

19-01-2018

ET-DI

## **Laboratorium z fizyki**

Ćw. nr: 21

***Temat:***

**Wyznaczenie pojemności kondensatora i stałej czasowej obwodu z krzywej rozładowania kondensatora.**

## I. Wstęp teoretyczny

### 1. Pojemność elektryczna – definicja, rodzaje kondensatorów.

Pojemnością kondensatora nazywamy stosunek ładunku zgromadzonego na jednej z okładek do napięcia pomiędzy okładkami:

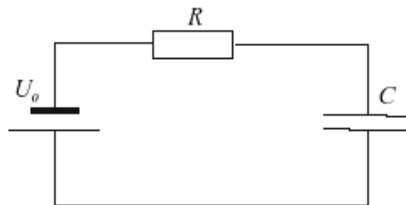
$$C = \frac{Q}{U}$$

Kondensatory dzielą się na:

- Płaskie, złożone z dwóch płyt, zwanych okładkami,
- Kuliste, złożone z dwóch współśrodkowych metalowych kul,
- Cylindryczne, złożone z dwóch współosiowych walców.

### 2. Ładowanie i rozładowanie kondensatora, równanie krzywej ładowania i rozładowania, stała czasowa obwodu.

Ładowanie kondensatora następuje w układzie:



Ładowanie kondensatora polega na doprowadzeniu napięcia do jego okładek, co powoduje osadzanie się na nich ładunku elektrycznego. Na jednej z okładek gromadzi się ładunek dodatni, na drugiej ujemny.

Rozładowanie kondensatora następuje w układzie:

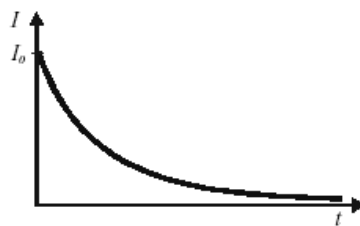


Rozładowanie kondensatora polega na podpięciu do niego rezystora. Rezystor pozbawia kondensator ładunku, który osadził się na jego okładkach.

Równanie krzywej ładowania i rozładowania:

Prąd ładowania i rozładowania kondensatora wyraża się taką samą zależnością, tzn. że krzywe ładowania i rozładowania są identyczne i wyrażają się wzorem:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



Stałą czasową obwodu nazywa się wielkość:  $\tau = RC$

Jest to taki czas po upływie którego prąd zmaleje e-krotnie.

3. Wyznaczanie pojemności kondensatora na podstawie jego krzywej rozładowania.

Pojemność kondensatora na podstawie krzywej rozładowania można wyznaczyć na kilka sposobów:

- Gdy  $t = \tau$  to:

$$I = \frac{I_0}{e} = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \Leftrightarrow \frac{1}{e} = e^{-\frac{t}{RC}} \Leftrightarrow -1 = -\frac{t}{RC} \Leftrightarrow C = \frac{t}{R}$$

Dla czasu  $\tau$ , wartość natężenia prądu jest równa  $I = I_0/e$ , korzystając z wykresu krzywej rozładowania odczytujemy czas  $\tau$  i korzystając ze wzoru  $C = \tau/R$  obliczamy pojemność kondensatora.

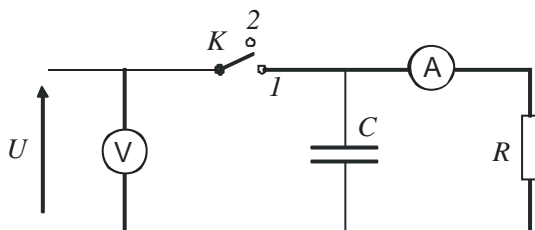
- Obliczamy wartość ładunku  $Q$ , i korzystając ze wzoru:  $C = Q/U$  obliczamy pojemność kondensatora.

4. Wyznaczanie wartości ładunku zgromadzonego na okładkach kondensatora na podstawie krzywej rozładowania.

Wartość ładunku można obliczyć z wyznaczenia wartości pola powierzchni zawartego między osiami układu współrzędnych a wykresem krzywej rozładowania.

## II. Wykonanie ćwiczenia

1. Połączyć obwód według schematu: w zależności od położenia klucza K obwód służy do ładowania lub rozładowania kondensatora.



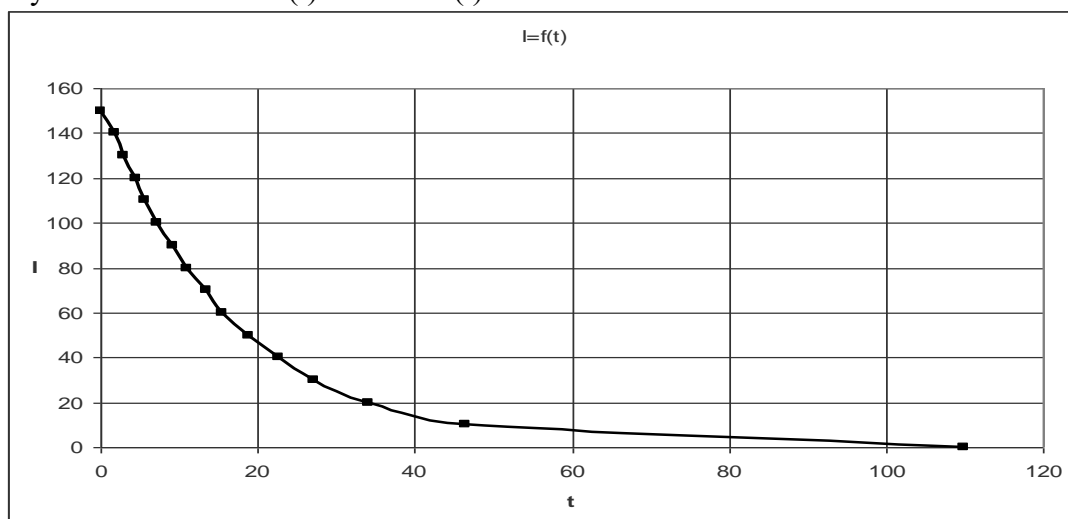
2. Naładować kondensator (przełącznik  $K$  w pozycji 1). Ustawić taką wartość oporu  $R$ , aby natężenie prądu osiągnęło maksymalną, możliwą do odczytu wartość przy pomocy zastosowanego amperomierza,  $I = I_0$  dla  $t = 0$  s.
3. Ustawić przełącznik  $K$  w pozycji 2 i jednocześnie włączyć sekundomierz. Zmierzyć czas, po którym natężenie prądu osiągnie wartości  $I_1 = I_0 - \Delta I$ ,  $I_2 = I_0 - 2\Delta I$ ,  $I_3 = I_0 - 3\Delta I$ , ...,  $I_n = I_0 - n\Delta I$ . Wartość  $\Delta I$  ustalić z prowadzącym ćwiczenia.
4. Uzyskane wyniki zapisać w tabeli pomiarowej.

### III. Tabela pomiarowa

U	R	$I_0$	t	I	Q	C	$\tau$
[ V ]	[ k $\Omega$ ]	[ mA ]	[ s ]	[ mA ]	[ $\mu$ C ]	[ $\mu$ F ]	[ s ]
6	40	150	0	150	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	1,78	140	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	3,6	130	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	3,85	120	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	5,63	110	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	7,26	100	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	9,18	90	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	11,75	80	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	14,75	70	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	18,07	60	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	21,32	50	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	36,81	40	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	32,73	30	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	41,08	20	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	56,66	10	3048,1	508,01	20,32
6	40	150	100,68	0	3048,1	508,01	20,32

### IV. Obliczenia

1. Wykres zależności  $I=f(t)$  oraz  $\ln I=f(t)$



Wyznaczenie ładunku zgromadzonego na okładzinach kondensatora dla  
= 40 kΩ

R

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{150+140}{2} \cdot 1,78 + \frac{140+130}{2} \cdot (3,6-1,78) + \frac{130+120}{2} \cdot (3,85-3,6) + \frac{120+110}{2} \cdot (5,63-3,85) + \\
 &+ \frac{110+100}{2} \cdot (7,26-5,63) + \frac{100+90}{2} \cdot (9,18-7,26) + \frac{90+80}{2} \cdot (11,75-9,81) + \frac{80+70}{2} \cdot (14,75-11,75) + \\
 &+ \frac{70+60}{2} \cdot (18,07-14,75) + \frac{60+50}{2} \cdot (21,32-18,07) + \frac{50+40}{2} \cdot (26,81-21,32) + \frac{40+30}{2} \cdot (32,73-26,81) + \\
 &+ \frac{30+20}{2} \cdot (41,08-32,73) + \frac{20+10}{2} \cdot (56,66-41,08) + \frac{10+0}{2} \cdot (100,68-56,66) = \\
 &= 258,1 + 245,7 + 231,25 + 204,7 + 171,15 + 182,4 + 218,45 + 225 + 215,8 + 178,75 + 247,05 + 207,2 + \\
 &+ 208,75 + 233,7 + 220,1 = 3048,1 \\
 Q_1 &= 3048,1 [\mu A \cdot s = \mu C]
 \end{aligned}$$

Wyznaczenie pojemności kondensatora:

$$C = \frac{Q_1}{U} = \frac{3048,1}{6} \cong 508,01 \left[ \frac{\mu C}{V} = \mu F \right]$$

Wyznaczenie ładunku zgromadzonego na okładzinach kondensatora dla  
= 50 kΩ

R

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= \frac{120+110}{2} \cdot 1,95 + \frac{110+100}{2} \cdot (3,97-1,95) + \frac{100+90}{2} \cdot (6,15-3,97) + \frac{90+80}{2} \cdot (9,04-6,15) + \\
 &+ \frac{80+70}{2} \cdot (12,79-9,04) + \frac{70+60}{2} \cdot (16,93-12,79) + \frac{60+50}{2} \cdot (21,62-16,93) + \frac{50+40}{2} \cdot (27,55-21,62) + \\
 &+ \frac{40+30}{2} \cdot (35,2-27,55) + \frac{30+20}{2} \cdot (46,32-35,2) + \frac{20+10}{2} \cdot (64,44-46,32) + \frac{10+0}{2} \cdot (113-64,44) = \\
 &= 224,25 + 212,1 + 207,1 + 245,65 + 281,25 + 269,1 + 257,95 + 266,85 + 267,75 + 278 + 271,8 + \\
 &+ 242,8 = 3024,67 \\
 Q_2 &= 3024,67 [\mu A \cdot s = \mu C]
 \end{aligned}$$

Wyznaczenie pojemności kondensatora:

$$C = \frac{Q_2}{U} = \frac{3024,67}{6} \cong 504,11 \left[ \frac{\mu C}{V} = \mu F \right]$$

Wyznaczenie współczynnika a:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n \ln \frac{I}{I_0} - n \sum_{i=1}^n t_i \ln \frac{I}{I_0}}{\left( \sum_{i=1}^n t_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n t_i^2}$$

dla  $R = 50 \text{ k}\Omega$

$$\sum_{i=1}^{15} t_i^2 = 3,802 + 15,76 + 37,822 + 81,721 + 163,584 + 286,625 + 467,424 + 759,002 + \\ + 1293,04 + 2145,542 + 4152,514 = 9352,836$$

$$a = \frac{245,96 \cdot (-9,832) - 12 \cdot (-366,067)}{(245,96)^2 - 12 \cdot 9352,836} = -0,0382$$

dla  $R = 50 \text{ k}\Omega$

$$\sum_{i=1}^{15} t_i^2 = 3,168 + 12,96 + 14,822 + 31,7 + 52,71 + 84,272 + 138,062 + 217,562 + 326,525 + \\ 3210,356 = 8024,274$$

$$a = \frac{254,47 \cdot (-12,725) - 15 \cdot (-393,969)}{(254,47)^2 - 15 \cdot 8024,274} = -0,048$$

Stała czasowa :

dla  $R = 40 \text{ k}\Omega$

$$\tau_1 = R_1 \cdot C_1 = 40 \cdot 10^3 \cdot 508,01 \cdot 10^{-6} \cong 20,32 [\Omega \cdot C = \frac{V}{A} \cdot \frac{A \cdot s}{V} = s]$$

dla  $R = 50 \text{ k}\Omega$

$$\tau_2 = R_2 \cdot C_2 = 50 \cdot 10^3 \cdot 504,11 \cdot 10^{-6} \cong 25,2 [\Omega \cdot C = \frac{V}{A} \cdot \frac{A \cdot s}{V} = s]$$

### Błędy:

Błędy mierników :

bezwzględny :

$$\Delta X = \frac{k}{100} \cdot Z_P$$

względny procentowy :

$$\delta_X = k \cdot \frac{Z_P}{X_M}$$

gdzie  $k$  - klasa dokładności miernika

$Z_P$  - zakres pomiarowy miernika

$X_M$  - wartość mierzona

Błąd pomiaru napięcia:

$$\Delta U = \frac{0,5}{100} \cdot 7,5 \cong 0,0375[\text{V}]$$

$$\delta_U = 0,5 \cdot \frac{7,5}{7} = 0,625\%$$

Błąd pomiaru prądu dla  $R = 40 \text{ k}\Omega$  :

Błąd bezwzględny pomiaru czasu określony jako czas reakcji osób wykonujących pomiar (czyli osoby przy miliamperomierzu i sekundomierzu).

$$\Delta I = \frac{0,5}{100} \cdot 150 = 0,75 [\mu\text{A}]$$

$$\delta_{I1} = 0,5 \cdot \frac{150}{150} = 0,5\%$$

$$\delta_{I2} = 0,5 \cdot \frac{140}{150} \cong 0,466[6]\%$$

$$\delta_{I3} = 0,5 \cdot \frac{130}{150} \cong 0,433[3]\%$$

$$\delta_{I4} = 0,5 \cdot \frac{120}{150} \cong 0,4\%$$

$$\delta_{I5} = 0,5 \cdot \frac{110}{150} \cong 0,034\%$$

dla  $R = 40 \text{ k}\Omega$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (I_{i+1} + I_i) &= (150 + 140) + (140 + 130) + (130 + 120) + (120 + 110) + (110 + 100) + \\ &+ (100 + 90) + (90 + 80) + (80 + 70) + (70 + 60) + (60 + 50) + (50 + 40) + (40 + 30) + \\ &+ (30 + 20) + (20 + 10) + (10 + 0) = 2250 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (t_{i+1} + t_i) &= 1,78 + (3,6 - 1,78) + (3,85 - 3,6) + (5,63 - 3,85) + (7,26 - 5,63) + \\ &+ (9,18 - 7,26) + (11,75 - 9,18) + (14,75 - 11,75) + (18,07 - 14,75) + (21,32 - 18,07) + \\ &+ (26,81 - 21,32) + (32,73 - 26,81) + (41,08 - 32,73) + (56,66 - 41,08) + (100,68 - 56,66) = \\ &= 1,78 + 1,82 + 0,25 + 1,78 + 1,63 + 1,92 + 2,57 + 3 + 3,32 + 3,25 + 5,49 + 5,92 + 8,35 + 15,58 + \\ &+ 44,02 = 100,68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n t_i &= 1,78 + 3,6 + 3,85 + 5,63 + 7,26 + 9,18 + 11,75 + 14,75 + 18,07 + 21,32 + 26,81 + 32,73 + \\ &+ 41,78 + 56,66 + 100,68 = 355,15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{I}{I_0} &= 0; -0,069; -0,143; -0,223; -0,31; -0,405; -0,511; -0,629; -0,762; -0,916; -1,1; -1,321; -1,61; \\ &- 2,015; -2,71 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \ln \frac{I}{I_0} \cdot t_i \right) = 0 \cdot 0 + 1,78 \cdot (-0,069) + 3,6 \cdot (-0,143) + 3,85 \cdot (-0,223) + 5,63 \cdot (-0,31) +$$

$$+ 7,26 \cdot (-0,405) + 9,18 \cdot (-0,511) + 11,75 \cdot (-0,629) + 14,75 \cdot (-0,762) + 18,07 \cdot (-0,916) +$$

$$+ 21,32 \cdot (-1,1) + 26,81 \cdot (-1,321) + 32,73 \cdot (-1,61) + 41,08 \cdot (-2,015) + 56,66 \cdot (-2,71) =$$

$$= -0,123 - 0,515 - 0,859 - 1,745 - 2,94 - 4,69 - 7,39 - 11,24 - 16,552 - 23,452 - 35,416 -$$

$$- 52,695 - 82,776 - 153,549 = -393,942$$

dla  $R = 50 \text{ k}\Omega$

$$\sum_{i=1}^n (I_{i+1} + I_i) = (120 + 110) + (110 + 100) + (100 + 90) + (90 + 80) + (80 + 70) + (70 + 60) +$$

$$+ (60 + 50) + (50 + 40) + (40 + 30) + (30 + 20) + (20 + 10) + (10 + 0) = 1440$$

$$\sum_{i=1}^n (t_{i+1} + t_i) = 1,95 + (3,97 - 1,95) + (6,15 - 3,97) + (9,04 - 6,15) + (12,79 - 9,04) +$$

$$+ (16,93 - 12,79) + (21,62 - 16,93) + (27,55 - 21,62) + (35,2 - 27,55) + (46,32 - 35,2) +$$

$$+ (64,44 - 46,32) + (113 - 64,44) = 1,95 + 2,02 + 2,18 + 2,89 + 3,75 + 4,14 + 4,69 + 5,93 + 7,65 +$$

$$+ 11,12 + 18,12 + 48,56 = 113$$

$$\sum_{i=1}^n t_i = 0 + 1,95 + 3,97 + 6,15 + 9,04 + 12,79 + 16,93 + 21,62 + 27,55 + 35,2 + 46,32 + 64,44 +$$

$$+ 113 = 358,95$$

$$\ln \frac{I}{I_0} = 0; -0,087; -0,182; -0,288; -0,405; -0,54; -0,693; -0,875; -1,1; -1,386; -1,791; -2,485;$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \ln \frac{I}{I_0} \cdot t_i \right) = 0 \cdot 0 + 1,95 \cdot (-0,087) + 3,97 \cdot (-0,182) + 6,15 \cdot (-0,288) + 9,04 \cdot (-0,405) +$$

$$+ 12,79 \cdot (-0,54) + 16,93 \cdot (-0,693) + 21,62 \cdot (-0,875) + 27,55 \cdot (-1,1) + 35,2 \cdot (-1,386) +$$

$$+ 46,32 \cdot (-1,791) + 64,44 \cdot (-2,485) = -0,17 - 0,722 - -1,771 - 3,661 - 6,91 - 11,732 - 18,917 -$$

$$- 30,305 - 48,787 - 82,959 - 160,133 = 366,067$$

$$\Delta Q_1 = \sum_{i=1}^n \left( \left| \frac{\delta Q_i}{\delta I_i} \cdot \Delta I \right| + \left| \frac{\delta Q_i}{\delta I_{i+1}} \cdot \Delta I \right| + \left| \frac{\delta Q_i}{\delta t_i} \cdot \Delta t \right| + \left| \frac{\delta Q_i}{\delta t_{i+1}} \cdot \Delta t \right| \right) = \sum_{i=1}^n \left( \left| \frac{1}{2} (t_{i+1} - t_i) \cdot \Delta I \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (t_{i+1} - t_i) \cdot \Delta t + \left| \frac{I_i + I_{i+2}}{2} \cdot \Delta t \right| + \left| -\frac{I_i + I_{i+2}}{2} \cdot \Delta t \right| \right) = \sum_{i=1}^n (\Delta I \cdot (t_{i+1} - t_i) + \Delta t \cdot (I_i + I_{i+1})) =$$

$$= \Delta I \cdot \sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) + \Delta t \cdot \sum_{i=1}^n (I_i + I_{i+1})$$

$$\Delta Q_1 = 0,75 \cdot \sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) + 0,2 \cdot \sum_{i=1}^n (I_i + I_{i+1}) = 0,75 \cdot 100,68 + 0,2 \cdot 2250 = 75,51 + 450 = 525,51$$



Błąd względny:

$$\delta_Q = \frac{\Delta Q}{Q} \cdot 100\% = \frac{525,51}{3048,1} \cdot 100\% \approx 17,24\%$$

$$\Delta C_1 = \left| \frac{\delta}{\delta a} \cdot \frac{Q}{U} \cdot \Delta Q \right| + \left| \frac{\delta}{\delta U} \cdot \frac{Q}{U} \cdot \Delta Q \right| = \left| \frac{1}{U} \cdot \Delta Q \right| + \left| -\frac{Q}{U^2} \cdot \Delta U \right|, \text{ czyli}$$

$$\Delta C_1 = \frac{\Delta Q}{U} + \frac{Q \Delta U}{U^2} = \frac{525,51}{6} + \frac{3048,1 \cdot 0,0375}{36} = 87,585 + 3,175 = 90,76$$

Błąd względny:

$$\delta_C = \frac{\Delta C}{C} \cdot 100\% = \frac{90,76}{508,01} \cdot 100\% \approx 17,86\%$$

$$\Delta Q_2 = 0,6 \cdot \sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) + 0,2 \cdot \sum_{i=1}^n (I_i + I_{i+1}) = 0,6 \cdot 113 + 0,2 \cdot 1440 = 67,8 + 288 = 355,8$$

Błąd względny:

$$\delta_Q = \frac{\Delta Q}{Q} \cdot 100\% = \frac{355,8}{3024,67} \cdot 100\% \approx 11,76\%$$

$$\Delta C_2 = \left| \frac{\delta}{\delta a} \cdot \frac{Q}{U} \cdot \Delta Q \right| + \left| \frac{\delta}{\delta U} \cdot \frac{Q}{U} \cdot \Delta Q \right| = \left| \frac{1}{U} \cdot \Delta Q \right| + \left| -\frac{Q}{U^2} \cdot \Delta U \right| \text{ czyli}$$

$$\Delta C_1 = \frac{\Delta Q}{U} + \frac{Q \Delta U}{U^2} = \frac{355,8}{6} + \frac{3024,67 \cdot 0,0375}{36} = 59,3 + 3,15 = 62,4$$

Błąd względny:

$$\delta_C = \frac{\Delta C}{C} \cdot 100\% = \frac{62,4}{504,11} \cdot 100\% \approx 12,37\%$$

## V. Wnioski:

### Stała czasowa i pojemność kondensatora

W pomiarze pierwszym dla  $R = 40 \text{ k}\Omega$  pojemność badanego kondensatora wyniosła  $C = 508,02 \pm 90,97 [\mu F]$ , natomiast stała czasowa  $\tau = 20,32 \text{ s}$ . W pomiarze drugim dla  $R = 50 \text{ k}\Omega$  pojemność badanego kondensatora wyniosła  $C = 504,11 \pm 65,48 [\mu F]$ , natomiast stała czasowa  $\tau = 25,2 \text{ s}$ , jednak badany kondensator ma pojemność  $C = 470 [\mu F]$ . Tak duży błąd wynika głównie z pomiaru czasu. Sposób wyznaczania pojemności przedstawiony w ćwiczeniu jest dość kłopotliwy, gdyż policznie ładunku jako pola powierzchni pod krzywą rozładowania  $I = f(t)$  jest bardzo przacochońne.

### Rozładowanie kondensatora

Jeżeli pomiędzy dwiema płaskimi płytkami metalowymi wytworzymy różnicę potencjałów, powstanie pomiędzy nimi jednorodne pole elektryczne. Na okładkach kondensatora zgromadzi się pewien ładunek, który w powietrzu może istnieć przez dłuższy czas. Jeżeli okładki kondensatora połączymy słabym przewodnikiem, czyli dużym opornikiem to prąd płynąć będzie długo, spadek napięcia na okładkach kondensatora będzie wolny. Jeżeli okładki kondensatora zewrzymy przewodnikiem, rozładowanie nastąpi gwałtownie, słyszymy huk. Takie zgromadzenie dużych ładunków elektrycznych w kondensatorach i ich szybkie rozładowanie, powoduje że w obwodzie płynie prąd o bardzo dużym natężeniu. Tego typu źródła prądowe stosowane są w laserach impulsowych czy w zasilaczach wielkich magnesów nadprzewodzących.

Jeżeli natomiast będziemy rozładowywali kondensator przez odpowiednio duży opornik to zanik napięcia na kondensatorze będzie miał charakter eksponencjalny. Podobnie będzie następowało jego ładowanie. Wykorzystujemy ten efekt do ustalania czasu włączenia czy wyłączenia urządzeń. W ten sposób działają czasowe wyłączniki światła na klatkach schodowych.