Fundamentalny zbiór rozwiązań dla równań różniczkowych liniowych wyższych rzędów

Autorzy:
Julian Janus

2019

AGH E-PODRĘCZNIKI

AGH

Fundamentalny zbiór rozwiązań dla równań różniczkowych liniowych wyższych rzędów

Autor: Julian Janus

Niech

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \tag{1}$$

będzie równaniem różniczkowym liniowym rzędu n, gdzie $y(t)$ jest nieznaną funkcją a dane funkcje $f(t)$ i $a_k(t),\ k = 0, \ldots n$ są ciągłe i określone w przedziale $I \subset \mathbb{R}$.
Przez przedział I rozumiemy jeden z następujących zbiorów: (a, b), $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ lub $\mathbb{R}$.

UWAGA

Uwaga 1:

Jeżeli współczynnik $a_n(t)$ przy pochodnej najwyższego rzędu w równaniu (1) jest różny od zera dla każdego $t \in I$, to równanie to można zapisać w postaci

$$y^{(n)}(t) + b_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1(t)y'(t) + b_0(t)y(t) = g(t) \tag{2}$$

gdzie $b_k(t) = \frac{a_k(t)}{a_n(t)}, k = 0, \ldots, n-1$ i $g(t) = \frac{f(t)}{a_n(t)}$.

TWIERDZENIE

Twierdzenie 1:

ZAŁOŻENIA:

Funkcje $b_k(t),\ k = 0, \ldots n-1$ są ciągłe w przedziale $I \subset \mathbb{R}$.

TEZA:

Wtedy dla równania jednorodnego

$$y^{(n)}(t) + b_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1(t)y'(t) + b_0(t)y(t) = 0, \qquad t \in I \tag{3}$$

istnieje n -liniowo niezależnych rozwiązań $y_1(t), \ldots, y_n(t)$.

DOWÓD:

Niech t_0 będzie dowolnym ustalonym punktem z przedziału I i niech $y_k(t)$ będzie rozwiązaniem równania (3) z warunkiem początkowym:

$$y_k^{(i)}(t_0) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = k-1 \\ 0 & \text{dla} \quad i \neq k-1 \end{cases}, \qquad \text{gdzie} \quad i = 0,\ 1, \ldots, n-1.$$

Istnienie takiego rozwiazania wynika z twierdzenia 2 .
Z twierdzenia 1 wynika, że funkcje $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ są liniowo niezależne ponieważ wrońskian

$$W(y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

jest różny od zera.

UWAGA

Uwaga 2:

Jeżeli funkcje $y_1(t), \ldots, \ y_n(t),$ są rozwiązaniami równania (2) i istnieje $t_0 \in I$ takie, że

$$W(y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)) \neq 0$$

to

$$W(y_1(t), \ldots, y_n(t)) \neq 0 \qquad \text{dla każdego} \qquad t \in I.$$

Wynika to z faktu, że

$$W(y_1(t), \ldots, y_n(t)) = W(y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} b_{n-1}(s)ds}.$$

Powyższą zależność wykażemy dla $n = 2.$
Niech $y_1(t), \ y_2(t),$ będą rozwiązaniami równania

$$y^{('')}(t) + b_1(t)y'(t) + b_0(t)y(t) = 0.$$

Oznaczmy przez $w(t) := W(y_1(t), y_2(t)).$ Różniczkując $w(t)$ i uwzględniając, że $y''(t) = -b_1(t)y'(t) - b_0(t)y(t)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} w'(t) = & (y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t))' = y_1'(t)y_2'(t) + y_1(t)\left(-b_1(t)y_2'(t) - b_0(t)y_2(t)\right) - \\ & \left(-b_1(t)y_1'(t) - b_0(t)y_1(t)\right)y_2(t) - y_1'(t)y_2'(t) = -b_1(t)w(t) \end{aligned}.$$

Przekształcamy powyższe równanie i całkujemy w przedziale $(t_0, \ t)$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{w'(s)}{w(s)}ds = -\int_{t_0}^{t} b_1(s)ds \iff \ln\left|\frac{w(t)}{w(t_0)}\right| = -\int_{t_0}^{t} b_1(s)ds.$$

Zatem

$$w(t) = w(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} b_1(s)ds}.$$

DEFINICJA

Definicja 1: Fundamentalnego zbioru rozwiązań

Zbiór rozwiązań $\{y_1(t), \ldots, \ y_n(t)\},$ równania (2) będziemy nazywali **fundamentalnym zbiorem rozwiązań** , jeżeli dla każdego $t \in I$ wrońskian $W(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ jest różny od zera.

UWAGA

Uwaga 3:

Fundamentalny zbiór rozwiązań nie jest wyznaczony jednoznacznie. Dla danego równania istnieje nieskończenie wiele różnych fundamentalnych zbiorów rozwiązań.

PRZYKŁAD

Przykład 1:

Dla równania $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$ fundamentalnymi zbiorami rozwiązań są na przykład zbiory $\{e^t,\ e^{-2t}\}$, $\{e^t + e^{-2t},\ e^{-2t}\}$ lub $\{e^t + e^{-2t},\ e^t - e^{-2t}\}$

TWIERDZENIE

Twierdzenie 2:

ZAŁOŻENIA:

Niech zbiór $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$ będzie fundamentalnym zbiorem rozwiązań równania (3).

TEZA:

Wtedy dowolne rozwiązanie $y(t)$ równania (3) jest kombinacją liniową fundamentalnego zbioru rozwiązań, co możemy zapisać następująco:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$

gdzie $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$.

DOWÓD:

Niech funkcja $y(t)$ będzie dowolnym rozwiązaniem równania (3) i niech $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$ będzie fundamentalnym zbiorem rozwiązań tego równania. Dla dowolnego ustalonego $t_0 \in I$ rozważmy następujący układ równań

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + \cdots + c_n y_n(t_0) = y(t_0) \\ c_1 y_1'(t_0) + \cdots + c_n y_n'(t_0) = y'(t_0) \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = y^{(n-1)}(t_0) \end{cases}$$

gdzie niewiadomymi sa $c_1, \ldots, c_n$.
Ponieważ wyznacznikiem powyższego układu jest wrońskian, który jest różny od zera, więc układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

Definiujemy funkcję

$$Y(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t), \qquad t \in I,$$

gdzie współczynniki $c_1, \ldots, c_n$ są rozwiązaniem powyższego układu. Z twierdzenia 1 wynika, że funkcja $Y(t)$ jest rozwiązaniem równania (3) i spełnia warunek początkowy $Y^{(i)}(t_0) = y^{(i)}(t_0), i = 0, \ldots, n-1$. Z twierdzenia 2 wynika, że równanie (3) z powyższym warunkiem początkowym posiada dokładnie jedno rozwiązanie, zatem $Y(t) = y(t)$ dla każdego $t \in I,$ co kończy dowód twierdzenia.

UWAGA

Uwaga 4:

Pokażemy, że stałe $c_1, \ldots, c_n$ w twierdzeniu 2 określone są jednoznacznie. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że mamy dwa różne przedstawienia

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$
$$y(t) = \tilde{c_1} y_1(t) + \cdots + \tilde{c_n} y_n(t).$$

Odejmując stronami powyższe równania otrzymamy

$$0 = (c_1 - \tilde{c_1}) y_1(t) + \cdots + (c_n - \tilde{c_n}) y_n(t).$$

Ponieważ funkcje $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ są liniowo niezależne, więc

$$c_1 - \tilde{c_1} = c_2 - \tilde{c_2} = \cdots = c_n - \tilde{c_n} = 0,$$

co kończy dowód.

UWAGA

Uwaga 5:

Z twierdzenia 1 i twierdzenia 2 wynika, że zbiór wszystkich rozwiązań równania (2) jest **przestrzenią wektorową wymiaru** n. Zbiór fundamentalny rozwiązań tego równania jest bazą tej przestrzeni.

TWIERDZENIE

Twierdzenie 3:

ZAŁOŻENIA:

Zakładamy, że funkcje $y(t)$ i $\tilde{y}(t)$ są rozwiązaniami równania (2)

TEZA:

Wtedy różnica tych funkcji $y(t)-\tilde{y}(t)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego (3).

DOWÓD:

Ponieważ funkcje $y(t)$ i $\tilde{y}(t)$ są rozwiązaniami równania (2) więc zachodzą następujące równości:

$$y^{(n)}(t)+b_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+\cdots+b_1(t)y'(t)+b_0(t)y(t)=g(t)$$
$$\tilde{y}^{(n)}(t)+b_{n-1}(t)\tilde{y}^{(n-1)}(t)+\cdots+b_1(t)\tilde{y}'(t)+b_0(t)\tilde{y}(t)=g(t).$$

Odejmując stronami powyższe równości otrzymujemy

$$y^{(n)}(t)-\tilde{y}^{(n)}(t)+b_{n-1}(t)\left[y^{(n-1)}(t)-\tilde{y}^{(n-1)}(t)\right]+\cdots+b_0(t)\left[y(t)-\tilde{y}(t)\right]=0.$$

Uwzględniając fakt, że pochodna różnicy dwóch funkcji jest równa różnicy pochodnych tych funkcji, powyższą równość możemy zapisać następująco

$$(y-\tilde{y})^{(n)}(t)+b_{n-1}(t)(y-\tilde{y})^{(n-1)}(t)+\cdots+b_0(t)\left(y-\tilde{y}\right)(t)=0,$$

co kończy dowód twierdzenia.

WNIOSEK

Wniosek 1:

Z twierdzeń 1 i 2 wynika, że jeżeli $Y(t)$ jest rozwiązaniem równania (2) to dowolne rozwiązanie $y(t)$ równania (2) jest postaci

$$y(t)=Y(t)+c_1y_1(t)+\cdots+c_ny_n(t)$$

gdzie $\{y_1(t),\ldots,y_n(t)\}$ - jest fundamentalnym zbiorem rozwiązań jednorodnego równania (3).

PRZYKŁAD

Przykład 2:

Funkcje $y_1(t) = e^t$ i $y_2(t) = e^{2t}$ są rozwiązaniami równania

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Pokażemy, że funkcje $y_1(t)$ i $y_2(t)$ stanowią fundamentalny zbiór rozwiązań. W tym celu liczymy ich wrońskian

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 2e^{3t} - e^{3t} = e^{3t} \neq 0 \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Zatem funkcje $y_1(t)$, $y_2(t)$ stanowią fundamentalny zbiór rozwiązań równania (4).
Stąd, na mocy twierdzenia 2, dowolne rozwiązanie równania (4) możemy zapisać w postaci

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

gdzie c_1, c_2 są dowolnymi stałymi.

Wyznaczmy rozwiązanie równania (4) spełniające warunek początkowy

$$y(0) = 1 \quad \text{i} \quad y'(0) = -1.$$

Liczymy pochodną rozwiązania ogólnego która wynosi $y'(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t}$.
Uwzględniając warunek początkowy otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{cases} y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 1, \\ y'(0) = c_1 e^0 + 2c_2 e^0 = c_1 + 2c_2 = -1 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $c_1 = 3$ i $c_2 = -2$. Zatem rozwiązaniem problemu początkowego jest funkcja $y(t) = 3e^t - 2e^{2t}$.

PRZYKŁAD

Przykład 3:

Funkcje $y_1(t) = t^2$ i $y_2(t) = t^3$ są rozwiązaniami równania jednorodnego

$$3t^2 y''(t) - 2ty'(t) - 2y(t) = 0, \qquad t \in (0, +\infty).$$

Stanowią one fundamentalny zbiór rozwiązań dla tego równania, ponieważ ich wrońskian nie jest równy zero

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} t^2 & t^3 \\ 2t & 3t^2 \end{vmatrix} = 3t^4 - 2t^4 = t^4, \qquad \text{dla} \quad t \in (0, \infty).$$

Zatem rozwiązanie ogólne tego równania ma postać

$$y(t) = c_1 t^2 + c_2 t^3.$$

Rozważmy teraz równanie niejednorodne

$$3t^2 y''(t) - 2ty'(t) - 2y(t) = -4t, \qquad t \in (0, +\infty).$$

Funkcja $y_0(t) = t^2 + t$ jest rozwiązaniem równania niejednorodnego. Stąd, na mocy wniosku 1 rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego ma postać

$$y(t) = t^2 + t + c_1 t^2 + c_2 t^3,$$

gdzie c_1, c_2 są dowolnymi stałymi.

Autor: Julian Janus