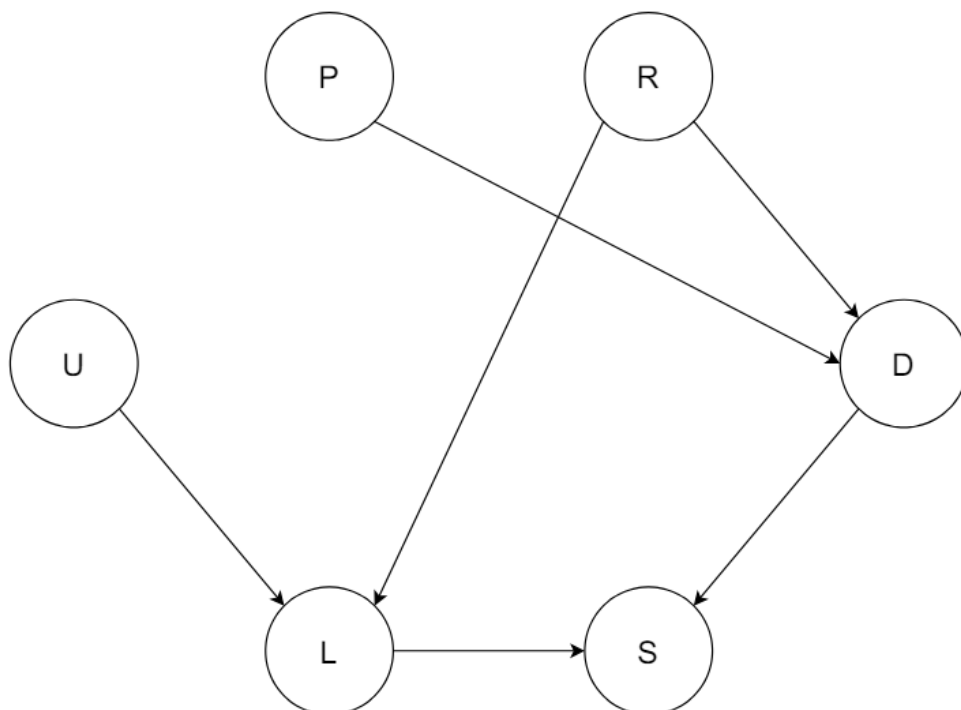


**Проблем 1 – Баесови мрежи (Студентски живот)**

А) Случајни променливи:

- P – Предавања
  - Да – оди на предавања (1)
  - Не – не оди на предавања (0)
- R – Редовност
  - Да – ги завршува задолженијата (1)
  - Не – не ги завршува задолженијата (0)
- U – Упорност
  - Да – упорен (1)
  - Не – неупорен (0)
- D – Домашна
  - Да – ги изработи сите домашни задачи (1)
  - Не – не ги изработи сите домашни задачи (0)
- L – Лабораториска
  - Да – ги изработи сите лабораториски задачи (1)
  - Не – не ги изработи сите лабораториски задачи (0)
- S – Успех
  - Да – се чувствува успешен (1)
  - Не – не се чувствува успешен (0)

Б) Баесова мрежа:



В) Потребни се  $2^6$  параметри (поединечни вредности на веројатностите) за да се дефинираат условните веројатносни распределби. Степенот е 6 поради тоа што има 6 сличајни променливи, а основата е 2 поради тоа што за секоја променлива има 2 можни вредности (да/не). Но, ова би бил случајот доколку би ја користеле обичната веројатност и во табелата би ги ставиле сите можни комбинации. Ова секако може да се оптимизира со користење на правилото за веројатност на спортивен настан, односно доколку ја имаме основната веројатност (пример за колкава е веројатноста студентот ДА оди на предавања), спротиваната може да се пресмета како  $1 - \text{колкава е веројатноста студентот ДА оди на предавања} \rightarrow P(X') = 1 - P(X)$ . Со ова вкупниот број на параметри може да се намали дуplo  $\rightarrow 2^5$ .

Г)

U	P(U)
Да	0.5
Не	0.5

P	P(P)
Да	0.68
Не	0.32

формула:  $P(X') = 1 - P(X)$

R	P(R)
Да	0.5
Не	0.5

Маргинални веројатности

D	P	R	$P(D P,R)$
1	1	1	0.8
0	1	1	0.2
1	1	0	0.5
0	1	0	0.5
1	0	1	0.5
0	0	1	0.5
1	0	0	0.5
0	0	0	0.5

Домашна зависи само од Предавања и Редовност

L	R	U	P(L R,U)
1	1	1	0.5
0	1	1	0.5
1	1	0	0.5
0	1	0	0.5
1	0	1	0.5
0	0	1	0.5
1	0	0	0.5
0	0	0	0.5

Лабораториска зависи од Редовност и Упорност

S	D	L	P(S D,L)
1	1	1	0.5
0	1	1	0.5
1	1	0	0.5
0	1	0	0.5
1	0	1	0.5
0	0	1	0.5
1	0	0	0.05
0	0	0	0.95

Успех зависи само од Домашна и од Лабораториска

Легенда: тие што се со жолто се веќе дадени во текстот а останатите што се 0.5 се произволно дадени.

$$D) P(P, R, U, D, L, S) = P(P) * P(R|P) * P(U|R, P) * P(D|U, R, P) * P(L|D, U, R, P) * P(S|L, D, U, R, P) = P(P) * P(R) * P(U) * P(D|R, P) * P(L|U, R) * P(S|D, L) = 0.68 * 0.5 * 0.5 * 0.8 * 0.5 * 0.5 = 0.034$$

$P(L|D, U, R, P)$  – за овој израз заклучив дека не може да се пресмета веројатноста за да се види дали L е независно од останатите (поради тоа што треба да ги знаеме условните веројатности за L во зависност од сите можни комбинации на променливите P, R, U, и D ) па затоа заклучив дека Лабораториска зависи само од Редовност и Упорност.

Ѓ) Структура на Баесовата мрежа:

- P (Предавања)
- R (Редовност)
- U (Упорност)
- D (Домашна задача) која зависи од P и R
- L (Лабораториска вежба) која зависи од R и U
- S (Успех) која зависи од D и L

Апсолутни независности: нема

Условни независности:

- $S \perp\!\!\!\perp P \mid D$ 
  - Образложение: Успехот (S) е директно зависен од домашната задача (D) и лабораториската вежба (L). Променливата (P) влијае на (D) која понатаму влијае на (S). Откако е позната (D), информацијата за (P) не додава дополнителна информација за (S). Затоа, S е независен од P условно на D. (Causal Chain)
- $S \perp\!\!\!\perp R \mid L, D$ 
  - Образложение: Успехот (S) зависи од домашната задача (D) и лабораториската вежба (L). Променливата (R) влијае и на (D) и на (L), но кога тие се познати (D и L), (R) не додава дополнителна информација за (S). Затоа, S е независен од R условно на L и D. (Causal Chain)
- $S \perp\!\!\!\perp U \mid L$ 
  - Образложение: Успехот (S) зависи од лабораториската вежба (L) која зависи од упорноста (U). Кога (L) е позната, (U) не додава дополнителна информација за (S). Затоа, S е независен од U условно на L. (Causal Chain)
- $L \perp\!\!\!\perp D \mid R$  (важи и обратното  $\rightarrow D \perp\!\!\!\perp L \mid R$ )
  - Common Cause.

Е) Треба да се напише изразот за веројатноста дека студентот ја напишал домашната ако се знае дека одел на предавања, односно  $P(D \mid P)$ . Ги имаме следните податоци:

- Домашна зависи само од Предавања и Редовност
- $P(P) = 0.68$
- $P(D \mid P, R) = 0.8$
- Бидејќи во текстот не ни беше даден податок за  $P(D \mid P, R')$ , претпоставивме дека е 0.5

Го користиме законот за тотална веројатност:

$$P(D \mid P) = P(D \mid P, R) * P(R \mid P) + P(D \mid P, R') * P(R' \mid P) = 0.8 * 0.5 + 0.5 * 0.5 = 0.4 + 0.25 = 0.65$$

Бидејќи P и R се независни меѓу себе,  $P(R \mid P) == P(R) = 0.5$

Бидејќи P и R' се независни меѓу себе,  $P(R' \mid P) == P(R') = 0.5$

Веројатноста дека студентот напишал домашна задача ако се знае дека одел на предавања е 0.65, односно  $P(D \mid P) = 0.65$ .

Ж) Треба да се напише изразот за веројатноста дека студентот се чувствува успешен, односно  $P(S)$ . Ги имаме следните податоци:

- $P(P) = 0.68$
- $P(R) = 0.5$
- $P(U) = 0.5$
- $P(D|P, R) = 0.8$
- $P(D|P, R') = 0.5$  (претпоставено)
- $P(L|R, U) = 0.7$
- $P(L|R, U') = 0.5$  (претпоставено)
- $P(L|R', U) = 0.6$  (претпоставено)
- $P(L|R', U') = 0.4$  (претпоставено)
- $P(S|D, L) = 0.9$
- $P(S|D, L') = 0.6$
- $P(S|D', L) = 0.5$
- $P(S|D', L') = 0.2$

Израз за  $P(S)$ :

$$P(S = \text{да}) = \sum_{D,L} P(S = \text{да} | D = \text{да} / \text{не}, L = \text{да} / \text{не}) * P(D = \text{да} / \text{не}, L = \text{да} / \text{не})$$

Пресметка на  $P(D, L)$

$$P(D, L) = \sum_{P,R,U} P(D|P = \text{да} / \text{не}, R = \text{да} / \text{не}) * P(L|R = \text{да} / \text{не}, U = \text{да} / \text{не}) * P(P = \text{да} / \text{не}) * P(R = \text{да} / \text{не}) * P(U = \text{да} / \text{не})$$

$$P(S = \text{да}) = 0.9 * (0.068 + 0.068 + 0.051 + 0.034) + 0.6 * (0.028 + 0.02) + 0.5 * (0.024) + 0.2 * (0.016) = 0.9 * 0.221 + 0.6 * 0.048 + 0.5 * 0.024 + 0.2 * 0.016 = 0.1989 + 0.0288 + 0.012 + 0.0032 = 0.2429$$

Веројатноста дека студентот се чувствува успешен,  $P(S = \text{да})$ , е приближно 0.2429.

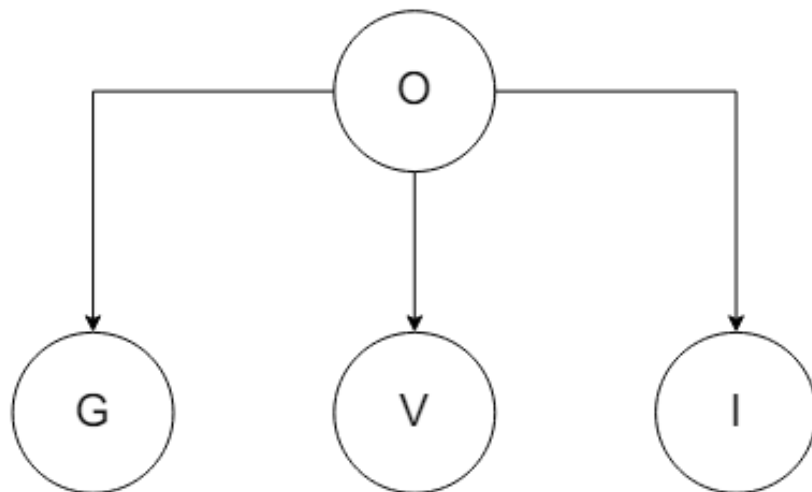
## Проблем 2 – Машинско учење

### А. Наивен Баесов класификатор

А)

Параметри:

- G – Град
  - Да (1)
  - Не (0)
- V – Време
  - Ден (1)
  - Ноќ (0)
- I – Итен повик
  - Да (1)
  - Не (0)
- O – Опасност
  - Висока (1)
  - Ниска (0)



O	PML(O)		PLAP,2(O)	
1	5	10	7	14
0	5	10	7	14

G	O	PML(G O)		PLAP,2(G O)	
1	1	3	5	5	9
1	0	2	5	4	9
0	1	2	5	4	9
0	0	3	5	5	9

V	O	PML(V O)		PLAP,2(V O)	
1	1	1	5	3	9
1	0	4	5	6	9
0	1	4	5	6	9
0	0	1	5	3	9

I	O	PML(I O)		PLAP,2(I O)	
1	1	2	5	4	9
1	0	3	5	5	9
0	1	3	5	5	9
0	0	2	5	4	9

\*Задебелениот border претставува дробна црта, бојот од левата страна е броителот а од десната именителот.

Б) не е во град, се одвива дење и имало итен повик

$G = 0, V = 1, I = 1$

$P(G = 0, V = 1, I = 1, O = 0) = P(G = 0 | O = 0) * P(V = 1 | O = 0) * P(I = 1 | O = 0) * P(O = 0) = 5/9 * 6/9 * 5/9 * 7/14 = 0.10288065843621401$

$P(G = 0, V = 1, I = 1, O = 1) = P(G = 0 | O = 1) * P(V = 1 | O = 1) * P(I = 1 | O = 1) * P(O = 1) = 2/9 * 3/9 * 4/9 * 7/14 = 0.016460905349794237$

Според добиените веројатности, примерокот ќе биде класифициран како  $O = 0$ , односно опасноста ќе биде ниска.

В) случај кој е во град во текот на ноќта да има високо ниво на опасност

$$G = 1, V = 0, O = 1$$

$$P(G = 1, V = 0, O = 1) = P(G = 1, V = 0, I = 0, O = 1) + P(G = 1, V = 0, I = 1, O = 1) =$$

$$P(G = 1 \mid O = 1) * P(V = 0 \mid O = 1) * P(I = 0 \mid O = 1) * P(O = 1) +$$

$$P(G = 1 \mid O = 1) * P(V = 0 \mid O = 1) * P(I = 1 \mid O = 1) * P(O = 1) =$$

$$5/9 * 6/9 * 5/9 * 7/14 + 5/9 * 6/9 * 4/9 * 7/14 = 0.1851851851851852$$

Веројатноста за случај кој е во град во текот на ноќта да има високо ниво на опасност по животот на полицајците е 0.1851851851851852.

## Б. Перцептрон

А)

- Позитивната класа е опасноста да е висока
- Негативната класа е опасноста да е ниска

Доделување на класите:

$$y = \begin{cases} +1 & \text{if } w \cdot f(x) \geq 0 \\ -1 & \text{if } w \cdot f(x) < 0 \end{cases}$$

Нека почетен вектор биде на тежини биде:  $w = [1, 1, -1, 1]$ . Тежините се однесуваат на bias, град, време, итен повик, соодветно.

Доколку сите тежини на перцептронот се еднакви на 0 ( $w = [0, 0, 0, 0]$ ), тогаш  $w \cdot f(x) = 0$  и за секој примерок ќе биде предвидена позитивна класа.

Доколку ги користиме моите предлози за параметри на тежинскиот вектор: вредностите на тежините на перцептронот укажуваат дека параметрите град и итен повик се одразуваат оптимистички на оценката за класата, додека пак параметарот време се однесува песимистички на оценката за класата. А пак bias – от укажува дека позитивните оценки се фаворизирани.



Б)

Примерок 1:

$$f(x) = [1, 0, 0, 0]$$

$$w = [1, 1, -1, 1]$$

$$y^* = 1$$

$$w * f(x) = 1 * 1 + 1 * 0 + (-1) * 0 + 1 * 0 = 1$$

Предвидената класа е точна и нема промена во тежинскиот вектор.

Примерок 2:

$$f(x) = [1, 0, 0, 1]$$

$$w = [1, 1, -1, 1]$$

$$y^* = 1$$

$$w * f(x) = 1 * 1 + 1 * 0 + (-1) * 0 + 1 * 1 = 2$$

Предвидената класа е точна и нема промена во тежинскиот вектор.

Примерок 3:

$$f(x) = [1, 0, 0, 1]$$

$$w = [1, 1, -1, 1]$$

$$y^* = -1$$

$$w * f(x) = 1 * 1 + 1 * 0 + (-1) * 0 + 1 * 1 = 2$$

Предвидената класа не е точна и има промена во тежинскиот вектор:

$$w = w + (-1) * f(x) = [1, 1, -1, 1] - [1, 0, 0, 1] = [0, 1, -1, 0]$$

Примерок 4:

$$f(x) = [1, 0, 1, 0]$$

$$w = [0, 1, -1, 0]$$

$$y^* = -1$$

$$w * f(x) = 0 * 1 + 1 * 0 + (-1) * 1 + 0 * 0 = -1$$

Предвидената класа е точна и нема промена во тежинскиот вектор.

Примерок 5:

$$f(x) = [1, 0, 1, 0]$$

$$w = [0, 1, -1, 0]$$

$$y^* = -1$$

$$w * f(x) = 0 * 1 + 1 * 0 + (-1) * 1 + 0 * 0 = -1$$

Предвидената класа е точна и нема промена во тежинскиот вектор.

Примерок 6:

$$f(x) = [1, 1, 0, 0]$$

$$w = [0, 1, -1, 0]$$

$$y^* = 1$$

$$w * f(x) = 0 * 1 + 1 * 1 + (-1) * 0 + 0 * 0 = 1$$

Предвидената класа е точна и нема промена во тежинскиот вектор.

Примерок 7:

$$f(x) = [1, 1, 0, 0]$$

$$w = [0, 1, -1, 0]$$

$$y^* = 1$$

$$w * f(x) = 0 * 1 + 1 * 1 + (-1) * 0 + 0 * 0 = 1$$

Предвидената класа е точна и нема промена во тежинскиот вектор.

Примерок 8:

$$f(x) = [1, 1, 1, 1]$$

$$w = [0, 1, -1, 0]$$

$$y^* = -1$$

$$w * f(x) = 0 * 1 + 1 * 1 + (-1) * 1 + 0 * 1 = 0$$

Предвидената класа не е точна и има промена во тежинскиот вектор:

$$w = w + (-1) * f(x) = [0, 1, -1, 0] - [1, 1, 1, 1] = [-1, 0, -2, -1]$$

Примерок 9:

$$f(x) = [1, 1, 1, 1]$$

$$w = [-1, 0, -2, -1]$$

$$y^* = -1$$

$$w * f(x) = (-1) * 1 + 0 * 1 + (-2) * 1 + (-1) * 1 = -4$$

Предвидената класа е точна и нема промена во тежинскиот вектор.

Примерок 10:

$$f(x) = [1, 1, 1, 1]$$

$$w = [-1, 0, -2, -1]$$

$$y^* = 1$$

$$w * f(x) = (-1) * 1 + 0 * 1 + (-2) * 1 + (-1) * 1 = -4$$

Предвидената класа не е точна и има промена во тежинскиот вектор:

$$w = w + 1 * f(x) = [-1, 0, -2, -1] + [1, 1, 1, 1] = [0, 1, -1, 0]$$

Епохата заврши, тежинскиот вектор после оваа епоха е:  $w = [0, 1, -1, 0]$

В)

Алгоритамот за учење на перцептронот нема да конвергира поради тоа што има примероци кои имаат идентични карактеристики но припаѓаат на различни класи и токму поради ова не може да се најде “рамнина” која ги разделува точките со позитивни и негативни класи во просторот. Примероци кои имаат идентични карактеристики а се распределени во различни класи се:

- Примерок 2 со Примерок 3
- Примерок 9 со Примерок 10

## В. Дрво на одлучување

A)

Број на примероци: 10

Прво се пресметува ентропијата за коренот:

$S = [\text{Висока} = 5, \text{Ниска} = 5]$

$$H = - (5/10) * \log(5/10) - (5/10) * \log(5/10) = 1$$

Потоа на останатите карактеристики и се пресметува Gain:

Карактеристика: Град

Вредности:

- Да
  - Број: 5
  - Распределба: [Висока = 3, Ниска = 2]
  - $H = - (3/5) * \log(3/5) - (2/5) * \log(2/5) = 0.9709505944546686$
- Не:
  - Број: 5
  - Распределба: [Висока = 2, Ниска = 3]
  - $H = - (2/5) * \log(2/5) - (3/5) * \log(3/5) = 0.9709505944546686$

$$\text{Gain}(S, \text{Град}) = 1 - 5/10 * 0.9709505944546686 - 5/10 * 0.9709505944546686 = 0.02904940554533142$$

Карактеристика: Време

Вредности:

- Ден:
  - Број: 5
  - Распределба: [Висока = 1, Ниска = 4]
  - $H = - (1/5) * \log(1/5) - (4/5) * \log(4/5) = 0.7219280948873623$
- Ноќ:
  - Број: 5
  - Распределба: [Висока = 4, Ниска = 1]
  - $H = - (4/5) * \log(4/5) - (1/5) * \log(1/5) = 0.7219280948873623$

$$\text{Gain}(S, \text{Време}) = 1 - 5/10 * 0.7219280948873623 - 5/10 * 0.7219280948873623 = 0.2780719051126377$$

Карактеристика: Итен повик

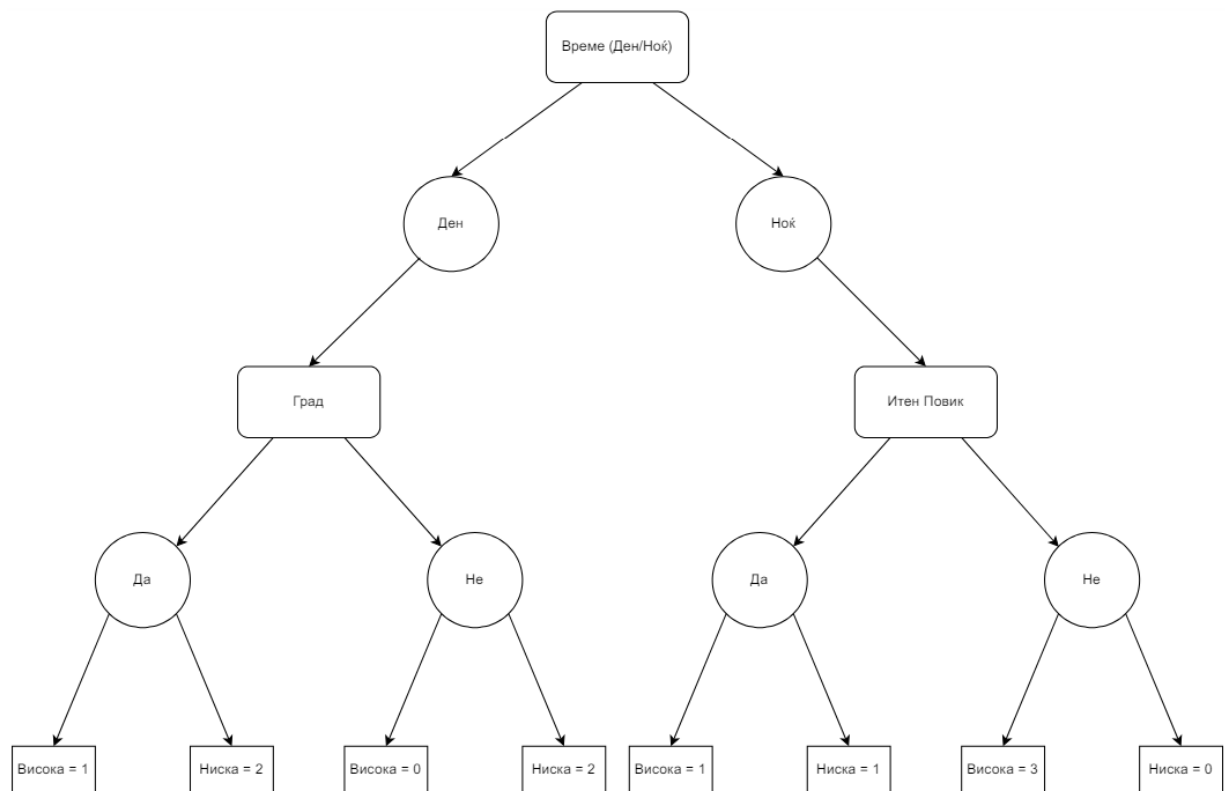
Вредности:

- Да:
  - Број: 5
  - Распределба: [Висока = 1, Ниска = 4]
  - $H = - (1/5) * \log(1/5) - (4/5) * \log(4/5) = 0.7219280948873623$
- Не:
  - Број: 5
  - Распределба: [Висока = 2, Ниска = 3]
  - $H = - (2/5) * \log(2/5) - (3/5) * \log(3/5) = 0.9709505944546686$

$Gain(S, \text{Итен повик}) = 1 - 5/10 * 0.7219280948873623 - 5/10 * 0.9709505944546686 = 0.15356065532898455$

За корен на дрвото ќе се избере карактеристиката Време (Ден/Ноќ) поради тоа што таа карактеристика доби најголема вредност според Gain функцијата, односно најголемо влијание има таа карактеристика на крајниот резултат(класата на која тој примерок ќе припаѓа).

Б)



Листот кој е во град: ќе се направи одлука за ниска опасност, се зима мнозинската одлука

Листот кој не е во град: ќе се направи одлука за ниска опасност, нема примери од висока опасност

Листот кој има итен повик: ќе се направи случаен избор не може да се направи одлука на друг начин овде

Листот кој нема итен повик: ќе се направи одлука за висока опасност, нема примери од ниска опасност