دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف

تحلیل عددی آونگ دوگانه

پروژه درس مکانیک تحلیلی ۲

علی فیاض

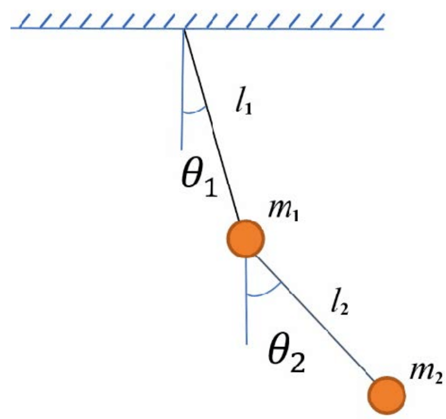
شماره دانشجویی: ۹۸۱۰۰۹۶۷

استاد درس: دکتر بهمن‌آبادی

بهار ۱۴۰۲

۱ مقدمه

آونگ دوگانه مثالی از یک سیستم مکانیکی ساده است که رفتار آشوبناک نشان می‌دهد. به این معنی که تحول زمانی سیستم، به شدت وابسته به شرایط اولیه است و با تغییر اندکی در شرایط اولیه، رفتار آن به کلی عوض می‌شود. یک آونگ دوگانه، از اتصال دو آونگ ساده به هم تشکیل می‌شود، به طوری که هر کدام یک جرم نقطه‌ای متصل به یک میله بی‌جرم‌اند (شکل ۱). در این نوشته قصد داریم معادلات حرکت را با استفاده از لاگرانژی سیستم به دست آوریم و سپس با حل عددی این معادلات، تحول سیستم و آشوبناک بودن آن را بررسی نماییم.



شکل ۱: آونگ دوگانه

۲ لاگرانژی و معادلات حرکت

مطابق شکل ۱، جرم آونگ‌ها به ترتیب m_1 و m_2 و طول میله‌های بی‌جرم، به ترتیب l_1 و l_2 می‌باشد. هم‌چنین زاویه بین میله‌ها و خط قائم نیز به ترتیب θ_1 و θ_2 است. شتاب گرانش را نیز با g نشان می‌دهیم. برای مکان‌های دو گلوله داریم:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 sin(\theta_1) \\ y_1 &= -l_1 cos(\theta_1) \\ x_2 &= l_1 sin(\theta_1) + l_2 sin(\theta_2) \\ y_2 &= -l_1 cos(\theta_1) - l_2 cos(\theta_2) \end{aligned}$$

حال با محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل، لاگرانژی را محاسبه می‌نماییم:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta_1}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot{\theta_1}^2 + l_2^2 \dot{\theta_2}^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta_1} \dot{\theta_2} cos(\Delta) \right] \qquad (\Delta \equiv \theta_1 - \theta_2) \quad (۱) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\ &= -(m_1+m_2) g l_1 cos(\theta_1) - m_2 g l_2 cos(\theta_2) \end{aligned} \tag{۲}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow[(1)]{(2)} \mathcal{L} = T - V = \tfrac{1}{2}(m_1+m_2) l_1^2 \dot{\theta_1}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta_2}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta_1} \dot{\theta_2} cos(\Delta) \\ + (m_1+m_2) g l_1 cos(\theta_1) + m_2 g l_2 cos(\theta_2) \end{aligned} \tag{۳}$$

حال با استفاده از معادله اویلر داریم:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_k}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \tag{۴}$$

θ_1:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta_1}}\right) = (m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\theta_1} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta_2} cos(\Delta) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta_2} sin(\Delta)(\dot{\theta_1} - \dot{\theta_2}) \tag{۵}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -l_1 g (m_1+m_2) sin(\theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta_1} \dot{\theta_2} sin(\Delta) \tag{۶}$$

θ_2:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta_2}}\right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta_2} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta_1} cos(\Delta) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta_1} sin(\Delta)(\dot{\theta_1} - \dot{\theta_2}) \tag{۷}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta_1} \dot{\theta_2} sin(\Delta) - l_2 m_2 g sin(\theta_2) \tag{۸}$$

از معادلات ۴ تا ۸ استفاده می‌کنیم و پس از کمی عملات ریاضی در نهایت به معادلات استاندارد شده زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} &\dot{\theta_1} \equiv \omega_1 \\ &\ddot{\theta_1} = \frac{m_2 l_1 \omega_1^2 sin(\Delta) cos(\Delta) + m_2 g sin(\theta_2) cos(\Delta) + m_2 l_2 \omega_2^2 sin(\Delta) - (m_1+m_2) g sin(\theta_1)}{(m_1+m_2) l_1 - m_2 l_1 cos^2(\Delta)} \end{aligned} \tag{۹}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\theta_2} \equiv \omega_2 \\ &\ddot{\theta_2} = \frac{-m_2 l_2 \omega_2^2 sin(\Delta) cos(\Delta) + (m_1+m_2)(g sin(\theta_1) cos(\Delta) - l_1 \omega_1^2 sin(\Delta) - g sin(\theta_2))}{(m_1+m_2) l_2 - m_2 l_2 cos^2(\Delta)} \end{aligned} \tag{۱۰}$$

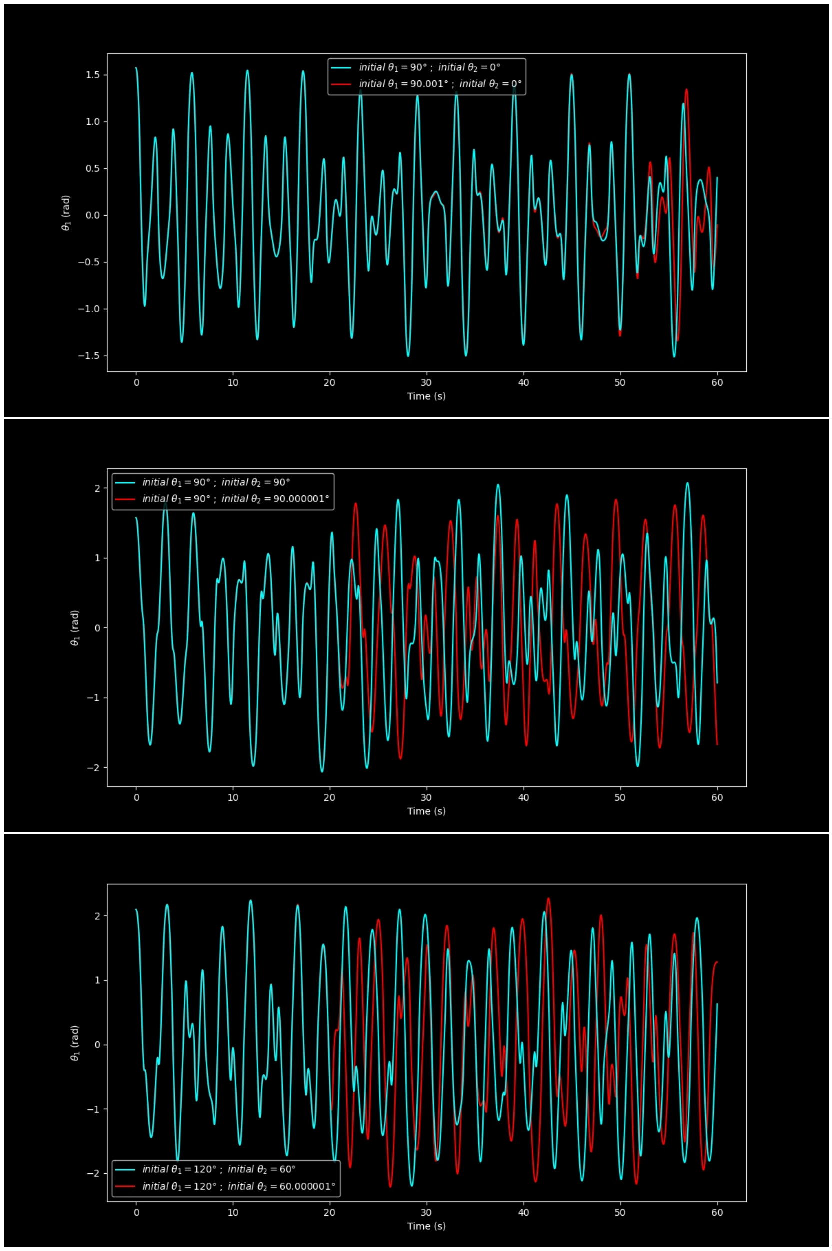
به این ترتیب، دو معادله دیفرانسیل معمولی جفت‌شده از مرتبه ۲ مشاهده می‌شود. در ادامه به حل عددی این معادلات می‌پردازیم.

۳ حل عددی و نتایج

برای حل معادلات (۹) و (۱۰) از زبان برنامه‌نویسی پایتون استفاده می‌کنیم. درکد پیوست شده، تابع *derivs()* دقیقا پیاده‌سازی این دو معادله است. با دادن تابع مذکور، به تابع *odeint()* از پکیج *scipy.integrate* معادلات جفت‌شده مورد نظر حل می‌شوند و نحوه تحول θ_1 و θ_2 در آرایه ذخیره می‌شود.
ثوابت زیر برای شبیه‌سازی استفاده شده‌اند:

$$g = 9.8\ (\frac{m}{s^2})$$
$$l_1 = l_2 = 1\ (m)$$
$$m_1 = m_2 = 1\ (kg)$$

در نمودارهای زیر، θ_1 و θ_2 اولیه مشخص شده‌اند و تحول θ_1 کشیده شده است. همانطور که از نمودارها مشخص است، رفتار سیستم آشوبناک می‌باشد، به شرایط اولیه وابستگی زیادی دارد و با تغییر اندکی در زوایای اولیه، رفتار سیستم به سرعت تغییر می‌کند.
همچنین انیمیشن مربوط به این حالت‌ها نیز با استفاده از تابع *FuncAnimation()* از پکیج *matplotlib.animation* به دست آمده و قابل مشاهده می‌باشد. تحول آشوبناک سیستم در طول یک دقیقه شبیه‌سازی، به خوبی در این انیمیشن‌ها دیده می‌شود.
لازم به ذکر است که به سادگی با استفاده از تابع *solve_double_pendulum()* که در فایل ژوپیتر تعریف شده، می‌توان شرایط اولیه را به دلخواه تغییر داد و به ازای زوایا و سرعت‌های اولیه گوناگون، سیستم را بررسی کرد.



شکل ۲: رفتار آشوبناک با شرایط اولیه مختلف

۴ جمع‌بندی

در این پروژه، به شبیه‌سازی کامپیوتری سیستم آونگ دوگانه پرداختیم. لاگرانژی سیستم را محاسبه کردیم و معادلات دیفرانسیل جفت‌شده حرکت را به دست آوردیم. سپس دینامیک غیر خطی و رفتار آشوبناک آن را بررسی کردیم و مشاهده نمودیم که تحول سیستم به شدت به شرایط اولیه بستگی دارد.

۵ منابع

۱. ویکی‌پدیا: آونگ دوتایی

۲. جری بی. ماریون، استفن تی. تورنتون؛ دینامیک کلاسیک: ذرات و سیستم‌ها؛ مرکز نشر دانشگاهی؛ ویراست پنجم

۳. Mike Wheatland (The University of Sydney); The Double Pendulum

۴. Eric W. Weisstein; Double Pendulum