выполняется с высокой точностью, подтверждая сохранение энергии при преобразовании Фурье.
3. **Принцип неопределённости Гейзенберга:**
   - Проявляется в обратной зависимости между шириной импульса (Δt) и шириной спектра ($\Delta\omega$), что иллюстрирует компромисс между временной и частотной локализацией.
4. **Свойства преобразования Фурье:**
   - **Линейность:** Амплитуда Фурье-образа пропорциональна a, что подтверждено для всех функций.
   - **Дуальность:** Прямоугольный импульс и sinc-функция являются взаимными образами, а функция Гаусса совпадает со своим образом при $b = \frac{1}{2}$.

5. **Влияние временного сдвига (c):**
   - Сдвиг $g(t) = f(t + c)$ вносит фазовый множитель $e^{-i\omega c}$, изменяя вещественную и мнимую компоненты спектра, но не затрагивая модуль. Например, для $c = 1$ и $c = -1$ мнимые компоненты противоположны по знаку.
6. **Особенности функций:**
   - **Треугольная функция:** Имеет более гладкий спектр по сравнению с прямоугольной из-за отсутствия разрывов.
   - **Кардинальный синус:** Соответствует прямоугольному импульсу в частотной области, ширина которого обратно пропорциональна b.
   - **Функция Гаусса:** Единственная функция, совпадающая со своим Фурье-образом при $b = \frac{1}{2}$.
7. **Методы численного интегрирования:**
   - Использование метода трапеций показало высокую точность при вычислении Фурье-образов, что подтверждается совпадением соответствующих результатов.
8. **Анализ музыкального аккорда:**
   - Преобразование Фурье позволило выделить основные частоты (440 Гц, 350 Гц, 530 Гц), соответствующие нотам Ля (A4), Фа (F4) и До (C5), что демонстрирует практическое применение метода в обработке звука.
9. **Практическая значимость:**
   - Результаты работы могут быть использованы в задачах фильтрации сигналов, сжатия данных, синтеза звука и анализа спектральных характеристик.
10. **Инвариантность модуля:**
    - Модуль Фурье-образа остаётся неизменным при временных сдвигах, что позволяет анализировать амплитудные характеристики сигнала независимо от его положения во времени.

Приложение

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def rectangle_func(t, a, b):
    if abs(t) <= b:
        return a
    return 0

def triangle_func(t, a, b):
    if abs(t) <= b:
        return a - abs(a*t/b)
    return 0

def cardinal_sin(t, a, b):
    return a*np.sinc(b*t)

def gauss_func(t, a, b):
    return a*np.exp(-b*t**2)

def bilateral_func(t, a, b):
    return a*np.exp(-b*abs(t))


a=1
b=4
tvals = np.linspace(-10, 10, 1000)
omega = np.linspace(-25, 25, 1000)

#rectangle = [rectangle_func(t, a, b) for t in tvals]
#yvals = [cardinal_sin(t, a, b) for t in tvals]

F_omega = np.zeros(len(omega), dtype=complex)
fs = [bilateral_func(t, a, b) for t in tvals]

for i in range(len(omega)):
    integrand = fs * np.exp(-1j * omega[i] * t)
    F_omega[i] = np.trapz(integrand, t) / np.sqrt(2 * np.pi)

#plt.plot(tvals, yvals, color='green', label=r'$f\,(t)$')
plt.plot(omega, F_omega, color='red', label=r'$\hat{f}\,(\omega)$')
# plt.xlabel(r'$t$')
# plt.ylabel(r'$f\,(t)$')
plt.xlabel(r'$\omega$')
plt.ylabel(r'$\hat f \,(\omega)$')
plt.legend()
#plt.title(fr'$График \; оригинала \; фнукции \; f\,(t) \; при \; a
```

```
    = {a}, \; b = {b}$')
plt.title(fr'$График \; Фурье-образа \; фнукции \; \hat f \,(\omega
    ) \; при \; a = {a}, \; b = {b}$')
plt.grid()
plt.show()
```

Листинг 1. Программа, используемая для построения графиков оригинала функции и ее Фурье-образа.

```python
def parseval_check(f, t, omega):
    """
    Проверяет равенство Парсеваля
    """
    # Энергия во временной области
    energy_time = np.trapz(np.abs(f(t))**2, t)

    # Фурье-образ
    F_omega = fourier_transform(f, t, omega)

    # Энергия в частотной области
    energy_freq = np.trapz(np.abs(F_omega)**2, omega)

    return energy_time, energy_freq

# Параметры
T = 10.0          # Пределы интегрирования по времени [-T, T]
N_t = 1000        # Количество точек по времени
omega_max = 20.0 # Максимальная частота
N_omega = 1000    # Количество точек по частоте
a = 1
b = 4

# Сетки времени и частоты
t = np.linspace(-T, T, N_t)
omega = np.linspace(-omega_max, omega_max, N_omega)

# Выбор функции для проверки
f = lambda t: rectangle_func(t, a, b)

# Проверка равенства Парсеваля
energy_time, energy_freq = parseval_check(f, t, omega)

# Результаты
print(f"Энергия во временной области: {energy_time:.5f}")
print(f"Энергия в частотной области: {energy_freq:.5f}")
print(f"Разница: {abs(energy_time - energy_freq):.5e}")
```

Листинг 2. Программа для проверки равенства Парсеваля.