IFOSUP
Institut de Formation Supérieure
Ville de Wavre

Mathématiques

appliquées à l'informatique

G. Barmarin

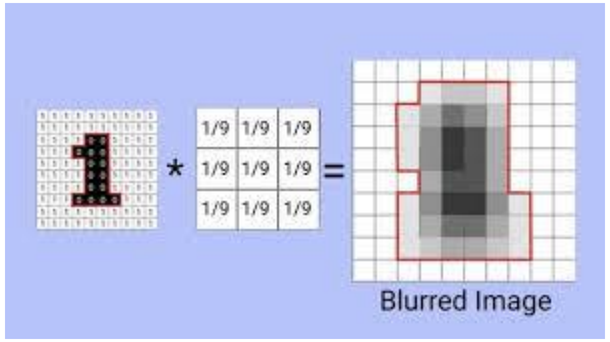
2023-2024

Institut de Formation Supérieure
Ville de Wavre

MATHEMATIQUES APPLIQUEES A L'INFORMATIQUE

Cours théorie 1

Gérard Barmarin



2023-2024

14 cours

Au menu:

- Matrices / traitement numérique d’images
- Graphes / Chemin le plus court / Labyrinthe
- Cryptographie
- Très courte intro à l’AI (réseaux de neurones et classificateurs)

Evaluation:

2 parties:

- Exercices à remettre à la fin du cours (programmes en python)
- + examen écrit à cahier ouvert au dernier cours avec des exercices à réaliser sur base des exercices de l’année

Les matrices et le calcul matriciel (algèbre linéaire)

Matrices - Bases et vocabulaire

Rappels du vocabulaire mathématique

Un ensemble se représente ainsi : E = {e1, e2, e3}

Un n-uplet ou « tuple » se représente ainsi : T = (e1, e2, e3)

La différence est que les éléments sont ordonnés dans le tuple et pas dans l'ensemble :

(e1, e2, e3) != (e3, e2, e1)

{e1, e2, e3} = {e3, e2, e1}

On peut mettre des « , » ou des « ; » entre deux éléments.

Un tuple à 2 éléments est un couple, à 3 éléments un triplet, à 4 un quadruplet, etc.

Un ensemble à 2 éléments est une paire, à 3 éléments un trio, à 4 un quartet, etc.

Matrice – Définition

Une matrice est un tableau de valeurs rangées en n lignes et p colonnes. Les valeurs peuvent être des nombres entiers positifs ou négatifs, des réels, des valeurs booléennes, des nombres complexes ou même des fonctions etc.

C’est donc un tableau rectangulaire c’est-à-dire un tableau à 2 dimensions qu’on place généralement entre de grandes parenthèses.

Quelques exemples de matrices :

$$\underbrace{\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\textit{booléenne}} \quad \underbrace{\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 3.2 & -1.1 & 6.3 \\ -0.5 & 1.75 & 3.14 \\ 0.75 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}}_{\textit{numérique}} \quad \underbrace{\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}}_{\textit{algébrique}} \quad \underbrace{\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\textit{de fonctions}}$$

Le couple (n, p) s’appelle la taille de la matrice, plus précisément, n×p est la taille de la matrice, c’est-à-dire le nombre d’éléments. On les cite toujours dans cet ordre : nombre de lignes puis de colonnes (moyen mnémotechnique : **Lincoln** : lignes –colonnes)

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice 2x3

$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2x2.

On note $M_{n,\,p}$ l’ensemble des matrices de taille n×p.

$A \in M_{n,\,p}$ veut dire que A est une matrice de taille n×p.

On note la matrice « A » ou « $A_{n,\,p}$ » selon le besoin ou non de préciser la taille.

On note les éléments de la matrice « $a_{i,j}$ » avec i de 1 à n et j de 1 à p : $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, … $a_{2,1}$, etc.

$a_{i,j}$ désigne l'élément (ou le coefficient) de la ième ligne et jième colonne.

Ainsi, a_{13} (qui se lit « a, un, trois » et pas « a treize » !) désigne l'élément qui se trouve à l'intersection de la première ligne et de la troisième colonne.

On écrit : $A_{n,\, p} = (a_{i,j})$ ou encore $A=(a_{i,j})$

$$A_{n,p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2p} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Chaque ligne est un tuple. Ligne 3 : ($a_{3,1}$; $a_{3,2}$; … ; $a_{3,p-1}$; $a_{3,p}$).

Chaque colonne est un tuple. Colonne 3 : ($a_{1,3}$; $a_{2,3}$; … ; $a_{n-1,3}$; $a_{n,3}$)

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{colonne } 1 & & \text{colonne } j & & \text{colonne } p \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \quad \text{p colonnes}
\end{array}
$$

$$
A_{n,p} = \begin{pmatrix} a1,1 & \cdots & a1,j & \cdots & a1,p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ai,1 & \cdots & ai,j & \cdots & ai,p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ an,1 & \cdots & an,j & \cdots & an,p \end{pmatrix}
\begin{array}{l} <----- \quad \mathit{ligne}\ 1 \\ \\ <------ \mathit{ligne}\ i \\ \\ <------ \mathit{ligne}\ n \end{array}
$$

n lignes

Représentation en 1 dimension

Graphiquement, on peut aussi représenter les valeurs de la matrice en 1 dimension :

A = ((1, 2), (3, 4), (5, 6))

Notation et valeur des éléments

$a_{1,1} = 1$

$a_{3,2} = 6$

(Ce sera peut-être utile pour vos premier exercices en python)

Interprétation

On peut interpréter le tableau en considérant chaque ligne comme un objet d'un ensemble et chaque colonne comme une caractéristique pour cet objet.

Par exemple : on se dote d'un tableau d'élèves avec leurs notes en math, python, C, SQL.

	Math	Python	C	SQL
Elève 1	12	10	12	15
Elève 2	10	9	0	14
Elève 3	9	13	15	18
Elève 4	13	12	10	8
Elève 5	8	12	14	11

Chaque ligne de ce tableau correspond à un élève, un élément de l'ensemble des élèves.

Ce tableau peut se ranger dans une matrice (5x4) : $A_{5,4}$

$$A_{5,4} = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 12 & 15 \\ 10 & 9 & 0 & 14 \\ 9 & 13 & 15 & 18 \\ 13 & 12 & 10 & 8 \\ 8 & 12 & 14 & 11 \end{pmatrix}$$

Interprétation

Math	Python	C	SQL	
Elève 1	12	10	12	15
Elève 2	10	9	0	14
Elève 3	9	13	15	18
Elève 4	13	12	10	8
Elève 5	8	12	14	11

Ce tableau peut se ranger dans une matrice (5x4) : $A_{5,4}$

$$A_{5,4} = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 12 & 15 \\ 10 & 9 & 0 & 14 \\ 9 & 13 & 15 & 18 \\ 13 & 12 & 10 & 8 \\ 8 & 12 & 14 & 11 \end{pmatrix}$$

Chaque ligne de la matrice, la 3ème par exemple : (9, 13, 15, 18), correspond à un élève avec ses notes. Ici l'élève 3. Chaque colonne de la matrice, la 2ème par exemple : (10, 9, 13, 12, 12), corresponds à la liste des notes pour une matière donnée. Ici le python.

Matrice ligne :

A = (1 8 0 6)

Matrice colonne :

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 8 \\ -1 & \mathbf{1,4} & 0 \\ 1{,}2 & 9 & \mathbf{4,3} \end{pmatrix}$$

Les éléments de la diagonale sont :

(2 ; 1,4 ; 4,3)

Matrice rectangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 8 & 1 \\ -1 & \mathbf{1,4} & 0 & 1{,}2 \\ 1{,}2 & 9 & \mathbf{4,3} & 4 \end{pmatrix}$$

Les éléments de la diagonale sont toujours : (2 ; 1,4 ; 4,3)

Matrice diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-7} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Matrice bande:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure

(ou type *U* pour Upper)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

(ou type *L* pour Lower)

Matrice unité:

$$\mathrm{I_m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice nulle :

$$0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice creuse

Une matrice creuse est une matrice qui ne contient que des 0 et des 1.
Exemple : On a 5 modèles de voiture et pour chaque modèle, des options, de 1 à 4, peuvent être présentes ou pas

	Option 1	Option 2	Option 3	Option 4
Modèle 1	1	1	1	1
Modèle 2	1	1	0	1
Modèle 3	0	1	0	1
Modèle 4	0	1	0	0
Modèle 5	0	1	0	1

La matrice creuse correspondante est :

$$A_{5,4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Identité ou égalité de deux matrices

Deux matrices A et B sont égales si et seulement si elles sont de même taille $n \times p$ et sont telles que
$A_{ij} = B_{ij}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$ c.à.d. si tous les éléments correspondant (donc de mêmes indices) sont égaux.

Deux matrices A et B de tailles différentes ne sont jamais égales !
On ne peut comparer que les matrices de même taille :

Exemple de matrices identiques :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3.2 & -1.1 & 6.3 \\ -0.5 & 1.75 & 3.14 \\ 0.75 & 0 & 2.5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3.2 & -1.1 & 6.3 \\ -0.5 & 1.75 & 3.14 \\ 0.75 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Addition et soustraction de matrices

<u>Définition :</u> Soit A et B deux matrices **de même taille**.
La **somme** de A et B est la matrice, notée $A+B$, dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux tous les coefficients qui ont la même position dans A et B.

$C = A + B$ si $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$

La même chose peut être écrite pour la soustraction en remplaçant les + par des -

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1c} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{\ell 1} & A_{\ell 2} & \cdots & A_{\ell c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1c} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{\ell 1} & B_{\ell 2} & \cdots & B_{\ell c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1c}+B_{1c} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2c}+B_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{\ell 1}+B_{m1} & A_{\ell 2}+B_{\ell 2} & \cdots & A_{\ell c}+B_{\ell c} \end{pmatrix}.$$

Cette définition montre qu'il n'est possible d'additionner/soustraire que des matrices de même taille et que la matrice résultat possède la même taille que les matrices additionnées/soustraites.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$ alors $C = A + B = \begin{pmatrix} 2+5 & 3-3 \\ 4-3 & -1+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

A votre avis?

$A + B\ est - il\ \text{égal à}\ B + A$?

$(A + B) + C\ est - il\ \text{égal à}\ A + (B + C)$?

Et si oui/ si non pourquoi?

Quel est l'élément neutre pour l'addition?

Matrice opposée

Le même type de raisonnement permet d'arriver à la notion de **matrice opposée**.

Ainsi, toute matrice admet une matrice opposée telle que son addition avec celle-ci produise la matrice nulle :

$A - A = 0 = A + (-1.A) = A + (-A) = 0$ car $a_{i,j} + (-a_{i,j}) = 0$

$-A$ est donc la matrice opposée de A.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 1 & 0.5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2.5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5 & -1 & -0.5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2.5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Produit d'une matrice par un scalaire

Par scalaire, on entend toute grandeur non vectorielle : entier, réel, nombre complexe ou toute fonction qui conduit à un résultat scalaire). Par facilité, nous traiterons du cas d’un nombre réel.

<u>Définition :</u> Soit A une matrice et k un nombre réel.
Le **produit de A par le réel k** est la matrice, notée kA, dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k :

$B = kA$ si $b_{i,j} = k.a_{i,j}$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{\ell 1} & \lambda A_{\ell 2} & \cdots & \lambda A_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 5{,}5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ alors $B = 2A = \begin{pmatrix} 2 \times (-2) & 2 \times 5{,}5 \\ 2 \times 2 & 2 \times (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$

Propriétés :

Soit A et B deux matrices carrées de même taille et deux réels k et k'.

a) $(k+k')A \ = \ kA + k'A$ distributivité de l'addition de réels sur la multiplication avec une matrice

$b)$ $k(A+B) = \ kA + kB$ distributivité de la multiplication d'un réel sur l'addition de matrices

$c)$ $(kk')A = k(k'A)$

d) $kA = Ak$ commutativité de la multiplication d'un réel par une matrice

Produit de deux matrices

Le produit de deux matrices est un peu surprenant et n'est probablement pas ce que votre intuition vous conduirait à penser. On pourrait imaginer que c'est la multiplication de chaque élément de la première matrice par l'élément équivalent de la seconde… hé bien NON, la définition en est bien différente !!!!

Le produit de deux matrices donne une nouvelle matrice qui compte autant de lignes que la première et autant de colonnes que la seconde, telle que chaque élément est calculé comme suit :

$R_{i,j} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{ik}B_{kj} + \ldots + A_{iq}B_{qi}$

Pour être un peu plus clair, chaque élément i,j de la matrice résultat est calculé en faisant la somme des produits de chacun des éléments de la ligne i de la première matrice par l'élément correspondant de la colonne j. On effectue le produit « Ligne par Colonnes »

De manière générale, on peut représenter cette définition par la formule générale :

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & -2 & 1 \\ \mathbf{2} & -4 & 1 & 3 \\ -\mathbf{1} & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-5} & -2 & 5 & -1 \\ 1 & -8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

En effet :

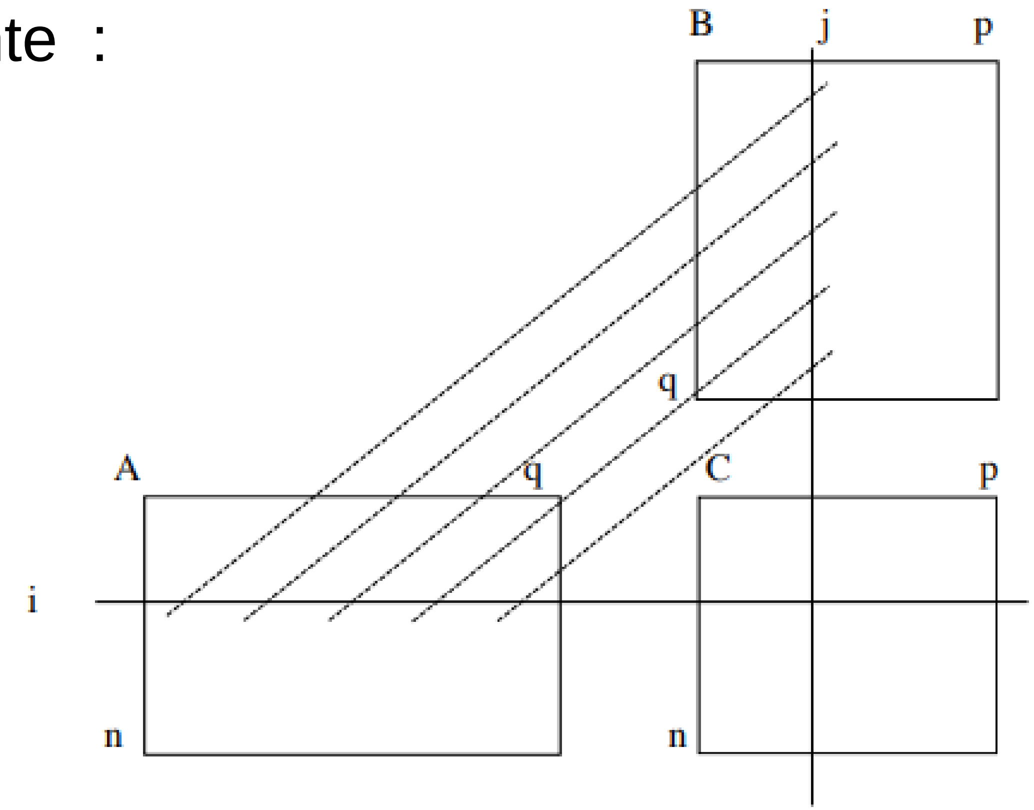
$$r_{11} = (-2)\cdot 3 + 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) = -5$$
$$r_{12} = (-2)\cdot 0 + 1\cdot(-4) + 1\cdot 2 = -2$$
$$r_{13} = (-2)\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 5$$
$$r_{14} = (-2)\cdot 1 + 1\cdot 3 + 1\cdot(-2) = -1$$

$$r_{21} = (-1)\cdot 3 + 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 1$$
$$r_{22} = (-1)\cdot 0 + 3\cdot(-4) + 2\cdot 2 = -8$$
$$r_{23} = (-1)\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 2\cdot 0 = 5$$
$$r_{24} = (-1)\cdot 1 + 3\cdot 3 + 2\cdot(-2) = 4$$

On peut visualiser cela par la figure suivante :

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & -2 & 1 \\ \mathbf{2} & -4 & 1 & 3 \\ \mathbf{-1} & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{-5}} & -2 & 5 & -1 \\ 1 & -8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



$$r_{11} = (-2)\cdot 3 + 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) = -5$$
$$r_{12} = (-2)\cdot 0 + 1\cdot(-4) + 1\cdot 2 = -2$$
$$r_{13} = (-2)\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 5$$
$$r_{14} = (-2)\cdot 1 + 1\cdot 3 + 1\cdot(-2) = -1$$

$$r_{21} = (-1)\cdot 3 + 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 1$$
$$r_{22} = (-1)\cdot 0 + 3\cdot(-4) + 2\cdot 2 = -8$$
$$r_{23} = (-1)\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 2\cdot 0 = 5$$
$$r_{24} = (-1)\cdot 1 + 3\cdot 3 + 2\cdot(-2) = 4$$

A votre avis?

$A \text{ x } B \; est - il \; égal \text{ à } B \text{ x } A$?

Et si oui/ si non pourquoi?

Quel est l’élément neutre pour la multiplication?

Puisque $A_{n,m} \times B_{m,k} = C_{n,k}$

on voit immédiatement que pour que le produit A × B soit défini (ou possible) il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Sinon, tout simplement la multiplication est impossible.

La multiplication de deux matrices n'est pas commutative (contrairement à la multiplication de deux nombres réels !)

A x B != B x A

Même si le nombre de colonne de l'une est égale au nombre de colonne de l'autre et réciproquement, ce qui permet de calculer les deux produits A x B et B x A (dans le cas contraire, la multiplication n'est simplement pas possible), A x B donnera en général un résultat différent de B x A !

Exemple :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 5 \\ 1 & -8 & 5 \\ 7 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

Mais si on fait la multiplication dans l'autre sens, on obtient un résultat différent :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 7 & 1 \\ 4 & -12 & -5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Elément neutre pour la multiplication

<u>Propriété :</u> Pour toute matrice carrée A de taille n, on a : $A \times I_n = I_n \times A = A$

Exemple :

$Si\ \ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ alors :

$$A \times I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + (-2) \times 0 & 3 \times 0 + (-2) \times 1 \\ 1 \times 1 + 4 \times 0 & 1 \times 0 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Tout comme il existe un neutre pour la multiplication de deux réels (rappel : 1 x 4.5 = 4.5 donc 1 est l'élément neutre pour la multiplication des réels car il laisse inchangée la valeur lors de la multiplication !), **le neutre pour la multiplication est la matrice identité *I***

A votre avis?

$Si\ A\ et\ B\ ne\ sont\ pas\ des\ matrices\ nulles,$
$le\ résultat\ de\ A$ x $B\ peut{-}il$ être la matrice $nulle$?

Si A × C = B × C alors A = B ?

Propriétés curieuses de la multiplication des matrices

Contrairement à ce qui se passe en algèbre pour les nombres, ou le résultat du produit de deux nombres non nuls ne peut être nul, le produit de deux matrices non nulles peut conduire à une matrice nulle !

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si A × C = B × C alors A = B n’est pas forcément vrai!

L’exemple suivant montre que AxC = BxC et A != B

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cas particulier : produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

<u>Définition :</u> Soit A une matrice carrée de taille n et B une matrice colonne à n lignes telles que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le **produit de la matrice carrée A par la matrice colonne B** est la matrice colonne à n lignes, notée $A \times B$ et égale à :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_1 + a_{12} \times b_2 + \cdots + a_{1n} \times b_n \\ a_{21} \times b_1 + a_{22} \times b_2 + \cdots + a_{2n} \times b_n \\ \vdots \\ a_{n1} \times b_1 + a_{n2} \times b_2 + \cdots + a_{nn} \times b_n \end{pmatrix}$$

Cela nous servira pour la résolution des systèmes d’équations!

Somme des lignes : produit d'une matrice par un vecteur unité en colonne

Quand on multiplie une matrice par un « vecteur unité » en colonne on obtient une matrice colonne où chaque élément est la somme des éléments lignes de la matrice.

$A_{n,\,q} \times N_{q,\,1} = L_{n,\,1}$ avec L contenant la somme de chaque ligne de A

Somme des colonnes : produit d'une matrice par un vecteur unité en ligne

Quand on multiplie un « vecteur unité » en ligne par une matrice, on obtient la somme des colonnes da la matrice dans une matrice en ligne.

$N_{1,\,q} \times A_{q,\,p} = C_{1,\,p}$ avec C contenant la somme de chaque colonne de A.

Propriétés intuitives de la multiplication des matrices

Propriétés : Soit A, B et C trois matrices carrées de même taille et un réel k.

a) Associativité de la multiplication:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$$

b) Distributivité de la multiplication sur l'addition:

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

et distributivité de l'addition sur la multiplication

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

c) associativité de la multiplication d'un réel et de la multiplication de 2 matrices :

$$(kA)B = A(kB) = k(A \times B)$$

d) élément nul :

$$A \times O = O \times A = O$$

Transposition d'une matrice

La transposée de $A_{n,p} = (a_{i,j})$ c'est la matrice $B_{p,n} = (a_{j,i})$

On la note ${}^tA = {}^t(a_{i,j}) = (a_{j,i})$

$A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ transposée : ${}^tA_{\underline{2},3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$B_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ transposée : ${}^tB_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Transposer une matrice, c'est la faire pivoter à 90° de telle sorte que les lignes deviennent les colonnes et réciproquement. On remplace donc les lignes de la matrice par ses colonnes et ses colonnes par ses lignes. La première ligne devient la première colonne, la seconde ligne la seconde colonne et ainsi de suite jusqu'à la dernière.

Cela revient à permuter les indices de tous les éléments de la matrice :

$a_{j,i}$ devient $a_{i,j}$

La transposée de $A_{n,\,p} = (a_{i,j})$ est donc la matrice $B_{p,n} = (a_{j,i})$

On la note $A^T = (a_{i,j})^T = (a_{j,i})$ ou encore parfois Ã (A « tilde »)

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{3.2} & \mathbf{-1.1} & \mathbf{6.3} \\ -0.5 & 1.75 & 3.14 \\ 0.75 & 0 & 2.5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} \mathbf{3.2} & -0.5 & 0.75 \\ \mathbf{-1.1} & 1.75 & 0 \\ \mathbf{6.3} & 3.14 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Reprenons le tableau du résultat des élèves dans différent cours :

	Math	Python	C	SQL
Elève 1	12	10	12	15
Elève 2	10	9	0	14
Elève 3	9	13	15	18
Elève 4	13	12	10	8
Elève 5	8	12	14	11

si on le transpose, on obtient :

	Elève 1	Elève 2	Elève 3	Elève 4	Elève 5
Math	12	10	9	13	8
Python	10	9	13	12	12
C	9	0	15	10	14
SQL	13	14	18	8	11

Ce tableau peut se ranger dans une matrice (4x5)

$$ {}^{t}A_{5,4} = A_{4,5} = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 9 & 13 & 8 \\ 10 & 9 & 13 & 12 & 12 \\ 9 & 0 & 15 & 10 & 14 \\ 13 & 14 & 18 & 8 & 11 \end{pmatrix} $$

Chaque ligne est désormais une matière avec sa liste de notes

Notons plusieurs choses :

- Lors de la transposition, la diagonale reste inchangée puisque l’indice de la ligne est égal à l’indice de la colonne.
- La transposition d’une matrice implique un changement de son orientation :
  Une matrice ligne (vecteur ligne) devient une matrice colonne (vecteur colonne)
- Une matrice horizontale (+de Col que de Lgn) devient verticale (+de Lgn que de Col)
- Une matrice triangulaire supérieure devient triangulaire inférieure et vice-versa

Matrices symétriques

Certaines matrices restent inchangées après leur transposition, on les appelle **matrices symétriques** (cette appellation est évidente si vous regardez les éléments de la matrice, ils sont symétriques par rapport à la diagonale) et on peut écrire :

$a_{j,i} = a_{i,j}$

Exemple :

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

ou bien celle-ci :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ -1 & 32 & 7 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ -1 & 32 & 7 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercices à la main...

Exercice 1.0:

Voici deux matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0{,}1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculez

la somme de ces deux matrices A + B

La matrice opposée de A

Le produit A x B et B x A

Le produit de A par un « vecteur unité » en colonne. Qu'obtenez-vous?

Le produit de A par un « vecteur unité » en ligne. Qu'obtenez-vous?

La transposée de A, celle de B et celle du produit A x B

Le produit de $B^T . A^T$ Que constatez-vous?

Solution Exercice 1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0{,}1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La somme de ces deux matrices A + B

N'EXISTE PAS!

Pour que 2 matrices puissent être
Additionnées, elles doivent avoir
La même taille or A est 3 x 4 et B 4 x 4 !

La matrice opposée de A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & -0{,}1 & -1 & -0 \\ -1 & -3 & -1{,}2 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Solution Exercice 1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0,1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit A x B sera 3 x 4 car
A est 3 x 4 et B 4 x 4

Le produit B x A est impossible!
car B est 4x4 et A est 3x4

$$A\ x\ B = \begin{pmatrix} 22 & 30 & 9 & 24 \\ 8,1 & 0,9 & 3 & 4,4 \\ 16,3 & 30,7 & 8 & 25,6 \end{pmatrix}$$

Solution Exercice 1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0,1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit S1 de A par un « vecteur unité » en colonne.

Le produit S2 de A par un « vecteur unité » en ligne.

$$S1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0,1 \\ 5,7 \end{pmatrix}$$

= matrice colonne de la somme des lignes de A

$$S2 = (2. \;\; 5.1 \;\; 3.2 \;\; 3.5)$$

Une matrice ligne de la somme des colonnes de A

Solution Exercice 1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0,1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1,2 & 0,5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La transposée de A, celle de B et celle du produit A x B

$$A_{3,4} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0,1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1,2 & 0,5 \end{pmatrix} \qquad \text{transposée : } {}^tA_{4,3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0,1 & 3 \\ 1 & 1 & 1,2 \\ 3 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

La transposée de B :

$$B_{4,4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{transposée : } {}^tB_{4,4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & 3 \\ 1 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Rmq : On constate que la diagonale reste inchangée.

Solution Exercice 1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0{,}1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit de $B^T . A^T = (A . B)^T$


Exercices en Python

Pourquoi des exercices en Python?

Classement des langages pour le mois de février 2023

Feb 2023	Feb 2022	Programming Language	Ratings	Change
1	**1**	**Python**	**15.49%**	**+0.16%**
2	2	C	15.39%	+1.31%
3	4	C++	13.94%	+5.93%
4	3	Java	13.21%	+1.07%
5	5	C#	6.38%	+1.01%
6	6	Visual Basic	4.14%	-1.09%
7	7	JavaScript	2.52%	+0.70%
8	10	SQL	2.12%	+0.58%
9	9	Assembly language	1.38%	-0.21%
10	8	PHP	1.29%	-0.49%

Exercices en Python (voir syllabus d'exercices sur Teams)

Vous réalisez les programmes comme si Python n'implémentait pas les fonctions demandées !
N'utilisez pas chatGPT ou autre pour ce genre de programme au pire utilisez-le pour corriger vos fautes ou commenter votre code

Exercice 1

En Python, créer un programme qui génère une matrice aléatoire dont les éléments sont des entiers et un autre où ce sont des réels. La taille de la matrice est entrée au clavier. Le résultat est affiché proprement à l'écran

Exercice 2

En Python, créer un programme qui génère une matrice unité, une matrice diagonale, une matrice triangulaire, une matrice creuse, une matrice nulle. La taille de la matrice est entrée au clavier

Exercice 3

En Python, créer un programme qui additionne/soustrait deux matrices après avoir vérifié que l'addition est possible. Les matrices sont entrées au clavier élément par élément.

Exercice 4

En Python, créer un programme qui crée une matrice aléatoire, qui calcule ensuite son opposée, affiche les deux matrices et qui vérifie que leur somme fait bien … (à compléter par vous-même)

Exercice 5

En Python, créer un programme qui exécute le produit d'une matrice aléatoire par un scalaire entré au clavier. La matrice de départ, le scalaire et le produit sont affichés à l'écran.

Exercice 6

En Python, créer un programme qui exécute le produit de deux matrices. Les matrices sont entrées au clavier élément par élément. Leur compatibilité est vérifiée avant d’introduire tous les éléments. Les matrices de départ et le produit sont affichés à l’écran.

Exercice 7

En Python, créer un programme qui calcule et affiche la somme des lignes d’une matrice aléatoire de deux manières différentes.

Exercice 8

Idem pour la somme des colonnes

Exercice 9

En Python, créer un programme qui calcule et affiche la $n^{ème}$ puissance d’une matrice carrée aléatoire de manière « économique »

Exercice 10

En Python, créer un programme qui exécute le produit de Hadamard de deux matrices. Les matrices sont entrées au clavier élément par élément. Leur compatibilité est vérifiée avant d’introduire tous les éléments. Les matrices de départ et le produit sont affichés à l’écran.

Exercice 11

En Python, créer un programme qui calcule et affiche la transposée d’une matrice aléatoire. La matrice de départ et sa transposée sont affichées à l’écran.

Math en python

Introduction

Scipy est un écosystème de librairies Python centré sur le calcul numérique proposant un environnement de calcul et d'analyse pour les mathématiques, les sciences et l'ingénierie.
Ces librairies sont coordonnées, en ce sens qu'elles sont à utiliser ensemble, car elles se basent sur des structures de données communes. Par exemple, la librairie NumPy définit des tableaux multidimensionnels qui peuvent être utilisés avec la librairie Matplotlib pour dessiner des graphes de fonction. L'écosystème Scipy se compose de plusieurs librairies coordonnées dont les six principales sont NumPy, SciPy, Matplotlib, SymPy, pandas et IPython.

(a) NumPy. (b) SciPy. (c) Matplotlib.

(d) SymPy. (e) pandas. (f) IPython.

Installez Python sous Windows:

http://tvaira.free.fr/dev/python/python-images.html

Testez que vous avez bien téléchargé les bonnes librairies

Exécutez le programme **test-biblio.py** qui se trouve sur Teams pour vérifier que vous disposez bien de toutes les bibliothèques nécessaires