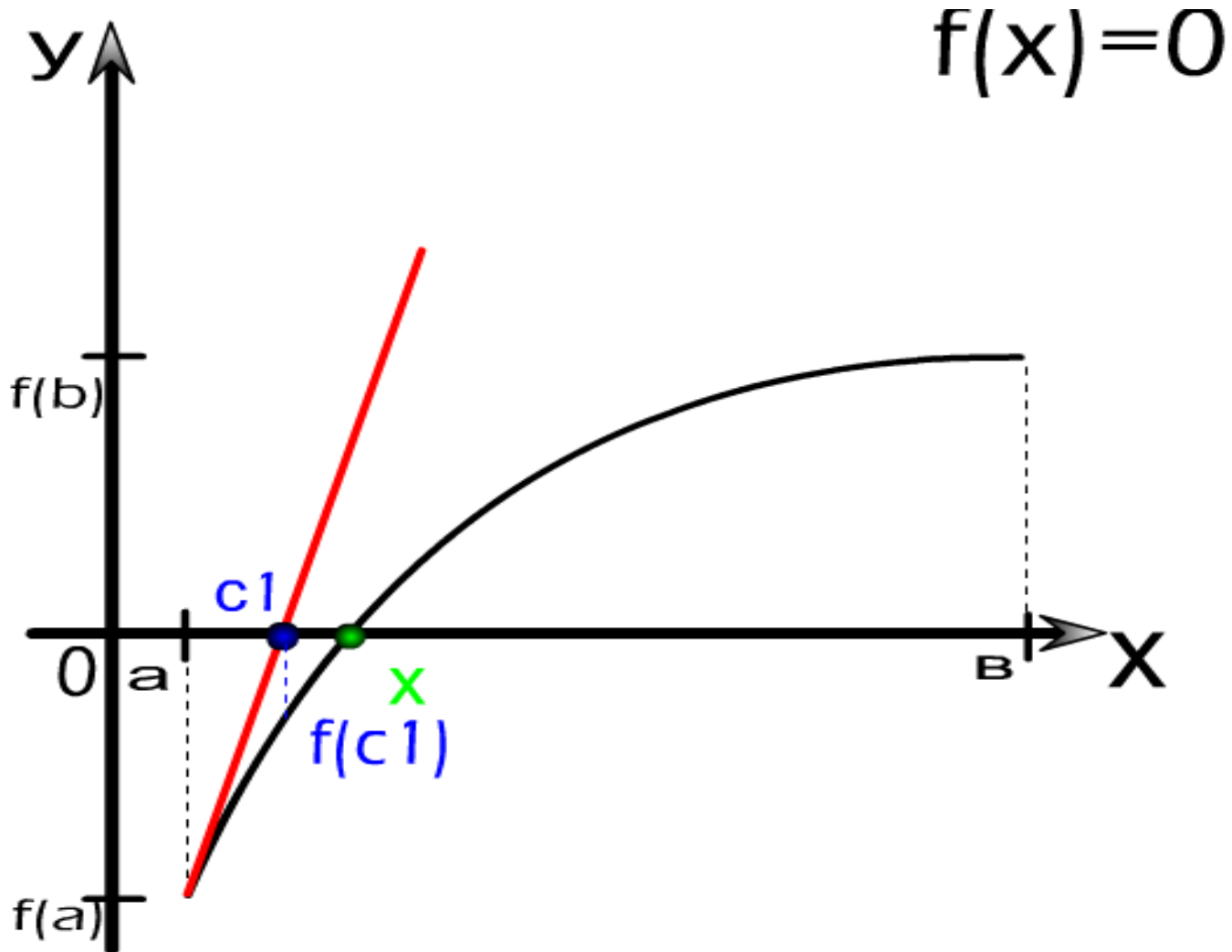


Метод Ньютона (метод касательных)



Постановка задачи

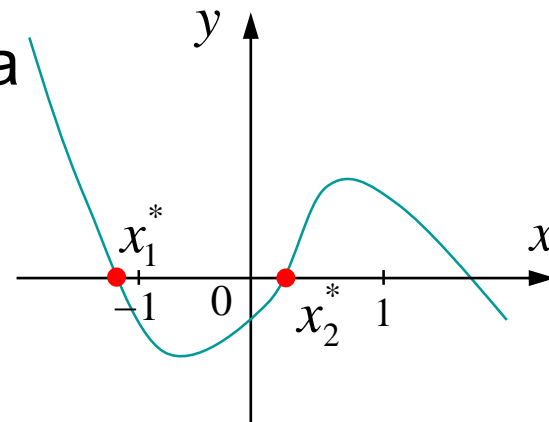
Решить нелинейное уравнение,

$$f(x) = 0$$

Графически **корень** – это координата x точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью Ox

Возможные преобразования

Графическая иллюстрация



$$x^2 = 5 \cos x$$

$$x^2 - 5 \cos x = 0$$

$$f(x) = x^2 - 5 \cos x$$

Исходные данные и результаты

Исходные данные

- Функция $f(x)$
- Точность вычисления $\varepsilon > 0$
- Начальное приближение к корню x_0

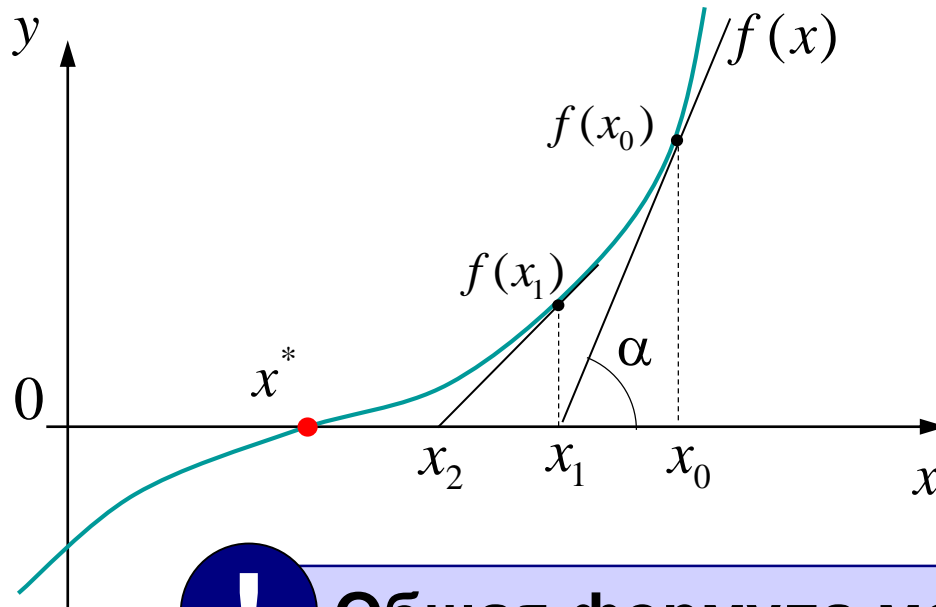
Результаты вычислений

- Корень уравнения x^*
- Количество шагов метода k

Основная идея метода

Метод Ньютона основан на **замене** исходной функции $f(x)$, на каждом шаге поиска **касательной**, проведенной к этой функции. Пересечение касательной с осью X дает очередное приближение к корню.

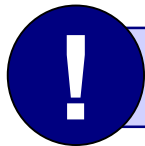
Вывод формулы метода Ньютона из геометрических построений



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

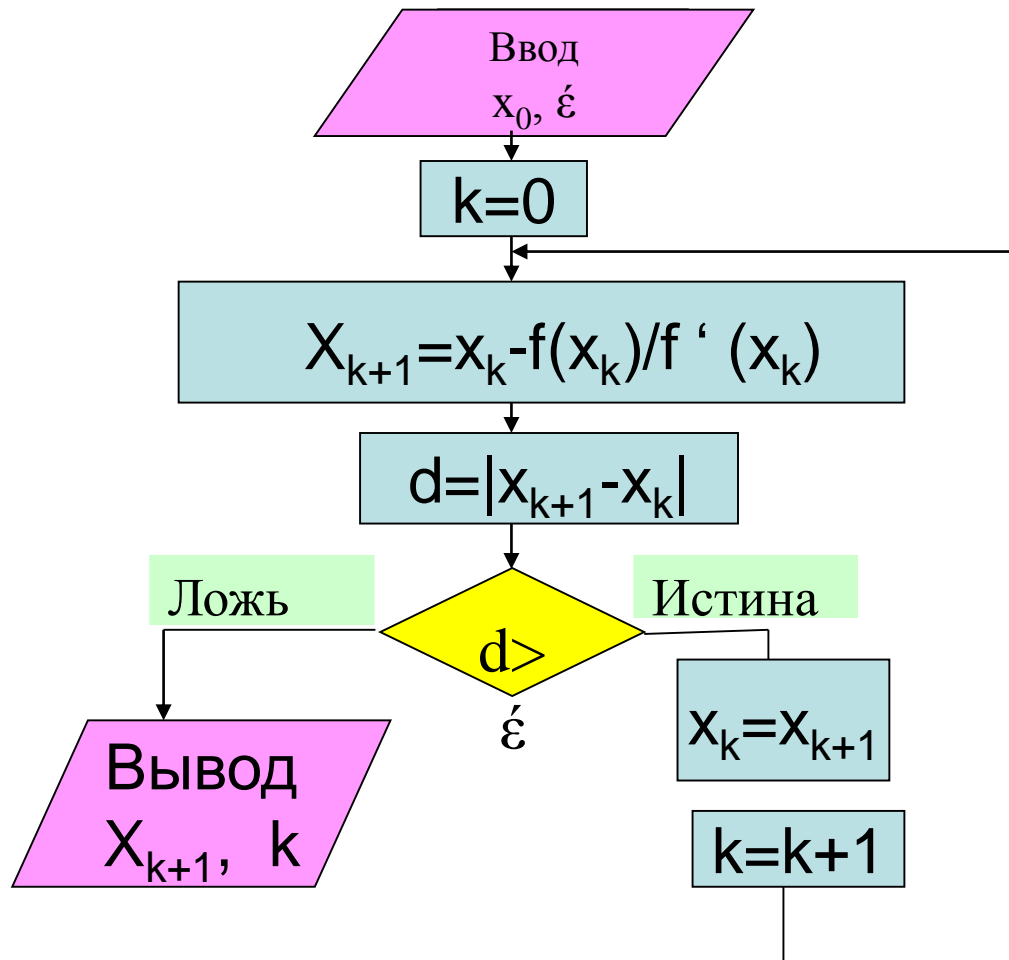
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Общая формула метода Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Блок-схема метода Ньютона



Функция – реализация метода Ньютона

```
//-----  
// Newton решение уравнения методом Ньютона  
// Вход:  x - начальное приближение  
//        eps - точность решения  
// Выход: решение уравнения  $f(x)=3x^3+2x+5=0$   
//        k - число шагов  
//-----  
float Newton ( float x, float eps,  
{ float dx, xk;  
  k = 0;  
  do {  
    xk =x - f(x) / df(x);  
    d = fabs(xk - x);  
    if ( d > eps )  
      { x=xk;  
        k++;  
      }  
  } while (d<eps);  
  return xk;  
}  
  
float f ( float x ) {  
  return 3*x*x*x+2*x+5;  
}  
float df ( float x ) {  
  return 9*x*x + 2;  
}
```

Преимущества и недостатки метода



- быстрая (квадратичная) сходимость – ошибка на k -ом шаге обратно пропорциональна k^2
- не нужно знать интервал, только начальное приближение
- применим для функция нескольких переменных



- нужно уметь вычислять производную (по формуле или численно)
- производная не должна быть равна нулю

$$x^3 = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

- может заикливаться

$$f(x) = x^3 - 2x + 2$$

$$x_0 = 0$$

