Simulation eines Lichtstrahls nach Gitterdurchlauf

Simon Jung, Bernd Lienau, Alexander Franke

16. Januar 2018

Skizzierung des Einzelspalts

insert graph

$$I_S = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha_x\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha_x} \right)^2$$

Skizzierung des Doppelspalts

insert graph

$$I(\alpha_x, 0) = |\Psi(\alpha_x, 0)|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi d \sin(\alpha_x)}{\lambda}\right) \frac{\sin^2(\pi a \sin(\alpha_x)/\lambda)}{(\pi a \sin(\alpha)/\lambda)^2}$$

Mathematische Beschreibung

Allgemein ist die Wellenfunktion des Beugungsbildes gegeben durch

$$\Psi(u,v) = \int\int f(x,y) \exp\Big(-i(ux+vy)\Big) dxdy$$

wobei $u = k_0 \sin\alpha_x$ und $v = k_0 \sin\alpha_y$

Mathematische Beschreibung

Einzelspalt:

$$f_{\mathrm{ES}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein kleines rechteckiges Loch der Höhe h und Breite a:

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha_x, \alpha_y) &= g(x) \cdot h(y) \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ixk\sin(\alpha_x)} dx \int_{-h/2}^{h/2} e^{-iyk\sin(\alpha_y)} dy \\ &= ah \frac{\sin(\frac{1}{2}ak\sin(\alpha_x))}{\frac{1}{2}ak\sin(\alpha_x)} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2}hk\sin(\alpha_y))}{\frac{1}{2}hk\sin(\alpha_y)} \end{aligned}$$

$$\Psi(\xi, \phi) = \pi R^2 \left(2J_1(\xi R) \right)$$

Doppelspalt

A

ufgrund der Eigenschaften der Fouriertransformierten, können wir die Überlagerung von Beugungsmustern als algebrische Summe der Transmissionsfunktion einfacher Objekte aufschreiben. Im Allgemeinen muss bei der Transformierten des Gesamtobjektes, Real- und Imaginärteil getrennt addiert werden. Nur für den Sonderfall von Punktsymmetrie bezüglich der Mitte sind die Transformierten reell.

W

ir betrachten nun die Überlagerung der beiden Beugungsmuster der Einzelspalte. Die Eigenschaften der Fouriertransformation machen dieses Vorgehen sehr viel einfacher, da wir wissen, dass

$$g(x) \circledast h(y) = \mathscr{F}[g(x)] \cdot \mathscr{F}[h(y)]$$

Viele-Spalte

Ähnlich wie beim Doppelspalt brauchen wir eine Faltung von einer Transmissionsfunktions des Gitters mit der des Einzelspaltes.

$$f_{\text{Gitter}} \circledast f_{\text{ES}} = \left[\sum_{n=-N/2}^{N/2} \delta\left(x - nd\right) \right] \circledast f_{\text{ES}}$$

Die Fouriertransformation wird zu

$$\Psi(\alpha_x) = \left[\sum_{m=-N/2}^{N/2} \exp\Big(- ik \sin(\alpha_x) md \Big) \right] \circledast f_{\text{ES}} = \left[\sum_{m=-N/2}^{N/2} \exp\Big(- ik \text{ s}$$

Viele-Spalte 2

Lassen wir nun N gegen unendlich laufen haben wir

$$\Psi(\alpha_x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\left(k \sin \alpha_x - \frac{2\pi m}{d}\right)\right.$$

Für endliches N erhalten wir mit der geometrischen Reihe

$$\Psi(\alpha_x) = \frac{1 - \exp(-ik \sin(\alpha_x) Nd)}{1 - \exp(-ik \sin(\alpha_x) d)}$$

Damit erhalten wir folgende Intensität

$$I_{\text{Gitter}} = |\Psi(\alpha_x)|^2 = \frac{\sin^2(Nk \sin(\alpha_k) d/2)}{\sin^2(k \sin(\alpha_k) d/2)}$$

Flussdiagramm

insert graph

Wichtige Funktionen

Wichtige Funktionen

Einzelspalte

insert graph

Doppelspalt

insert graph

Mehrfachspalte

insert graph

Mehrfachspalt mit Fehler

insert graph