Całka Riemanna - Stieltjesa

Definicja 1.

Niech $[a,b]$ będzie danym przedziałem ($[a,b] \in \mathbb{R}$). Podziałem P przedziału $[a,b]$ nazywamy skończony zbiór punktów $x_0, \dots, x_n$, przy czym spełniony jest warunek

$$a = x_0 \leq x_1 \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

Oznaczmy ponadto $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Przyjmijmy, że $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną w przedziale $[a,b)$

Każdemu podziałowi P przedziału $[a,b]$ odpowiadają liczby:

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Wprowadźmy następujące sumy: $U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

Na koniec oznaczmy $L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

$$(1) \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf U(P,f)$$

, gdzie inf obliczone jest po wszystkich możliwych podziałach P przedziału $[a,b]$

$$(2) \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup L(P,f)$$

, gdzie kres górny jest brany po wszystkich możliwych podziałach $[a,b]$

Lewe strony równości (1) i (2) nazywają się odpowiednio górną i dolną

Definicja 2.

Jeżeli całka górna (1) (tzn. $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P U(P,f)$) jest równa całce dolnej (2) ($\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P L(P,f)$),

to mówimy, że f jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ i będziemy pisać $f \in \mathcal{R}$, (tzn. $\mathcal{R}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji całkowalnych w sensie Riemanna.

A wspólną wielkość (1) i (2) oznaczamy:

$$(3) \quad \int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Równość (3) definiuje całkę Riemanna z funkcji f na przedziale $[a,b]$

W dalszym ciągu wyprowadzimy pewne fundamentalne zależności między równościami (1),(2),(3).

Ponieważ funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a,b]$ zatem istnieją dwie liczby: $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$

które spełniają warunek:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{dla} \quad x \in [a,b].$$

Łatwo zauważyć, że spełnione są następujące nierówności wynikające z definicji kresu górnego i kresu dolnego

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M \quad \text{dla } i = 1, \dots, n$$

Z powyższej zależności otrzymujemy układ nierówności:

mnożenie Δx_1 $\qquad \Delta x_1 = x_1 - x_0 \geq 0$

$$m \Delta x_1 \leq m_1 \Delta x_1 \leq M_1 \Delta x_1 \leq M \Delta x_1$$
$$m \Delta x_2 \leq m_2 \Delta x_2 \leq M_2 \Delta x_2 \leq M \Delta x_2$$
$$\dots$$
$$m \Delta x_i \leq m_i \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \leq M \Delta x_i$$
$$\dots$$
$$m \Delta x_n \leq m_n \Delta x_n \leq M_n \Delta x_n \leq M \Delta x_n$$

Dodając stronami ciąg powyższych nierówności otrzymujemy:

$$m\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\right) \leq L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \leq U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \leq M\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\right)$$

Zauważmy, że:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1} =$$

$$= x_n - x_0 = b - a$$

Przy powyższych oznaczeniach otrzymaliśmy:

$$(*) \quad m(b-a) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M(b-a)$$

Powyższa zależność pokazuje, że liczby $L(P,f)$, $U(P,f)$ dla dowolnego podziału P tworzą zbiory ograniczone.

Z definicji 2 całki Riemanna mamy zależność:

$$(**) \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Z nierówności $(*)$ i $(**)$ wynika, że całka Riemanna jest określona dla funkcji ograniczonych.

Definicja 3

Niech α będzie monotonicznie rosnącą funkcją określoną na przedziale $[a,b]$. (Ponieważ $\alpha(a)$ i $\alpha(b)$ są skończone; α jest funkcją ograniczoną na przedziale $[a,b]$).

Niech P będzie dowolnym podziałem przedziału $[a,b]$; określmy $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$.

Z własności funkcji α zauważamy, że $\Delta\alpha_i \geq 0$, dla $i = 1, \dots, n$.

Dla dowolnej funkcji $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ i ograniczonej określmy:

$$U(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i, \quad L(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i,$$

Przy czym m_i, M_i dla $i=1,\dots,n$, są określone jak w definicji (1) i (2).

Scanned by CamScanner

Określmy:

$$(4)\quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_P U(P,f,\alpha)$$

oraz

$$(5)\quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_P L(P,f,\alpha)$$

Ad. (4) Kres dolny bierzemy po wszystkich podziałach P przedziału $[a,b]$

Ad. (5) Kres górny bierzemy po wszystkich podziałach P przedziału $[a,b]$.

Jeżeli jest spełniona równość:

$$(6)\quad \underline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x) = \overline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x) = \underline{\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)}, \qquad \leftarrow d\alpha(x)$$

to wartość nazywamy całką Riemanna-Stieltjesa z funkcji f względem funkcji α na przedziale $[a,b]$.
Mówimy też krótko całka Stieltjesa.

Jeżeli funkcja f jest całkowalna względem funkcji α, w sensie Riemanna-Stieltjesa, to piszemy krótko:

$$f \in \mathcal{R}(\alpha)$$

$\mathcal{R}(\alpha)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji f całkowalnych w sensie Riemanna-Stieltjesa względem funkcji α

Scanned by CamScanner

Uwaga 1.

Jeżeli w definicji 3 przyjmiemy $\alpha(x) = x$, to otrzymamy definicję całki Riemanna

Zauważmy, że w definicji 3 nie mówimy nic o ciągłości funkcji α; zatem funkcja α w ogólnym przypadku nie musi być nawet funkcją ciągłą.

W dalszym ciągu będziemy badać warunki, ~~???~~ PRZY których istnieje całka określona w definicji 3.

W dalszym ciągu będziemy zakładać o funkcji f i α to samo co w definicjach 1, 2, 3.

Definicja 4.

Mówimy, że podział P^* jest zagęszczeniem podziału P, jeżeli $P^* \supset P$ (tzn. kiedy punkt podziału P jest także punktem podziału P^*).

Jeżeli P_1 i P_2 są danymi podziałami, to podział P^* będziemy nazywać ich wspólnym zagęszczeniem, jeżeli $P^* = P_1 + P_2$ $(P_1 \cup P_2)$

Definicja 5

Jeżeli P^* jest zagęszczeniem podziału P, to:

(7) $L(P, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha)$, (8) $U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$

Twierdzenie. 6

$$(8) \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x)$$

Definicja ~~8~~ 7

$$\underset{\alpha}{\overset{b}{f}}\qquad f \in R(\alpha) \text{ na } [a,b] \ (\text{istnieje } \int_a^b f(x)\,d\alpha(x))$$

$$\Leftrightarrow \text{ gdy } \forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{P}$$

$$(7) \quad U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon$$

Twierdzenie 8

1. Jeżeli spełniona jest zależność (7) dla pewnego ustalonego podziału P i pewnego $\varepsilon > 0$, to (7) spełniane jest (z tym samym $\varepsilon>0$) dla dowolnego zagęszczenia podziału P

2. Jeżeli (7) zachodzi dla $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ i $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla $i = 1, \dots, n$, s_i, t_i są dowolne, to:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\,\Delta\alpha_i < \varepsilon$$

~~Jeżeli~~ 3 Jeżeli $f \in R(\alpha)$ i (7) zachodzi dla P, $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ i ponadto $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, t_i $i = 1, \dots, n$, wówczas prawdziwa jest wierdzenie

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta\alpha_i - \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \right| < \varepsilon$$

Twierdzenie 9

Jeżeli funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła to $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$

Twierdzenie 10

Jeżeli funkcja f jest monotoniczna w $[a,b]$ a α jest ciągła to $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ (zakładamy o α, że jest monotoniczna).

Twierdzenie 11

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ma skończoną liczbę punktów nieciągłości na przedziale $[a,b]$ i niech α będzie ciągła w każdym z punktów, w których funkcja f jest nieciągła. Wtedy f należy do $\mathcal{R}(\alpha)$.

Uwaga!

Jeżeli f i α posiadają wspólne punkty nieciągłości, to może zachodzić warunek:

$$f \notin \mathcal{R}(\alpha)$$

Twierdzenie 12

Niech $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$,
$m \leq f(x) \leq M$, dla $x = [a,b]$ i ponadto funkcja φ będzie ciągła na przedziale $[m, M]$ oraz niech $h(x)$.
$h(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x))$ dla $x \in [a,b]$.
Wówczas $h \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$

Uwaga!

~~Def~~ Twierdzenie ze znaną wypowiedzią:

"złożenie funkcji całkowalnych jest funkcją całkowalną".

$$\begin{cases} \text{całka nieoznaczona - funkcja} \\ \text{całka oznaczona - liczba} \end{cases}$$

Własności całki oznaczonej:

Twierdzenie 13.

1. Jeżeli f_1, f_2 należą do $\mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$, to $f_1+f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$, $c f_1 \in \mathcal{R}(\alpha)$ dla $c=const.$

Ponadto zachodzą równości:

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,d\alpha(x) = \int_a^b f_1(x)\,d\alpha(x) + \int_a^b f_2(x)\,d\alpha(x),$$

$$\int_a^b c f_1(x)\,d\alpha(x) = c\int_a^b f_1(x)\,d\alpha(x)$$

2. Jeżeli $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$ i ponadto $f_1(x) \leq f_2(x)$ dla $x \in [a,b]$, to:

$$\int_a^b f_1(x)\,d\alpha(x) \leq \int_a^b f_2(x)\,d\alpha(x)$$

3. Jeżeli $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$, ~~wtedy~~ $a<c<b$, to $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,c]$ i $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[c,b]$ i zachodzi równość:

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^c f(x)\,d\alpha(x) + \int_c^b f(x)\,d\alpha(x)$$

4. Jeżeli $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$ i $|f(x)| \leq M$, dla $x \in [a,b]$, wtedy:

$$\left| \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \right| \leq M(\alpha(b) - \alpha(a))$$

5. Jeżeli $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ i $f \in \mathcal{R}(\alpha_2)$ na $[a,b]$, to $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ na $[a,b]$; prawdziwe ~~są~~ tożsamości

$$\int_a^b f(x)\,d(\alpha_1(x) + \alpha_2(x)) = \int_a^b f(x)\,d\alpha_1(x) + \int_a^b f(x)\,d\alpha_2(x),$$

jeżeli $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$ i $c > 0$, $c = \text{const}$, to $f \in \mathcal{R}(c\alpha)$,

$$\int_a^b f(x)\,d\,c\alpha(x) = c\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$$

Twierdzenie 14.

Jeżeli $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$, to:

1. $f(x)\,g(x) \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$
2. $|f(x)| \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$, to:

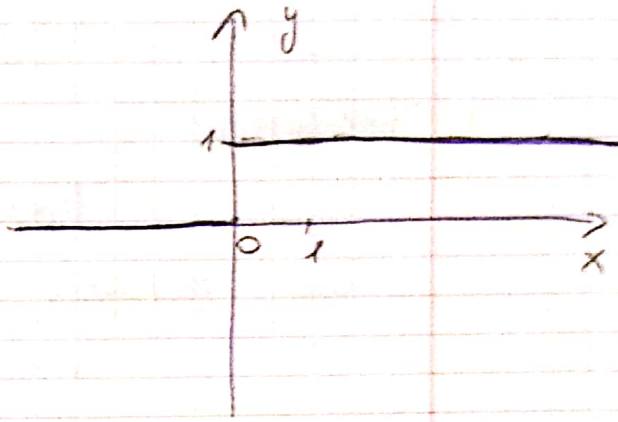
$$\left| \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,d\alpha(x)$$

Definicja funkcji schodkowej:

Definicja 15.

Jednostkową funkcją schodkową nazywamy funkcję postaci:

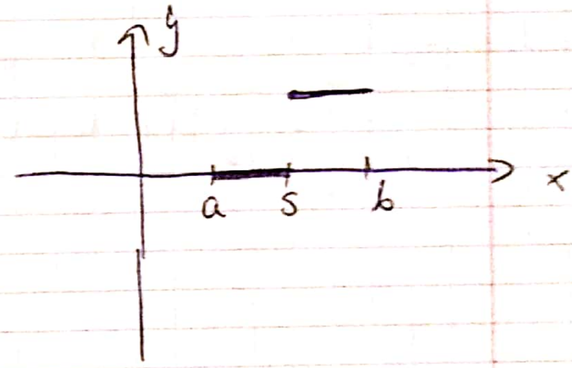
$$I(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x\leq 0\\ 1 & \text{dla } x>0\end{cases}$$



Twierdzenie 16.

Jeżeli $a<s<b$, f ograniczona na $[a,b]$, oraz f jest ciągła ~~na $[a,b]$~~ w $x=s$ i $\alpha(x)=I(x-s)$, to:

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=f(s),$$



Twierdzenie 17

Niech $c_n \geqslant 0$ dla $n\in\mathbb{N}$ i niech $\sum_{n=1}^{\infty} c_n<\infty$ (oznacza to, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest zbieżny)

Niech $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem postaci różnych punktów przedziału (a,b) i niech:

$$(8)\quad \alpha(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_n I(x-s_n).$$

Niech f będzie ciągła na przedziale $[a,b]$, wtedy:

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_n f(s_n)$$

Twierdzenie 18

Niech α będzie funkcją rosnącą i monotoniczną, i ponadto $\alpha' = \alpha'(x) \in \mathcal{R}$ na $[a,b]$.

Niech f będzie ograniczoną funkcją rzeczywistą na przedziale $[a,b]$.

$f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na przedziale $[a,b] \Leftrightarrow$, gdy $f(x)\alpha'(x) \in \mathcal{R}$, na $[a,b]$ i ponadto zachodzi równość:

$$(9) \quad \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx$$

Scanned by CamScanner

Zadanie

Ćwiczenie

Korzystając z def. całki oznaczonej obliczyć

$\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$. Rozważając dowolny ciąg podziałów przedziału $[1,2]$ i wybierając w przedziale i wybierając w przedziałach $[x_i, x_{i+1}]$, punkt pośredni $s_i = \sqrt{x_i \cdot x_{i+1}}$

Rozwiązanie

$$(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i+1}})^2 \geq 0$$

$$x_i - 2\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_{i+1} \geq 0$$

$$x_{i+1} > \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \geq \sqrt{x_i \cdot x_{i+1}} > \sqrt{x_i x_i} = x_i$$ – punkt pośredni

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Stąd wynika, że $s_i = \sqrt{x_i x_{i+1}} \in [x_i, x_{i+1}]$

Średnia suma całkowa ma postać:

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_{i-1} x_i}}\right)^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i-1} \cdot x_i}(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-2}} - \frac{1}{x_{n-1}} +$$

$$+ \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 2.

Udowodnić, że funkcja Dirichleta

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{dla } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

nie jest całkowalna w przedziale $[0,1]$

Rozwiązanie.

Rozważmy dowolny podział przedziału $[0,1]$ za pomocą punktów

$$0 = x_0 < x_1 \ldots < x_i < \ldots x_n = 1$$

Obliczmy $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 0$, $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 1$

Obliczmy następujące sumy:

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$$

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0$$

Scanned by CamScanner

Zauważmy, że

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f) = \inf_{\mathcal{P}} 1 = 1$$

dalej mamy

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f) = \sup_{\mathcal{P}} 0 = 0$$

Zatem wykazaliśmy, że:

$$1 = \overline{\int_0^1} f(x)\,dx \neq \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$$

Stąd otrzymujemy stwierdzenie na mocy definicji całki oznaczonej, że funkcja Dirichleta nie jest całkowalna.

Funkcja powyższa jest całkowalna w sensie Lebesgue.

Scanned by CamScanner

do wykładu

Uwaga Y. Dwa poprzednie twierdzenia ilustrują ogólność koncepcji całki w sensie Stieltjesa.

Jeżeli α jest funkcją schodkową, to całka sprowadza się do sumy skończonej lub sumy szeregu.

Jeżeli α ma całkowalną pochodną, to całka Stieltjesa redukuje się do całki Riemanna. Dzięki temu, w wielu przypadkach możemy jednocześnie badać własności całek i szeregów.

Przykład

Dla ilustracji rozważmy przykład fizyczny:

Moment bezwładności prostego drutu o jedn. długości obliczony względem osi przechodzącej przez koniec drutu i do niego prostopadłej i wynosi:

$$(16) \quad \int_0^1 x^2 dm(x) ,$$

gdzie funkcja $m(x)$ jest masą odcinka $[0,x]$.

Jeżeli założymy, że gęstość jest funkcją ciągłą, czyli zgodnie z definicją mamy równości

$$m'(x) = \frac{dm(x)}{dx} = \rho(x)$$

to na mocy twierdzenia 18 wobec zależności (16) mamy równość:

$$(17) \quad \int_0^1 x^2 dm = \int_0^1 x^2 \rho(x) dx$$

W przypadku, gdy obiekt składa się z mas m_i skoncentrowanych o punktach x_i, to (16) na mocy twierdzenia (17) ma postać:

$$(18) \quad \int_0^1 x^2 \, dm(x) = \sum_i x_i^2 \cdot m_i$$

Twierdzenie (zamiana zmiennych) 17

Niech φ będzie funkcją ściśle rosnącą, odwzorowującą przedział $[A, B] \xrightarrow{na} [a, b]$.

Niech α będzie funkcją rosnącą na $[a, b]$, niech $f \in R(\alpha)$ względem α na $[a, b]$.

Określmy β i g na ~~$[a, b]$~~ $[A, B]$ wzorem (19)

$$(19) \quad \beta(y) = \alpha(\varphi(y)), \quad g(y) = f(\varphi(y)).$$

Wtedy $g \in R(\beta)$ i zachodzi równość:

$$(20) \quad \int_A^B g(y) \, d\beta(y) = \int_A^B f(x) \, d\alpha(x).$$

Uwaga!

Rozważmy wsz. szczególny przypadek powyższego twierdzenia.

Przyjmijmy, że $\alpha(x) = x$, wtedy $\beta = \varphi$.

Załóżmy, że $\varphi' \in R$ na $[A, B]$.

Założenia twierdzenia (17) są spełnione, wtedy mamy:

$$(21) \quad \int_a^b f(x) \, dx = \int_A^B f(\varphi(y)) \, \varphi'(y) \, dy$$

Całkowanie i różniczkowanie

Ten rozdział pokazuje, że różniczkowanie i całkowanie są w pewnym sensie operacjami odwrotnymi.

Twierdzenie 19. Niech $f \in \mathcal{R}$ na $[a,b]$. Dla $x \in [a,b]$ określmy

$$(o) \quad F(x) = \int_a^t f(t)\,dt$$

Funkcja F jest ciągła na przedziale $[a,b]$; ponadto jeżeli f jest ciągła w punkcie $x_0 \in [a,b]$, to funkcja F jest różniczkowalna w punkcie x_0 i zachodzi równość

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Dowód:

Funkcja f jest ograniczona, ponieważ $f \in \mathcal{R}$ na $[a,b]$ ~~należy do~~

Niech $|f(t)| \leq M$ dla $t \in [a,b]$.

Niech $x, y \in [a,b]$ mamy wówczas:

$$(*) \quad |F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f\,\cancel{(x)}(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_a^x f(t)\,dt - \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_a^y f(t)\,dt \right) \right| = \left| \int_a^y f(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int_a^y |f(t)|\,dt \leq \int_a^y M\,dt = M \int_a^y dt = M(y-x)$$

dla $x \leq y$

zadanie dowolny przypadek

Dla $y \leq x$ dowód przebiega analogicznie.

Zauważmy, że z tej nierówności (*) stwierdza, że funkcja F spełnia warunek Lipschitz'a, zatem jest jednostajnie ciągła, czyli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta=\frac{\varepsilon}{M}} \forall_{x,y\in[a,b]} |x-y|<\delta \Rightarrow |F(x)-F(y)|<\varepsilon$$

Ponieważ funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 należącym do $[a,b]$, zatem dla danego $\varepsilon>0$ dobieramy $\delta>0$, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} |t-x_0|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(x_0)|<\varepsilon \quad \text{, dla } t\in[a,b].$$

Zauważmy, że: dla

$$x_0-\delta < s \leq x_0 \leq t < x_0+\delta \quad \text{, gdzie } t,s\in[a,b]$$

Wobec powyższych twierdzeń obliczamy:

$$L = \left|\frac{F(t)-F(s)}{t-s} - f(x_0)\right| \overset{z\ (*)\ \text{mamy}}{=} \left|\frac{\int_s^t F(u)\,du}{t-s} - \frac{\int_s^t f(x_0)\,du}{t-s}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{t-s}\left(\int_s^t f(u)\,du - \int_s^t f(x_0)\,du\right)\right| = \left|\frac{1}{t-s}\left(\int_s^t [f(u)-f(x_0)]\,du\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{t-s}\right| \int_s^t |f(u)-f(x_0)|\,du \leq \frac{1}{|t-s|}\int_s^t |f(u)-f(x_0)|\,du <$$

$$< \frac{1}{|t-s|}\int_s^t \varepsilon\,du = \frac{t-s}{|t-s|}\varepsilon = \varepsilon$$

Scanned by CamScanner

Wobec tego przechodząc w równości L 2 różnica $t-s \to 0$, mamy $F'(x_0) = f(x_0)$ c.b.d.

W oparciu o powyższe twierdzenie dowodzimy fundamentalnego twierdzenia rachunku całkowitego, które nosi nazwę Twierdzenie Leibniza - Newtona.

Twierdzenie 20 (Newtona Leibniza)

Jeżeli $f \in \mathcal{R}$ na $[a,b]$ i funkcja F jest taka, że pochodna
$$F'(x) = f(x) \text{ dla } x \in [a,b] \text{ to}$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Dowód: Niech dana będzie liczba $\varepsilon > 0$. Wybieramy podział $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ przedziału $[a,b]$ tak, że:
$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon$$

Na mocy twierdzenia o wartości średniej dla pochodnej istnieją takie punkty $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, że spełniony jest warunek: , gdzie $i = 1, \dots, n$
$$(*) \quad F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\,\Delta x_i = f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Wtedy mamy:
$$F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) \dots + [F(x_n) - F(x_{n-1})] =$$
$$= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) \overset{z\,(*)}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

z twierdzenia o aproksymacji całki za pomocą normy mamy

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| F(b) - F(a) \right| - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

Ponieważ powyższa nierówność zachodzi dla dowolnego $\varepsilon > 0$, zatem otrzymaliśmy teraz twierdzenie Newtona-Leibniza.

Ćwiczenia 18.03.2019r

Zadanie

Zakładając ciągłość f na przedziale domkniętym $[0,1]$. Udowodnić, że:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$,

b) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$

a) Prawdziwa jest tożsamość: $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Obliczmy:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - x \\ dt = -dx \\ t_1 = \frac{\pi}{2} \\ t_2 = 0 \end{array} \right| =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = P$$

b) Skorzystamy z tożsamości

$$\sin x = \sin(\pi - x)$$

Obliczamy:

$$L = \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi} x f(\sin(\pi - x))\,dx = \begin{vmatrix} t = \pi - x \\ dt = -dx \\ t_1 = \pi \\ t_2 = 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\int_{\pi}^{0} (\pi - t) f(\sin t)\,dt = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\pi f(\sin t) - t f(\sin t)\right] dt = \int_0^{\pi} \pi f(\sin t)\,dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t)\,dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

Zadanie 2

Wyprowadzić wzory rekurencyjne:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n x\,dx$, c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x^2)^n\,dx$

dla $n=0,1\ldots$

a) $J_n = \int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1} x \sin x\,dx = \left| \begin{array}{l} u=\sin^{n-1}x, \quad dv=\sin x\,dx \\ du=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx \\ v=-\cos x \end{array} \right| =$

$= -\sin^{n-1}x\cos x + \int \cos^2 x (n-1)\sin^{n-2}x\,dx =$

$= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int (\sin^{n-2}x - \sin^n x)\,dx =$

$= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\underbrace{\int \sin^{n-2}dx}_{=J_{n-2}} - (n-1)\underbrace{\int \sin^n x\,dx}_{=J_n}$

$J_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n$

$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} - \frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}$

$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n} J_{n-2} - \frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{n-1}{n} J_{n-2} - \left(\frac{\sin^{n-1}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}{n}\right) + \left(\frac{\sin^{n-1}0\cos 0}{n}\right)$

$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x\, dx = \int_0^{\pi/2} dx = x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$

$n = 2k$

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \cancel{\frac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4}} = \frac{2k-1}{2k} \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-4} =$$

$$= \frac{2k-1}{2k} \frac{2k-3}{2k-2} \frac{2k-5}{2k-4} I_{2k-6} = \frac{2k-1}{2k} \frac{2k-3}{2k-2} \frac{2k-5}{2k-4} \cdot \ldots \frac{3}{4} \frac{1}{2} I_0 = \frac{n!!}{n!!} \frac{\pi}{2}$$

$$I_n = \frac{n!!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$n!!$ – parzyste

$n!!!$ – nieparzyste

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k+1}$$

$$I_{2k+1} = \frac{n!!}{n!!!} I_1,$$

$$I_{2k+1} = \frac{n!!}{n!!!}$$

b) $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n dx \; I_{n-2}$ funkcja potęgowa

c) $I_n^{II} = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)^n dx = \begin{vmatrix} x=\cos t \\ dx = -\sin t dt \\ t_1 = \frac{\pi}{2}, t_2 = 0 \end{vmatrix} = \qquad I_n^{4} \int_0^{\pi/2} (1-x^2)^n dx$

$= -\int_{\pi/2}^{0} (1-\cos^2 t)^n \cdot \sin t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \sin t dt + \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t \, dt \frac{n!!}{n!!!}$

WYKŁAD

Twierdzenie 21.

(Całkowanie przez części) Niech F, G będą funkcjami różniczkowalnymi na $[a,b]$. $F' = f \in \mathcal{R}$, $G' = g \in \mathcal{R}$. Wtedy jest tak:

$$\int_a^b F(x) g(x)\, dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)\, dG(x)$$

Dowód: Zauważmy, że na mocy twierdzenia 12 (lub 10) mamy $H' \in \mathcal{R}$, bo $H'(x) = (F(x)G(x))' = F(x)G(x) + F(x)G'(x)$

Zatem na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego mamy:

$$\int_a^b H'(x)\, dx = \int_a^b (f(x)G(x) + F(x) g(x)) dx \quad \text{, zatem:}$$

$$H(b) - H(a) = H(x)\Big|_a^b = \int_a^b (f(x)G(x)) dx + \int_a^b (F(x) g(x)) dx$$

Stąd mamy też twierdzenie

Wektor - uporządkowany ciąg współrzędnych

Całkowanie funkcji o wartościach wektorowych

Definicja 22

Niech $f_1, f_2, \ldots, f_k$ będą funkcjami rzeczywistymi określonymi na $[a,b]$, niech $f = (f_1, \ldots, f_k)$ będzie odwzorowaniem $f: [a,b] \to \mathbb{R}^k$. Niech α będzie funkcją monotoniczną rosnącą na $[a,b]$. Mówimy, że $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, jeśli $f_j \in \mathcal{R}(\alpha)$ dla $j = 1, \ldots, k$ i zachodzi równość:

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \left(\int_a^b f_1(x)\, d\alpha(x), \ldots, \int_a^b f_k(x)\, d\alpha(x) \right)$$

Mówiąc inaczej:

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

jest to element przestrzeni $\mathbb{R}^k$, którego j-ta współrzędna jest równa:

$$\int_a^b f_j(x)\, d\alpha(x).$$

Jest oczywiste, że twierdzenie 13 pkt. 1, 3, 5 są prawdziwe także dla ~~wekto~~ funkcji o wartościach wektorowych. Aby się o tym przekonać wystarczy jedynie zastosować uzyskane rezultaty do poszczególnych współrzędnych.

To samo dotyczy twierdzeń 16, 18, 20 ~~15, 17, 21, 25~~. Dla ilustracji sformułujemy podstawowe zasady rachunku wektorowego

Twierdzenie 23

Niech $F, f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$, jeżeli $f \in \mathcal{R}$ na $[a,b]$ i ponadto $F' = f$, to:

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = F(b) - F(a)$$

Twierdzenie 24.

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$. Jeżeli $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ dla dowolnych funkcji α monotonicznych na $[a,b]$, to długość wektora - $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ i zachodzi związek:

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, d\alpha(x)$$

Krzywe Peano

Krzywe, które można zmierzyć (prostowalne)

~~Definicja~~ Metody rozważania geometryczne wyjaśnione teorii całki omówionej do wyznaczania długości krzywych w przestrzeni $\mathbb{R}^k$

Definicja 25

Ciągłe odwzorowanie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ nazywamy krzywą w przestrzeni $\mathbb{R}^k$

Przykłady:

- Jeżeli $k=2$, to γ nazywamy krzywą płaską
- Jeżeli $k=3$, to nazywamy krzywą nad naszą przestrzenią k.

Definicja a)

Jeżeli $\gamma(a) = \gamma(b)$, to wtedy γ jest krzywą zamkniętą

Definicja b)

Jeżeli γ jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym, to γ nazywamy łukiem.

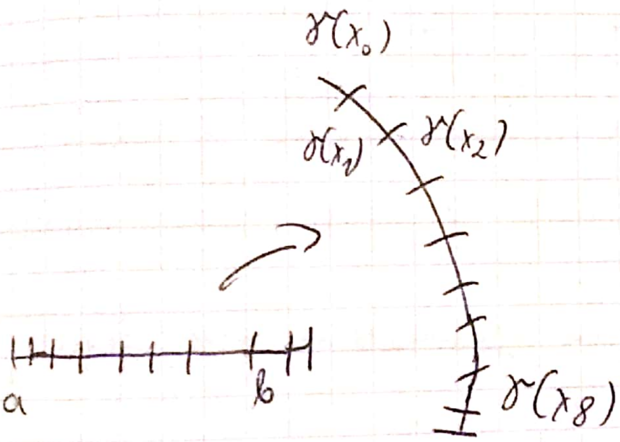
Z dowolnym podziałem P ~~tło~~ $= \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ przedziału $[a, b]$ i z dowolną krzywą $\gamma \in \mathbb{R}^k$ możemy powiązać liczbę postaci:

$$V(P, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|$$

Def. Długością krzywej $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^k$, która nie jest krzywą zamkniętą i jest ciągłą nazywamy liczbę

$$V(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} V(\mathcal{P}, \gamma) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|$$

Def. Jeżeli $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ i $0 < V(\gamma) < \infty$ to γ jest krzywą prostowalną



im więcej podziałów, tym większa dokładność

Każda współrzędna krzywej ma pochodną.

Twierdzenie 26

Jeżeli $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ i istnieje $\gamma' \in \mathbb{R}$ i jest ciągła, to γ jest prostowalna (ma długość) i wówczas zachodzi równość:

$$s(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(x)|\, dx$$

$\mathbb{R}^2$

Twierdzenie

Jeżeli $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ i istnieje $\gamma' \in R$, γ' jest ciągła, to γ jest prostowalna (ma długość) i wówczas

$$S(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

$\mathbb{R}^3$

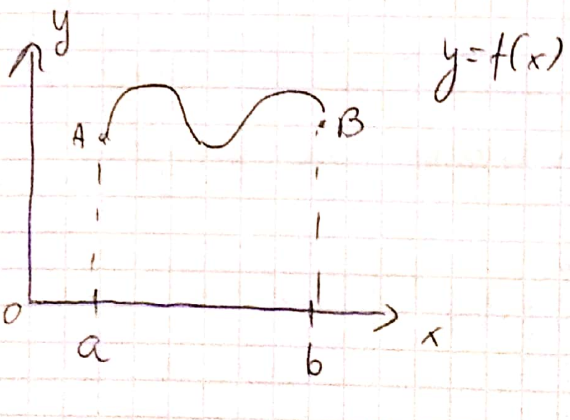
Twierdzenie

Jeżeli $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ i istnieje $\gamma' \in R$, γ' jest ciągła, to γ jest prostowalna (ma długość) i wówczas

$$S(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Zastosowanie całki pojedynczej do obliczania pól figur płaskich.

Rozważmy trapez krzywoliniowy przedstawiony na poniższym rysunku



Twierdzenie 27

Niech $f \in R$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, wówczas pole trapezu $aABb$ (trapez krzywoliniowy) przedstawiony powyżej ma pole wyrażające się zależnością:

$$|P| = \int_a^b f(x)\, dx$$

Dowód: Obliczając pole trapezu aABb posłużymy się:

niech P będzie podziałem przedziału $[a,b]$ postaci

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

m_i i M_i oznaczają to samo co w definicji f, dla $i = 1, \ldots, n$. Ponadto: ~~$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n}$~~

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i ,$$

$$L(P,f) \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i ,$$

Oznaczają odpowiednio pole figury ~~(trapezu)~~ prostokątów odpowiednio leżących nad krzywą f i leżących pod krzywą.

Zatem mamy zależność:

$$U(P,f) < |P| < L(P,f)$$

Ponieważ $f \in \mathcal{R}$, zatem mamy też.

Interpretacja geom. całki nieozn. to pole figury pod krzywą f

Pokazać, że jeżeli funkcje $f, g, g^2, f^2 \in \mathcal{R}$ na $[a,b]$, to spełniona jest nierówność

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\ \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

Nierówność Schwartza

1. Oznaczmy $A = \int_a^b f^2(x)\,dx$, $B = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$, $C = \int_a^b g^2(x)\,dx$.

Będziemy rozważać dwa możliwe przypadki

I) $A = C = 0$

Zauważmy, że dla dowolnego $x \in [a,b]$ mamy:

$$(|f(x)| - |g(x)|)^2 \geqslant 0$$

Stąd mamy:

$$f^2(x) - 2|f(x)g(x)| + g^2(x) \geqslant 0, \quad x \in [a,b]$$

Zatem otrzymujemy:

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}, \quad x \in [a,b]$$

Całkując obustronnie powyższą nierówność w przedziale $[a,b]$ korzystając z twierdzeń rachunkowych dla całki oznaczonej mamy:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \frac{1}{2}\int_a^b (g^2(x) + f^2(x))\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_a^b g^2(x)\,dx + \int_a^b f^2(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Zatem
$$B=0$$
dalej mamy:
$$0=B\leq(A+C)=0+0=0;$$
Co dowodzi prawdziwości dowodzonej nierówności.

2. Załóżmy, że $A\neq 0$ albo $C\neq 0$

Niech np. $A\neq 0$, rozważymy nierówność prawdziwą dla $x\in[a,b]$ oraz $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda=\mathrm{const}$.
$$(\lambda f(x)-g(x))^2\geq 0$$
Stąd mamy:
$$\lambda^2f^2(x)-2\lambda f(x)g(x)+g^2(x)\geq 0$$
Całkując nierówność na $[a,b]$ i korzystając z twierdzeń rachunkowych dla całki oznaczonej mamy:
$$\lambda^2\int_a^b f^2(x)\,dx-2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,dx+\int_a^b g^2(x)\,dx\geq 0$$
Korzystając z przyjętych oznaczeń mamy:

Δ musi być ujemna
$$\lambda^2A-2\lambda B+C\geq 0$$
Traktując powyższe wyrażenie jak nierówność kwadratową względem parametru λ, aby była ona spełniona dla dowolnego $\lambda\in\mathbb{R}$, musi być spełniony warunek
$$4B^2-4AC\leq 0.$$

$$4B^2 - 4AC \le 0$$

Po oczywistych przekształceniach mamy:

$\sqrt{a^2} = |a|$ $\quad 0 \le B^2 \le AC \Leftrightarrow |B| \le \sqrt{A}\sqrt{C}$

Korzystając z przyjętych oznaczeń otrzymujemy:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

Uwaga 7.

Powyższa nierówność prawdziwa jest dla szeregów liczbowych i sum nieskończonych zbieżnych.

Dowody analogiczne

(o) $\quad 1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \le \sqrt{1{,}2}$

Zauważmy:

$$1 \le 1 + x^4 \quad \text{dla } x \in [0,1]$$

Stąd mamy

$$1 \le \sqrt{1+x^4}$$

Całkując obustronnie w $[0,1]$

$$1 = x\Big|_0^1 = \int_0^1 dx \le \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \quad (*)$$

W dalszym ciągu wykorzystamy nierówności Schwartza

$$(**)\quad \left|\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx\right| = \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \overset{\text{nierówności Schwartza}}{\leq} \sqrt{\int_0^1 dx \sqrt{\int_0^1 (1+x^4)\,dx}}$$

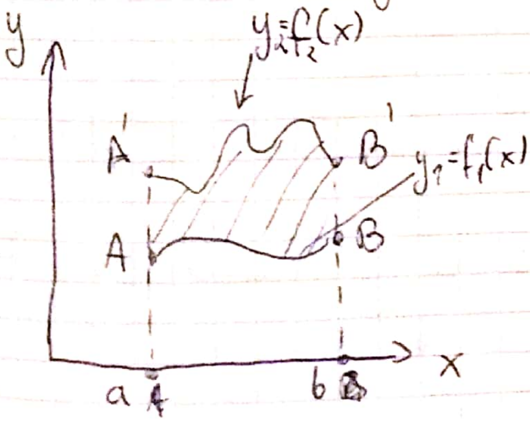
Obliczę

$$(***)\quad \int_0^1 (1+x^4)\,dx = x + \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = 1,2$$

Korzystając z zależności $(*)$ – $(***)$ mamy (0)

Całka jest graficznym przedstawieniem pole pod wykresem f

Niech będzie dany trapez postaci:



Trapez $AA'BB'$

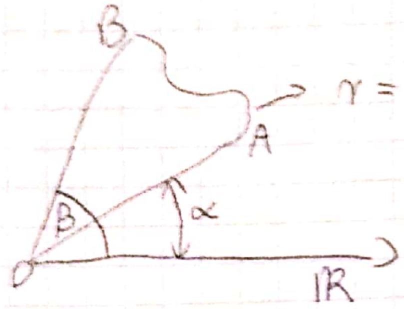
Z twierdzenia 27 mamy wniosek 28:

Niech $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}, f_1, f_2 \in \mathcal{R}$, wówczas pole trapezu wyraża się wzorem:

$$|S| = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$$

Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 27

Rozważmy wycinek AOB przedstawiony na poniższym rysunku:



$r = g(\theta)$, gdzie $\theta \in [\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$

Wniosek 28

Niech $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{R}$, wówczas pole wycinka AOB wyraża się wzorem:

$$\int_\alpha^\beta \to \qquad |S| = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta g^2(\theta)\,d\theta$$

Dowód:

Dokonujemy podziału $\mathcal{P}$ przedziału $[\alpha, \beta]$ następująco:

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta$$

Niech m_i, M_i oznaczają to samo co w dowodzie tw. 28.

Zakreślmy wycinki kołowe odpowiednio o promieniach m_i, M_i. Wówczas mamy następujące sumy:

$$L(\mathcal{P}, g) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2 \Delta\theta_i \quad , \quad U(\mathcal{P}, g) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta\theta_i$$

Zatem mamy:

$$L(\mathcal{P}, g) < |S| < U(\mathcal{P}, g)$$

Ponieważ $g \in R$, $r \in R$, stąd otrzymujemy tezę naszego wniosku.

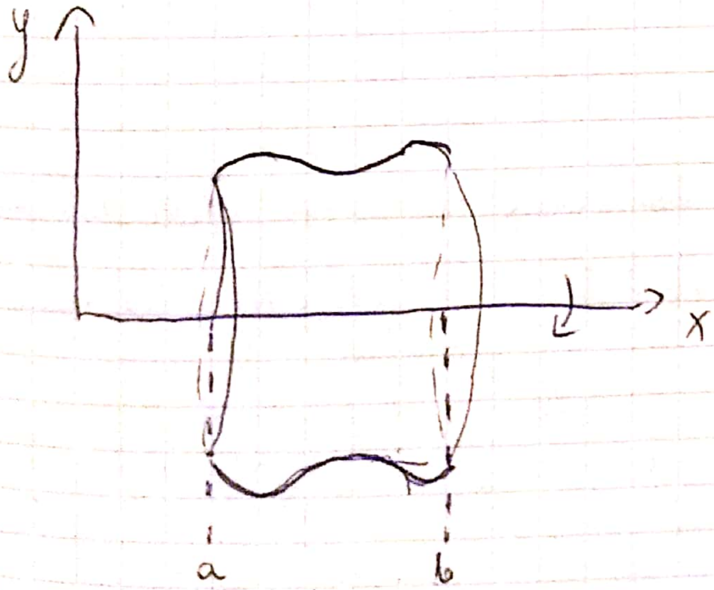
Bryły obrotowe powstałe w wyniku obrotu wokół osi OX

Twierdzenie 30

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ponadto $f \in R$. Obracając powyższą krzywą wokół osi OX, otrzymujemy bryłę obrotową, której objętość jest dana wzorem:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx,$$

Szkic graficzny



CAŁKA NIEWŁAŚCIWA

Definicja 1.

Niech $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, ponadto $A \in (a, +\infty)$, $f \in \mathcal{R}([a, A])$. (tzn. istnieje całka $\int_a^A f(x)dx$ dla każdego $A > a$)

Całkę niewłaściwą z funkcji f na $[a, +\infty]$ nazywamy granicę (skończoną lub nieskończoną) postaci:

$$(1) \quad \int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x)dx$$

Najpierw liczymy całkę oznaczoną a później granicę

Przykłady:

Kolokwium

1) Funkcja $f = \frac{1}{1+x^2}$ jest całkowalna w dowolnym przedziale $[0, A]$ dla $A > 0$ i mamy zatem

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^A = \operatorname{arctg} A$$

Zatem mamy

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \to \infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}$$

Scanned by CamScanner

$\lambda > 0$

2) Zbadajmy dla jakich wartości współczynnika λ istnieje całka niewłaściwa postaci

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}, \quad (\text{dla } a > 0)$$

Niech $\lambda \neq 1$, wówczas:

$$\int_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} \cdot x^{1-\lambda} \Big|_a^A = \frac{1}{1-\lambda}\left(A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}\right)$$

Niech $\lambda > 1$, wtedy:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{\lambda - 1} a^{1-\lambda}$$

Niech $\lambda < 1$, wtedy:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = +\infty$$

Niech $\lambda = 1$, wtedy

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{A \to \infty} (\ln A - \ln a) = +\infty$$

Definicja 2

Niech $f: [-\infty, a] \to \mathbb{R}$, ponadto dla dowolnego $A' \in (-\infty, a]$, $f \in \mathcal{R}([A', a])$, (czyli istnieje całka $\int_{A'}^{a} f(x)dx$ dla każdego $A' < a$)

Całką niewłaściwą na przedziale $(-\infty, a]$ nazywamy granicę postaci:

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{A} f(x)\,dx = \lim_{A' \to \infty} \int_{A'}^{a} f(x)\,dx$$

Definicja 3

Niech $f: [-\infty, \infty] \to \mathbb{R}$ $\neq \mathbb{R}$, ponadto dla dowolnego $A', A \in \mathbb{R}$, funkcja $f \in \mathcal{R}([A', A])$, (tzn. istnieje całka $\int_{A'}^{A} f(x)dx$, dla dowolnych $A', A \in (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ $A' < A$).

Całką niewłaściwą na przedziale $[-\infty, +\infty]$ nazywamy granicę postaci:

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A' \to -\infty \\ A \to \infty}} \int_{A'}^{A} f(x)\,dx$$

Uwaga! Mówimy, że całki (1), (2), (3) są zbieżne jeżeli granice po prawej stronie odpowiednich wzorów istnieją i są skończone.

W przypadku, gdy rozważane granice nie istnieją albo są nieskończone, rozważane całki nazywamy rozbieżnymi

Scanned by CamScanner

Zauważmy, że w definicji 3 biorąc dowolne $A \in [A', A]$, mamy:

$$\int_{A'}^{A} f(x)\,dx = \int_{A^{\circ}}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{A} f(x)\,dx$$

Stąd wynika, że definicja 3 sprowadza się do badania całek postaci:

$$\lim_{\substack{A \to \infty \\ A' \to -\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx = \lim_{\substack{A \to \infty \\ A' \to -\infty}} \left(\int_{A'}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{A} f(x)dx \right) =$$

$$= \lim_{\substack{A \to \infty \\ A' \to -\infty}} \int_{A'}^{a} f(x)dx + \lim_{\substack{A \to \infty \\ A' = -\infty}} = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{a} f(x)dx + \lim_{A \to \infty} \int_{a}^{A} f(x)dx$$

Ciąg powyższych równości oznacza, że aby określić całkę (3) musimy policzyć całki (1), (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx \text{, dla każdego } a \in \mathbb{R}$$

Niech f spełnia założenie definicji 1-3, ponadto niech $F(x)$ określone dla $x \in [a, +\infty]$ będzie całką nieoznaczoną z funkcji f. Wówczas na mocy podst. rachunku całkowego mamy równość:

$$\int_{a}^{A} f(x)dx = F(A) - F(a)$$

Zauważmy, że jeśli istnieje całka (1), to granica postaci

$$\lim_{A\to\infty} F(x) = F(+\infty).$$

Zatem mamy:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(-\infty) - F(\infty)$$

i analogicznie wzory dla całek (2), (3):

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(-\infty)$$

Przykłady

1) $$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = \lim_{A\to\infty} e^{-ax} \frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}\Bigg|_0^A$$

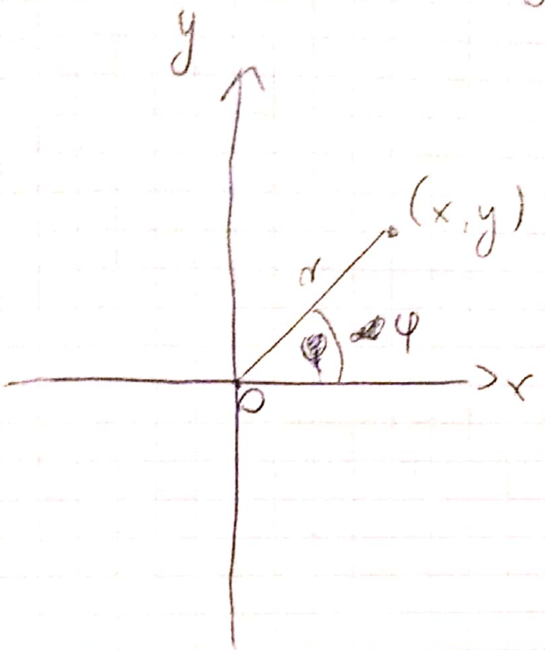
$$= \lim_{A\to\infty} -e^{-aA}\cdot\frac{a\sin bA + b\cos bA}{a^2 b^2} + \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Scanned by CamScanner

2) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)\right]\Bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Współrzędne biegunowe



$r^2 = x^2 + y^2$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha, \\ y = r\sin\alpha, \end{cases}$$

$\underline{I}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \Rightarrow (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (r, \varphi)$

$I(\mathbb{R}^2) = (\mathbb{R}_+, [0, 2\pi])$

Koło

$$K_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

$$x^2 + y^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$$

$$|S| = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y\,dx = 4\int_0^{\pi/2} r\sin\varphi(-r\sin\varphi d\varphi) = -4\int_0^{\pi/2} r^2\sin^2\varphi d\varphi =$$

$dx = -r\sin\varphi\, d\varphi$

$$= r^2 4\int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\, d\varphi \qquad = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin^2\varphi$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi d\varphi = \int \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \int \frac{1}{2} d\varphi - \int \frac{\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\int \cos 2\varphi d\varphi =$$

$$\left|-r^2 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \, d\varphi\right| -4r^2\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -4r^2\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin\pi\right)$$

$$+ 4r^2\left(\frac{1}{2}0 - \frac{1}{4}\sin 0\right) = -\pi r^2 = \pi r^2$$ - pole koła

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = (1-\sin^2\varphi) - \sin^2\varphi$$

$$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos^2\varphi}{2}$$

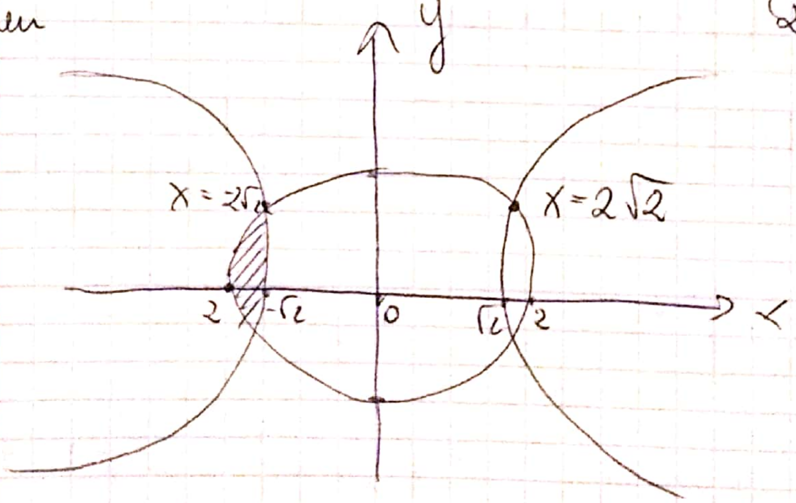
$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos^2\varphi}{2}$$

Zad. 7

Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \quad \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$$

Kołokwium   Rozwiązanie



Punkt wspólny

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ \frac{x^2}{2} - x^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \\ x_2 = -2\sqrt{\frac{2}{3}} \end{array}$$

Po uproszczeniu i zamienieniu na symetrię

$$P = 4\left(\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{0,6}} \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}\, dx + \int_{2\sqrt{0,6}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{6}}\, dx \right) =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2} x \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| x + \sqrt{x^2 - 2} \right| \Bigg|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{0,6}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{4} x \sqrt{4 - x^2} + \arcsin \frac{x}{2} \Bigg|_{2\sqrt{0,6}}^{2} - 2\left(x - 2\arcsin \sqrt{2 \cdot 3} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln 3 \right)$$

Elipsa można opisać we współrzędnych biegunowych układem zależności

$$\cancel{x = a\cos t} \quad \cancel{y = b\cos t} \quad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = 1$$

Całka eliptyczna na długość obwodu elipsy.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$$

Wyniku całki nie można zapisać w postaci funkcji elem.

136.

$$L = 4\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt = 4\left(\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dx\right.$$

$$+ \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dx$$

WYKŁAD 08.04

Twierdzenie 4.

1. Jeżeli całka $\int_a^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, to zbieżna jest całka $\int_A^{\infty} f(x)dx$ $(A > a)$ i na odwrót. Ponadto zachodzi równość:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{A} f(x)dx + \int_A^{\infty} f(x)dx$$

2. Jeżeli całka $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, to zachodzi równość:

$$\lim_{A \to +\infty} \int_A^{+\infty} f(x)dx = 0$$

3. Jeżeli całka $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna i znamy zbieżność całki $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$ $(c = const)$ to zachodzi równość

$$c\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{\infty} cf(x)dx$$

4. Jeśli całki $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$,

to zbieżna jest całka $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]\,dx$.

zachodzi równość:

$$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

Twierdzenie 5

Całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna $\Leftrightarrow$,

gdy:

$$\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{A>a} \; \forall_{\substack{A>A_0 \\ A'>A_0}} \left| \int_a^{A'} f(x)\,dx - \int_a^{A} f(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_A^{A'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

Definicja 6.

Jeżeli zbieżne są całki $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ i $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, to całkę $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ nazywamy <u>bezwzględnie zbieżną</u>, a funkcję $f: [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ bezwzględnie całkowalną na $[a, +\infty]$

Twierdzenie 6.

Jeżeli $f: [a, +\infty] \Rightarrow \mathbb{R}$ jest bezw. całkowalna na $[a, +\infty]$, a g jest ograniczone, to ich iloczyn jest funkcją bezwzględnie całkowalną na przedziale $[a, +\infty]$

<u>Twierdzenia o wartości średniej dla całki Riemanna</u>

Twierdzenie 7.

Niech $f, g \in \mathcal{R}$ na $[a, b]$, niech $m \leq f(x) \leq M$ dla $x \in [a, b]$, $g(x) \geq 0$ dla $x \in [a, b]$ (albo $g(x) \leq 0$ dla $x \in [a, b]$)

Wtedy:

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x)\, dx ,$$

gdzie $\mu \in [m, M]$

Dowód.

Niech $g(x) \geq 0$ dla $x \in [a, b]$ $(a < b)$ wtedy na mocy założeń twierdzenia 7 mamy nierówność:

$$m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x) \quad \text{dla } x \in [a, b]$$

Zatem na mocy twierdzeń 12, 2 mamy:

$$(*) \qquad m\int_a^b \varrho(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varrho(x)dx \leq M\int_a^b \varrho(x)dx$$

Dalej z założenia o funkcji ϱ wiemy, że funkcja jest ≥ 0

$$\int_a^b \varrho(x)dx \geq 0,$$

① Niech $\int_a^b \varrho(x)dx = 0$, wtedy z nierówności $(*)$ mamy

$$\int_a^b f(x)\varrho(x)dx = 0$$, zatem zachodzi teza.

② Niech $\int_a^b \varrho(x)dx > 0$, wówczas na mocy $(*)$ mamy

$$\frac{\int_a^b f(x)\varrho(x)dx}{\int_a^b f(x)\varrho(x)dx} = \mu \in [m, M] \text{ cnd.}$$

Analogicznie dla $\varrho(x) \leq 0$, dla $x \in [a, b]$

Uwaga!

Jeśli funkcja f jest funkcją ciągłą na $[a,b]$ wówczas mamy równości:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx,$$ dla pewnego $c\in[a,b]$

Twierdzenie 8 (Bonneta o wartości średniej)

Niech $f\in\mathcal{R}$ na $[a,b]$ oraz g jest monotoniczna na $[a,b]$. Istnieje $\xi\in[a,b]$ takie, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx$$

Kryteria zbieżności całek Abela i Dirichleta

Twierdzenie 9 Kryterium Abela

Niech $f,g:[a,+\infty]\to\mathbb{R}$, ponadto:

1. funkcja ~~$f\in\mathcal{R}$ na $[a,A]$~~ f jest całkowalna w sensie definicji (1), tzn. zbieżna (chociaż nie bezwzgl.)

2. funkcja g jest monotoniczna i ograniczona na $[a,+\infty]$, tzn.

$|g(x)|\leq L$, $L=const$, $L\in\mathbb{R}$, wówczas:

(b) $\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$, jest zbieżna.

Dowód opiera się o twierdzenie 8

Twierdzenie (kryterium Dirichleto). Niech:

1. funkcja f będzie całkowalna w każdym skończonym przedziale $[a, A]$, $(A > a)$ i całka

$$\left| \int_a^A f(x)dx \right| \leq K$$

, jest ograniczona

dla $K = const$ i $a < A < \infty$)

2. funkcja $g : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna i

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, wtedy: $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx < \infty$

Istotne całki niewłaściwe w analizie mat. i zastosowaniach

~~Pewne~~

1) Wzór Wallis'a (do obliczania π)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4 \cdots 2n\cdot 2n}{3\cdot 3\cdots (2n-1)(2n-1)(2n+1)(2n+1)}$$

2) Całka Eulera - Poissona

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx ,$$

powyższa całka odgrywa fundamentalne znaczenie w rachunku prawdopodobieństwa.

Metodami rachunku różniczkowego można wykazać nierówność postaci:

$$(*) \quad 1+t < e^t , \quad \text{dla } t\in\mathbb{R}$$

Dowodzimy powyższej nierówności wykazując, że funkcja $f(t) = \frac{1+t}{e^t}$ ma wartość maksymalną

równą $f_{max}(0) = 1$

Podstawmy w nierówności (*) $t = -x^2$, mamy:

$$(o) \quad (1-x^2) < e^{-x^2}$$

Podstawiąc w miejsce $t = x^2$ otrzymamy

$$g(x) = \frac{1+x^2}{e^{x^2}} \leq 1 \; / : (1+x^2)$$

$$(oo) \quad e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Z nierówności (o), (oo) mamy:

$$(**) \quad (1-x^2) < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \quad \text{dla } x \in$$

Zauważmy, że w nierówności (**) dla $x \in (0,1)$
zachodzi:

$$1-x^2 < 0,$$

a dla dowolnego $x \in [0,+\infty]$ mamy:

$$\frac{1}{1+x^2} > 0$$

Zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$(\square) \quad (1-x^2)^n < e^{-nx^2}, \text{ dla } x \in (0,1)$$

$$(\square\square) \quad e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}, \text{ dla } x \in [0,+\infty)$$

Całkując nierówność $(\square)$ mamy:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx$$

Z nierówności $(\square\square)$ mamy:

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Zatem otrzymaliśmy nierówność postaci

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^{\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Podstawić
$u = \sqrt{n}x$

Nietrudno pokazać, że prawdziwe jest równość:

$$\int_0^{\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Scanned by CamScanner

Pozostało tylko zauważyć, że:

$$\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt = \frac{(2n)!!}{(2n-2)!!};$$

podstawiając $x = \operatorname{ctg} t$ obliczamy:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t\,dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Z obliczeń otrzymujemy nierówność:

$$(***)\quad \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2(2n+1)} < k^2 < \frac{((2n-3)!!)^2(2n-1)}{((2n-2)!!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Korzystając z wzoru Wallisa mamy:

$$k^2 = \frac{\pi}{4}, \text{ zatem } k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Korzystając z $\int e^{-x^2}$ jest parz.:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$