Équation de la chaleur: ALE, Éléments finis, POD et réduction de modèle

Falaize

November 18, 2016

1 Description ALE

Trois domaines (n_{C} nombre de composantes):

$R_{\boldsymbol{x}} \subset \mathbb{R}^{n_{\mathrm{C}}}$ Domaine spatial (espace vide immuable),

$R_{\boldsymbol{X}} \subset \mathbb{R}^{n_{\mathrm{C}}}$ Domaine matériel (attaché à la matière),

$R_{\boldsymbol{\chi}} \subset \mathbb{R}^{n_{\mathrm{C}}}$ Domaine de référence (arbitraire).

Le temps est mesuré identiquement dans les trois domaine:

$$t \in T \subseteq \mathbb{R}$$

. Coordonnées spatiales du domaine matériel:

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\varphi}: & (R_{\boldsymbol{X}}, T) & \to & (R_{\boldsymbol{x}}, T) \\ & (X, t) & \mapsto & (x, t) \end{array}$$

On note $\boldsymbol{\varphi}(X,t) = \Big(\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{x}}(X,t), \boldsymbol{\varphi}_t(X,t)\Big) = (x,t)$ et

$$\nabla\boldsymbol{\varphi} = \left(\begin{array}{cc} \partial_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{v} \\ \mathbb{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array} \right)$$

où on a définit $\boldsymbol{v} = \partial_t \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{x}}$

Coordonnées spatiales du domaine de référence:

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\phi}: & (R_{\boldsymbol{\chi}}, T) & \to & (R_{\boldsymbol{x}}, T) \\ & (\chi, t) & \mapsto & (x, t) \end{array}$$

On note $\boldsymbol{\phi}(\chi,t) = \Big(\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{x}}(\chi,t), \boldsymbol{\phi}_t(\chi,t)\Big) = (x,t)$ et

$$\nabla\boldsymbol{\phi} = \left(\begin{array}{cc} \partial_{\boldsymbol{\chi}}\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{v}^{\star} \\ \mathbb{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array} \right)$$

où on a définit $\boldsymbol{v}^\star = \partial_t \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{x}}$

Coordonnées de référence du domaine matériel:

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\psi}^{-1}: & (R_{\boldsymbol{X}}, T) & \to & (R_{\boldsymbol{\chi}}, T) \\ & (X, t) & \mapsto & (\chi, t) \end{array}$$

On note $\boldsymbol{\psi}^{-1}(\chi, t) = \Big(\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\chi}}^{-1}(X, t), \boldsymbol{\psi}_t^{-1}(X, t)\Big) = (\chi, t)$ et

$$\nabla \boldsymbol{\psi}^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_{\boldsymbol{\chi}} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{x}}^{-1} & \boldsymbol{w} \\ \mathbb{0}^\intercal & 1 \end{pmatrix}$$

où on a définit $\boldsymbol{w} = \partial_t \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\chi}}^{-1}$.

On a donc $\varphi = \phi \circ \psi^{-1}$ et $\nabla\varphi = \nabla\phi \cdot \nabla\psi$, soit

$$\begin{pmatrix} \partial_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{v} \\ \mathbb{0}^\intercal & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{\boldsymbol{\chi}} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{v}^\star \\ \mathbb{0}^\intercal & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{\boldsymbol{\chi}} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{x}}^{-1} & \boldsymbol{w} \\ \mathbb{0}^\intercal & 1 \end{pmatrix}$$

et $\boldsymbol{v} = \partial_{\boldsymbol{\chi}} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}^\star$. Finalement, on définit

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^\star = \partial_{\boldsymbol{\chi}} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{w}.$$

Soit une quantité $q_{\boldsymbol{x}}(x, t)$ mesurée dans le domaine spatial et la même quantité

$q_{\boldsymbol{X}}(X, t)$ mesurée dans le domaine matériel, et

$q_{\boldsymbol{\chi}}(\chi, t)$ mesurée dans le domaine de référence.

Alors $q_{\boldsymbol{X}} = q_{\boldsymbol{x}} \circ \boldsymbol{\varphi}$ et

$$\begin{aligned} \nabla q_{\boldsymbol{X}} &= (\partial_X q_{\boldsymbol{X}}, \partial_t q_{\boldsymbol{X}}) \\ &= \nabla q_{\boldsymbol{x}} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}; \\ \partial_X q_{\boldsymbol{X}} &= \partial_x q_{\boldsymbol{x}} \cdot \partial_X \boldsymbol{\varphi}, \\ \partial_t q_{\boldsymbol{X}} &= \partial_x q_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} + \partial_t q_{\boldsymbol{x}}. \end{aligned}$$

De même $q_{\boldsymbol{X}} = q_{\boldsymbol{\chi}} \circ \boldsymbol{\psi}^{-1}$ et

$$\begin{aligned} \nabla q_{\boldsymbol{X}} &= (\partial_X q_{\boldsymbol{X}}, \partial_t q_{\boldsymbol{X}}) \\ &= \nabla q_{\boldsymbol{\chi}} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}^{-1}; \\ \partial_X q_{\boldsymbol{X}} &= \partial_\chi q_{\boldsymbol{\chi}} \cdot \partial_X \boldsymbol{\psi}^{-1}, \\ \partial_t q_{\boldsymbol{X}} &= \partial_\chi q_{\boldsymbol{\chi}} \cdot \boldsymbol{w} + \partial_t q_{\boldsymbol{\chi}}. \end{aligned}$$

et pat définition:

$$\begin{aligned} \partial_t q_{\boldsymbol{X}} &= \partial_t q_{\boldsymbol{\chi}} + \partial_\chi q_{\boldsymbol{\chi}} \cdot \boldsymbol{w} \\ &= \partial_t q_{\boldsymbol{\chi}} + \partial_x q_{\boldsymbol{x}} \cdot \partial_{\boldsymbol{\chi}} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{w} \\ &= \partial_t q_{\boldsymbol{\chi}} + \partial_x q_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

2 Formulation faible

L'EDP:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k\,\Delta u &= f, \quad \forall x \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega; \\ u &= u_0, \quad \forall x \in \Gamma_0 \subset \partial\Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} &= g, \quad \forall x \in \Gamma_g = \partial\Omega \setminus \Gamma_0; \\ u(x, t=0) &= 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{1}$$

avec

$$u \in V \triangleq \left\{ v \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(\Omega),\ v(x \in \Gamma_0) = u_0 \right\}.$$

N.B. Les conditions frontières essentielle (de type Dirichlet) sont incluses dans la définition de l'espace solution; Les conditions frontières naturelles (de type Neumann) sont à traiter séparément (*c.f.* formulation faible du problème ci-dessous). On introduit les fonctions test

$$v \in \hat{V} \triangleq \left\{ v \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(\Omega),\ v(x \in \Gamma_0) = 0 \right\};$$

i.e. $\hat{V}$ est identique à V partout sauf sur le bord $\partial\Omega$ où les fonctions test sont nulles. On écrit la formulation faible de (1):

1. Multiplication par un membre quelconque de $\hat{V}$ et intégration sur le domaine Ω:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v \,\mathrm{d}\,\Omega - \int_\Omega k\,\Delta u\, v \,\mathrm{d}\,\Omega = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}\,\Omega.$$

2. Intégration par partie, en exploitant la définition de l'espace des fonctions test:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v \,\mathrm{d}\,\Omega - \underbrace{[\nabla u\, k\, v]_{\partial\Omega}}_{=0} + \int_\Omega k\,\nabla u\,\nabla v \,\mathrm{d}\,\Omega = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}\,\Omega.$$

3. Finalement

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v \,\mathrm{d}\,\Omega + \int_\Omega k\,\nabla u\,\nabla v \,\mathrm{d}\,\Omega = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}\,\Omega. \tag{2}$$

3 Discrétisation

On considère un sous espace discret de l'espace des fonctions solutions (h réfère au pas de discrétisation spatiale):

$$V_h \subset V.$$

Une base de V_h est $\{\phi_i\}_{1 \le i \le n_{\text{nœuds}}}$ (typiquement, les ϕ_i sont fournis par les fonctions de forme dans la méthode des éléments finis [**?**, sec. 1.4] pour la résolution du problème variationnel (2)). Identiquement, une base de $\hat{V}_h$ est $\{\hat{N}_i\}_{1\leq i\leq n_{\text{nœuds}}}$. On note $u_h \simeq u$ une solution approchée, que l'on décompose sur la base $\{\phi_i\}_{1\leq i\leq n_{\text{nœuds}}}$ comme:

$$u_h(x,t) \triangleq \alpha_i(t)\,\phi_i(x).$$

Le problème variationnel s'écrit alors

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}\int_\Omega \phi_i\, v \;\mathrm{d}\,\Omega + \alpha_i \int_\Omega k\,\nabla\phi_i\,\nabla v\,\mathrm{d}\,\Omega = \int_\Omega f\, v\,\mathrm{d}\,\Omega; \quad \forall v \in \hat{V}_h.$$

Et en particulier pour $v = \hat{\phi}_j$:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}\int_\Omega \phi_i\, \hat{\phi}_j \;\mathrm{d}\,\Omega + \alpha_i \int_\Omega k\,\nabla\phi_i\,\nabla \hat{\phi}_j\,\mathrm{d}\,\Omega = \int_\Omega f\, \hat{\phi}_j\,\mathrm{d}\,\Omega; \quad 1\leq j\leq n_{\text{nœuds}},$$

soit

$$\mathbf{A}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{f}, \tag{3}$$

avec $A_{j,i} = \left(\phi_i|\hat{\phi}_j\right)$, $B_{j,i} = k\left(\nabla\phi_i|\nabla\hat{\phi}_j\right)$ et $f_j = \left(f|\nabla\hat{\phi}_j\right)$.

4 Base POD - Méthode "Snapshots"

On dispose de n_{T} mesures du champ de vitesse instantané $\{\bar{u}(x,t_k)\}_{1\leq k\leq n_{\mathrm{T}}}$. On cherche une base orthonormale de V, de dimension finie, qui caractérise au mieux les n_{T} clichés *en moyenne* (ici temporelle) et *au sens des moindres carrés*. C'est à dire que l'on cherche la séquence des $\{\varphi_i\}_{1\leq i\leq n_{\mathrm{POD}}}$ telle que

$$\frac{\langle (u|\varphi)\rangle}{(\varphi|\varphi)} = \max_{\psi\in L^2}\left(\frac{\langle (u|\psi)\rangle}{(\psi|\psi)}\right),$$

où l'opérateur de moyenne $\langle\cdot\rangle$ est à préciser et $(\cdot|\cdot)$ dénote le produit scalaire standard sur L^2. On montre (*c.f.* [**?**, sec. 4.1 et eq. (36)]) que ce problème de maximisation est équivalent au problème au valeurs propres

$$\int_\Omega \mathrm{R}(x,x')\,\varphi(x')\;\mathrm{d}\,x' = \lambda\,\varphi(x), \tag{4}$$

où R dénote l'opérateur de corrélation spatiale. Dans le cas de la POD par Snapshots, la moyenne correspond à la moyenne d'ensemble sur les n_{T} clichés $\langle\alpha(x,t)\rangle \triangleq \frac{1}{n_{\mathrm{T}}}\sum_{k=1}^{n_{\mathrm{T}}}\alpha(x,t_k)$, et **sous les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité**, on a [**?**, p. 32]:

$$R(x,x') = \frac{1}{n_{\mathrm{T}}}\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{T}}} u(x,t_i)\otimes u^*(x',t_i) \tag{5}$$

On fait alors l'hypothèse que les φ_i s'écrivent comme combinaison linéaire des n_{T} clichés de la solution:

$$\varphi_j = \gamma_{j,k}\, \bar{u}(x, t_k). \tag{6}$$

En injectant l'ersatz (6) dans le problème aux valeurs propres (4), on obtient [**?**, eq. (37)]:

$$\frac{1}{n_{\mathrm{T}}} \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{T}}} \big(u(x', t_k) | u(x', t_i)\big) \gamma_{j,k} = \lambda_j\, \gamma_{j,i}, \quad 1 \leq i \leq n_{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

i.e.

$$\mathbf{C}\, \gamma_j = \lambda_j\, \gamma_j, \tag{8}$$

où $\gamma_j = (\gamma_{j,1}, \cdots, \gamma_{j,n_{\mathrm{T}}})^{\mathsf{T}}$ et

$$\begin{array}{rcl} C_{k,i} & = & \frac{1}{n_{\mathrm{T}}} \int_\Omega u^*(x, t_k)\, u(x, t_i)\; \mathrm{d}\,\Omega \\ & \simeq & \frac{1}{n_{\mathrm{T}}} \sum_{n=1}^{n_{\text{nœuds}}} u^*(x_n, t_k)\, u(x_n, t_i). \end{array}$$

5 Modèle réduit

5.1 Structure de données

On dispose d'une matrice $\widetilde{\mathbf{D}}$ représentant des données simulées:

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1; t_1) & \cdots & \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1; t_{n_{\mathrm{T}}}) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_{n_{\mathrm{X}}}; t_1) & \cdots & \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_{n_{\mathrm{X}}}; t_{n_{\mathrm{T}}}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{X}} \times n_{\mathrm{T}}} \tag{9}$$

avec

- la séquence de points du domaine spatial $(\boldsymbol{x}_i)_{1 \leq i \leq n_{\mathrm{X}}}$, $\boldsymbol{x}_i \in \Omega$,
- la séquence ordonnée d'instants $(t_j)_{1 \leq j \leq n_{\mathrm{T}}}$, $t_j \in T$, $t_j < t_{j+1}$.

Le problème est de restructurer ces données afin de définir des équivalents discrets aux opérateurs *produit scalaire* et *gradients*. On choisit de représenter ces données par un tenseur $\mathbf{D}$ d'ordre n_{C} exprimé en coordonnées sur une base $\{\boldsymbol{e}_c\}_{1 \leq c \leq n_{\mathrm{C}}}$ avec n_{C} le nombre de composantes spatiales. On associe au domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\mathrm{C}}}$ le plus petit domaine parallélépipédique $\overline{\Omega} = \big\{\boldsymbol{x} \in \prod_{c=1}^{n_{\mathrm{C}}} [x_c^{\min},\, x_c^{\max}] \subseteq \mathbb{R}^{n_{\mathrm{C}}}\big\}$ qui contient Ω.

5.2 Opérateurs discrets

On cherche à définir les opérateurs gradient, et produit scalaire nécessaires à la formulation du modèle réduit.

Gradient discret Par définition du gradient

5.3 Projection sur la base POD

On suppose les $\{\phi_i\}_{1\leq i\leq N_{\mathrm{POD}}}$ orthonormés[1]. Dans toute la suite, le produit scalaire considéré correspond au produit scalaire discret:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{u} = (u_i)_{1\leq i\leq n_{\text{nœuds}}}\\ \boldsymbol{v} = (v_j)_{1\leq j\leq n_{\text{nœuds}}}\end{array}\right\} \to (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) \triangleq u_i\, v_i. \tag{10}$$

5.4 formulation faible sur la base POD

On réécrit le problème (1) pour la solution approchée sur la base POD $\{\varphi_j(x)\}_{1\leq j\leq N_{\mathrm{POD}}\leq N_{\mathrm{t}}}$:

$$\tilde{u}(x,t) = \beta_j(t)\,\varphi_j(x),$$

c'est à dire

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial t}\underbrace{\int_\Omega \varphi_j\,\varphi_i\;\mathrm{d}\,\Omega}_{\overline{A}_{i,j}} - \beta_j\;\underbrace{\left[k\,\nabla\varphi_j\,\varphi_i\right]_{\partial\Omega}}_{\overline{C}_{i,j}} + \beta_j\;\underbrace{\int_\Omega k\,\nabla\varphi_j\;\nabla\varphi_i\,\mathrm{d}\,\Omega}_{\overline{B}_{i,j}} = \underbrace{\int_\Omega f\,\varphi_i\,\mathrm{d}\,\Omega}_{\overline{f}_i}, \quad 1\leq i\leq N_{\mathrm{POD}},$$

ou encore, avec $\beta = (\beta_j)_{1\leq j\leq N_{\mathrm{POD}}}$:

$$\overline{\mathbf{A}}\,\frac{\partial\beta}{\partial t} + (\overline{\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{C}})\,\beta = \overline{\boldsymbol{f}}.$$

[1] Si la base n'est que orthogonale, on normalise chaque élément: $\phi_i \leftarrow (\phi_i|\phi_i)^{-1}\,\phi_i$; $1\leq i\leq N_{\mathrm{POD}}$.