

Szeregi Fouriera

Trygonometryczny szereg Fouriera

Każdy okresowy sygnał $x(t)$ o pulsacji podstawowej ω_0 , spełniający warunki Dirichleta:

1. całkowny w okresie:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt < \infty$$

gdzie T jest okresem funkcji $x(t)$,

2. posiadający skończoną liczbę ekstermów w okresie,
 3. posiadając skończoną liczbę nieciągłości w okresie,
- można zapisać jako nieskończoną sumę składowych kosinusoidalnych i sinusoidalnych w postaci trygonometrycznego szeregu:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))$$

Współczynniki a_k i b_k noszą nazwę *trygonometrycznych współczynników Fouriera*.

Współczynnik a_0 jest *wartością średnią* (składową stałą) sygnału $x(t)$.

Kolejne składniki sumy szeregu są *całkowitymi wielokrotnościami* pulsacji podstawowej ω_0 .

Powyższe współczynniki można wyznaczyć analitycznie z następujących zależności:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

gdzie:

T – okres sygnału $x(t)$,

ω_0 – pulsacja podstawowa sygnału $x(t)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

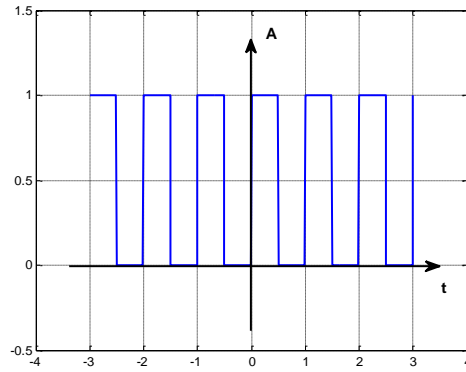
Przykład 1

Rozwinąć w szereg Fouriera sygnał prostokątny unipolarny przedstawiony na rys. 1.

$T = 1[s]$,

$$\text{częstotliwość, } f = \frac{1}{T}$$

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$



Rys. 1. Sygnał prostokątny unipolarny

Wartość średnia (składowa stała) wynosi z definicji:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(t) dt$$

Zadany sygnał $x(t)$ w przedziale $t \in (0,1)$ przyjmuje wartości:

$$x(t) = 1 \text{ dla } t \in (0,0.5)$$

$$x(t) = 0 \text{ dla } t \in (0.5,1)$$

$$a_0 = \frac{1}{1} \left(\int_0^{0.5} 1 dt + \int_{0.5}^1 0 dt \right) = [t]_0^{0.5} = 0.5$$

Obliczanie współczynnika a_k

$$a_k = \frac{2}{1} \int_0^1 x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$a_k = 2 \left(\int_0^{0.5} 1 \cdot \cos(k\omega_0 t) dt + \int_{0.5}^1 0 \cdot \cos(k\omega_0 t) dt \right)$$

$$a_k = \left[\frac{2 \sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0} \right]_0^{0.5}$$

Ponieważ $\omega_0 = 2\pi$

$$a_k = \left[\frac{2 \sin(k2\pi t)}{2k\pi} \right]_0^{0.5} = \left[\frac{\sin(k2\pi \cdot 0.5)}{k\pi} \right] - \left[\frac{\sin(k2\pi \cdot 0)}{k\pi} \right] = \left[\frac{\sin(k\pi)}{k\pi} \right] = 0$$

Obliczanie współczynnika b_k

$$b_k = \frac{2}{1} \int_0^1 x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

ten człon jest
zawsze = 0

$$b_k = 2 \left(\int_0^{0.5} 1 \cdot \sin(k\omega_0 t) dt + \int_{0.5}^1 0 \cdot \sin(k\omega_0 t) dt \right)$$

$$b_k = \left[\frac{-2\cos(k\omega_0 t)}{k\omega_0} \right]_0^{0.5}$$

$$b_k = \left[\frac{2\cos(k2\pi t)}{k2\pi} \right]_0^{0.5} = \frac{-(\cos(k\pi) - \cos(0))}{k\pi} = \frac{1 - \cos(k\pi)}{k\pi}$$

Dla $k = 0, 2, 4, 6, \dots$ (k - parzystych) wyrażenie $\cos(k\pi)$ przyjmuje zawsze wartość 1, stąd dla parzystych wielokrotności pulsacji ω_0 współczynnik $b_k = 0$.

Dla $k = 1, 3, 5, 7, \dots$ (k - nieparzystych) wyrażenie $\cos(k\pi)$ przyjmuje wartość -1. Dla nieparzystych wielokrotności pulsacji podstawowej ω_0 współczynnik b_k przyjmuje wartość:

$$b_k = \frac{2}{k\pi}$$

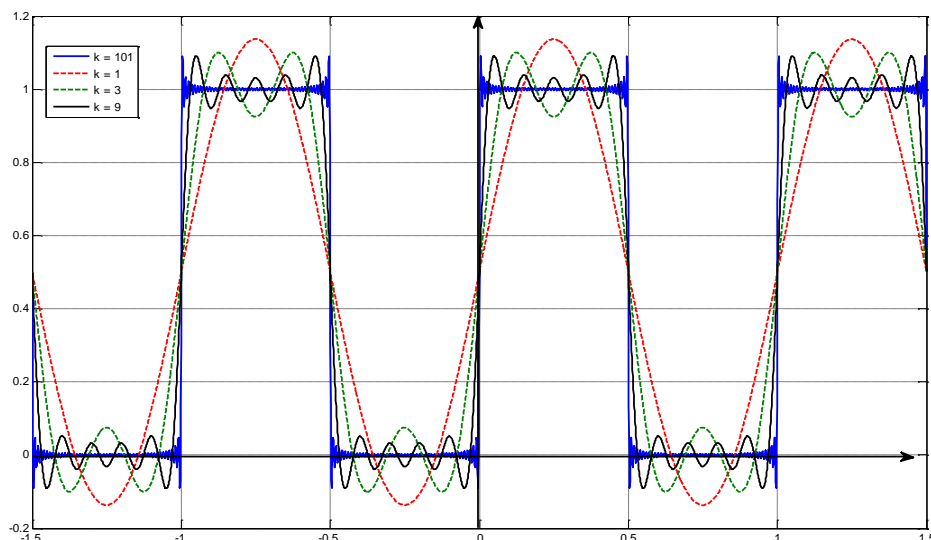
Uogólniając można zapisać współczynnik b_k w postaci:

$$b_k = \frac{1 - (-1)^k}{k\pi}$$

Podsumowując, sygnał prostokątny unipolarny o pulsacji podstawowej $\omega_0 = 2\pi$ rad/sek ($f_0 = 1$ Hz), amplitudzie $A=1$, współczynnika wypełnienia 0.5, z rys. 1 można zapisać w postaci trygonometrycznego szeregu:

$$x_{ap}(t) = 0.5 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^k}{k\pi} \cdot \sin(2k\pi t) \right)$$

Wniosek: sygnał prostokątny z rys. 1 można złożyć z nieskończonej ilości funkcji sinus o pulsacjach składających się z nieparzystych całkowitych wielokrotności pulsacji podstawowej 2π rad/s (1 Hz). W sensie fizycznym złożenie funkcji z nieskończonej ilości składowych jest niemożliwe, dlatego ogranicza się ją do skończonego zakresu.



Rys. 2. Sygnał prostokątny aproksymowany skończoną liczbą funkcji sinus.

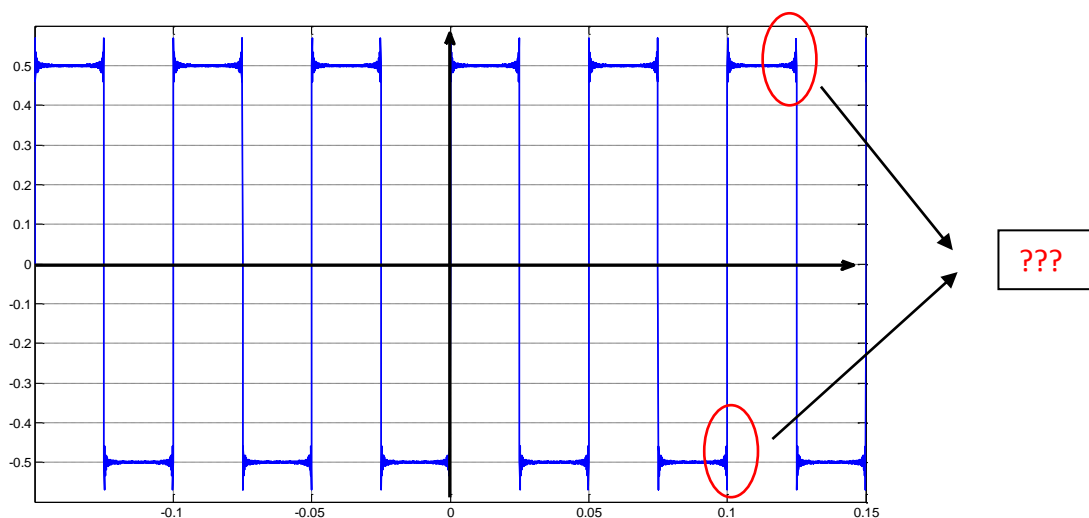
Kolejne wielokrotności pulsacji (częstotliwości) podstawowej nazywane są harmonicznymi. Tylko przebiegi sinus i kosinus nie zawierają wyższych harmonicznymi, których zawartość jest miarą zniekształceń sygnału. W miarę zwiększania liczby harmonicznymi sygnał swym kształtem zbliża się do oryginalnego sygnału prostokątnego z rys. 1.

Współczynniki Fouriera a_k i b_k są wielkościami bezwymiarowymi, ich wartość nie zależy od pulsacji (jak również od częstotliwości i okresu). Współczynnik a_0 – składowa stała przesuwa sygnał po osi y (spełniając funkcję offset'u). Chcąc np. aproksymować sygnał prostokątny bipolarny (np. taki, którego amplituda zmienia się od -0.5 do +0.5), częstotliwości podstawowej $f_0=20\text{Hz}$ (pulsacja $\omega_0 40\pi \text{ rad/s}$, $T=0.05 \text{ sek.}$) i współczynnika wypełnienia 0.5 nie ma potrzeby wyznaczania nowych współczynników a_k i b_k . Jedyną różnicą między takim sygnałem a sygnałem z rys. 1 będzie wartość pulsacji podstawowej ($40\pi \text{ rad/s}$) i wartości średniej (składowej stałej) $a_0 = 0$.

Sygnał będzie mógł być zapisany w postaci sumy:

$$x_2(t) = \sum_{k=1}^{151} \left(\frac{1 - (-1)^k}{k\pi} \cdot \sin(40k\pi t) \right)$$

a jego przebieg:



Rys. 3. Sygnał prostokątny unipolarny o współczynniku wypełnienia 0.5, częstotliwości podstawowej 20Hz, amplitudzie 0.5 złożony z 76 składowych.

Zespolony Szereg Fouriera

Wyznaczenie trygonometrycznych współczynników Fouriera wiąże się z koniecznością wykonania dwóch operacji całkowania. Można tę niedogodność wyeliminować zastępując szereg trygonometryczny szeregiem wykładniczym.

Korzystając z zależności Eulera:

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

trygonometryczny szereg Fouriera można zapisać w postaci szeregu wykładniczego:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

gdzie c_k jest zespolonym współczynnikiem Fouriera, który wyznacza się z zależności:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Jeżeli współczynniki c_k przedstawimy jako:

$$c_k = |c_k| e^{j\varphi_k}$$

to:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}\{|c_k| e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)}\}$$

a po uproszczeniu:

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

Moduły zespolonych współczynników $|c_k|$ tworzą tzw. widmo amplitudowe, natomiast fazy φ_k – widmo fazowe.

Trygonometryczne współczynniki Fouriera a_k i b_k bardzo łatwo obliczyć znając współczynnik zespolony:

$$a_k = 2\operatorname{Re}\{c_k\}$$

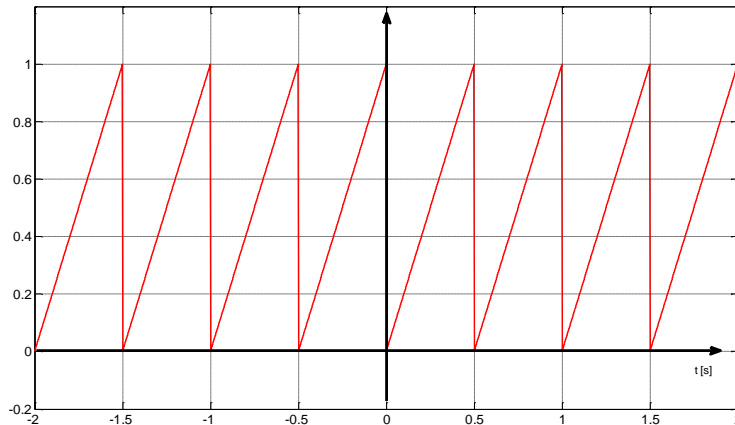
$$b_k = -2\operatorname{Im}\{c_k\}$$

W ten sposób otrzymujemy szereg w postaci:

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Re}\{c_k\} \cos(k\omega_0 t) - \operatorname{Im}\{c_k\} \sin(k\omega_0 t))$$

Przykład 2

Aproksymować trygonometrycznym szeregiem Fouriera złożonym ze 250 składowych sygnał piłokształtny przedstawiony na rys. 4. Narysować widmo amplitudowe i fazowe tego sygnału.



Rys. 4. Sygnał piłokształtny, $A = 1$, $T=0.5s$ ($f_0 = 2Hz$, $\omega_0=4\pi$ rad/sek) .

Pamiętając , że współczynniki Fouriera nie zależą od pulsacji w celu uproszczenia obliczeń wyznaczmy zespolony współczynnik Fouriera w granicach np. 0 : 1 (dla sygnału o okresie 1 s). Sygnał piłokształtny w granicach od 0 do T przyjmuje postać $x(t) = t$, stąd :

$$c_k = \int_0^1 t \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Obliczenie tej całki może być dość uciążliwe (konieczność całkowania przez części) dlatego w celu uzyskania szybkiego rozwiązania polecam skorzystanie np. z aplikacji Wolfram Alpha (wpisać polecenie: *integrate t*e^(-i*2*pi*k*t) dt from t=0 to 1*) .
otrzymany wynik:

$$\int_0^1 t \exp(-i(2\pi k t)) dt = -\frac{e^{-2i\pi k}(-2i\pi k + e^{2i\pi k} - 1)}{4\pi^2 k^2}$$

należy jeszcze uprościć (m.in. przekształcić człon wykładniczy na postać trygonometryczną, zauważyć, że $\cos(2k\pi)$ jest dla każdego k zawsze równe 1 a $\sin(2k\pi)$ równe 0) .

Ostatecznie otrzymujemy:

$$c_k = \frac{j}{2k\pi}$$

Zauważmy, że współczynnik c_k posiada tylko część urojoną w związku z tym:

$$\operatorname{Re}\{c_k\} = 0$$

$$a_k = 2\operatorname{Re}\{c_k\} = 0$$

$$b_k = -2\operatorname{Im}\{c_k\} = \frac{-1}{k\pi}$$

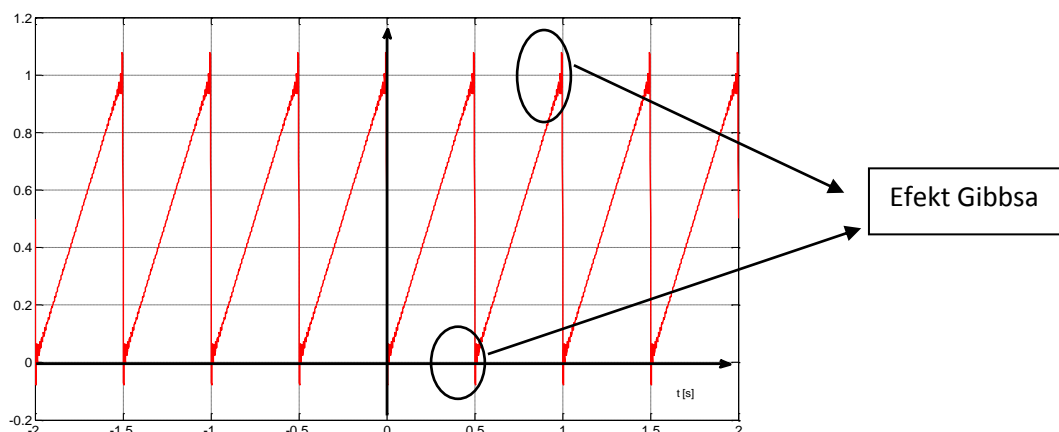
Składowa stała tego sygnału obliczona na podstawie (..):

$$a_0 = 0.5$$

Okres sygnału wynosi 0.5s, więc $f_0 = 2Hz$, $\omega_0=4\pi$ rad/s .

Sygnal z rys. 4 można zapisać w postaci sumy 53 składowych sinusoidalnych:

$$x_{ap}(t) = 0.5 + \sum_{k=1}^{53} \left(\frac{-1}{k\pi} \sin(4k\pi t) \right)$$

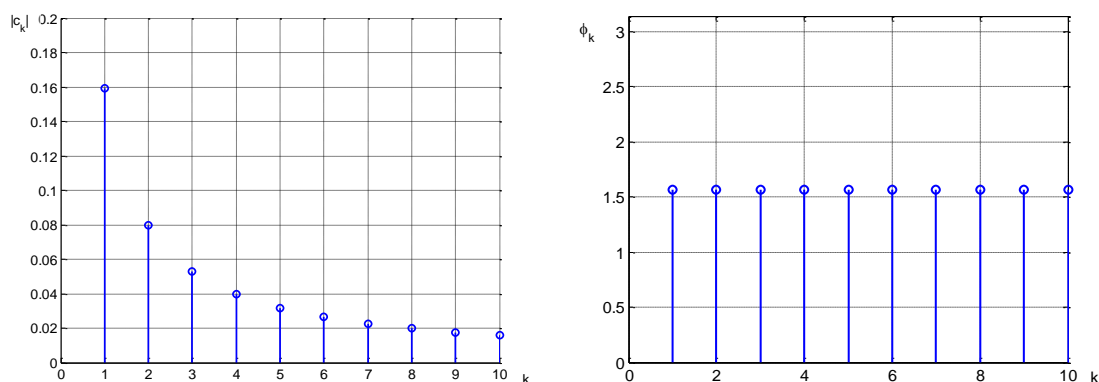


Rys. 5. Sygnal piłokształtny dla 53 składowych harmoniczych

Widmo amplitudowe ($|c_k| = \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$):

$$|c_k| = \frac{1}{k\pi}$$

a widmo fazowe: $\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$



Rys. 6. Widmo amplitudowe a) i fazowe b) sygnału piłokształtnego dla pierwszych 10 harmoniczych.

Wartość widma amplitudowego $\pi/2$ rad dla każdej harmoniczej sygnału piłokształtnego oznacza, że każda składowa tego sygnału (harmoniczna) jest przesunięta w fazie o $\pi/2$ rad względem funkcji kosinus.

Dziedziną widma amplitudowego jest wielkość bezwymiarowa k – numer kolejnej harmoniczej. Znając częstotliwość podstawową danego sygnału kolejne harmoniczne można wyrazić w jednostkach częstotliwości. Dla analizowanego będzie to całkowita wielokrotność 2Hz (4,6,8,... Hz). W ten sposób sygnał $x(t)$ z dziedziny czasu został przekształcony w dyskretną dziedzinę częstotliwości (k jest liczbą naturalną). Jest to dokładnie ten sam sygnał, zmienił się jedynie jego sposób reprezentacji.

Jeżeli nasz sygnał zapiszemy np. w postaci:

$$x_{ap}(t) = 0.5 + \sum_{k=1}^{53} \left(\frac{1}{k\pi} \cos \left(4k\pi t + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

to można zauważyć, że każda składowa kosinusoidalna z dziedziny czasu odpowiada tożsamościowo na widmie amplitudowym Delcie Diraca przemnożonej przez wartość amplitudy danej harmonicznej. Składowa stała z dziedziny czasu odpowiada zerowej wartości k – czyli częstotliwości 0 Hz.

Warto zwrócić uwagę na kształty aproksymowanych szeregiem Fouriera sygnałów prostokątnego i piłokształtnego. W miejscach, gdzie sygnał zmienia swoją amplitudę w sposób skokowy (z wartości 0 do 1 w czasie teoretycznie nieskończenie krótkim) pojawia się przeregulowanie. Zjawisko to jest znane pod nazwą Efektu Gibbsa i wraz ze wzrostem liczby harmonicznych nie zanika. Wartość tego przeregulowania jest stała i wynosi ok. 9% wysokości zbocza.

Własności szeregów Fouriera

1. Liniowość

Jeżeli funkcje $f(t)$ i $g(t)$ w dziedzinie czasu są okresowe o tym samym okresie T , a ich zespolone współczynniki Fouriera to c_k i d_k (w dziedzinie k):

$$f(t) \triangleq c_k, \quad g(t) \triangleq d_k$$

Kombinacja liniowa tych funkcji:

$z(t) = Af(t) + Bg(t)$ jest również funkcją okresową o tym samym okresie T .

Współczynniki Fouriera e_k rozwinięcia funkcji $z(t)$ są również liniową kombinacją współczynników c_k i d_k .

$$z(t) = Af(t) + Bg(t) \triangleq e_k = Ac_k + Bd_k$$

2. Przesunięcie w dziedzinie czasu

Przesunięcie w dziedzinie czasu o wartość t_0 (w prawo) funkcji $f(x)$ odpowiada (jest tożsame) przemnożeniu zespolonych współczynników c_k przez czynnik $e^{-jk\omega_0 t_0}$

$$f(t - t_0) \triangleq e^{-jk\omega_0 t_0} c_k$$

3. Różniczkowanie

Różniczkowanie funkcji $x(t)$ w dziedzinie czasu jest tożsame przemnożeniu zespolonych współczynników c_k przez czynnik $jk\omega_0$.

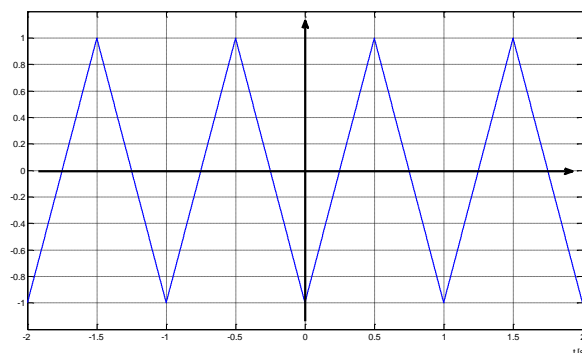
$$f'(t) \triangleq jk\omega_0 c_k$$

$$f''(t) \triangleq (jk\omega_0)^2 c_k$$

$$f^{(n)}(t) \triangleq (jk\omega_0)^n c_k$$

Przykład 3

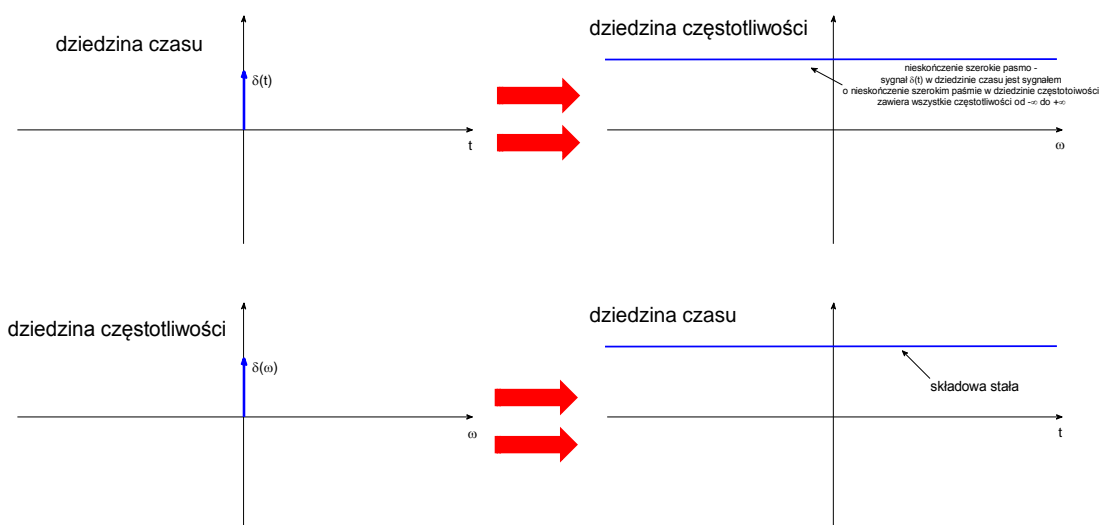
Znaleźć współczynniki Fouriera sygnału trójkątnego przedstawionego na rys. 7.



Rys. 7. Sygnał trójkątny

Do znalezienia współczynników Fouriera można użyć poznane wcześniej metody – obliczyć je poprzez całkowanie lub zamiast żmudnego całkowania przez części wykorzystać własności szeregów Fouriera. Jedną z nich (szerzej omawianą przy okazji ciągłej transformaty Fouriera) jest własność *symetrii widmowej*.

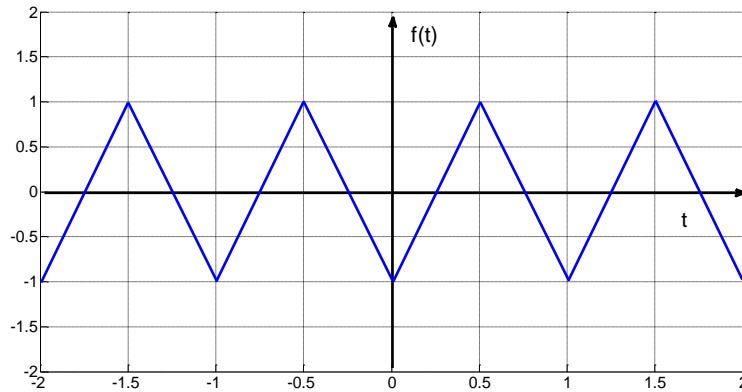
Jeśli np. składowa stała w dziedzinie czasu odpowiada Deltcie Dirac'a w punkcie 0 dziedziny k (częstotliwości, pulsacji) to z własności symetrii sygnał stały w dziedzinie częstotliwości będzie w dziedzinie czasu Delta Diraca dla czasu $t=0$.



Rys. 8. Symetria widmowa transformaty Fouriera

Jeżeli więc poprzez operację różniczkowania przebiegu czasowego sygnału będziemy mogli doprowadzić go do ciągu okresowo powtarzanych Delt Dirac'a znajdziemy zespolony współczynnik c_k wyrażony jako suma stałych składników (przesuniętych w czasie i czasem również różniczkowanych).

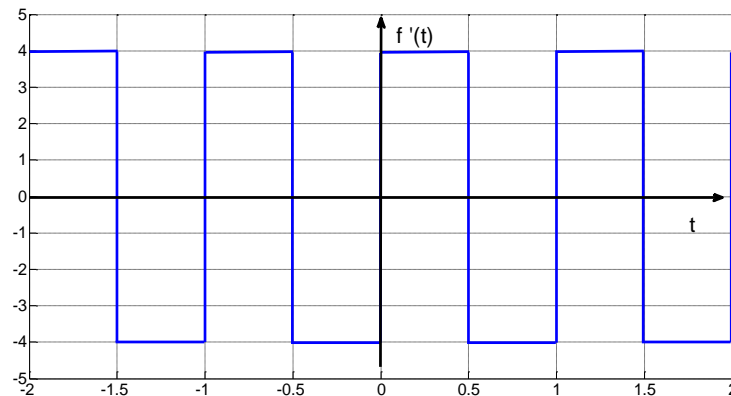
$f(t) \triangleq c_k$, funkcja $f(t)$ w dziedzinie czasu jest tożsamościowo równa zespolonemu współczynnikowi c_k w dziedzinie k .



Rys. 9. Sygnał trójkątny

$$f'(t) \triangleq jk\omega_0 c_k,$$

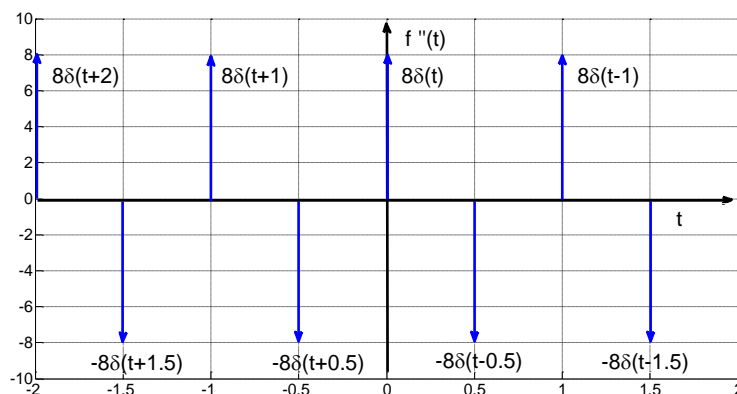
Pochodna $f'(t)$ jest tożsamościowo równa zespolonemu współczynnikowi c_k przemnożonemu przez czynnik $jk\omega_0$.



Rys. 10. Jednokrotnie zróżniczkowany sygnał trójkątny

$$f''(t) \triangleq -k^2\omega_0^2 c_k,$$

Druga pochodna $f''(t)$ jest tożsamościowo równa zespolonemu współczynnikowi c_k kolejny raz mnożony przez czynnik $jk\omega_0$.



Rys. 11. Dwukrotnie zróżniczkowany sygnał trójkątny

Do obliczenia współczynnika c_k brane są tylko Delty, które wchodzą w skład okresu. W rozpatrywanym przypadku najprościej będzie jeśli wybierzemy deltę w punkcie $t_0=0$ tj. $8\delta(t)$ oraz w punkcie $t_0=0.5$ tj. $-8\delta(t-0.5)$. Kolejna delta w $t_0=1$ $8\delta(t-1)$ składa się na kolejny okres i nie jest brana pod uwagę.

Jeden okres drugiej pochodnej naszego sygnału w dziedzinie czasu można zapisać jako:

$$f''(t) = 8\delta(t) - 8\delta(t - 0.5)$$

a w dziedzinie k :

$$-k^2\omega_0^2 c_k = \frac{1}{T} (8 - 8 \cdot e^{jk\omega_0(-0.5)})$$

Dzielenie $\frac{1}{T}$ wynika z normalizacji do szerokości okresu (podobnie jest przy całkowaniu tj. obliczaniu c_k z definicji), natomiast mnożenie przez zespolony czynnik $e^{jk\omega_0(-0.5)}$ jest konsekwencją przesunięcia w dziedzinie czasu o $t_0 = 0.5$.

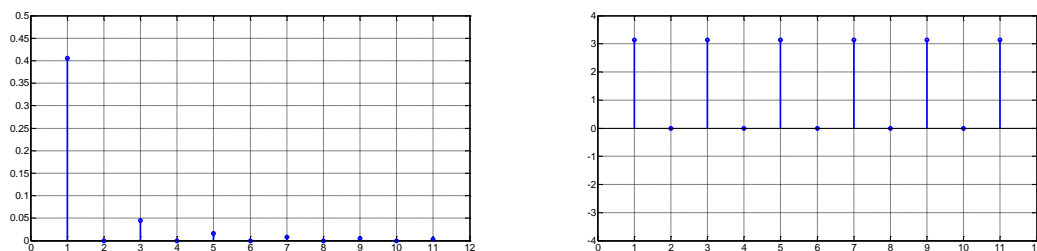
Okres sygnału T wynosi 1s, pulsacja $\omega_0=2\pi$ rad/s. Po podstawieniu i uproszczeniu:

$$c_k = \frac{-8(1 - e^{-jk\pi})}{4k^2\pi^2} = \frac{-2(1 - \cos(k\pi) + j\sin(k\pi))}{k^2\pi^2} = \frac{-2(\cos(k\pi) - 1)}{k^2\pi^2}$$

Współczynnik c_k dla analizowanego sygnału posiada tylko część rzeczywistą (w związku z tym $b_k=0$), a sam sygnał zawiera wyłącznie nieparzyste harmoniczne.

$$a_k = 2\text{Re}\{c_k\} = \frac{-4((-1)^k - 1)}{k^2\pi^2}$$

Zauważmy, że rozpatrywany sygnał jest funkcją parzystą – jej części zespolone współczynnika c_k są równe zero. Dla funkcji nieparzystych (np. sygnały z przykładów 1 i 2) część rzeczywista jest równa zero. Widmo fazowe i amplitudowe sygnału trójkątnego przedstawiono na rys. poniżej.

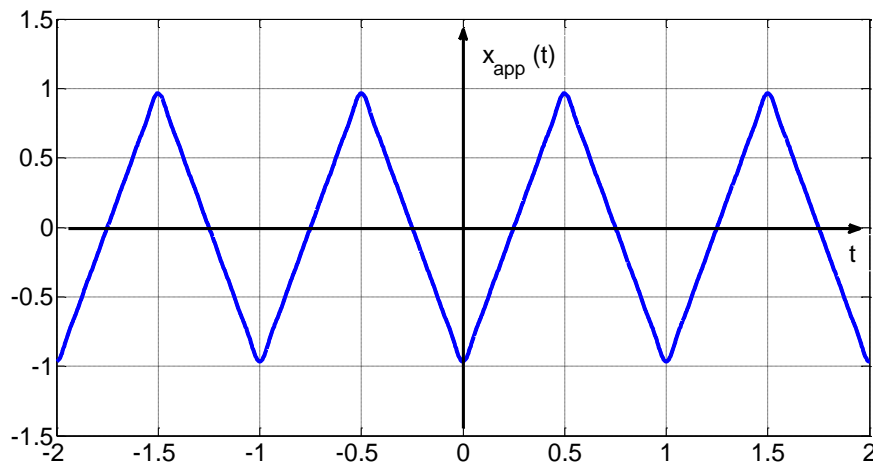


Rys. 12. Widmo fazowe i amplitudowe sygnału trójkątnego

Składowa stała a_0 wynosi 0 więc nasz sygnał trójkątny aproksymowany szeregiem Fouriera przyjmie postać:

$$x_{ap}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-4((-1)^k - 1)}{k^2\pi^2} \cdot \cos(2k\pi t) \right)$$

a jego przebieg czasowy dla 11 harmoniczných:

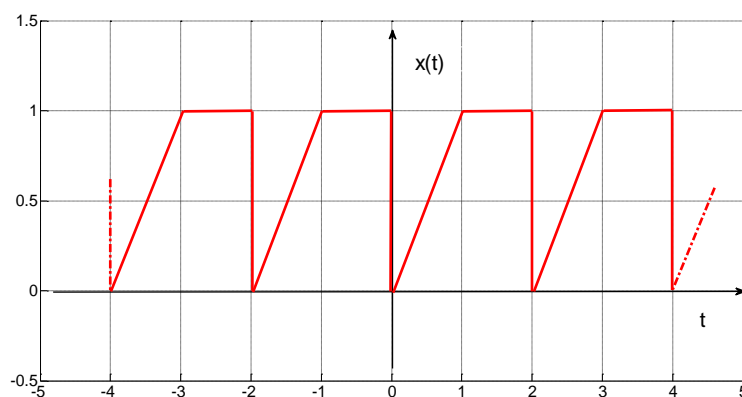


Rys. 13. Sygnał trójkątny dla 7 składowych harmonicznych

Zauważmy, że szereg Fouriera już dla $k = 11$ bardzo dokładnie przybliża oryginalny sygnał trójkątny. Dla tego sygnału nie występuje również efekt Gibbsa.

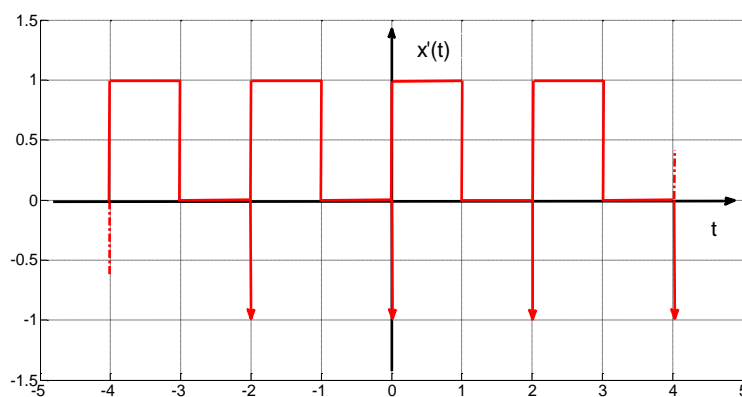
Przykład 4

Rozwinąć w szereg Fourier następujący sygnał w dziedzinie czasu:

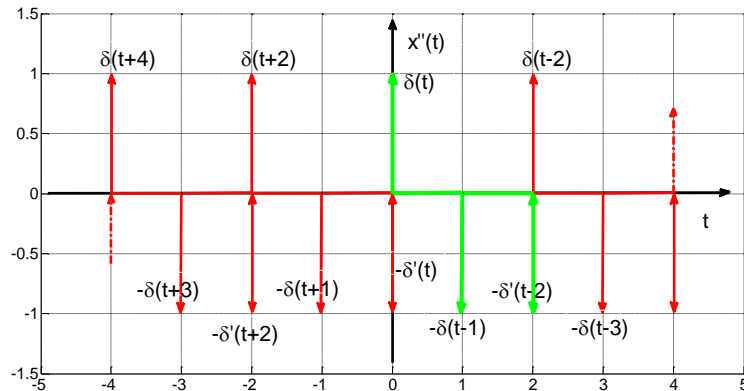


Rys. 14. Sygnał $x(t)$

Pierwsza i druga pochodna tego sygnału:



Rys. 15. Jednokrotnie zróżniczkowany $x'(t)$ sygnał $x(t)$



Rys. 16. Dwukrotnie zróżniczkowany $x''(t)$ sygnał $x(t)$

Jeden okres drugiej pochodnej (w granicach od 0 do 2):

$$x''(t) = \delta(t) - \delta(t-1) - \delta'(t-2)$$

Zauważmy, że pojawiło się nam „dziwadło” w postaci pierwszej pochodnej Deltę Dirac’a. W sensie fizycznym jest to sygnał tk samo abstrakcyjny jak Delta Dirac’a, jednak w sensie matematycznym – szczególnie w dziedzinie „k” jest to jak najbardziej spójne.

Transformując powyższą równość na dziedzinę „k” uwzględniając okres otrzymujemy:

$$-k^2 \pi^2 c_k = \frac{1}{2} (1 - 1 \cdot e^{jk\pi} - jk\pi \cdot e^{jk2\pi})$$

$$c_k = \frac{-(1 - 1 \cdot e^{jk\pi} - jk\pi \cdot e^{jk2\pi})}{2k^2 \pi^2}$$

po uproszczeniu:

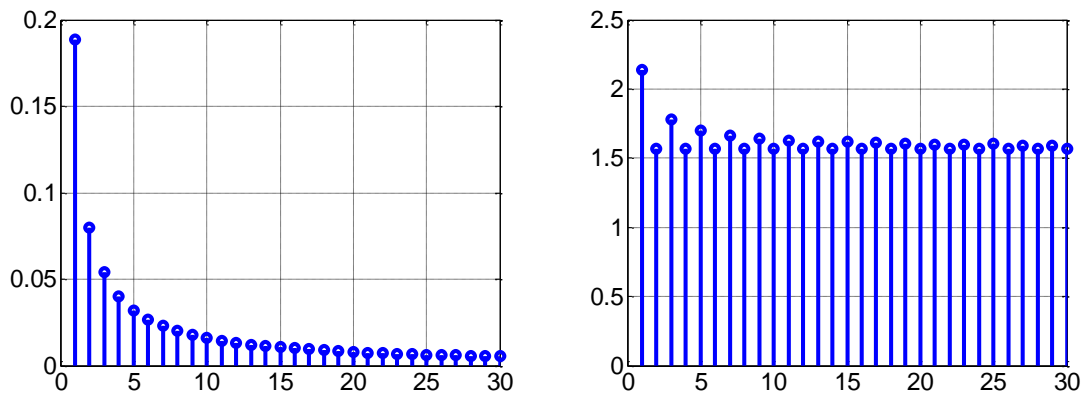
$$a_k = \frac{(-1)^k - 1}{k\pi}$$

$$b_k = \frac{-1}{k\pi}$$

Składowa stała:

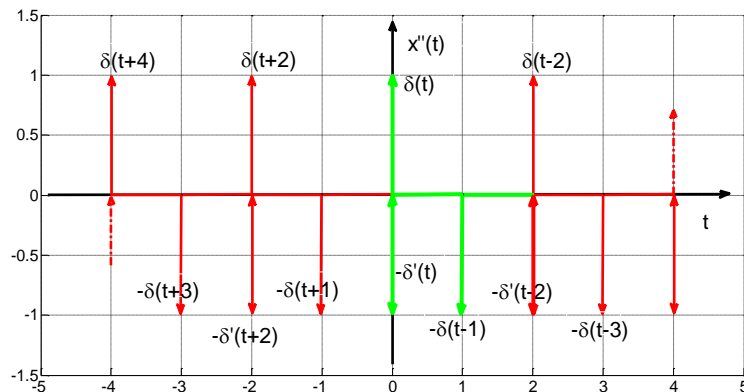
$$a_0 = 0.75$$

Widmo amplitudowe i fazowe pierwszych 30 harmoniczych:



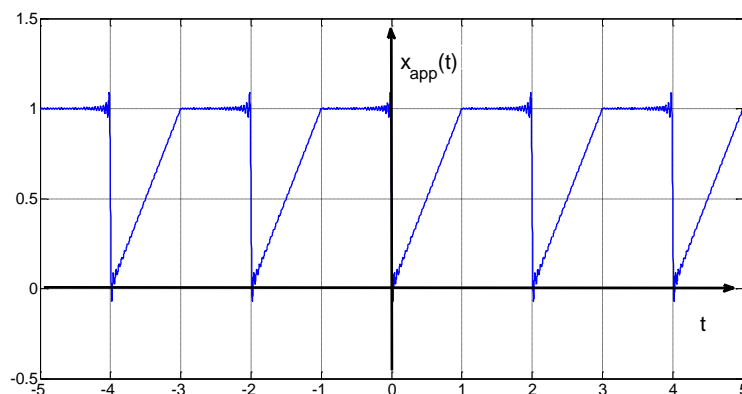
Rys. 17. Widmo amplitudowe i fazowe pierwszych 30 harmonicznych

Proszę zwrócić uwagę, że nie ma znaczenia, od której delty rozpoczynamy sumowanie. Ważne jest aby była ona częścią okresu. Jeżeli do analizy przyjmimy delty zaznaczone na zielono (rys. 18) to uzyskamy identyczny wynik, przy nieco mniejszym nakładzie prac (proszę sprawdzić samodzielnie)



Rys. 18. Dwukrotnie zróżniczkowany $x''(t)$ sygnał $x(t)$

$$x_{app} = 0.75 + \sum_{k=1}^{30} \left(\frac{(-1)^k - 1}{k\pi} \cos(k\pi t) - \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi t) \right)$$



Rys. 19. Przebieg czasowy sygnału złożonego z 50 harmonicznych

Zadanie:

1. Rozwinąć w szereg Fouriera sygnał prostokątny o zmiennym współczynniku wypełnienia,
2. Rozwinąć w szereg Fouriera sygnał zadany przez prowadzącego,
3. Zbadać wpływ liczby harmonicznych na jakość odwzorowania sygnału. Jakie zjawiska zaobserwowano?

Przykład kodu w Matlabie:

```
clc
clear

N=20;          %Liczba harmonicznych
k=1:N;
A=0.5;         %Amplituda
Of = 0.5;      %Offset
T=0.1;         %Okres
w=2*pi/T;
t=0:T/N/10:2*T;

ck = A*j*(1-cos(k*pi))./(-1*pi*k); %Wspolczynniki Fouriera
ak = 2*real(ck);
bk = -2*imag(ck);
a0 = Of;

widmo_A = abs (ck) ;      %Widmo amplitudowe
widmo_F = angle (ck) ;   %Widmo fazowe

x = a0;
for k=1:N,
    x = x + (bk(k).*sin(k*w*t)); %Przebieg sygnału w dziedzinie czasu
end

%Przebiegi czasowe
subplot(3,1,1)
plot(t,x); grid on ; hold on
title('Przebieg czasowy sygnału prostokątnego')

save('x1_20.txt','t','x','-ascii')

%Widma
k=1:N;
subplot(3,1,2)
stem (k,widmo_A)
title('Widmo amplitudowe')

subplot(3,1,3)
stem (k,widmo_F)
title('widmo fazowe')
```