第5章 决策树

1．分类决策树模型是表示基于特征对实例进行分类的树形结构。决策树可以转换成一个**if-then**规则的集合，也可以看作是定义在特征空间划分上的类的条件概率分布。

2．决策树学习旨在构建一个与训练数据拟合很好，并且复杂度小的决策树。因为从可能的决策树中直接选取最优决策树是NP完全问题。现实中采用启发式方法学习次优的决策树。

决策树学习算法包括3部分：特征选择、树的生成和树的剪枝。常用的算法有ID3、 C4.5和CART。

3．特征选择的目的在于选取对训练数据能够分类的特征。特征选择的关键是其准则。常用的准则如下：

（1）样本集合D对特征A的信息增益（ID3）

$g(D, A)=H(D)-H(D|A)$

$H(D)=-\sum_{k=1}^{K} \frac{\left|C_{k}\right|}{|D|} \log _{2} \frac{\left|C_{k}\right|}{|D|}$

$H(D|A)=\sum_{i=1}^{n} \frac{\left|D_{i}\right|}{|D|} H\left(D_{i}\right)$

其中，$H(D)$是数据集D的熵，$H(D_i)$是数据集D_i的熵，$H(D|A)$是数据集D对特征A的条件熵。 D_i是D中特征A取第i个值的样本子集，C_k是D中属于第k类的样本子集。n是特征A取 值的个数，K是类的个数。

（2）样本集合D对特征A的信息增益比（C4.5）

$g_{R}(D, A)=\frac{g(D, A)}{H(D)}$

其中，$g(D,A)$是信息增益，$H(D)$是数据集D的熵。

（3）样本集合D的基尼指数（CART）

$\operatorname{Gini}(D)=1-\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\left|C_{k}\right|}{|D|}\right)^{2}$

特征A条件下集合D的基尼指数：

$\operatorname{Gini}(D, A)=\frac{\left|D_{1}\right|}{|D|} \operatorname{Gini}\left(D_{1}\right)+\frac{\left|D_{2}\right|}{|D|} \operatorname{Gini}\left(D_{2}\right)$

4．决策树的生成。通常使用信息增益最大、信息增益比最大或基尼指数最小作为特征选择的准则。决策树的生成往往通过计算信息增益或其他指标，从根结点开始，递归地产生决策树。这相当于用信息增益或其他准则不断地选取局部最优的特征，或将训练集分割为能够基本正确分类的子集。

5．决策树的剪枝。由于生成的决策树存在过拟合问题，需要对它进行剪枝，以简化学到的决策树。决策树的剪枝，往往从已生成的树上剪掉一些叶结点或叶结点以上的子树，并将其父结点或根结点作为新的叶结点，从而简化生成的决策树。

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

from sklearn.datasets import load_iris
from sklearn.model_selection import train_test_split
from collections import Counter
import math
from math import log
import pprint
```

书上题目5.1

```
# 书上题目5.1
def create_data():
    datasets = [['青年', '否', '否', '一般', '否'],
               ['青年', '否', '否', '好', '否'],
               ['青年', '是', '否', '好', '是'],
               ['青年', '是', '是', '一般', '是'],
               ['青年', '否', '否', '一般', '否'],
               ['中年', '否', '否', '一般', '否'],
               ['中年', '否', '否', '好', '否'],
               ['中年', '是', '是', '好', '是'],
               ['中年', '否', '是', '非常好', '是'],
               ['中年', '否', '是', '非常好', '是'],
               ['老年', '否', '是', '非常好', '是'],
               ['老年', '否', '是', '好', '是'],
               ['老年', '是', '否', '好', '是'],
               ['老年', '是', '否', '非常好', '是'],
               ['老年', '否', '否', '一般', '否'],
               ]
    labels = [u'年龄', u'有工作', u'有自己的房子', u'信贷情况', u'类别']
    # 返回数据集和每个维度的名称
    return datasets, labels
```

```
datasets, labels = create_data()
```

```
train_data = pd.DataFrame(datasets, columns=labels)
```

```
train_data
```

```
.dataframe tbody tr th {
    vertical-align: top;
}

.dataframe thead th {
    text-align: right;
}
```

	年龄	有工作	有自己的房子	信贷情况	类别
0	青年	否	否	一般	否
1	青年	否	否	好	否
2	青年	是	否	好	是
3	青年	是	是	一般	是
4	青年	否	否	一般	否
5	中年	否	否	一般	否
6	中年	否	否	好	否
7	中年	是	是	好	是
8	中年	否	是	非常好	是
9	中年	否	是	非常好	是
10	老年	否	是	非常好	是
11	老年	否	是	好	是
12	老年	是	否	好	是
13	老年	是	否	非常好	是
14	老年	否	否	一般	否

```
# 熵
def calc_ent(datasets):
    data_length = len(datasets)
    label_count = {}
    for i in range(data_length):
        label = datasets[i][-1]
        if label not in label_count:
            label_count[label] = 0
        label_count[label] += 1
    ent = -sum([(p / data_length) * log(p / data_length, 2)
```

```python
                for p in label_count.values()])
    return ent
# def entropy(y):
#     """
#     Entropy of a label sequence
#     """
#     hist = np.bincount(y)
#     ps = hist / np.sum(hist)
#     return -np.sum([p * np.log2(p) for p in ps if p > 0])


# 经验条件熵
def cond_ent(datasets, axis=0):
    data_length = len(datasets)
    feature_sets = {}
    for i in range(data_length):
        feature = datasets[i][axis]
        if feature not in feature_sets:
            feature_sets[feature] = []
        feature_sets[feature].append(datasets[i])
    cond_ent = sum(
        [(len(p) / data_length) * calc_ent(p) for p in feature_sets.values()])
    return cond_ent


# 信息增益
def info_gain(ent, cond_ent):
    return ent - cond_ent


def info_gain_train(datasets):
    count = len(datasets[0]) - 1
    ent = calc_ent(datasets)
#     ent = entropy(datasets)
    best_feature = []
    for c in range(count):
        c_info_gain = info_gain(ent, cond_ent(datasets, axis=c))
        best_feature.append((c, c_info_gain))
        print('特征({}) - info_gain - {:.3f}'.format(labels[c], c_info_gain))
    # 比较大小
    best_ = max(best_feature, key=lambda x: x[-1])
    return '特征({})的信息增益最大，选择为根节点特征'.format(labels[best_[0]])
```

```python
info_gain_train(np.array(datasets))
```

```
特征(年龄) - info_gain - 0.083
特征(有工作) - info_gain - 0.324
特征(有自己的房子) - info_gain - 0.420
特征(信贷情况) - info_gain - 0.363
```

```
'特征(有自己的房子)的信息增益最大，选择为根节点特征'
```

利用ID3算法生成决策树，例5.3

```python
# 定义节点类 二叉树
class Node:
    def __init__(self, root=True, label=None, feature_name=None, feature=None):
        self.root = root
        self.label = label
        self.feature_name = feature_name
        self.feature = feature
        self.tree = {}
        self.result = {
            'label:': self.label,
            'feature': self.feature,
            'tree': self.tree
        }

    def __repr__(self):
        return '{}'.format(self.result)

    def add_node(self, val, node):
        self.tree[val] = node

    def predict(self, features):
        if self.root is True:
            return self.label
        return self.tree[features[self.feature]].predict(features)


class DTree:
    def __init__(self, epsilon=0.1):
        self.epsilon = epsilon
        self._tree = {}

    # 熵
```

```python
    @staticmethod
    def calc_ent(datasets):
        data_length = len(datasets)
        label_count = {}
        for i in range(data_length):
            label = datasets[i][-1]
            if label not in label_count:
                label_count[label] = 0
            label_count[label] += 1
        ent = -sum([(p / data_length) * log(p / data_length, 2)
                    for p in label_count.values()])
        return ent

    # 经验条件熵
    def cond_ent(self, datasets, axis=0):
        data_length = len(datasets)
        feature_sets = {}
        for i in range(data_length):
            feature = datasets[i][axis]
            if feature not in feature_sets:
                feature_sets[feature] = []
            feature_sets[feature].append(datasets[i])
        cond_ent = sum([(len(p) / data_length) * self.calc_ent(p)
                        for p in feature_sets.values()])
        return cond_ent

    # 信息增益
    @staticmethod
    def info_gain(ent, cond_ent):
        return ent - cond_ent

    def info_gain_train(self, datasets):
        count = len(datasets[0]) - 1
        ent = self.calc_ent(datasets)
        best_feature = []
        for c in range(count):
            c_info_gain = self.info_gain(ent, self.cond_ent(datasets, axis=c))
            best_feature.append((c, c_info_gain))
        # 比较大小
        best_ = max(best_feature, key=lambda x: x[-1])
        return best_

    def train(self, train_data):
        """
        input:数据集D(DataFrame格式)，特征集A，阈值eta
        output:决策树T
        """
        _, y_train, features = train_data.iloc[:, :
                                               -1], train_data.iloc[:,
```

```
                                                                     -1],
train_data.columns[:

    -1]
       # 1,若D中实例属于同一类Ck，则T为单节点树，并将类Ck作为结点的类标记，返回T
       if len(y_train.value_counts()) == 1:
           return Node(root=True, label=y_train.iloc[0])

       # 2, 若A为空，则T为单节点树，将D中实例树最大的类Ck作为该节点的类标记，返回T
       if len(features) == 0:
           return Node(
               root=True,
               label=y_train.value_counts().sort_values(
                   ascending=False).index[0])

       # 3,计算最大信息增益 同5.1,Ag为信息增益最大的特征
       max_feature, max_info_gain = self.info_gain_train(np.array(train_data))
       max_feature_name = features[max_feature]

       # 4,Ag的信息增益小于阈值eta,则置T为单节点树，并将D中是实例数最大的类Ck作为该节点的类标记，返
回T
       if max_info_gain < self.epsilon:
           return Node(
               root=True,
               label=y_train.value_counts().sort_values(
                   ascending=False).index[0])

       # 5,构建Ag子集
       node_tree = Node(
           root=False, feature_name=max_feature_name, feature=max_feature)

       feature_list = train_data[max_feature_name].value_counts().index
       for f in feature_list:
           sub_train_df = train_data.loc[train_data[max_feature_name] ==
                                         f].drop([max_feature_name], axis=1)

           # 6, 递归生成树
           sub_tree = self.train(sub_train_df)
           node_tree.add_node(f, sub_tree)

       # pprint.pprint(node_tree.tree)
       return node_tree

   def fit(self, train_data):
       self._tree = self.train(train_data)
       return self._tree

   def predict(self, X_test):
       return self._tree.predict(X_test)
```

```
datasets, labels = create_data()
data_df = pd.DataFrame(datasets, columns=labels)
dt = DTree()
tree = dt.fit(data_df)
```

```
tree
```

```
{'label:': None, 'feature': 2, 'tree': {'否': {'label:': None, 'feature': 1, 'tree':
{'否': {'label:': '否', 'feature': None, 'tree': {}}, '是': {'label:': '是', 'feature':
None, 'tree': {}}}}, '是': {'label:': '是', 'feature': None, 'tree': {}}}}
```

```
dt.predict(['老年', '否', '否', '一般'])
```

```
'否'
```

scikit-learn实例

```
# data
def create_data():
    iris = load_iris()
    df = pd.DataFrame(iris.data, columns=iris.feature_names)
    df['label'] = iris.target
    df.columns = [
        'sepal length', 'sepal width', 'petal length', 'petal width', 'label'
    ]
    data = np.array(df.iloc[:100, [0, 1, -1]])
    # print(data)
    return data[:, :2], data[:, -1]


X, y = create_data()
X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(X, y, test_size=0.3)
```

```
from sklearn.tree import DecisionTreeClassifier
from sklearn.tree import export_graphviz
import graphviz
```

```
clf = DecisionTreeClassifier()
clf.fit(X_train, y_train,)
```

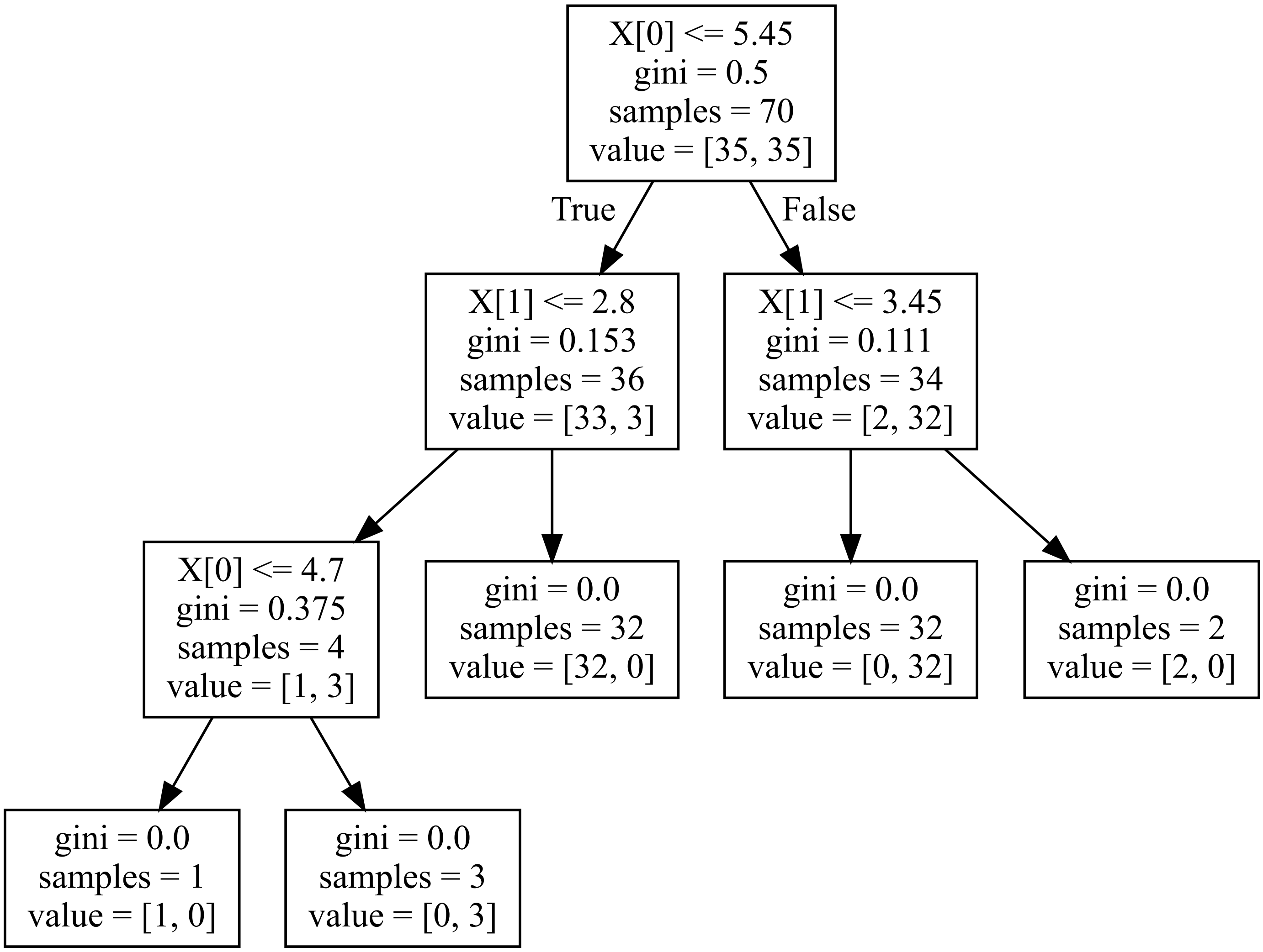
```
DecisionTreeClassifier()
```

```
clf.score(X_test, y_test)
```

```
0.9666666666666667
```

```
tree_pic = export_graphviz(clf, out_file="mytree.pdf")
with open('mytree.pdf') as f:
    dot_graph = f.read()
```

```
graphviz.Source(dot_graph)
```



第5章决策树-习题

习题5.1

根据表5.1所给的训练数据集，利用信息增益比（C4.5算法）生成决策树。

解答：

表5.1 贷款申请样本数据表

ID	年龄	有工作	有自己的房子	信贷情况	类别
1	青年	否	否	一般	否
2	青年	否	否	好	否
3	青年	是	否	好	是
4	青年	是	是	一般	是
5	青年	否	否	一般	否
6	中年	否	否	一般	否
7	中年	否	否	好	否
8	中年	是	是	好	是
9	中年	否	是	非常好	是
10	中年	否	是	非常好	是
11	老年	否	是	非常好	是
12	老年	否	是	好	是
13	老年	是	否	好	是
14	老年	是	否	非常好	是
15	老年	否	否	一般	否

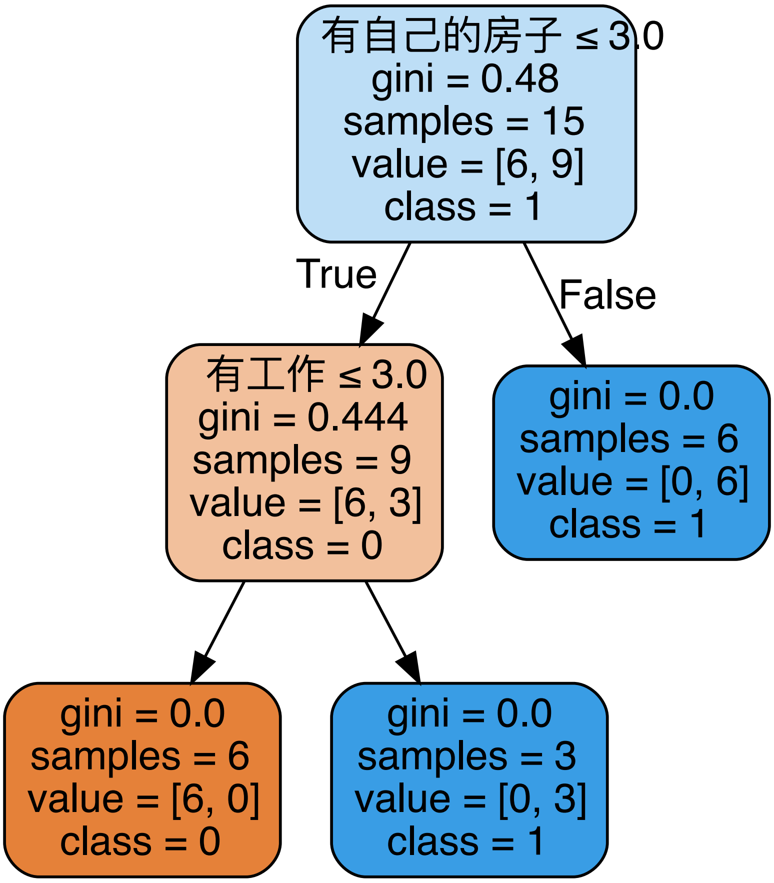
```
from sklearn.tree import DecisionTreeClassifier
from sklearn import preprocessing
import numpy as np
import pandas as pd

from sklearn import tree
import graphviz

features = ["年龄", "有工作", "有自己的房子", "信贷情况"]
X_train = pd.DataFrame([
    ["青年", "否", "否", "一般"],
    ["青年", "否", "否", "好"],
    ["青年", "是", "否", "好"],
    ["青年", "是", "是", "一般"],
    ["青年", "否", "否", "一般"],
    ["中年", "否", "否", "一般"],
    ["中年", "否", "否", "好"],
    ["中年", "是", "是", "好"],
    ["中年", "否", "是", "非常好"],
    ["中年", "否", "是", "非常好"],
```

```python
    ["老年", "否", "是", "非常好"],
    ["老年", "否", "是", "好"],
    ["老年", "是", "否", "好"],
    ["老年", "是", "否", "非常好"],
    ["老年", "否", "否", "一般"]
])
y_train = pd.DataFrame(["否", "否", "是", "是", "否",
                        "否", "否", "是", "是", "是",
                        "是", "是", "是", "是", "否"])
# 数据预处理
le_x = preprocessing.LabelEncoder()
le_x.fit(np.unique(X_train))
X_train = X_train.apply(le_x.transform)
le_y = preprocessing.LabelEncoder()
le_y.fit(np.unique(y_train))
y_train = y_train.apply(le_y.transform)
# 调用sklearn.DT建立训练模型
model_tree = DecisionTreeClassifier()
model_tree.fit(X_train, y_train)

# 可视化
dot_data = tree.export_graphviz(model_tree, out_file=None,
                                    feature_names=features,
                                    class_names=[str(k) for k in np.unique(y_train)],
                                    filled=True, rounded=True,
                                    special_characters=True)
graph = graphviz.Source(dot_data)
graph
```



习题5.2

已知如表5.2所示的训练数据，试用平方误差损失准则生成一个二叉回归树。
表5.2 训练数据表

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4.50	4.75	4.91	5.34	5.80	7.05	7.90	8.23	8.70	9.00

解答：
决策树的生成就是递归地构建二叉决策树的过程，对回归树用平方误差最小化准则，对分类树用基尼指数（Gini index）最小化准则，进行特征选择，生成二叉树。

> 算法5.5（最小二乘回归树生成算法）
> 输入：训练数据集D
> 输出：回归树$f(x)$
> 在训练数据集所在的输入空间中，递归地将每个区域划分为两个子区域并决定每个子区域上的输出值，构建二叉决策树；
> (1)选择最优切分变量j与切分点s，求解
> $\min_{j,s} \left[\min_{c_1} \sum_{x_i \in R_1(j,s)} (y_i - c_1)^2 + \min_{c_2} \sum_{x_i \in R_2(j,s)} (y_i - c_2)^2 \right]$ 遍历变量j，对固定的切分变量j扫描切分点s，选择使得上式达到最小值的对(j,s)
> (2)用选定的对(j,s)划分区域并决定相应的输出值：$R_1(j,s)=\{x|x^{(j)} \leqslant s\}, R_2(j,s)=\{x|x^{(j)} > s\}$ (3)
> $\hat{c_m} = \frac{1}{N_m} \sum_{x_i \in R_m(j,s)} y_i, x \in R_m, m=1,2$
> 继续对两个子区域调用步骤(1),(2)，直至满足停止条件

> (4)将输入空间划分为M个区域$R_1, R_2, \cdots, R_M$，生成决策树：$f(x)=\sum_{m=1}^M \hat{c_m} I(x \in R_m)$

```
import numpy as np


class LeastSqRTree:
    def __init__(self, train_X, y, epsilon):
        # 训练集特征值
        self.x = train_X
        # 类别
        self.y = y
        # 特征总数
        self.feature_count = train_X.shape[1]
        # 损失阈值
        self.epsilon = epsilon
        # 回归树
        self.tree = None

    def _fit(self, x, y, feature_count, epsilon):
        # 选择最优切分点变量j与切分点s
        (j, s, minval, c1, c2) = self._divide(x, y, feature_count)
        # 初始化树
        tree = {"feature": j, "value": x[s, j], "left": None, "right": None}
        if minval < self.epsilon or len(y[np.where(x[:, j] <= x[s, j])]) <= 1:
            tree["left"] = c1
        else:
            tree["left"] = self._fit(x[np.where(x[:, j] <= x[s, j])],
                                     y[np.where(x[:, j] <= x[s, j])],
                                     self.feature_count, self.epsilon)
        if minval < self.epsilon or len(y[np.where(x[:, j] > s)]) <= 1:
            tree["right"] = c2
        else:
            tree["right"] = self._fit(x[np.where(x[:, j] > x[s, j])],
                                      y[np.where(x[:, j] > x[s, j])],
                                      self.feature_count, self.epsilon)
        return tree

    def fit(self):
        self.tree = self._fit(self.x, self.y, self.feature_count, self.epsilon)

    @staticmethod
    def _divide(x, y, feature_count):
        # 初始化损失误差
        cost = np.zeros((feature_count, len(x)))
        # 公式5.21
        for i in range(feature_count):
            for k in range(len(x)):
                # k行i列的特征值
                value = x[k, i]
```

```python
                y1 = y[np.where(x[:, i] <= value)]
                c1 = np.mean(y1)
                y2 = y[np.where(x[:, i] > value)]
                c2 = np.mean(y2)
                y1[:] = y1[:] - c1
                y2[:] = y2[:] - c2
                cost[i, k] = np.sum(y1 * y1) + np.sum(y2 * y2)
        # 选取最优损失误差点
        cost_index = np.where(cost == np.min(cost))
        # 选取第几个特征值
        j = cost_index[0][0]
        # 选取特征值的切分点
        s = cost_index[1][0]
        # 求两个区域的均值c1,c2
        c1 = np.mean(y[np.where(x[:, j] <= x[s, j])])
        c2 = np.mean(y[np.where(x[:, j] > x[s, j])])
        return j, s, cost[cost_index], c1, c2
```

```python
train_X = np.array([[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]]).T
y = np.array([4.50, 4.75, 4.91, 5.34, 5.80, 7.05, 7.90, 8.23, 8.70, 9.00])

model_tree = LeastSqRTree(train_X, y, .2)
model_tree.fit()
model_tree.tree
```

```
C:\ProgramData\Anaconda3\lib\site-packages\numpy\core\fromnumeric.py:3335:
RuntimeWarning: Mean of empty slice.
  out=out, **kwargs)
C:\ProgramData\Anaconda3\lib\site-packages\numpy\core\_methods.py:161: RuntimeWarning:
invalid value encountered in double_scalars
  ret = ret.dtype.type(ret / rcount)
```

```
{'feature': 0,
 'value': 5,
 'left': {'feature': 0, 'value': 3, 'left': 4.72, 'right': 5.57},
 'right': {'feature': 0,
  'value': 7,
  'left': {'feature': 0, 'value': 6, 'left': 7.05, 'right': 7.9},
  'right': {'feature': 0, 'value': 8, 'left': 8.23, 'right': 8.85}}}
```

根据上面程序的输出，可得到用平方误差损失准则生成一个二叉回归树：$f(x)=\begin{cases}4.72 & x \le 3 \\ 5.57 & 3 < x \le 5 \\ 7.05 & 5 < x \le 6 \\ 7.9 & 6 < x \le 7 \\ 8.23 & 7 < x \le 8 \\ 8.85 & x > 8\end{cases}$

习题5.3

证明 CART 剪枝算法中，当α确定时，存在唯一的最小子树T_α使损失函数$C_\alpha(T)$最小。

解答：
第1步：内部节点是否剪枝只与以该节点为根节点的子树有关。
剪枝过程：
计算子树的损失函数：$C_\alpha(T)=C(T)+\alpha$其中，$C(T)=\sum_{t=1}^{|T|}N_t(1-\sum_{k=1}^{K}(\frac{N_{tk}}{N_t})^2)$，$|T|$是叶结点个数，$K$是类别个数。
有剪枝前子树T_0，剪枝后子树T_1，满足$C_\alpha(T_1) \leqslant C_\alpha(T_0)$则进行剪枝。

第2步（反证法）：假设当α确定时，存在两颗子树T_1,T_2都使得损失函数C_α最小。
第1种情况：假设被剪枝的子树在同一边，易知其中一个子树会由另一个子树剪枝而得到，故不可能存在两个最优子树，原结论得证。
第2种情况：假设被剪枝的子树不在同一边，易知被剪枝掉的子树都可以使损失函数C_α最小，故两颗子树都可以继续剪枝，故不可能存在两个最优子树，原结论得证。

习题5.4

证明 CART 剪枝算法中求出的子树序列$\{T_0,T_1,\cdots,T_n\}$分别是区间$\alpha \in [\alpha_i,\alpha_{i+1})$的最优子树$T_\alpha$，这里$i=0,1,\cdots,n, 0=\alpha_0<\alpha_1<\cdots,\alpha_n<+\infty$。

解答：
原结论可以表述为：将α从小增大，$0=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_n<+\infty$，在每个区间$[\alpha_i,\alpha_{i+1})$中，子树$T_i$是这个区间里最优的。
第1步：易证，当$\alpha=0$时，整棵树T_0是最优的，当$\alpha \rightarrow +\infty$时，根结点组成的单结点树（即$T_n$）是最优的。

第2步：

由于每次剪枝剪的都是某个内部结点的子结点，也就是将某个内部结点的所有子结点回退到这个内部结点里，并将这个内部结点作为叶子结点。因此在计算整体的损失函数时，这个内部结点以外的值都没变，只有这个内部结点的局部损失函数改变了，因此本来需要计算全局的损失函数，但现在只需要计算内部结点剪枝前和剪枝后的损失函数。
从整体树T_0开始剪枝，对T_0的任意内部结点t
剪枝前的状态：有$|T_t|$个叶子结点，预测误差是$C(T_t)$
剪枝后的状态：只有本身一个叶子结点，预测误差是$C(t)$ 因此剪枝前的以t结点为根结点的子树的损失函数是$C_\alpha(T_t)=C(T_t)+\alpha|T_t|$剪枝后的损失函数是$C_\alpha(t)=C(t)+\alpha$易得，一定存在一个$\alpha$使得$C_\alpha(T_t)=C_\alpha(t)$，这个值为$\alpha=\frac{C(t)-C(T_t)}{|T_t|-1}$可知，找到$\alpha$即找到了子结点$t$，即完成了剪枝，得到最优子树$T_1$
根据书中第73页，采用以下公式计算剪枝后整体损失函数减少的程度：$g(t)=\frac{C(t)-C(T_t)}{|T_t|-1}$在$T_0$中剪去$g(t)$最小的$T_t$，将得到的子树作为$T_1$，同时将最小的$g(t)$设为$\alpha_1$，$T_1$为区间$[\alpha_1,\alpha_2)$的最优子树。

依次类推，子树T_i是区间$[\alpha_i, \alpha_{i+1})$里最优的，原结论得证。

参考文献：

1. MrTriste：https://blog.csdn.net/wjc1182511338/article/details/76793164
2. http://www.pianshen.com/article/1752163397/

讨论：为什么α要取最小的$g(t)$呢?

图5.1 最小的$g(t)$

以图中两个点为例，结点1和结点2，$g(t)_2$大于$g(t)_1$，假设在所有结点中$g(t)_1$最小，$g(t)_2$最大，两种选择方法：当选择最大值$g(t)_2$，即结点2进行剪枝，但此时结点1的剪枝前的误差大于剪枝后的误差，即如果不剪枝，误差变大，依次类推，对其它所有的结点的$g(t)$都是如此，从而造成整体的累计误差更大。反之，如果选择最小值$g(t)_1$，即结点1进行剪枝，则其余结点不剪的误差要小于剪枝后的误差，不剪枝为好，且整体的误差最小。从而以最小$g(t)$剪枝获得的子树是该α值下的最优子树。

参考代码：https://github.com/wzyonggege/statistical-learning-method

本文代码更新地址：https://github.com/fengdu78/lihang-code

习题解答：https://github.com/datawhalechina/statistical-learning-method-solutions-manual

中文注释制作：机器学习初学者公众号：ID:ai-start-com

配置环境：python 3.5+

代码全部测试通过。