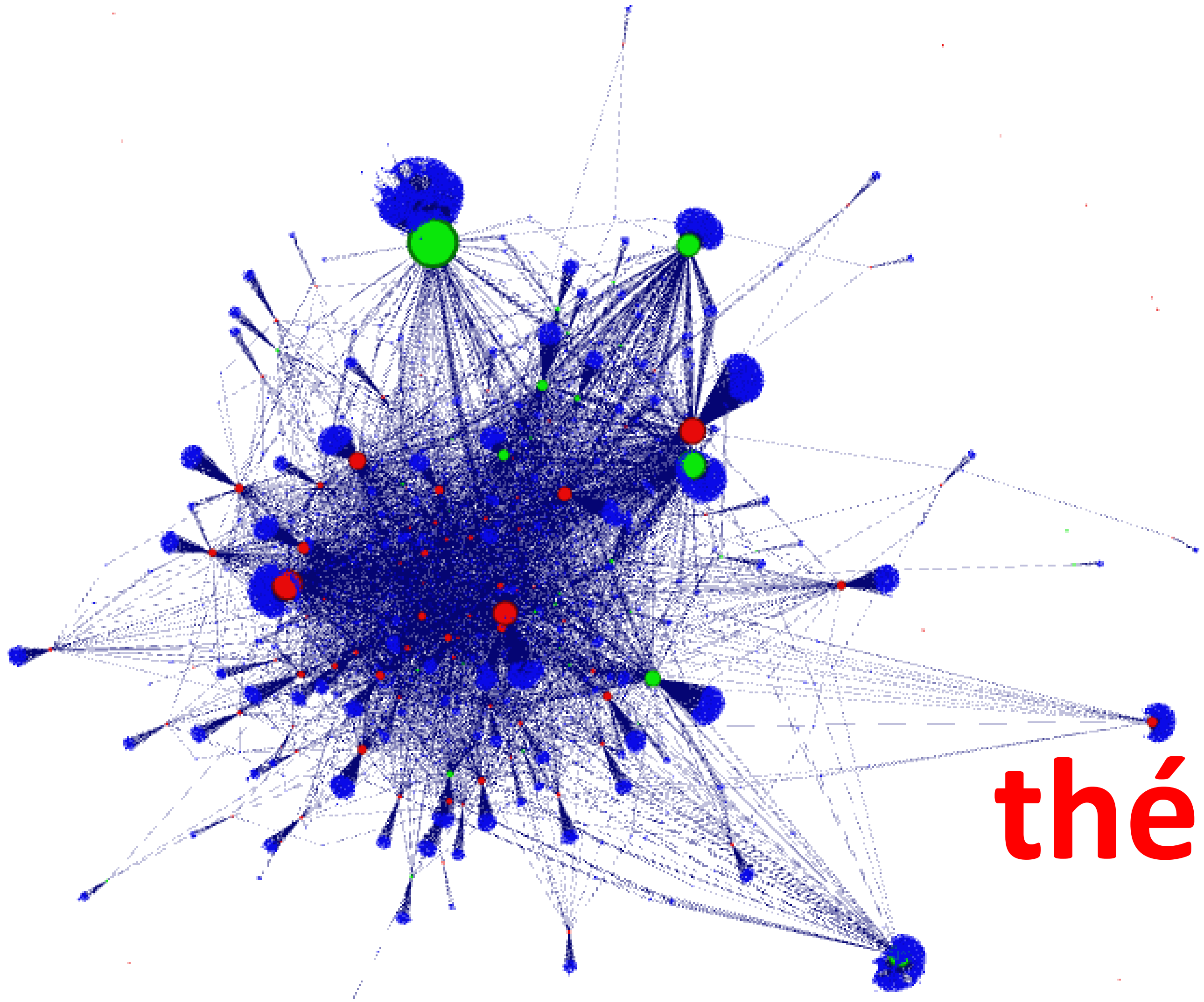
IFOSUP
Institut de Formation Supérieure
Ville de Wavre

Mathématiques

appliquées à l'informatique

G. Barmarin

2023-2024



Initiation à la théorie des graphes 1

Un graphe = des sommets et des arrêtes

Formellement, un graphe est un ensemble d'éléments nommés sommets et de relations entre ces éléments appelées arêtes.

On peut voir un graphe comme un ensemble de points et de lignes reliant certains de ces points. Les points sont appelés sommets du graphe, les lignes arêtes du graphe.

Graphe non orienté (non ordonné)

un graphe non orienté G est la donnée d'un couple G = (S, A) tel que :

- S est un ensemble fini de sommets,

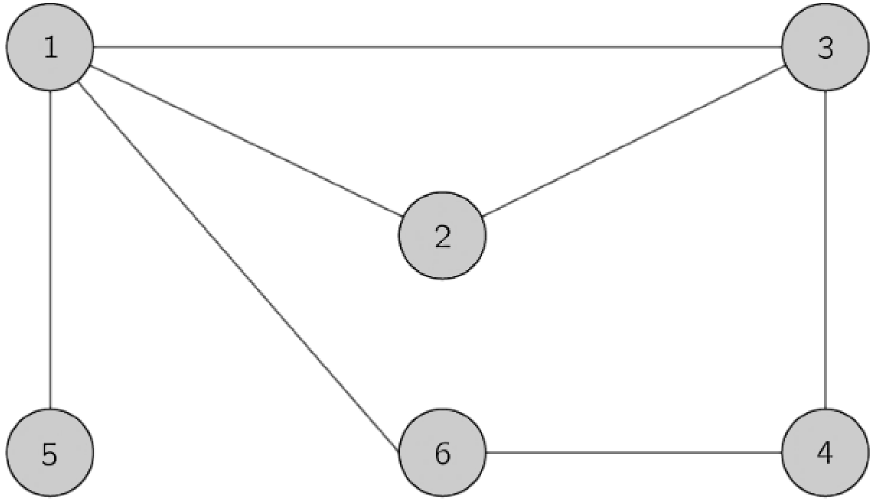
- A est un ensemble de couples non ordonnés de sommets {si , sj} ∈ S^2 .

Une paire {si , sj} est appelée une arête, et est représentée graphiquement par si - sj .

On dit que les sommets s_i et s_j sont **adjacents** s'ils sont joints par une arête.
Les sommets peuvent être reliés par plusieurs arêtes.
Le **degré** d'un sommet désigne le nombre d'arêtes dont ce sommet est l'origine.

La somme des degrés des sommets d'un graphe non orienté est égale au double du nombre d'arêtes que comporte ce graphe.

Soit un graphe:



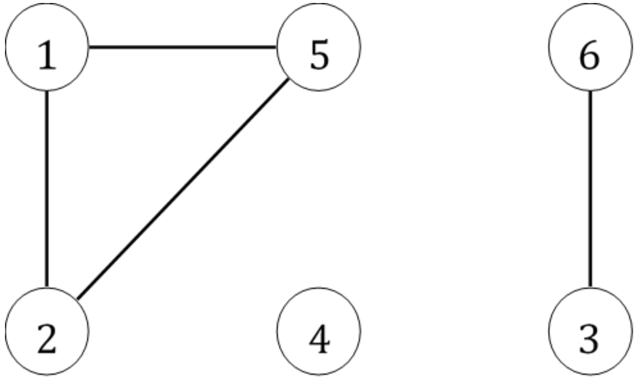
Sommet	1	2	3	4	5	6	
Degré	4	2	3	2	1	2	Somme :14

Le nombre d'arêtes de ce graphe est 14 / 2 = 7.

On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de ses sommets, c’est à dire card(S), le nombre d’éléments dans l’ensemble S.

On appelle **taille** d'un graphe le nombre de ses arêtes, c’est à dire card(A), le nombre d’éléments dans l’ensemble A.

Exemple :



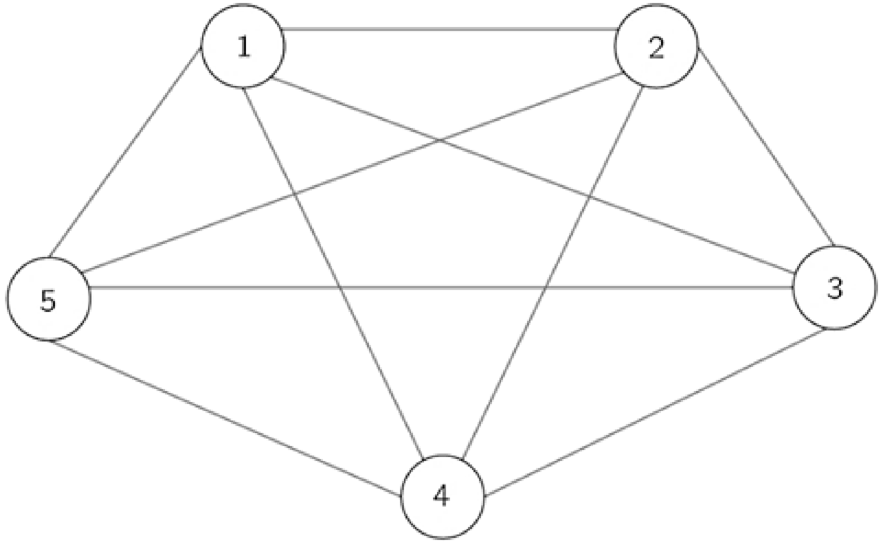
Ce dessin représente le graphe non orienté G = (S, A)
avec S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
et A = {{1, 2}, {1, 5}, {5, 2}, {3, 6}}.

Il est d’**ordre 6** (il possède 6 sommets) et
de **taille 4** (il possède 4 arêtes)

Les sommets 2 et 5 sont adjacents (ils sont reliés),
mais les sommets 4 et 6 ne le sont pas
et Adj(5) = 2 car il y a 2 arêtes qui sont connectées au sommet 5

Un graphe est **complet** si tous ses sommets (distincts) sont adjacents deux à deux.

Exemple :

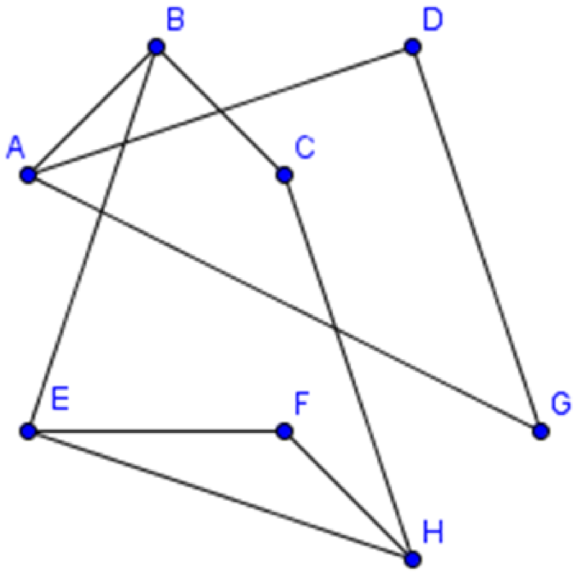


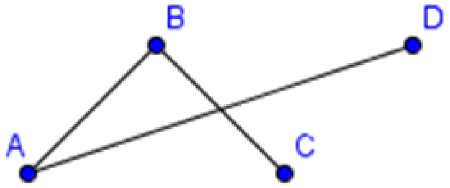
Une **boucle** est une arête reliant un sommet à lui-même

Un graphe non-orienté est dit **simple** s'il ne comporte pas de boucle, et s'il ne comporte jamais plus d'une arête entre deux sommets.
Un graphe non orienté qui n'est pas simple est un **multi-graphe**.

Un **sous-graphe** est une partie d'un graphe : il ne comporte que certains sommets du graphe initial ainsi que les arêtes reliant ces sommets.

Exemple :



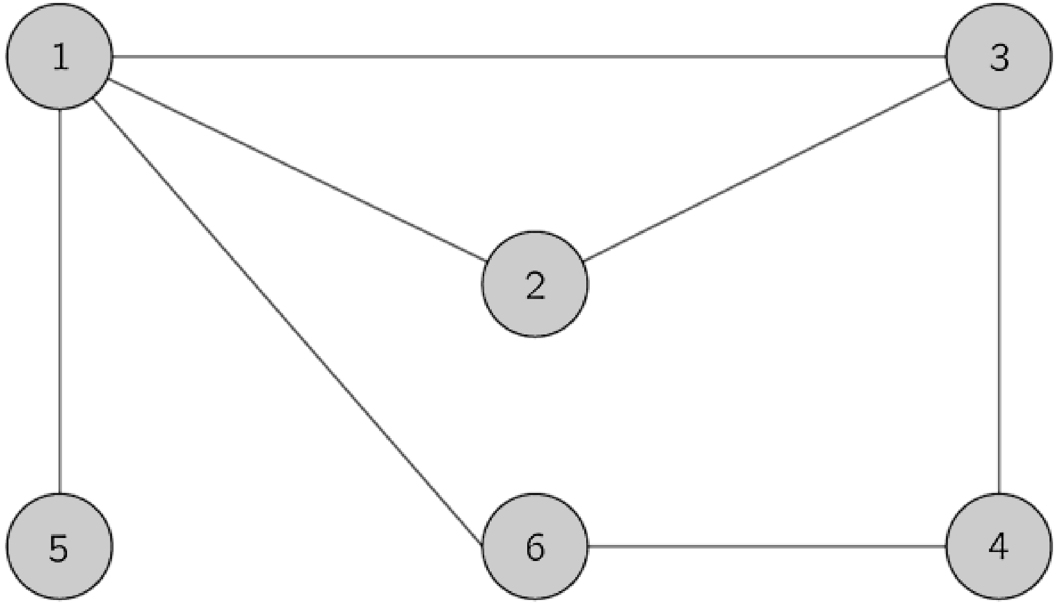


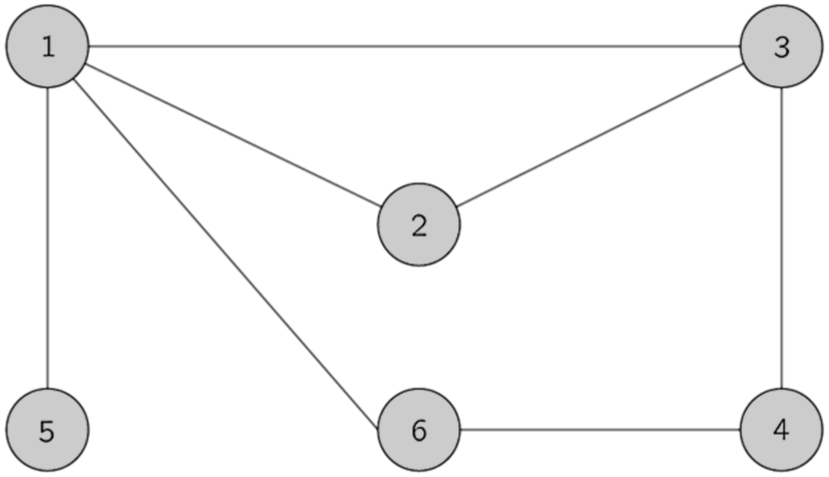
Les Chaînes

Une chaîne est une liste ordonnée de sommets où chaque sommet est adjacent au précédent et au suivant.

Exemple :

Dans le graphe suivant, Le chemin 1 − 2 − 3 − 4 est une chaîne reliant le sommet 1 à 4.
Par contre, 1 − 5 − 6 − 4 n'est pas une chaîne.





Longueur d'une chaîne

La longueur d'une chaîne désigne le nombre de ses arêtes.
Dans l’exemple précédent, la chaîne 1 − 2 − 3 − 4 est une chaîne de longueur 3.

Distance entre deux sommets

La distance entre deux sommets est égale à la longueur de la chaîne la plus courte reliant ces deux sommets.

Dans l’exemple précédent, la distance entre les sommets 1 et 4 est 2.

Diamètre d'un graphe

Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.
Le diamètre du graphe de l’exemple précédent est la distance entre les sommets 6 et 4, c'est-à-dire 4.

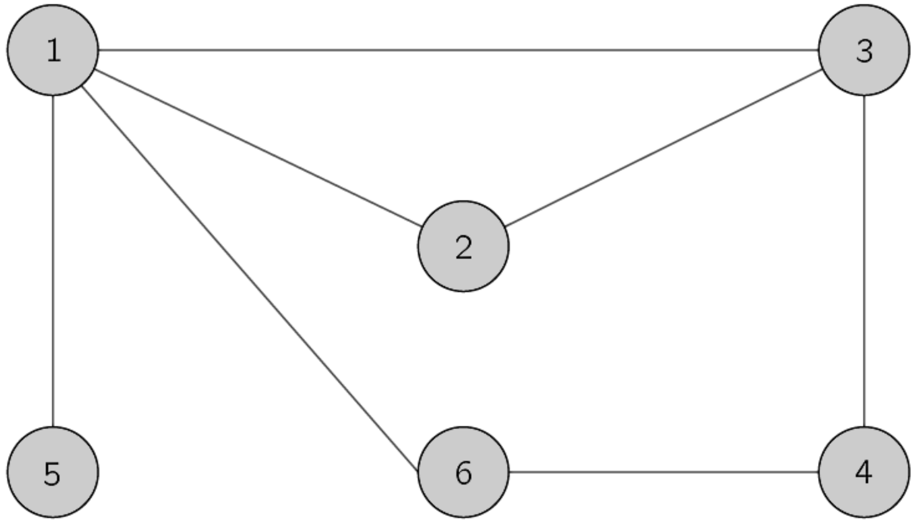
Chaîne fermée

Une chaîne fermée est une chaîne dont le premier sommet est identique au dernier sommet.
Dans l’exemple précédent, la chaîne 1 − 2 − 3 − 1 est fermée.

Cycle

Un cycle est une chaîne fermée dont toutes les arêtes sont distinctes.

Dans le graphe ci-dessous :



La chaîne 1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 1 est un cycle.

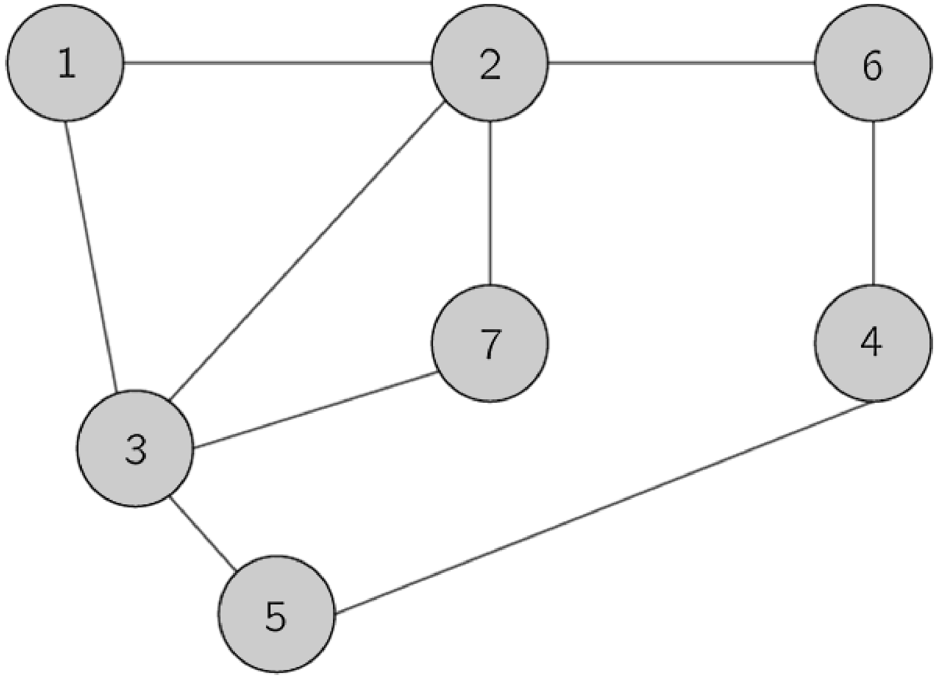
Chaîne eulérienne

Une chaîne eulérienne est une chaîne formée de toutes les arêtes d'un graphe, chacune des arêtes n'apparaissant qu'une seule fois.

Dans l’exemple précédent, 5 – 1 – 6 – 4 – 3 – 2 – 1 – 3 est une chaîne eulérienne.

Cycle eulérien

Un cycle eulérien est un cycle formé de toutes les arêtes d'un graphe, chacune des arêtes n'apparaissant qu'une seule fois.

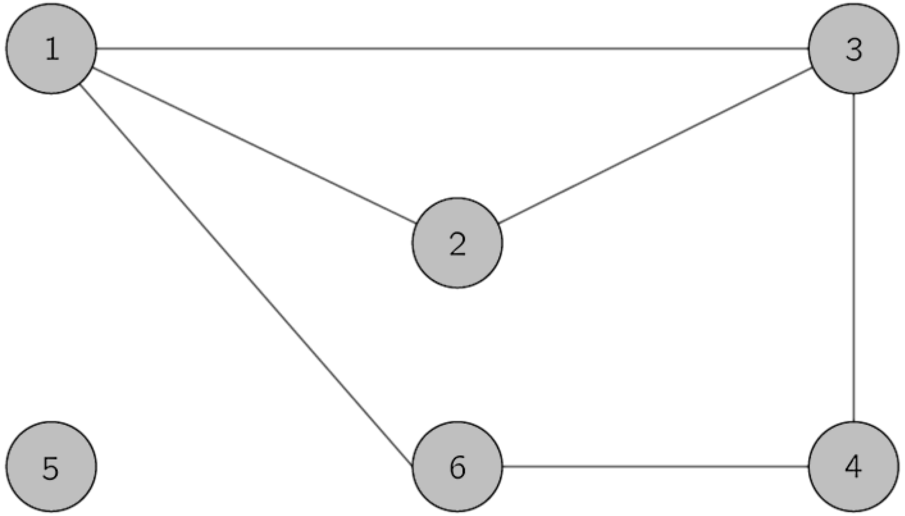


Dans le graphe ci-dessus, 1 – 3 – 2 – 7 – 3 – 5 – 4 – 6 – 2 – 1 est un cycle eulérien

Graphe connexe

Un graphe est dit connexe si pour tout couple de sommets, il existe une chaîne reliant ces deux sommets.
Le graphe ci-dessous n'est pas connexe : le sommet 5 est isolé.

Un graphe connexe est un graphe en un seul morceau…



En un seul morceau

chaîne formée de toutes les arêtes d'un graphe, chacune des arêtes n'apparaissant qu'une seule fois

Le degré d'un sommet désigne le nombre d'arêtes dont ce sommet est l'origine

Théorème d'Euler

- Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si il ne possède aucun, ou exactement deux sommets de degré impair.
- Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si il ne possède que des sommets de degré pair.

Un cycle eulérien est un cycle formé de toutes les arêtes d'un graphe, chacune des arêtes n'apparaissant qu'une seule fois.

Si un graphe connexe possède exactement deux sommets de degré impair notés A et B, alors toute chaîne eulérienne de ce graphe part de A et se termine en B ou part de B et se termine en A.

Il existe des algorithmes permettant de déterminer une chaîne eulérienne (ou un cycle eulérien selon les cas).

Matrice d’adjacence (ou matrice associée) d’un graphe non orienté

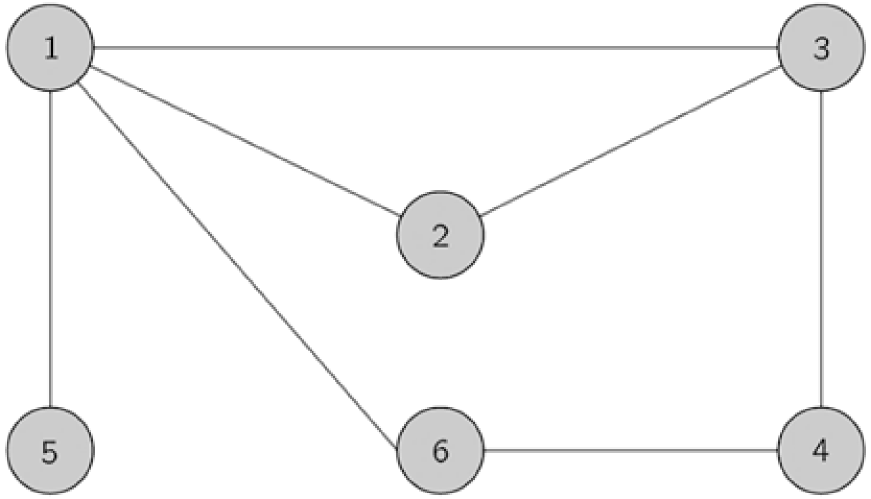
Soit G = (V,E) un graphe non orienté, V = {v1, . . . , vn}.

A(G) : matrice d’adjacence de G, ∀1 ≤ i, j ≤ n

[A(G)]i,j = # arêtes {vi , vj} de E.

La matrice d'adjacence d’un graphe d'ordre *n* est une matrice à *n* lignes et *n* colonnes (*n x n*), où le terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes partant du sommet *i* pour aller jusqu'au sommet *j*.

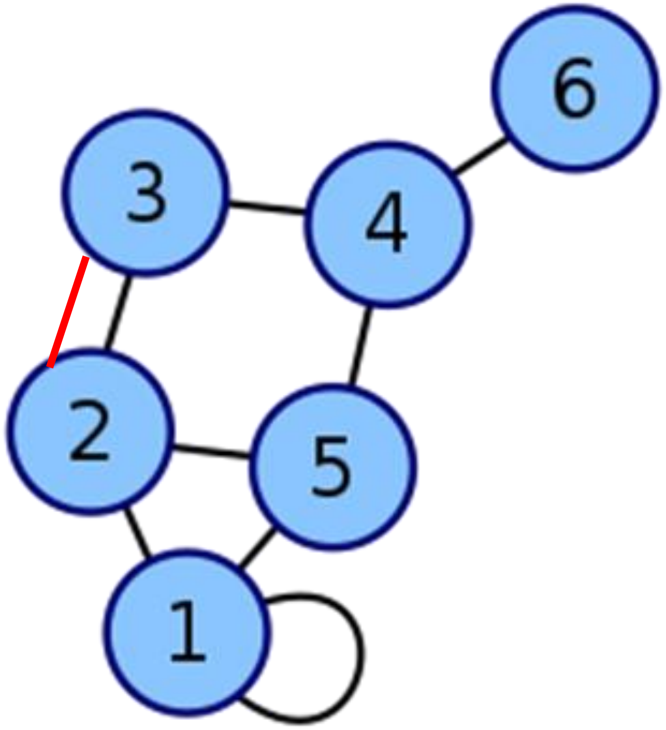
Prenons ce graphe :



La matrice d’adjacence associée est:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un autre exemple et sa matrice d’adjacence:



$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccccc} & & & & \text{Destination} & \end{array} \\
\begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{Origine} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cancel{1}\,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cancel{1}\,2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Attention

Il peut y avoir autre chose que des 1 si le graphe n’est pas simple (voir en rouge)

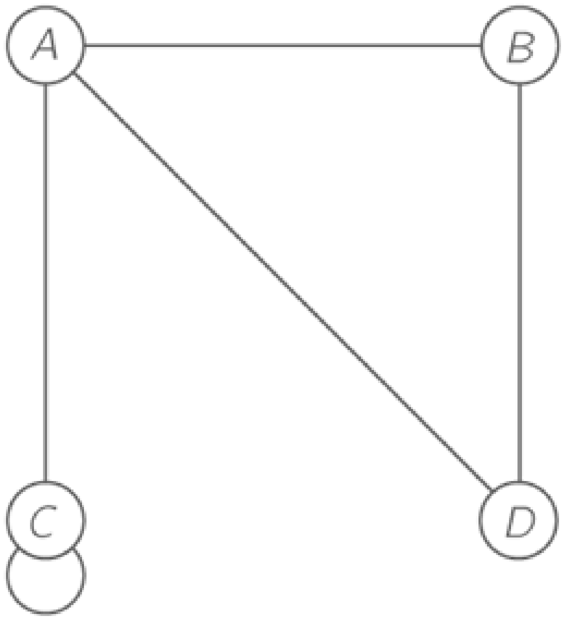
On peut remarquer que cette matrice est symétrique dans le cas d’un graphe non-orienté.

On peut également définir la **matrice d'adjacence d'un graphe orienté**. Cette fois, le coefficient $a_{i,j}$ désigne le nombre d'arcs d'origine i et d'extrémité j.

Unicité

Une fois que l'on fixe l'ordre des n sommets (il y a n! choix possibles pour cet ordre), il existe une matrice d'adjacence unique pour chaque graphe.

Celle-ci n'est la matrice d'adjacence d'aucun autre graphe.



Nous allons construire la matrice d'adjacence M de ce graphe

Etape 1 : Ranger les sommets dans l'ordre

On range les sommets dans un ordre déterminé.

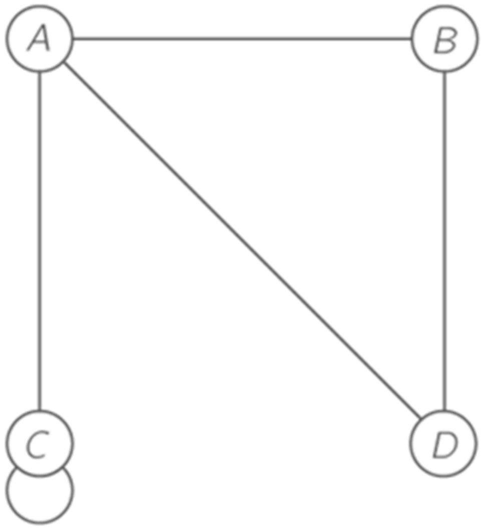
- Si les sommets sont des lettres, on les range de préférence dans l'ordre alphabétique.
- Si ce sont des numéros, on les range dans l'ordre croissant.

Ici on va ranger les sommets dans l'ordre alphabétique : A, B, C, D.

Etape 2 : Construire la matrice *M* vide

On construit la matrice vide en associant à chaque ligne et à chaque colonne un sommet, en respectant l'ordre déterminé précédemment.

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$



$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Etape 3 : Remplir la matrice *M* ligne par ligne

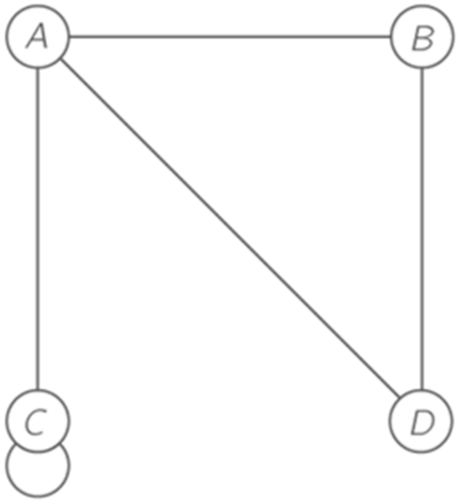
Pour chaque ligne, on complète colonne par colonne :

- Si le sommet associé à cette ligne est relié (en étant le point de départ de l'arrête dans le cas d'un graphe orienté), au sommet associé à la colonne, on marque le chiffre 1.
- Sinon on marque le chiffre 0.

La première ligne correspond aux arêtes partant du sommet A :

- Il n'y a pas de boucle en A : on note donc 0 sur la première colonne.
- Il y en a une vers B : on note donc 1 sur la deuxième colonne.
- Il y en a une vers C : on note donc 1 sur la troisième colonne.
- Il y en a une vers D : on note donc 1 sur la dernière colonne.

On obtient la matrice représentée à gauche



$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \end{array}$$

$$M = \begin{pmatrix} & A & B & C & D \\ A & 0 & 1 & 1 & 1 \\ B & 1 & 0 & 0 & 1 \\ C & 1 & 0 & 1 & 0 \\ D & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La deuxième ligne correspond aux arêtes partant du sommet B :

- Il y en a une vers A : on note donc 1 sur la première colonne.
- Il y en a une vers D : on note donc 1 sur la dernière colonne.

On note 0 au niveau des autres colonnes.

La troisième ligne correspond aux arêtes partant du sommet C :

- Il y en a une vers A : on note donc 1 sur la première colonne.
- Il y en a une vers elle-même : on note donc 1 sur la troisième colonne.

On note 0 au niveau des autres colonnes.

La dernière ligne correspond aux arêtes partant du sommet D :

- Il y en a une vers A : on note donc 1 sur la première colonne.
- Il y en a une vers B : on note donc 1 sur la deuxième colonne.

On note 0 au niveau des autres colonnes.

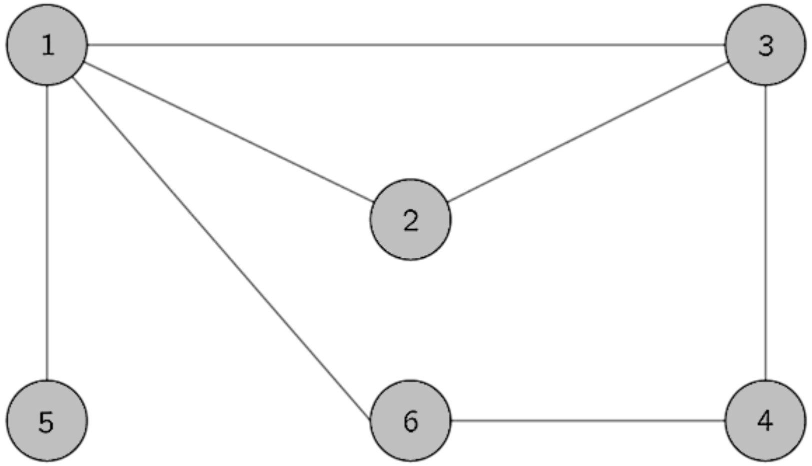
Nombre de chaînes de longueur p dans un graphe

On considère la matrice M^p, puissance p -ième de la matrice M associée à un graphe d'ordre n.

Son terme m_{ij} est égal au nombre de chaînes de longueur p partant du sommet *i* vers le sommet *j*.

Exemple :

Soit le graphe suivant :



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe donc une unique chaîne de longueur 3 reliant le sommet 5 à 3 : 5 – 1 – 2 – 3

De même, il existe deux chaînes de longueur 3 reliant le sommet 2 à lui-même :

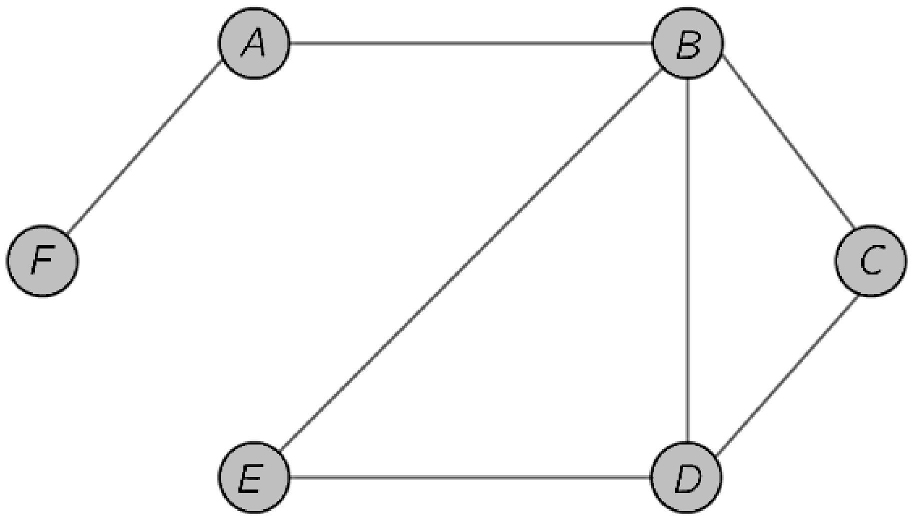
2 – 1 – 3 – 2 et 2 – 3 – 1 – 2.

Voir vidéo: https://www.youtube.com/watch?v=l3sAb0ozDnY

Comment déterminer si un graphe admet une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien ?

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne s'il a zéro ou deux sommets de degré impair. Il admet un cycle eulérien si tous ses sommets sont de degré pair.

Considèrons le graphe G suivant :



Etape 1 : Vérifier que le graphe est connexe
On vérifie que le graphe est connexe, c'est-à-dire que chaque couple de sommets du graphe est relié par une chaîne.
Etape 2 : Déterminer le degré de chacun des sommets
On détermine le degré de chacun des sommets et on récapitule les résultats dans le tableau
Etape 3 : Compter le nombre de sommets de degré impair
On compte le nombre de sommets de degré impair.
Ici, le graphe possède deux sommets de degré impair (D et F).
Etape 4 : On utilise le théorème d'Euler
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il possède zéro ou deux sommet(s) de degré impair.
•Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement s'il ne possède que des sommets de degré pair.
On en conclut que notre graphe admet une chaîne eulérienne

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	2	4	2	3	2	1

Graphe orienté (ordonné)

Un graphe **orienté** G est un couple G = (S, A) tel que :

- S est un ensemble fini de sommets,
- A est un ensemble de couples ordonnés de sommets (si , sj) ∈ S^2 .

Un couple (si , sj) est appelé un **arc**, et est représenté graphiquement par si → sj ,
si est le sommet initial ou origine, et sj le sommet terminal ou extrémité.

L'arc a = (si , sj) est dit **sortant** en si et **incident** en sj , et sj est un **successeur** de si , tandis que si est un **prédécesseur** de sj .

L'ensemble des successeurs d'un sommet si ∈ S est noté Succ(si) = {sj ∈ S,(si , sj) ∈ A}.

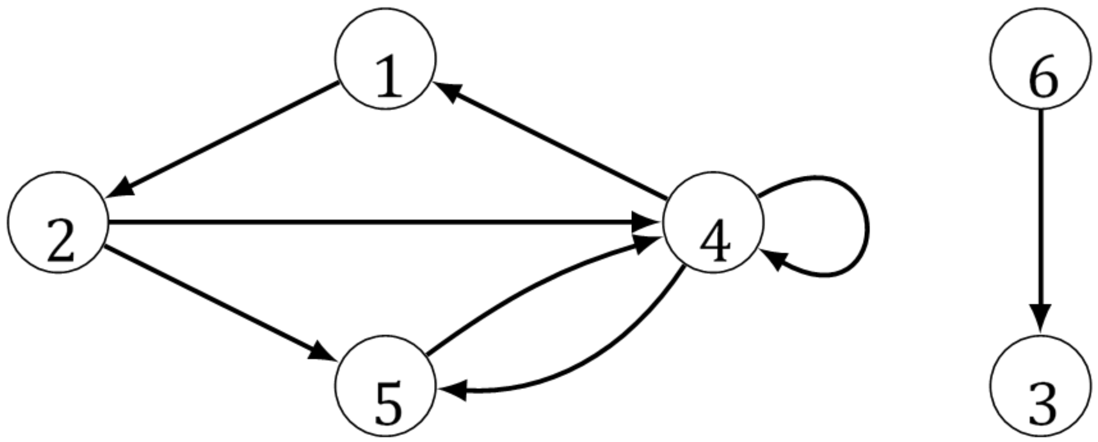
L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet si ∈ S est noté Pred(si) = {sj ∈ S,(sj , si) ∈ A}.

Une **boucle** est un arc reliant un sommet à lui-même.

Un graphe orienté est dit **élémentaire** s'il ne contient pas de boucle.

Un graphe orienté est un **p-graphe** s'il comporte au plus p arcs entre deux sommets. Le plus souvent, on étudiera des 1-graphes.

Exemple:



Ce dessin représente le graphe orienté G = (S, A) avec S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
et A = {(1, 2),(2, 4),(2, 5),(4, 1),(4, 4),(4, 5),(5, 4),(6, 3)}.

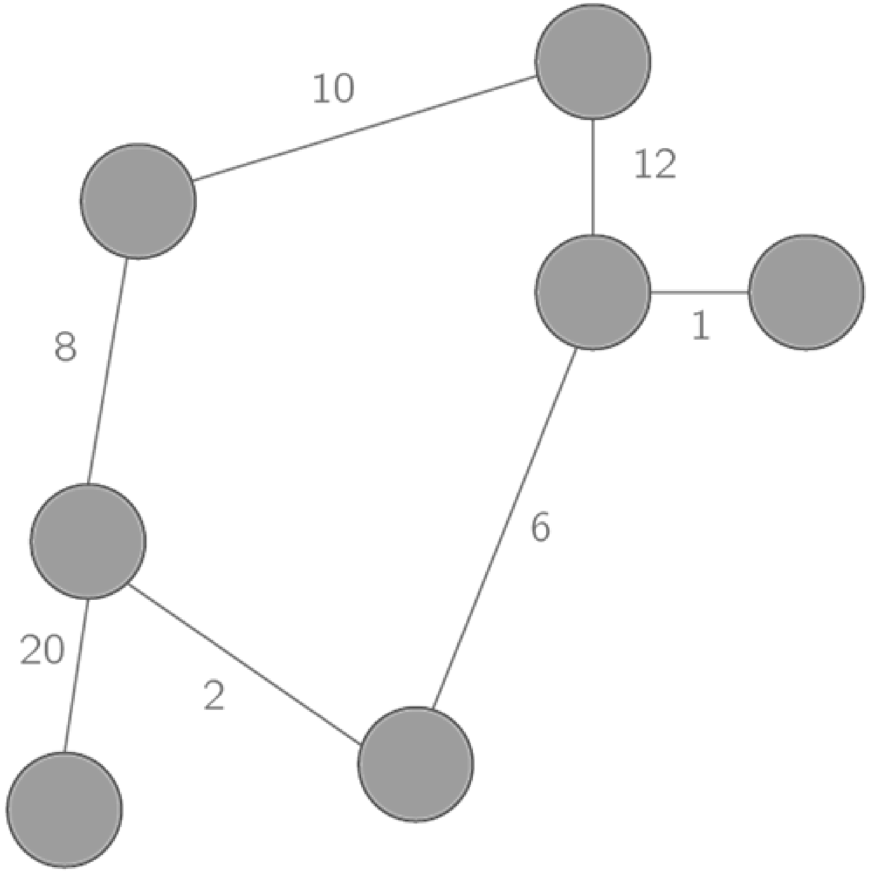
Dans un graphe orienté, le **demi-degré extérieur** ou **demi-degré sortant** d'un sommet s, noté d +(s), est le nombre d'arcs partant de s,
De même, le **demi-degré intérieur** ou **demi-degré entrant** d'un sommet s, noté d −(s), est le nombre d'arcs arrivant en s,

Le degré d'un sommet s est alors la somme des degrés entrant et sortant : d(s) = d+(s) + d−(s)

Graphe pondéré

On appelle graphe pondéré un graphe étiqueté dont les étiquettes sont toutes des nombres positifs.

L'étiquette d'une arête est alors appelée poids de l'arête.

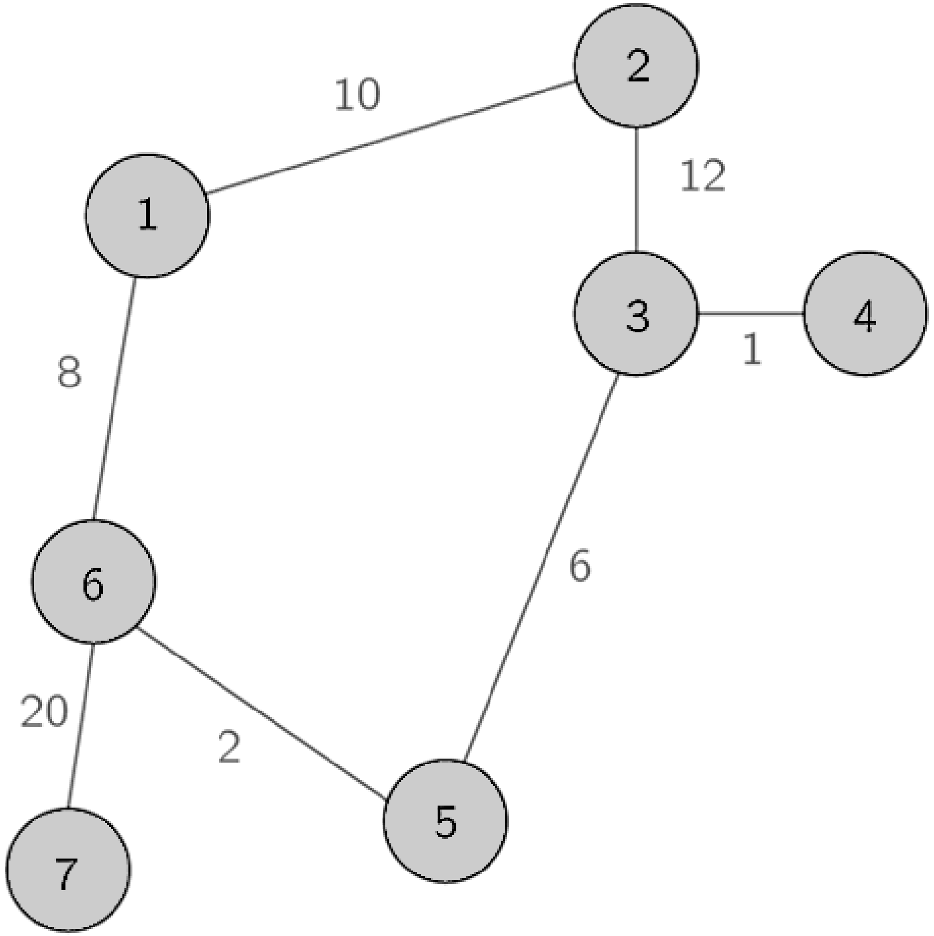


Poids d'une chaîne

Le poids d'une chaîne d'un graphe pondéré est la somme des poids des arêtes qui forment cette chaîne.

Exemple :

Dans ce graphe :



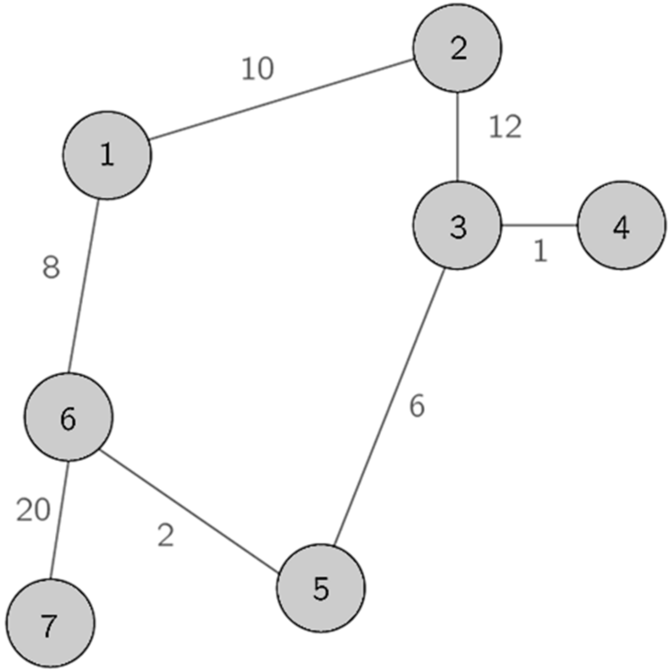
Le poids de la chaîne 7 − 6 − 1 − 2 est :
20+8+10=38.

Plus courte chaîne

On appelle plus courte chaîne entre deux sommets une chaîne de poids minimum reliant ces deux sommets.

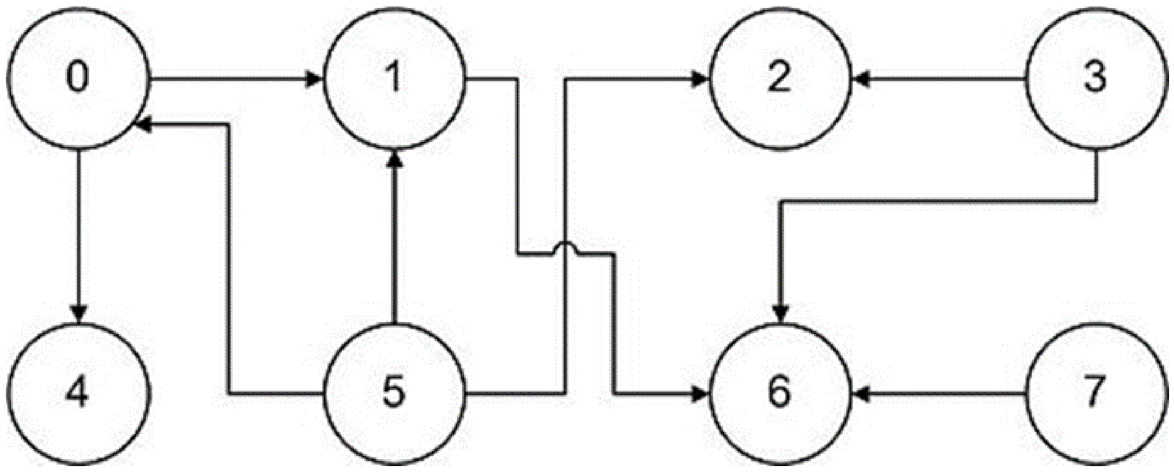
Dans le graphe précédent, la plus courte chaîne reliant le sommet 7 à 3 est 7 − 6 − 5 − 3 de poids 28.

On peut déterminer la plus courte chaîne à l'aide de l'algorithme de Dijkstra.



Pour un graphe orienté, la matrice d’adjacence n'est donc plus nécessairement symétrique.

Exemple de matrice d’adjacence pour un graphe orienté:



Destination

$$
\textbf{Origine}\quad
\begin{array}{c}
 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}.
\end{array}
$$

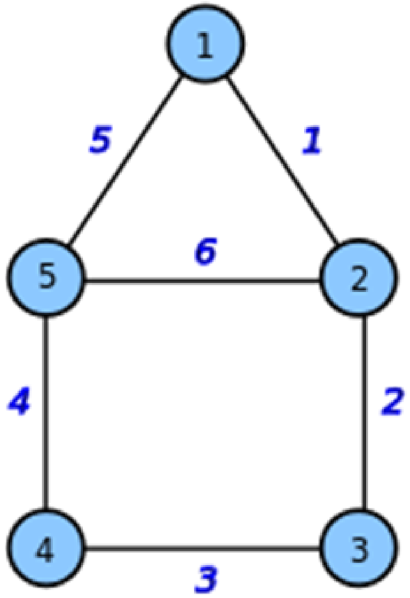
Matrice d’incidence

La **matrice d'incidence** d'un graphe est une matrice qui décrit le graphe en indiquant quels liens arrivent sur quels sommets.
La matrice d'incidence est une matrice **n** x **p**, où n est le nombre de **sommets** du graphe et p est le nombre de liens (**arêtes** ou **arcs**).

Soit G un graphe orienté qui possède n sommets numérotés de 1 à n, et p arcs numérotés de 1 à p. On appelle **matrice d'incidence** du graphe la matrice $A=(a_{i,j})$ comportant n lignes et p colonnes telle que

- $a_{i,j}$ vaut +1, si l'arc numéroté j admet le sommet i comme origine;
- $a_{i,j}$ vaut -1, si l'arc numéroté j admet le sommet i comme arrivée;
- $a_{i,j}$ vaut 0 dans les autres cas.

On peut aussi définir la matrice d'incidence d'un graphe non-orienté. Dans un tel graphe, il n'y a plus de notion d'origine et d'arrivée d'une arête. On met donc +1 là où auparavant on mettait +1 ou -1, 2 si l'arête est une boucle sur le même sommet et 0 ailleurs



Matrice d’incidence: cas d’un graphe non orienté

Prenons le cas du graphe ci-contre.

Il possède 5 sommets et 6 arêtes, la matrice d'incidence aura donc 5 lignes et 6 colonnes :

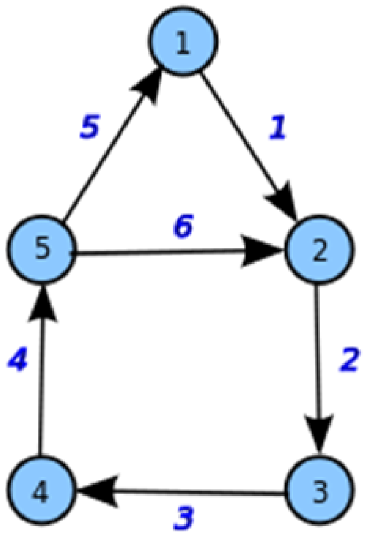
- le sommet 1 est l'aboutissement des arêtes 1 et 5
- le sommet 2 est l'aboutissement des arêtes 1, 2 et 6
- le sommet 3 est l'aboutissement des arêtes 2 et 3
- le sommet 4 est l'aboutissement des arêtes 3 et 4
- le sommet 5 est l'aboutissement des arêtes 4, 5 et 6

6 arêtes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{5 sommets}$$

ce qui donne la matrice d'incidence non orientée ci à côté

On remarque que chaque colonne a une somme égale à 2, puisque chaque arête a deux extrémités et que l’on place un 2 dans la matrice quand on a une boucle sur un sommet.



$$\begin{array}{cc} \text{6 arcs} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \text{5 sommets} \end{array}$$

Matrice d’incidence : cas d’un graphe orienté

Prenons le cas du graphe ci-dessus. Il possède 5 sommets et 6 arcs, la matrice d'incidence aura donc 5 lignes et 6 colonnes :

- le sommet 1 est l'aboutissement des arcs 1 (qui sort) et 5 (qui entre)
- le sommet 2 est l'aboutissement des arcs 1 (qui entre), 2 (qui sort) et 6 (qui entre)
- le sommet 3 est l'aboutissement des arcs 2 (qui entre) et 3 (qui sort)
- le sommet 4 est l'aboutissement des arcs 3 (qui entre) et 4 (qui sort)
- le sommet 5 est l'aboutissement des arcs 4 (qui entre), 5 (qui sort) et 6 (qui sort)

On remarque que chaque colonne a une somme nulle, puisqu'un arc sort forcément d'un sommet pour entrer dans un autre, et s'il s'agit d’une boucle on a 0.

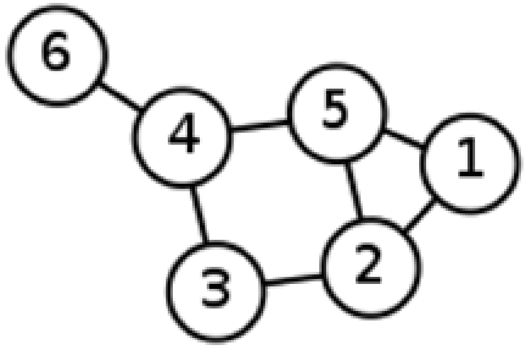
Matrice des degrés

La matrice des degrés d'un graphe comportant **n sommets** est une matrice diagonale **n x n** dont les éléments diagonaux a_{ii} = le degré du sommet i et tous les autres éléments, 0

Exemple :

Soit le graphe :

Le degré d'un sommet désigne le nombre d'arêtes dont ce sommet est l'origine



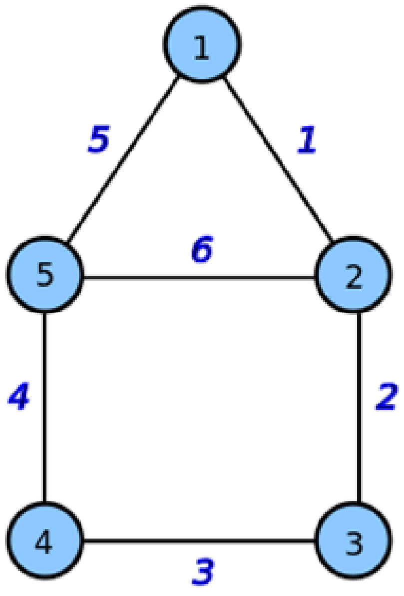
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Relation entre la matrice d'adjacence et la matrice des degrés

Si B(G) est la matrice d'incidence d'un graphe non orienté et A(G) est sa matrice d'adjacence et D(G) sa matrice des degrés, alors :

$A(G) + D(G) = B(G) \times B(G)^T$

Par exemple, avec le graphe non orienté de la figure ci-dessous :



$$A(G) + D(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En isolant la diagonale des autres valeurs, on retrouve bien les matrices A(G) et D(G):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; D(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrice Laplacienne

La matrice Laplacienne d'un graphe *G* non orienté et non réflexif est définie par :

Un graphe est réflexif s'il existe une boucle en chacun de ses points

L(G) = D(G) – A(G)

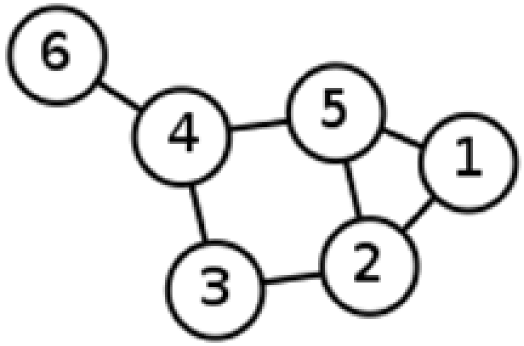
Où D(G) est la matrice des degrés de *G* et A(G) la matrice d'adjacence de *G*.

Soit formellement :

$$L_{i,j} := \begin{cases} \deg(s_i) & \text{si } i = j \\ -x & \text{si } i \neq j \text{ avec x le nombre d'arêtes reliant directement i à j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple:

Graphe non orienté



Matrice des degrés

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice d’adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice Laplacienne

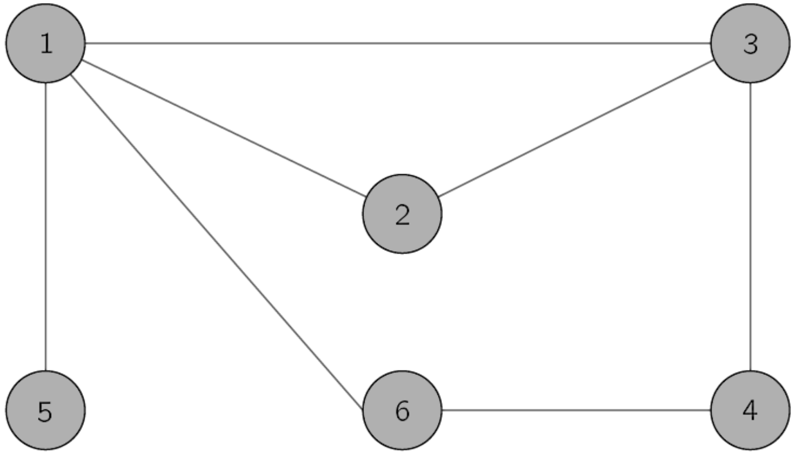
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice laplacienne est utilisée par le théorème de Kirchhoff pour calculer le nombre d'arbres couvrants d'un graphe.

Ces définitions peuvent se généraliser aux graphes orientés ; dans ce cas, la matrice laplacienne n'est plus symétrique.

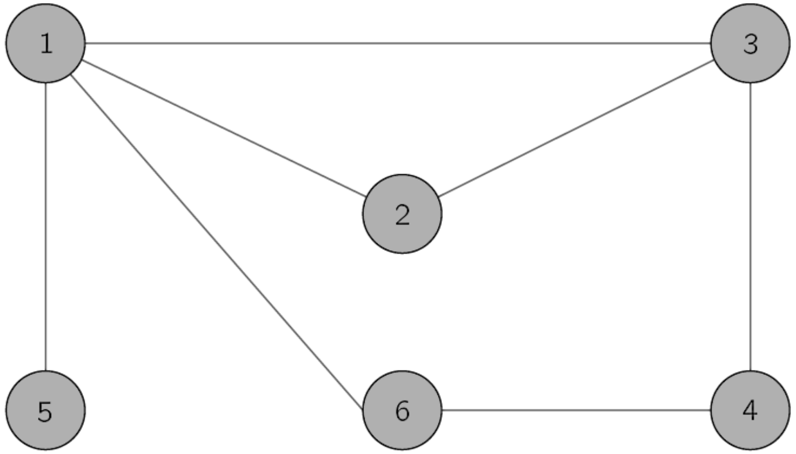
Exercices

Voici un graphe non orienté:



Quel est son ordre ?
Donnez trois paires de sommets adjacents
Donnez trois paires de sommets non adjacents
Quel sont les degrés des sommets 1 , 3 , 5 et 6 ?
Combien y-a-t-il d’arrêtes (taille du graphe) ?
Que vaut par conséquent la somme des degrés de tous les sommets ?

Voici un graphe non orienté:



On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de ses sommets

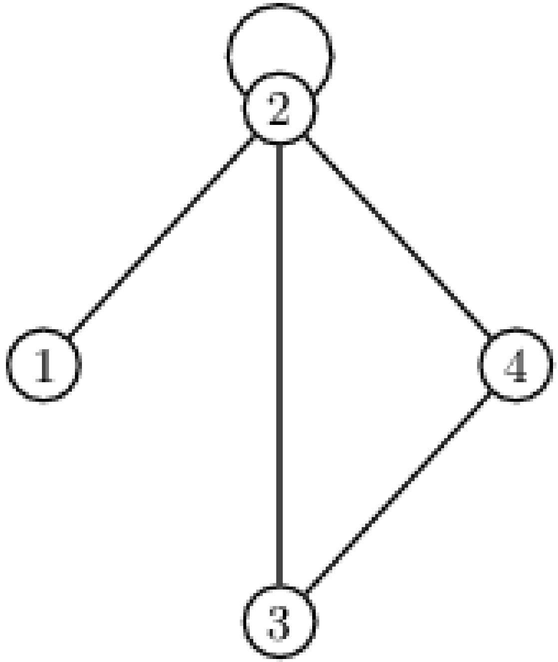
On dit que les sommets s_i et s_j sont **adjacents** s'ils sont joints par une arête

Le degré d'un sommet désigne le nombre d'arêtes dont ce sommet est l'origine

La somme des degrés des sommets d'un graphe non orienté est égale au double du nombre d'arêtes que comporte ce graphe.

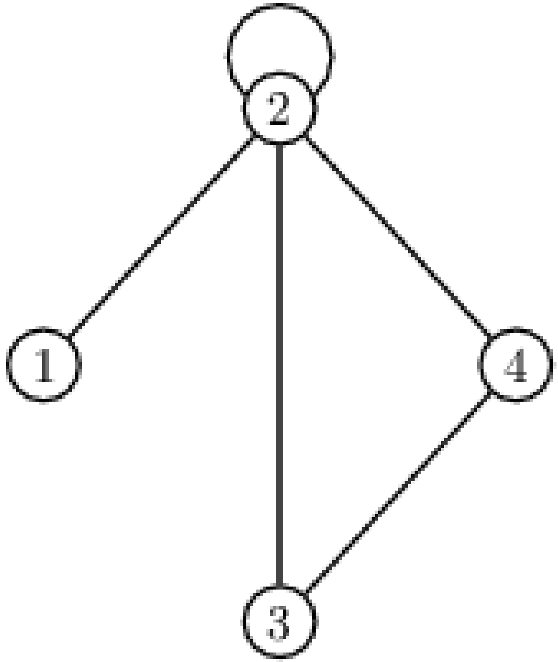
Quel est son ordre ?
Donnez trois paires de sommets adjacents
Donnez trois paires de sommets non adjacents
Quel sont les degrés des sommets 1 , 3 , 5 et 6 ?
Combien y-a-t-il d'arrêtes (taille du graphe) ?
Que vaut par conséquent la somme des degrés de tous les sommets ?

Voici un graphe:



Quelle est sa matrice d’adjacence?

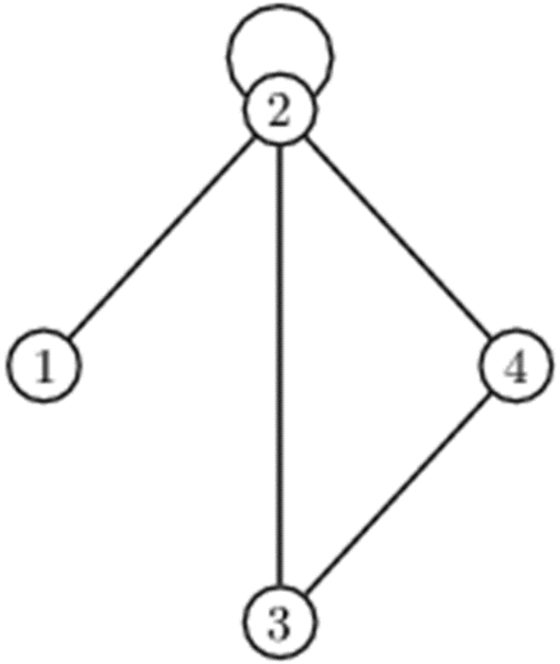
Voici un graphe:



La matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre *n* est une matrice à *n* lignes et *n* colonnes (*n x n*), où le terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes partant du sommet *i* pour aller jusqu'au sommet *j*.

Quelle est sa matrice d'adjacence?

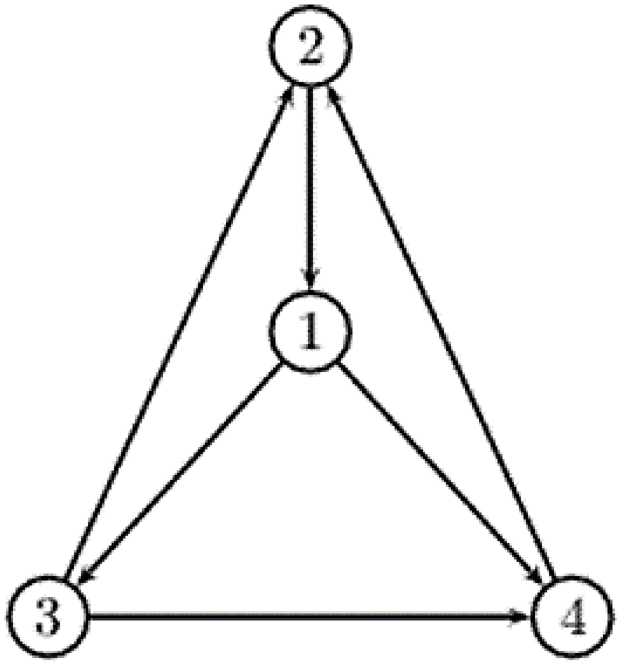
Graphe



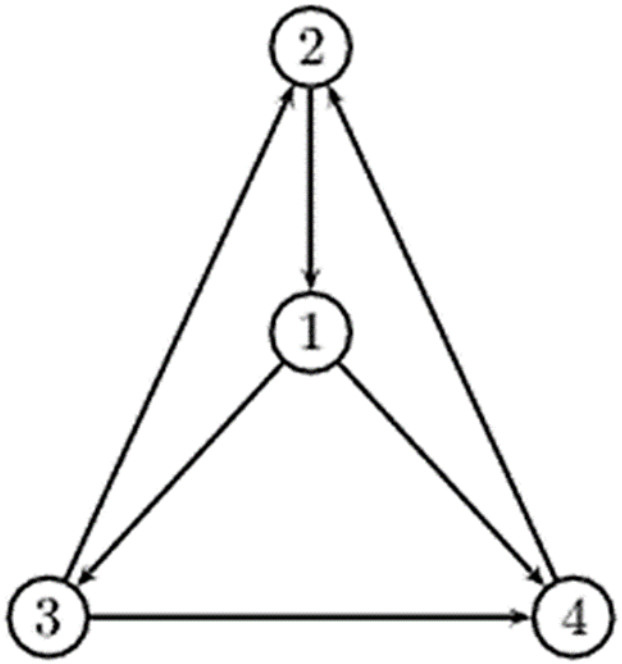
Matrice d’adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Voici un graphe, et la matrice d'adjacence correspondante:

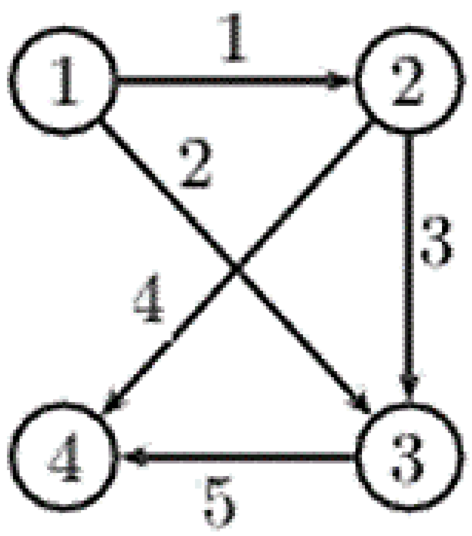


Quelle est sa matrice d’adjacence?



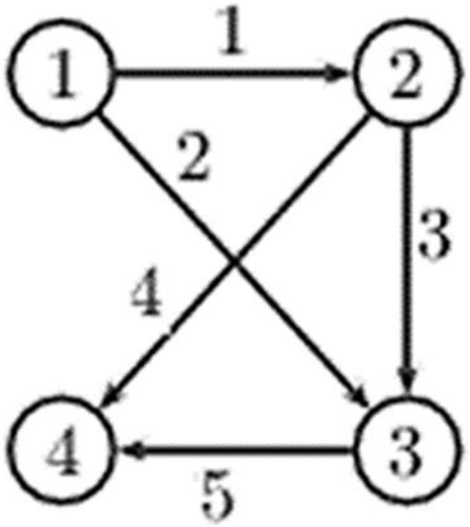
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Voici un graphe, et la matrice d'adjacence correspondante:



Quelle est sa matrice d’adjacence?

Voici le graphe et sa matrice d'adjacence e:



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Parmi les matrices suivantes, sélectionner celles dont le graphe associé est orienté.

1. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Parmi les matrices suivantes, sélectionner celles dont le graphe associé est orienté.

1. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

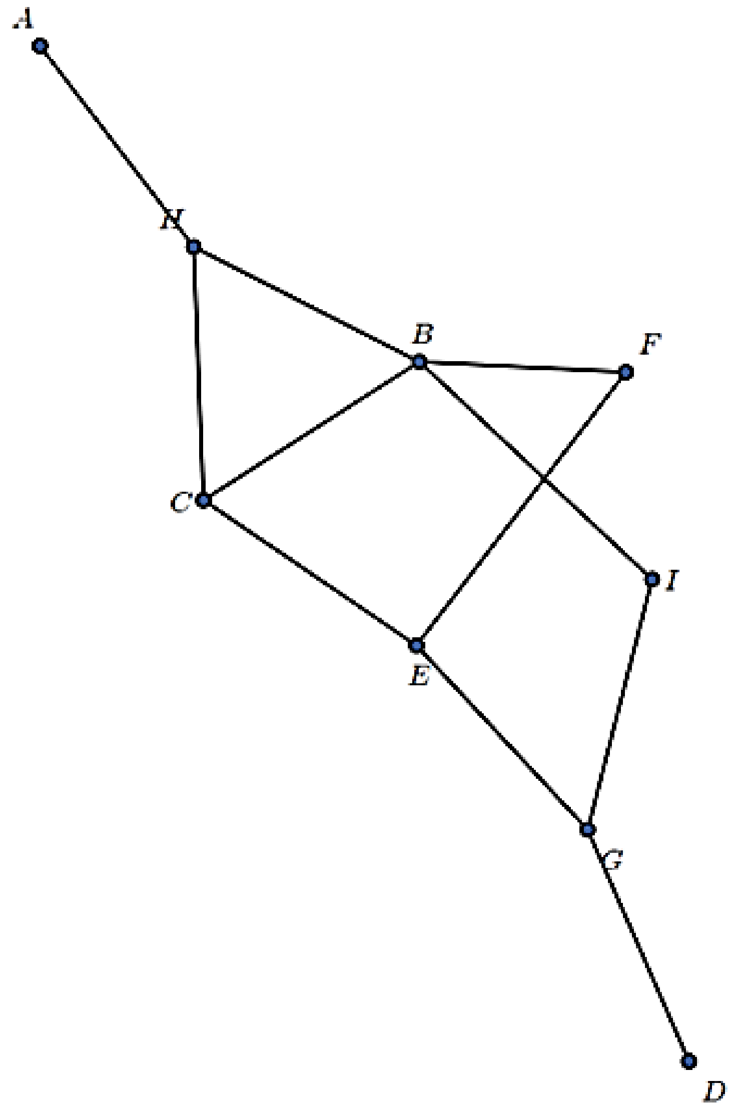
2. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

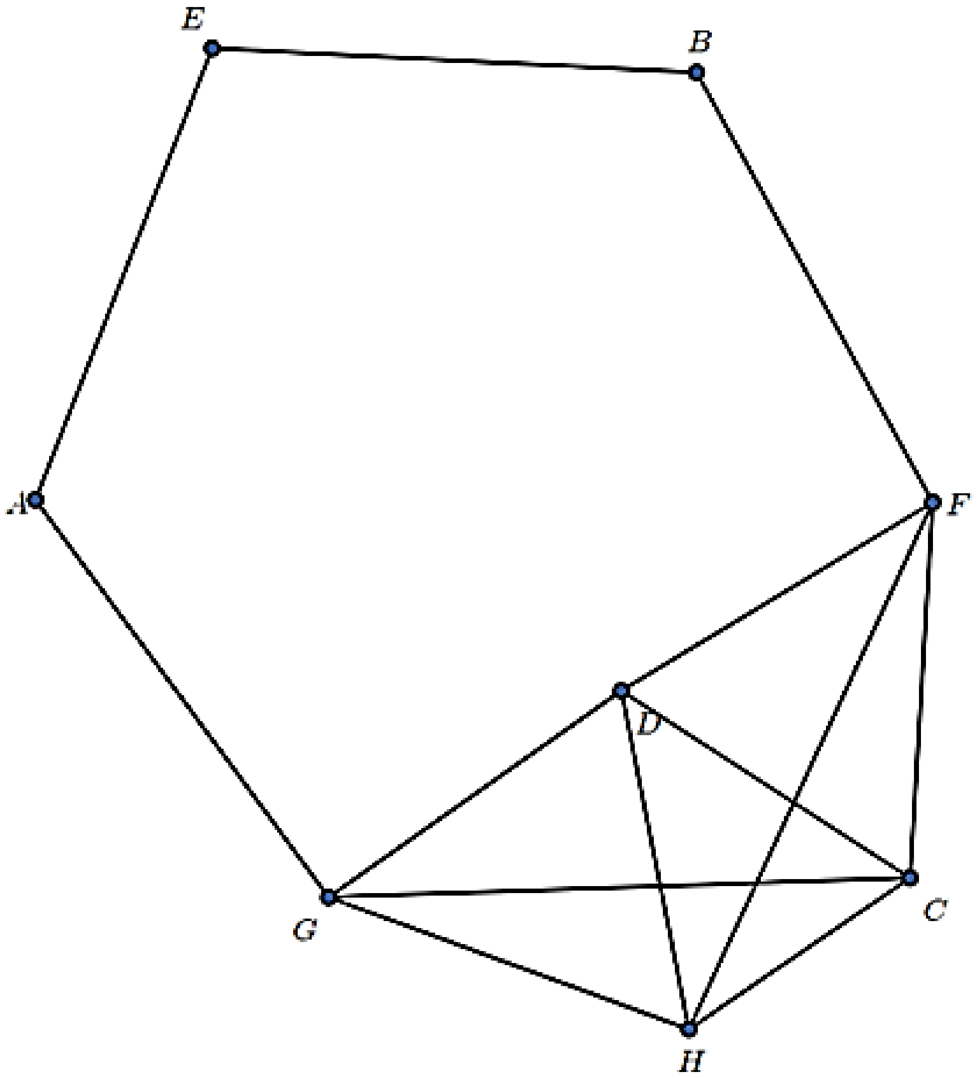
Pour un graphe orienté, la matrice d'adjacence n'est donc plus nécessairement symétrique.

On considère le graphe non orienté ci-dessous.

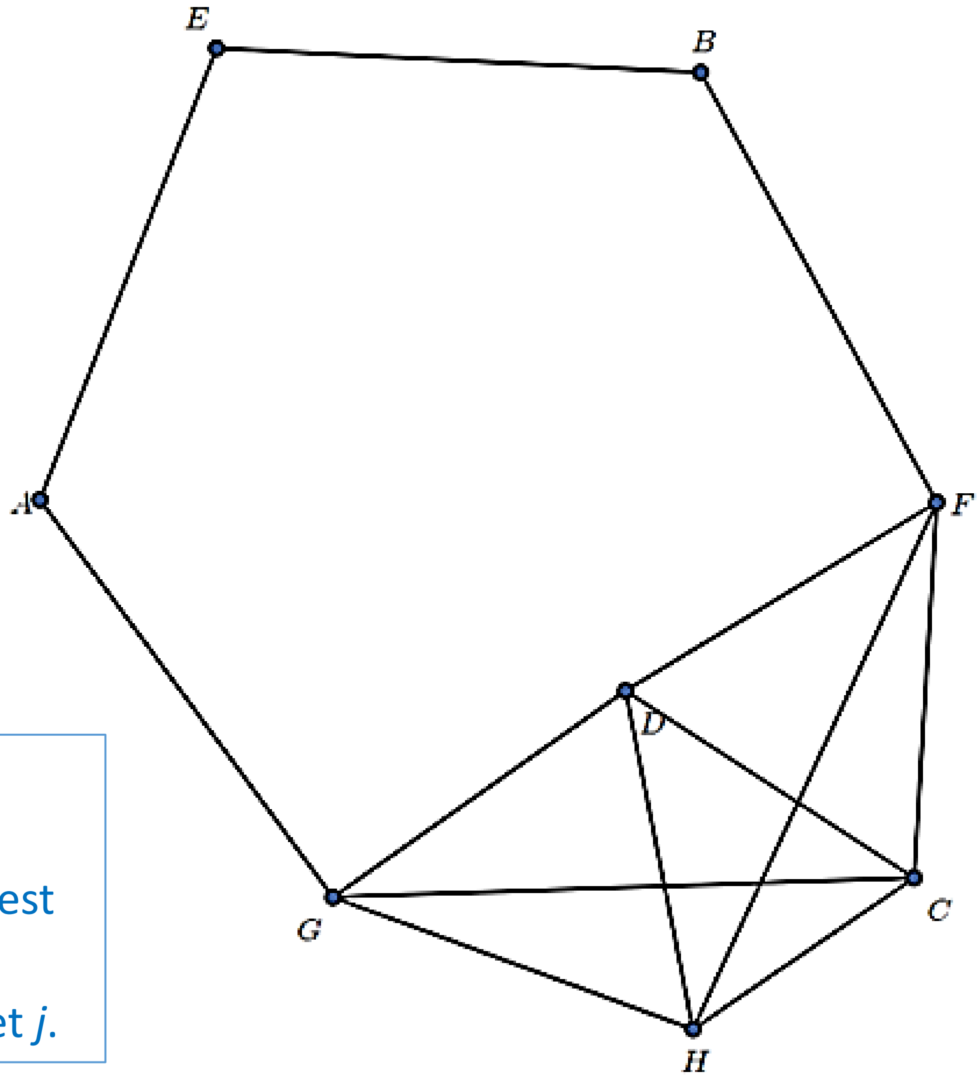


Déterminer la distance entre le sommet F et le sommet A.

Matrice d’adjacence?



Matrice d’adjacence?



La matrice d'adjacence d’un graphe d'ordre *n* est une matrice à *n* lignes et *n* colonnes (*n x n*), où le terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes partant du sommet *i* pour aller jusqu'au sommet *j*.

Voici la matrice d’adjacence au cube de ce graphe, combien y-a-t-il de chemin de longueur 3 entre les sommets D et F?

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 10 & 11 & 2 & 11 & 11 & 11 \\ 2 & 2 & 11 & 10 & 2 & 11 & 11 & 11 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 11 & 11 & 0 & 6 & 6 & 11 \\ 5 & 4 & 11 & 11 & 0 & 6 & 6 & 11 \\ 2 & 2 & 11 & 11 & 2 & 11 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Exemple vidéo: https://www.youtube.com/watch?v=kYMAFdZwTUU

Voici la matrice d’adjacence au cube de ce graphe, combien y-a-t-il de chemin de longueur 3 entre les sommets D et F?

On considère la matrice M^p, puissance p -ième de la matrice M associée (matrice d’incidence) à un graphe d'ordre n.

Son terme m_{ij} est égal au nombre de chaînes de longueur p partant du sommet *i* vers le sommet *j*.

$$M^3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 10 & 11 & 2 & 11 & 11 & 11 \\ 2 & 2 & 11 & 10 & 2 & 11 & 11 & 11 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 11 & 11 & 0 & 6 & 6 & 11 \\ 5 & 4 & 11 & 11 & 0 & 6 & 6 & 11 \\ 2 & 2 & 11 & 11 & 2 & 11 & 11 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array}$$

Exemple vidéo: https://www.youtube.com/watch?v=kYMAFdZwTUU https://www.youtube.com/watch?v=4tfpDZYWyWw

https://www.youtube.com/watch?v=FzqGLJ80jLw

https://www.youtube.com/watch?v=Rh3dcLtkHRI