метод Ньютона

Пусть корень уравнения **f(x)=0** отделен на отрезке **[a;b]**, причем первая и вторая производные **f’(x)** и **f''(x)** непрерывны и знакопостоянны при **x∈ [a;b].**

В этом случае для построения последовательности приближений к корню может быть использован *метод Ньютона*: каждое следующее приближение $\mathbf{x_n}$ вычисляется через предыдущее приближение $\mathbf{x_{n-1}}$ по формуле:

$$\mathbf{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$$

Таким образом, задавшись начальным приближением $\mathbf{x_0}$ можно получить первое приближение

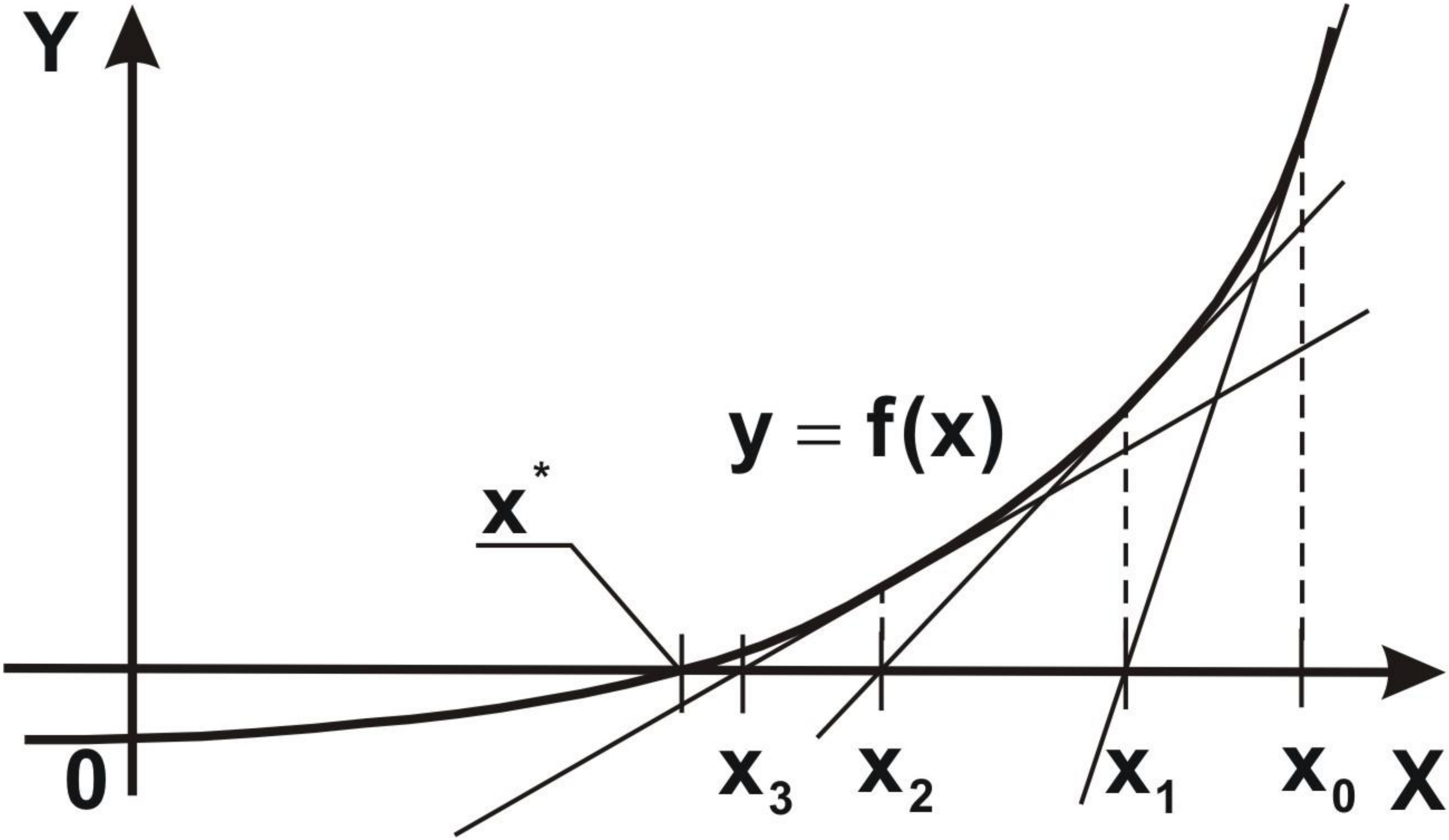
$$\mathbf{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

затем второе

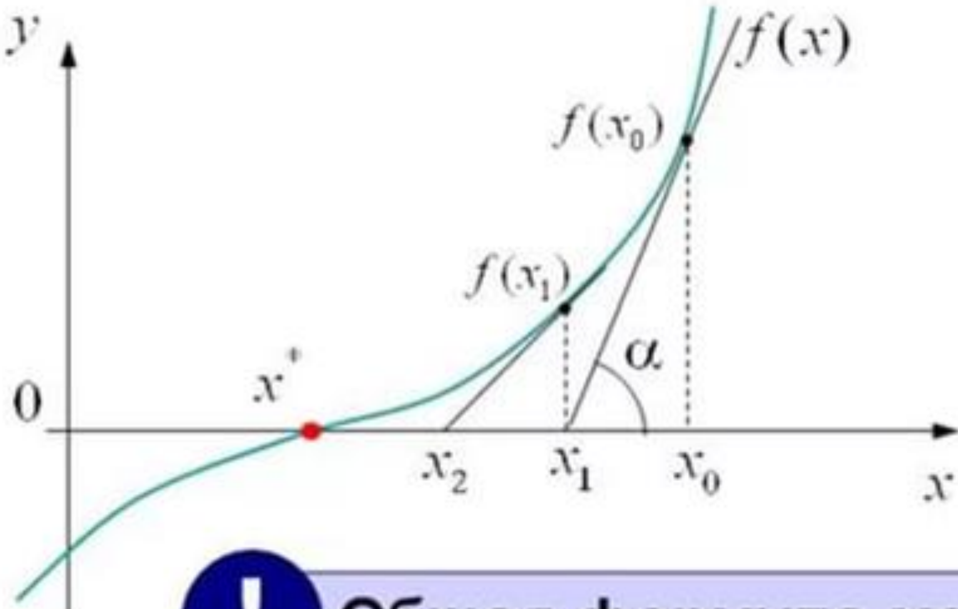
$$\mathbf{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$$

и так далее до получения приближения, погрешность которого не превышает заданную.

Геометрическая иллюстрация метода Ньютона



Вывод формулы метода Ньютона из геометрических построений



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

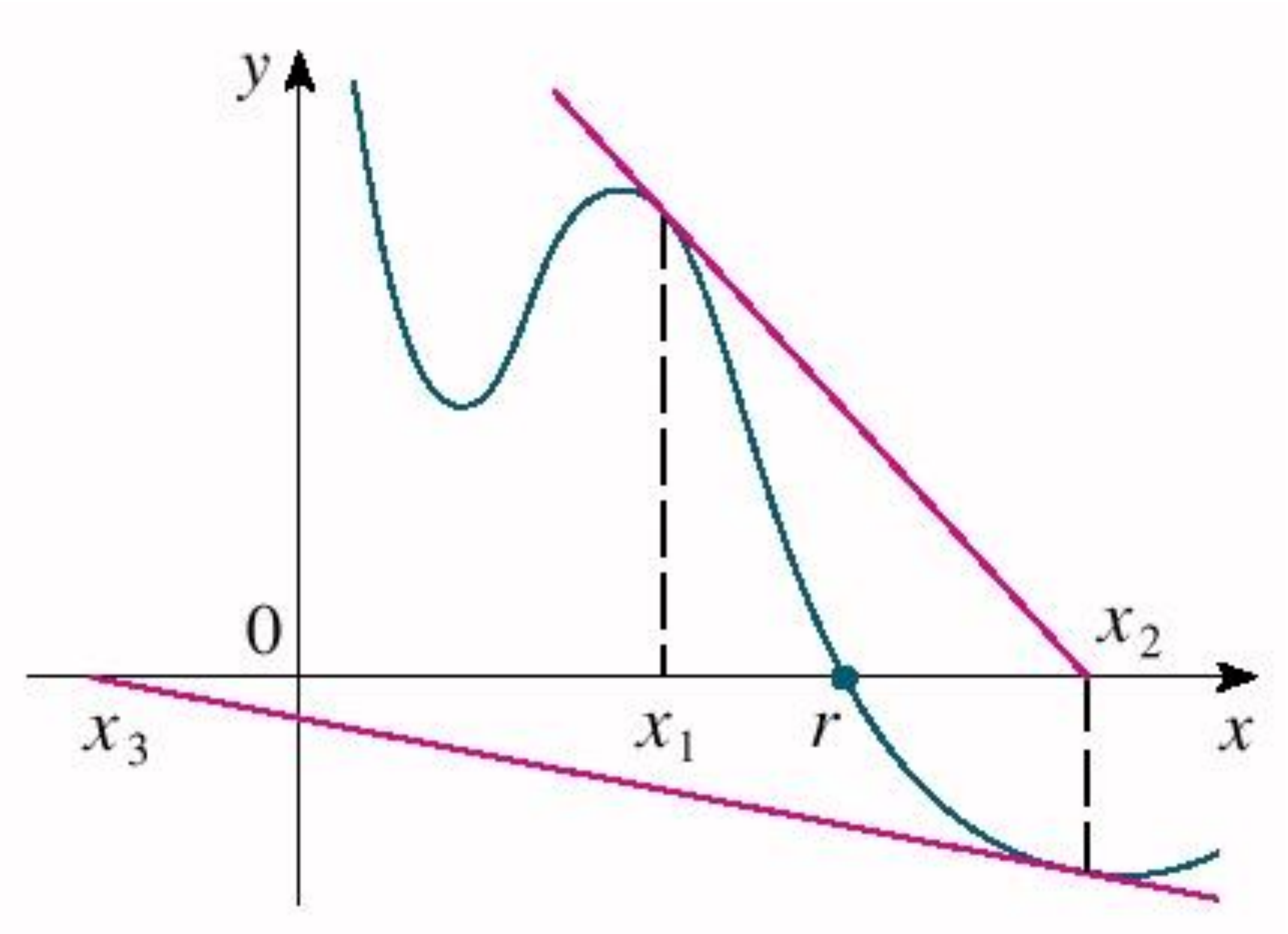
$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

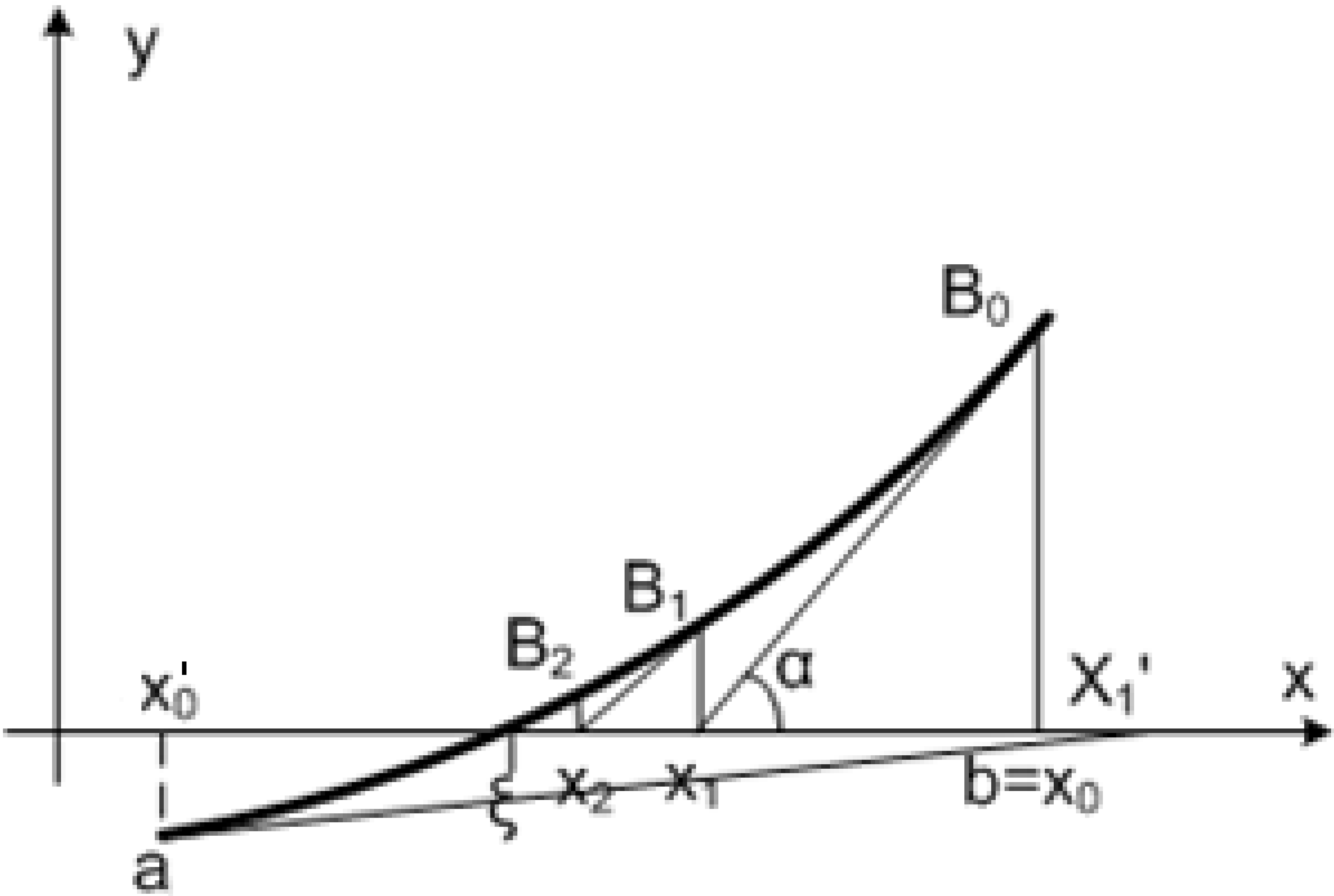
! Общая формула метода Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

f'(x) и f''(x) не знакопостоянны



Выбор начального приближения



Теорема о сходимости метода Ньютона

Пусть корень уравнения $\mathbf{f(x) = 0}$ отделен на отрезке $\mathbf{[a;b]}$ (функция $\mathbf{f(x)}$ непрерывна на $\mathbf{[a;b]}$ и на концах его принимает разные знаки), а производные $\mathbf{f'(x)}$ и $\mathbf{f''(x)}$ отличны от нуля и сохраняют постоянные знаки на $\mathbf{[a;b]}$. Тогда, если выбрать начальное приближение $\mathbf{x_0 \in [a;b]}$ так, чтобы $\mathbf{f'(x_0) \cdot f''(x_0) > 0}$, то последовательность приближений, определяемая формулой

$$\mathbf{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$$

сходится.

Проверка условий сходимости метода Ньютона

Проверим условия сходимости метода Ньютона и выберем начальное приближение для уравнения **$\cos(x) - 3x + 1 = 0$**, корень которого отделен на отрезке **[0;1]** на прошлой лекции.

Первая производная **$f'(x) = -\sin(x) - 3 < 0$** при любых значениях **x**. Вторая производная **$f''(x) = -\cos(x) < 0$** на отрезке **[0;1]**. Следовательно, последовательность приближений по методу Ньютона будет сходящейся при выборе начального приближения так, чтобы **$f(x_0) < 0$**. Это условие выполняется на правом конце отрезка: **$x_0 = 1$**.

Последовательность приближений по методу Ньютона

Получим несколько последовательных приближений по итерационной формуле Ньютона

$$\mathbf{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$$

из начального приближения $\mathbf{x_0 = 1}$:

$\mathbf{x_1 = x_0 - (\cos(x_0) - 3x_0 + 1)/(-\sin(x_0) - 3) = 1 - (0.54 - 3 + 1)/(-0.84 - 3) = 0.62}$
$\mathbf{x_2 = x_1 - (\cos(x_1) - 3x_1 + 1)/(-\sin(x_1) - 3) = 0.62 - (0.814 - 1.86 + 1)/(-0.581 - 3) =}$
$\mathbf{=0.607}$
$\mathbf{x_3 = x_2 - (\cos(x_2) - 3x_2 + 1)/(-\sin(x_2) - 3)=0.607 - (0.821 - 1.821 + 1)/(-0.57 - 3)=}$
$\mathbf{=0.607}$

Как видно, процесс последовательных приближений сходится.

Оценка погрешности приближения для метода Ньютона

Можно показать, что погрешность **n–го** приближения

$$|\mathbf{x_n - x^*}| \le \frac{\mathbf{M_2}}{\mathbf{2m_1}}(\mathbf{x_n - x_{n-1}})^2$$

где $\mathbf{m_1}$ – наименьшее значение **|f'(x)|** при $\mathbf{x \in [a;b]}$;

$\mathbf{M_2}$ – наибольшее значение **|f''(x)|** при $\mathbf{x \in [a;b]}$.

Таким образом, если задана допустимая погрешность приближения к корню **ε**, то процесс последовательных приближений можно прекратить при выполнении условия:

$$|\mathbf{x_n - x_{n-1}}| \le \sqrt{\frac{\mathbf{2m_1\varepsilon}}{\mathbf{M_2}}}$$

Существует и другой, универсальный способ оценки погрешности приближения и соответствующее ему правило останова. Этот способ применим к любому методу уточнения корня, но требует дополнительного вычисления функции в точке очередного приближения:

$$\frac{|\mathbf{f(x_n)}|}{\mathbf{m_1}} \le \boldsymbol{\varepsilon}$$

где $\mathbf{m_1}$ – наименьшее значение **|f'(x)|** при $\mathbf{x \in [a;b]}$.

Схема алгоритма метода Ньютона