Interpolation sur la variété de Grassmann

Rolando Mosquera

20 février 2016

Résumé

Dans ce rapport, nous allons donner une justification rigoureuse de la méthode d'interpolation sur la variétés de Grassmann. Nous allons rappeler comment munir la variété de Grassmann d'une structure de variété Riemannienne, d'une connexion et nous présenterons aussi une formule pour les géodésiques. Nous trouverons des expressions pour l'exponentiel géodésique et pour son inverse, qui dépendent explicitement de conditions initiales. Nous finissons ce rapport en appliquant cette procédure d'interpolation aux espaces engendres par les bases d'ordre réduit issues de la projection de Petrov-Galerkin .

Table des matières

1 La variété de Grassmann 1

2 Structure différentiable sur la variété Grassmann 2

4 Structure Riemannienne sur la variété de Grassmann 4

5.1 Connexion Riemannienne sur les variétés quotients 7

5.2 Géodésiques sur la variété de Grassmann 9

5.3 Application exponentielle et logarithme sur la variété de Grassmann 11

6 Interpolation des bases d'ordre réduit issues de la projection de Petrov-Galerkin 13

1 La variété de Grassmann

Soient n, k deux entiers avec $k \leq n$, la variété de Grassmann note par $G_k(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des tous les $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Pour $k = 1$, $G_1(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de droites passant par l'origine et on l'appelle espace projective. La variété de Grassmann $G_k(\mathbb{R}^n)$ peut être réalisé de plusieurs façons voici quelques unes :

1. Si l'on note par $\mathbb{R}_*^{n\times k}$ l'ensemble de matrices de taille $n \times k$, dont ces colonnes sont linéairement indépendantes ; la variété de Grassmann peut être réalise a partir de la relation d'équivalence définie sur $\mathbb{R}_*^{n\times k}$ $X \sim Y$ si et seulement si span(X)= span(Y), où span(X) note le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice X.
2. Comme une partie de l'ensemble de matrices symétriques ; plus précisément
$$G_k(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} :^t X = X, X^2 = X, trX = k\right\}$$
3. On peut réaliser la variété de Grassmann comme un espace homogène à partir de l'action à droite
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^{n\times k} \times GL_k(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^{n\times k} \\ (X, A) & \mapsto & XA \end{array}$$

La réalisation de la variété de Grassmann $G_k(\mathbb{R}^n)$ qui est plus pertinent pour l'interpolation est la première, car on va se retrouver à manipuler de matrices de taille $n \times k$ lequel représente une grande avantage du point de vue numérique.

2 Structure différentiable sur la variété Grassmann

Dans cette section, on va montrer comment munir d'une structure différentiable la variété de Grassmann $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.1. *Soient $X, Y \in \mathbb{R}_*^{n\times k}$, la relation d'équivalence $X \sim Y$ si et seulement si span(X)= span(Y) vérifie les propriétés suivantes :*

(i) La projection canonique $\pi : \mathbb{R}_*^{n\times k} \to G_k(\mathbb{R}^n)$ est une application continue et ouverte.

(ii) $G_k(\mathbb{R}^n)$ est un espace topologique séparé.

Preuve. Pour la partie i) pour voir que π est une application ouverte, il suffit de remarquer que si $U \subset \mathbb{R}_*^{n\times k}$ est un sous-ensemble ouvert alors

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{M\in GL_k(\mathbb{R})} UM$$

.

Pour ii) il suffit de montrer que graph($\sim$) $:= \{(X,Y) \in \mathbb{R}_*^{n\times k} \times \mathbb{R}_*^{n\times k} : X \sim Y\}$ est un sous-ensemble fermé.
En effet, graph($\sim$) $= F^{-1}(0_{n\times k})$ en étant

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}_*^{n\times k} \times \mathbb{R}_*^{n\times k} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n\times k} \\ & (X,Y) & \mapsto & Y - X({}^tXX)^{-1}\,{}^tXY \end{array}$$

une application continue.

On peut remarquer que $G_k(\mathbb{R}^n)$ est aussi un espace topologique compact, car par la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt on peut montrer que $G_k(\mathbb{R}^n) = \pi(\mathcal{ST}(k,n))$; où $\mathcal{ST}(k,n)$ est l'ensemble de toutes les matrices X de $\mathbb{R}^{n\times k}$ tel que ${}^tXX = I_k$.

Maintenant, on va construire un atlas différentiable sur le variété de Grassmann. Soit $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ et soit $I = \{i_1, \cdots, i_k\}$ une famille d'entiers tels que $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$. On note par X^I la sous-matrice de X formée par les lignes $i_1, \cdots, i_k$, et par X^{I^0} la sous-matrice de X formée par les lignes restantes, on a clairement $X^I \in \mathbb{R}^{k\times k}$ et $X^{I^0} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$. On considère également l'ensemble

$$V_I := \{X \in \mathbb{R}_*^{n\times k} : X^I \in GL_k(\mathbb{R})\}$$

Lemme 3. *L'ensemble V_I vérifié les propriétés suivantes :*

(i) Si $X \in V_I$ et $M \in GL_k(\mathbb{R})$ alors $XM \in V_I$.

(ii) Soit $X \in V_I$; alors il existe un unique $M \in GL_k(\mathbb{R})$ tel que $(XM)^I = I_k$.

Preuve. La preuve de i) est élémentaire, on va montrer ii). On va voir que $X^I \in GL_k(\mathbb{R})$ vérifie

$$\left(X(X^I)^{-1}\right)^I = I_k$$

En effet pour tout $1 \leq j \leq k$ et $1 \leq \alpha \leq k$, on a

$$\begin{aligned}
\left(X(X^I)^{-1}\right)^I_{i_\alpha j} &= \sum_{l=1}^{k} X_{i_\alpha l}(X^I)^{-1}_{lj} \\
&= \sum_{l=1}^{k} (X^I)_{i_\alpha l}(X^I)^{-1}_{lj} \\
&= \left(X^I(X^I)^{-1}\right)_{i_\alpha j} \\
&= (I_k)_{i_\alpha j}
\end{aligned}$$

Maintenant soient $M_1, M_2 \in GL_k(\mathbb{R})$ tels que $(XM_1)^I = (XM_2)^I = I_k$ on a

$$XM_2 = XM_1(M_1^{-1}M_2)$$

donc

$$(XM_2)^I = (XM_1)^I(M_1^{-1}M_2)$$

ainsi $M_1^{-1}M_2 = I_k$.

Proposition 3.1. *L'ensemble $\{V_I\}_I$ vérifié les propriétés suivantes :*

(i) $\{\pi(V_I)\}_I$ *est un recouvrement ouvert de* $G_k(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\pi^{-1}(\pi(V_I)) = V_I$.

(iii) $\pi_{|_{V_I}} : V_I \to \pi(V_I)$ *est une application continue et ouverte.*

Preuve. Pour i) comme π est une application ouverte et surjective, il suffit de remarquer que $\{V_I\}_I$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}_*^{n\times k}$. Pour la partie ii) si on prend $X \in \pi^{-1}(\pi(V_I))$ alors il existe $Y \in V_I$ tel que $X \sim Y$ donc $X = YM$ avec $M \in GL_k((\mathbb{R})$ donc par la partie i) du lemme précédent on a $X \in V_I$. Le point iii) est conséquence immédiate de la proposition 2.1.

Proposition 3.2. *L'application $s_I : \pi(V_I) \to V_I$ qu'à chaque élément L de $\pi(V_I)$ lui associe $s_I(L)$ l'unique représentation matricielle de L dans V_I tel que $(s_I(L))^I = I_k$, est une section continue de $\pi_{|_{V_I}}$.*

Preuve. Depuis la partie ii) du lemme 3 s_I est bien défini ; en plus si $X \in V_I$ est tel que $\pi(X) = L$ alors $s_I(L) = X(X^I)^{-1}$.
D'un autre côté comme

$$s_I \circ \pi_{|_{V_I}}(X) = X(X^I)^{-1}$$

est une application continue ; par définition de la topologie quotient, on a s_I est une application continue. Finalement clairement on a $\pi_{|_{V_I}} \circ s_I = id_{\pi(V_I)}$.

Proposition 3.3. *Soit $\varphi_I : \pi(V_I) \to \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$ l'application définie par*

$$\varphi_I(L) = (s_I(L))^{I^0}$$

alors les paires $\{(\pi(V_I), \varphi_I)\}_I$ définissent une structure de variété différentiable sur $G_k(\mathbb{R}^n)$ de dimension $k \times (n-k)$.

Preuve. On a déjà vu que $\{\pi(V_I)\}_I$ est un recouvrement ouverte de $G_k(\mathbb{R}^n)$, on va montrer que φ_I admet une inverse continue. En effet on définie l'application

$$\varphi_I^{-1} : \mathbb{R}^{(n-k)\times k} \to \pi(V_I)$$

par $\varphi_I^{-1}(Y) = \pi(A)$, où A est définie par $A^I = I_k$ et $A^{I^0} = Y$. Comme l'application $Y \mapsto A$ est continue de $\mathbb{R}^{(n-k)\times k}$ dans V_I on a φ_I^{-1} est une application continue. D'un autre côté

$$\begin{aligned}
\varphi_I(\varphi_I^{-1}(Y)) &= \varphi_I(\pi(A)) \\
&= (s_I(\pi(A)))^{I^0} \\
&= \left(A(A^I)^{-1})\right)^{I^0} \\
&= A^{I^0} \qquad \text{car } A^I = I_k \\
&= Y
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi_I^{-1}(\varphi_I(L)) &= \varphi_I^{-1}\left((s_I(L))^{I^0}\right) \\
&= \varphi_I^{-1}\left((B(B^I)^{-1})^{I^0}\right) \qquad \text{où } B \in V_I \text{ est tel que } \pi(B) = L \\
&= \pi\left((B(B^I)^{-1}\right) \\
&= \pi(B) \\
&= L
\end{aligned}$$

Maintenant supposons que $\pi(V_I) \cap \pi(V_J) \neq \emptyset$, on va montrer que

$$\varphi_J \circ \varphi_I^{-1} : \varphi_I\left(\pi(V_I) \cap \pi(V_J)\right) \to \varphi_J\left(\pi(V_I) \cap \pi(V_J)\right)$$

est différentiable.
En effet, soit $Y \in \varphi_I(\pi(V_I) \cap \pi(V_J))$ et soit $A \in \mathbb{R}_*^{n\times k}$ tel que $A^I = I_k, A^{I^0} = Y$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_J(\varphi_I^{-1}(Y)) &= \varphi_J(\pi(A)) \\
&= (s_J(\pi(A)))^{J^0} \\
&= \left(A(A^J)^{-1})\right)^{J^0} \\
&= A^{J^0}(A^J)^{-1}
\end{aligned}$$

ainsi $\varphi_J \circ \varphi_I^{-1}$ est différentiable.

Proposition 3.4. *La projection canonique* $\pi : \mathbb{R}_*^{n\times k} \to G_k(\mathbb{R}^n)$ *est une submersion.*

Preuve. Il suffit de remarquer que les section $s_I : \pi(V_I) \to V_I$ sont différentiables. En effet soit $Y \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$ on a

$$\begin{aligned}
s_I \circ \varphi_I^{-1}(Y) &= s_I(\pi(A)) \\
&= A(A^I)^{-1} \\
&= A
\end{aligned}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ est tel que $A^I = I_k$ et $A^{I^0} = Y$, donc s_I est différentiable.

4 Structure Riemannienne sur la variété de Grassmann

La variété $\mathbb{R}_*^{n\times k}$ est une variété Riemannienne si on la munit de la métrique g définie par

$$g_Y(Z_1, Z_2) = tr(({}^tYY)^{-1}\, {}^tZ_1 Z_2)$$

où $Y \in \mathbb{R}_*^{n\times k}$ et $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Comme par la proposition précédente chaque fibre $\pi^{-1}(\bar{X})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}_*^{n\times k}$ de dimension k^2 et étant $\mathbb{R}_*^{n\times k}$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{n\times k}$; pour chaque $Y \in \pi^{-1}(\bar{X})$ on a la décomposition suivante :

$$\mathbb{R}^{n\times k} = T_Y\pi^{-1}(\bar{X}) \oplus (T_Y\pi^{-1}(\bar{X}))^\perp$$

Le sous-espace $H_Y := (T_Y\pi^{-1}(\bar{X}))^\perp$ est appelé espace horizontal dans Y, et le sous-espace $V_Y := T_Y\pi^{-1}(\bar{X})$ est appelé espace vertical dans Y.

Comme $\pi^{-1}(\bar{Y}) = YGL_k(\mathbb{R})$, on a

$$V_Y = Y\mathbb{R}^{k\times k}$$

et

$$H_Y = \{Z \in \mathbb{R}^{n\times k} : {}^tZY = 0\}$$

. Les projections associées sont

$$\begin{array}{rccc} P_Y^v : & \mathbb{R}^{n\times k} & \to & V_Y \\ & Z & \mapsto & Y({}^tYY)^{-1}\,{}^tYZ \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} P_Y^h : & \mathbb{R}^{n\times k} & \to & H_Y \\ & Z & \mapsto & Z - Y({}^tYY)^{-1}\,{}^tYZ \end{array}$$

appelées projections horizontales et verticales respectivement.

Lemme 5. *Soit $Y \in \pi^{-1}(\bar{X})$, on a que l'application $(d_Y\pi)_{|_{H_Y}} : H_Y \to T_{\bar{X}}G_k(\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme.*

Preuve. En effet, clairement $V_Y \subset \text{Ker } \mathrm{d}_Y\pi$ et comme π est une submersion on a

$$\begin{array}{rcl} \dim\,\pi^{-1}(\bar{X}) & = & \dim(\mathbb{R}^{n\times k}) - \dim(G_k(\mathbb{R}^n)) \\ & = & \dim\,\text{Ker } \mathrm{d}_Y\pi + \dim\,\text{Im } \mathrm{d}_Y\pi - \dim(G_k(\mathbb{R}^n)) \\ & = & \dim\,\text{Ker } \mathrm{d}_Y\pi \end{array}$$

Ainsi, on a montré $V_Y = \text{Ker } \mathrm{d}_Y\pi$ donc $\mathrm{d}_Y\pi_{|_{H_Y}}$ est une application linaire injective, on conclut en remarquant que dim $\mathrm{H}_Y = \dim(G_k(\mathbb{R}^n))$.

Maintenant, on va montrer comment munir la variété Grassmann d'une métrique Riemannienne. Pour cela, à chaque vecteur tangent dans $G_k(\mathbb{R}^n)$, on souhait lui associer un seul vecteur tangent dans $\mathbb{R}_*^{n\times k}$. Par le lemme 4, on sait que étant donné un vecteur tangent $\bar{\xi} \in T_{\bar{Y}}G_k(\mathbb{R}^n)$, pour chaque $A \in GL_k(\mathbb{R})$ il existe un unique $\xi_{_{YA}} \in H_{YA}$ tel que $d_{_{YA}}\pi(\xi_{_{YA}}) = \bar{\xi}$, donc pour définir une métrique sur le variété de Grassmann, on doit montrer que l'expression suivante :

$$g_{_{YA}}(\xi_{_{YA}}, \eta_{_{YA}}) \tag{1}$$

est indépendante de A, où $\bar{\eta} \in T_{\bar{Y}}G_k(\mathbb{R}^n)$. Ceci va découler de la proposition suivante.

Proposition 5.1. *Soit $Y \in \mathbb{R}_*^{n\times k}$ et soit $\bar{\xi} \in T_{\bar{Y}}G_k(\mathbb{R}^n)$, alors pour chaque $A \in GL_k(\mathbb{R})$ on a $\xi_{_{YA}} = \xi_{_Y}A$, où $\xi_{YA} \in H_{YA}$ et $\xi_Y \in H_Y$.*

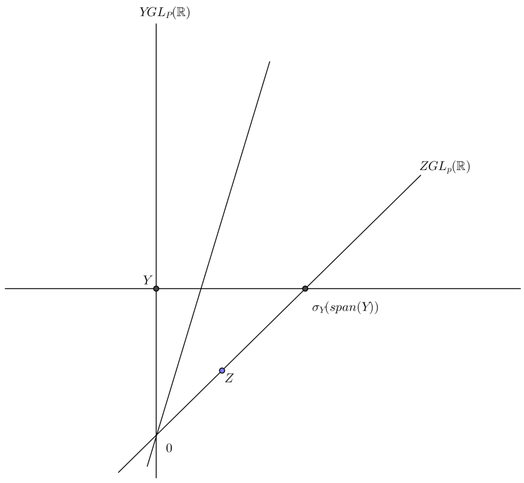
Preuve. Soit Y comme dans l'énoncé de la proposition, on considère l'ensemble $U_Y := \{Z \in \mathbb{R}_*^{n\times k} : {}^tYZ \in GL_k(\mathbb{R})\}$ qui est un voisinage ouvert de Y. Alors $\pi(U_Y)$ est l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$ qui ne contiennent aucune direction orthogonale à span(Y) et est un voisinage ouvert de $\bar{Y}$ de que π est une application ouverte. On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} s_Y : & \pi(U_Y) & \to & U_Y \\ & \bar{Z} & \mapsto & Z({}^tYZ)^{-1}\,{}^tYY \end{array}$$

s_Y est bien défini et vérifie

$$\pi_{|U_Y} \circ s_Y = id \tag{2}$$

Si on considère la section transversale affine $E_Y := \{W \in \mathbb{R}_*^{n\times k} : {}^tY(W-Y) = 0\}$ orthogonale à la fibre $YGL_k(\mathbb{R})$, on a clairement $\mathrm{Im}\sigma_Y = E_Y$ donc $s_Y : \pi(U_Y) \to E_Y$ est une bijection entre une partie de $G_k(\mathbb{R}^n)$ et le sous-espace affine E_Y de $\mathbb{R}_*^{n\times k}$



Soit $\bar{Z} \in \pi(U_Y)$, on va montrer Im $\mathrm{d}_{\bar{Z}}s_Y = H_Y$.
En effet, soit $\gamma : I \to \pi(U_Y)$ tel que $\gamma(0) = \bar{Z}$, comme ${}^tYs_Y(\gamma(t)) -{}^t YY = 0$ on a ${}^tY\frac{d}{dt}_{|t=0}s_Y(\gamma(t)) = 0$ donc Im $\mathrm{d}_{\bar{Z}}\sigma_Y \subset H_Y$.
D'un autre côté

$$\begin{array}{rcl} \dim \mathrm{T}_{\bar{Z}}\pi(U_Y) & = & \dim G_k(\mathbb{R}^n) \\ & = & \dim \mathrm{H}_Y \end{array}$$

et comme par (2) $d_{\bar{Z}}s_Y$ est injective alors on a bien

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{d}_{\bar{Z}}s_Y = H_Y \tag{3}$$

Maintenant soit $\bar{\xi} \in T_{\bar{Y}}G_k(\mathbb{R}^n)$ pour chaque $A \in GL_k(\mathbb{R})$ il existe un unique vecteur tangent $\xi_{YA} \in H_{YA}$ tel que $d_{YA}\pi(\xi_{YA}) = \bar{\xi}$. Par (2) on sait que

$d_{YA}\pi(d_{\bar{Y}}s_{YA}(\bar{\xi})) = \bar{\xi}$ donc (3) implique que $d_{\bar{Y}}s_{YA}(\bar{\xi}) = \xi_{YA}$. Par conséquent, comme $s_{YA}(\bar{Z}) = s_Y(\bar{Z})A$ on a

$$\begin{aligned}
\xi_{YA} &= d_{\bar{Y}}s_{YA}(\bar{\xi}) \\
&= d_{\bar{Y}}(s_Y.A)(\bar{\xi}) \\
&= d_{\bar{Y}}s_Y(\bar{\xi}).A \\
&= \xi_Y.A
\end{aligned}$$

On peut remarquer que sur toute variété M qui vérifie une condition type (1), on peut définir une métrique Riemannienne sur la variété quotient. Munie de cette métrique, la variété $M/\sim$ est appelée variété quotient Riemannienne de M.

5.1 Connexion Riemannienne sur les variétés quotients

Soit M une variété Riemannienne et soit $M/\sim$ la variété quotient riemannienne associée. On note par (H, M, p) le fibré vectoriel qui a pour fibre l'espace horizontal H_x, clairement H est un sous-fibré du fibre tangent TM. Par le lemme 4, on a l'application tangent $d\pi|_H : H \to T(M/\sim)$ est tel que sa restriction à chaque fibre est un isomorphisme d'espaces vectoriels, donc par un résultat classique de la théorie des fibres vectoriels $d\pi|_H$ est un isomorphisme dans la catégorie des fibres vectoriels.
Etant donné un champ vectoriel $\bar{X}$ sur $M/\sim$, on peut lui associer un champ vectoriel X sur M défini par $X := (d\pi_{|_H})^{-1} \circ \bar{X} \circ \pi$, ce champ sera appelé le champ vectoriel horizontal associé à $\bar{X}$.
Nous allons annoncer quelques résultas sur les variétés quotients qui vont nous permettre de trouver une formule pour les géodésiques sur la variété de Grassmann, pour une preuve le lecteur peut se rapporter à Lang Serge [4].

Proposition 5.2. *Soient ∇ et $\bar{\nabla}$, les connexions Riemanniennes sur M et $M/\sim$ respectivement. Alors pour tous champs vectoriels $\bar{X}, \bar{Y}$ sur $M/\sim$ et pour tout $a \in M$ on a*

$$(d_a\pi)^{-1}_{|_{H_a}}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}(\bar{a})) = P^h_a(\nabla_X Y(a))$$

où $P^h_a : T_aM \to H_a$ est la projection horizontale et X, Y sont les champs horizontaux associés.

Définition 5.1. *Soit M un espace vectoriel (ou un ouvert dans un espace vectoriel) muni d'une métrique Riemannienne g non-constante. On dit que la métrique est horizontalement invariante si pour tous champs vectoriels X, Y sur M, pour tout $y \in M$ et $\eta \in H_y$, on a*

$$d_y g(X, Y)(\eta) = g(d_y X(\eta), Y(y)) + g(X(y), d_y Y(\eta))$$

Proposition 5.3. *Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente, si en plus M est un espace vectoriel (ou un ouvert dans un espace vectoriel) et la métrique est horizontalement invariante on a*

$$(d_a\pi)^{-1}_{|_{H_a}}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}(\bar{a})) = P^h_a(d_a Y(X(a)))$$

.

Définition 5.2. *Soit $t \mapsto \bar{\xi}(t) \in TG_k(\mathbb{R}^n)$ un champ vectoriel défini le long de la courbe $t \mapsto \gamma(t) \in G_k(\mathbb{R}^n)$. On dit que le champ $\bar{\xi}$ est transporté parallèlement le long de γ si*

$$\overline{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)}\bar{\xi} = 0$$

pour tout t, où $\overline{\nabla}$ note la connexion Riemannienne sur la variété de Grassmann.

Définition 5.3. *Une courbe* $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}_*^{n\times k}$ *est appelée horizontale sur* $\mathbb{R}_*^{n\times k}$ *si* $\dot{Y}(t) \in H_{Y(t)}$ *pour tout* t.

Théorème 5.1. *Soit* $t \mapsto \gamma(t) \in G_k(\mathbb{R}^n)$ *une courbe lisse avec* $\gamma'(t) \neq 0$ *pour tout* t, *et soit* $Y_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. *Alors*

(i) Il existe un unique relèvement horizontal $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}_*^{n\times k}$ *avec condition initiale* $Y(0) = Y_0$.

(ii) $t \mapsto \gamma(t) \in G_k(\mathbb{R}^n)$ *est une géodésique si et seulement si* $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}_*^{n\times k}$ *est une géodésique.*

Proposition 5.4. *Soit* $t \mapsto \gamma(t) \in G_k(\mathbb{R}^n)$ *une courbe lisse et soit* $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}_*^{n\times k}$ *la courbe horizontale associée à* γ *par le théorème précédent. Soit* $t \mapsto \bar{\xi}(t) \in TG_k(\mathbb{R}^n)$ *un champ vectoriel défini le long de la courbe* γ *; alors le champ* $\bar{\xi}$ *est transporté parallèlement le long de* γ *si et seulement si*

$$\dot{\xi}(t) + Y(t)({}^tY(t)Y(t))^{-1}\ {}^t\dot{Y}(t)\xi(t) = 0 \tag{4}$$

où $\xi = (d\pi|_H)^{-1} \circ \bar{\xi}$.

Preuve. D'abord comme $H_{Y(t)} \subset T_{Y(t)}(\mathbb{R}_*^{n\times k})$ on a ξ est un champ le long de la courbe Y. Maintenant étant $\frac{D\bar{\xi}}{dt}(t) = \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)}\bar{\xi}$ un élément de $T_{\gamma(t)}G_k(\mathbb{R}^n)$ et $(d_{Y(t)}\pi)_{|H_{Y(t)}} : H_{Y(t)} \to T_{\gamma(t)}G_k(\mathbb{R}^n)$ un isomorphisme linaire on a

$$\frac{D\bar{\xi}}{dt}(t) = 0 \ \text{ si et seulement si } (d_{Y(t)}\pi)^{-1}_{|H_{Y(t)}}\left(\frac{D\bar{\xi}}{dt}(t)\right) = 0 \in \mathbb{R}^{n\times k}$$

Soient $\bar{X}, \bar{Z} \in \mathfrak{X}(G_k(\mathbb{R}^n))$ tels que $\bar{Z} \circ \gamma(t) = \bar{\xi}(t)$, $\bar{X} \circ \gamma(t) = \dot{\gamma}(t)$ et soient $X, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_*^{n\times k})$ les champs vectoriels horizontaux associés. On a

$$\begin{aligned} Z \circ Y(t) &= (d_{Y(t)}\pi)^{-1}_{|H_{Y(t)}} \circ \bar{Z} \circ \pi \circ Y(t) \\ &= (d_{Y(t)}\pi)^{-1}_{|H_{Y(t)}} \circ \bar{\xi}(t) \\ &= \xi(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} X \circ Y(t) &= (d_{Y(t)}\pi)^{-1}_{|H_{Y(t)}} \circ \bar{X} \circ \pi \circ Y(t) \\ &= (d_{Y(t)}\pi)^{-1}_{|H_{Y(t)}} \circ \dot{\gamma}(t) \\ &= \dot{Y}(t) \end{aligned}$$

La métrique définie sur la variété Grassmann étant horizontalement invariante et comme $\mathbb{R}_*^{n\times k}$ est un sous-ensemble ouvert dans un espace vectoriel, par la proposition 5.2 on a

$$\begin{aligned} (d_{Y(t)}\pi)^{-1}_{|H_{Y(t)}}\left(\frac{D\bar{\xi}}{dt}(t)\right) &= (d_{Y(t)}\pi)^{-1}_{|H_{Y(t)}}\left(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z}(\gamma(t))\right) \\ &= P^h_{Y(t)}(\nabla_{\dot{Y}(t)}\xi) \end{aligned}$$

mais $P^h_{Y(t)}(\nabla_{\dot{Y}(t)}\xi) = 0$ si et seulement si $\nabla_{\dot{Y}(t)}\xi \in V_{Y(t)} = Y(t)\mathbb{R}^{k\times k}$. Comme ∇ est la connexion Riemannienne dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n\times k}$ on a

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{\dot{Y}(t)}\xi) &= (\nabla_X Z)(Y(t)) \\
&= d_{Y(t)}Z(X \circ Y(t)) \\
&= d_{Y(t)}Z(\dot{Y}(t)) \\
&= \frac{d}{ds}_{|s=t}(Z \circ Y)(s) \\
&= \frac{d}{ds}_{|s=t}\xi(s)
\end{aligned}
$$

donc $P^h_{Y(t)}(\nabla_{\dot{Y}(t)}\xi) = 0$ si et seulement si il existe $M(t) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ tel que

$$\dot{\xi}(t) = Y(t)M(t) \tag{5}$$

De (5) on obtient

$$M(t) = ({}^tY(t)Y(t))^{-1}\,{}^tY(t)\dot{\xi}(t) \tag{6}$$

D'un autre côté $\xi(s) \in H_{Y(s)}$ implique ${}^tY(s)\xi(s) = 0$, alors

$${}^t\dot{Y}(s)\xi(s) +^t Y(s)\dot{\xi}(s) = 0 \tag{7}$$

donc remplaçant (7) dans (6) on obtient

$$M(t) = -({}^tY(t)Y(t))^{-1}\,{}^t\dot{Y}(t)\xi(t)$$

et finalement remplaçant cette dernière équation dans (5) on a bien

$$\dot{\xi}(t) + Y(t)({}^tY(t)Y(t))^{-1}\ {}^t\dot{Y}(t)\xi(t) = 0$$

5.2 Géodésiques sur la variété de Grassmann

Maintenant, on a tous les ingrédients qui vont nous permettre de trouver une expression pour une géodésique $t \mapsto \gamma(t) \in G_k(\mathbb{R}^n)$ avec point initial $\gamma(0) = \overline{Y}(0)$ et vitesse initiale $\dot{\gamma}(0) \in T_{\gamma(0)}G_k(\mathbb{R}^n)$, où $t \mapsto Y(t)$ est la courbe horizontale associée à γ. La géodésique γ est caractérisée par $\overline{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$, ceci nous dit que le vecteur tangent à γ est transporté parallèlement le long de γ.
Soit ξ_{Y_0} l'unique vecteur tangent dans H_{Y_0} tel que $d_{Y_0}\pi(\xi_{Y_0}) = \dot{\gamma}(0)$ où $Y_0 = Y(0)$. On considère $\xi_{Y_0}({}^tY_0Y_0)^{-1/2} = U\Sigma\,{}^tV$ une décomposition en valeurs singulières. Avec ces hypothèses, on a le théorème suivant :

Théorème 5.2. *La géodésique $t \mapsto \gamma(t)$ s'écrit sous la forme*

$$\gamma(t) = span\Big(Y_0({}^tY_0Y_0)^{-1/2}V\,cos(\Sigma t) + U\,sin(\Sigma t)\Big)$$

Cette formule se simplifie évidement si on prend Y_0 orthonormale.

Preuve. Soient $\gamma, U\Sigma^tV$ et $t \mapsto Y(t)$ comme dans les hypothèses du théorème. Comme $\gamma = \pi \circ Y$ donc $\dot{\gamma}(t) = d_{Y(t)}\pi(\dot{Y}(t))$ et $\dot{Y}(t) \in H_{Y(t)}$ impliquent $\xi_{Y(t)} = \dot{Y}(t)$ en particulier $\xi_{Y_0} = \dot{Y}(0)$. Si dans la formule (4) on fait $\bar{\xi} = \dot{\gamma}$ on a

$$\ddot{Y}(t) + Y(t)({}^tY(t)Y(t))^{-1}\ {}^t\dot{Y}(t)\dot{Y}(t) = 0 \tag{8}$$

Comme $\dot{Y}(t) \in H_{Y(t)}$ on a

$${}^tY(t)\dot{Y}(t) = 0 \tag{9}$$

donc on a ${}^tY(t)Y(t)$ est constante.
D'un autre côté en utiliçant (8) et (9) on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}{}^t\dot{Y}(t)\dot{Y}(t) &= {}^t\ddot{Y}(t)\dot{Y}(t) +^t \dot{Y}(t)\ddot{Y}(t)\\ &= -^t\left(Y({}^tYY)^{-1}\,{}^t\dot{Y}\dot{Y}\right)\dot{Y} -^t\dot{Y}\left(Y({}^tYY)^{-1}\,{}^t\dot{Y}\dot{Y}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc ${}^t\dot{Y}(t)\dot{Y}(t)$ est constant aussi.
A partir de la décomposition $\dot{Y}(0)({}^tYY)^{-1/2} = U\Sigma^tV$ on obtient ${}^t(U\Sigma^tV)(U\Sigma^tV) = V\Sigma^2\,{}^tV$ donc en multipliant à droite par $({}^tYY)^{-1/2}$ dans l'expression (8), on a

$$\ddot{Y}(t)({}^tYY)^{-1/2} + Y(t)({}^tYY)^{-1/2}({}^tYY)^{-1/2}\;{}^t\dot{Y}\dot{Y}({}^tYY)^{-1/2} = 0$$

$$\ddot{Y}(t)({}^tYY)^{-1/2} + Y(t)({}^tYY)^{-1/2}V\Sigma^2\,{}^tV = 0$$

$$\ddot{Y}(t)({}^tYY)^{-1/2}V + Y(t)({}^tYY)^{-1/2}V\Sigma^2 = 0$$

Soit $A := ({}^tY_0Y_0)^{-1/2}V \in \mathbb{R}^{k\times k}$, On doit résoudre l'équation

$$\ddot{Y}(t)A + Y(t)A\Sigma^2 = 0$$

avec conditions initiales $Y(0) = Y_0$ et $\dot{Y}(0) = \dot{Y}_0 \in H_{Y_0}$. On sait aussi que

$$\dot{Y}(0)({}^tY_0Y_0)^{-1/2} = U\Sigma^tV$$

avec $U \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_k)$ et $V \in \mathbb{R}^{k\times k}$ tels que ${}^tUU = I_k$, $\sigma_i > 0$ et ${}^tVV = I_k$.
Si on considère la matrice antisymétrique

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\Sigma \\ \Sigma & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2k\times 2k}$$

et la matrice

$$Q = \left(Y_0A \mid \dot{Y}_0A\Sigma^{-1}\right) \in \mathbb{R}^{n\times 2k}$$

On a que la solution de notre équation est

$$Y(t)A = Q\exp(\mathrm{Xt})I_{2k,k} \quad \text{où} \quad I_{2k,k} := \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

En effet, $\dot{Y}(t)A = Q\exp(\mathrm{Xt})XI_{2k,k}$ et $\ddot{Y}(t)A = Q\exp(\mathrm{Xt})X^2I_{2k,k}$ donc

$$\begin{aligned}\ddot{Y}(t)A + Y(t)A\Sigma^2 &= Q\exp(\mathrm{Xt})X^2I_{2k,k} + Q\exp(\mathrm{Xt})I_{2k,k}\Sigma^2\\ &= Q\exp(\mathrm{Xt})\left(X^2I_{2k,k} + I_{2k,k}\Sigma^2\right)\\ &= Q\exp(\mathrm{Xt})\left(\begin{pmatrix} -\Sigma^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma^2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

et clairement $Y(t)A = Q\exp(\mathrm{Xt})I_{2k,k}$ vérifies les conditions initiales demandes.
Maintenant comme X est une matrice antisymétrique, on peut écrire

$$\exp(\mathrm{Xt}) = \cos(\Sigma t)_{2k\times 2k} + \sin(\Sigma t)_{2k\times 2k}\begin{pmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Y(t)A &= Q\begin{pmatrix} \cos(\Sigma t) \\ 0 \end{pmatrix} + Q\sin(\Sigma t)\begin{pmatrix} 0 \\ I_k \end{pmatrix} \\ &= \left(Y_0A \mid \dot{Y}_0A\Sigma^{-1}\right)\begin{pmatrix} \cos(\Sigma t) \\ 0 \end{pmatrix} + \left(Y_0A \mid \dot{Y}_0A\Sigma^{-1}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\Sigma t) \end{pmatrix} \\ &= Y_0A\cos(\Sigma t) + \dot{Y}_0A\Sigma^{-1}\sin(\Sigma t) \end{aligned}$$

donc

$$Y(t) = \left(Y_0({}^tY_0Y_0)^{-1/2}V\cos(\Sigma t) + \dot{Y}_0({}^tY_0Y_0)^{-1/2}V\Sigma^{-1}\sin(\Sigma t)\right)\ {}^tV({}^tY_0Y_0)^{1/2}$$

Finalement, comme $\gamma(t) = \text{span Y}(t)$ et ${}^tV({}^tYY)^{1/2}$ est inversible on a bien

$$\gamma(t) = \text{span}(Y_0({}^tY_0Y_0)^{-1/2}V\cos(\Sigma t) + U\sin(\Sigma t))$$

5.3 Application exponentielle et logarithme sur la variété de Grassmann

Soit $\bar{Y_0} \in G_k(\mathbb{R}^n)$ et $v \in T_{\bar{Y_0}}G_k(\mathbb{R}^n)$, on a vu que la géodésique de point initial $\bar{Y_0}$ et de vitesse initiale v est donnée par $\gamma_{\bar{Y}_0,v}(t) = \text{span}(Y(t))$ où

$$Y(t) = \left(Y_0({}^tY_0Y_0)^{-1/2}V\cos(\Sigma t) + U\sin(\Sigma t)\right)\ {}^tV({}^tY_0Y_0)^{1/2}$$

est la géodésique horizontale dans $\mathbb{R}_*^{n\times k}$ tel que

$$Y(0) = Y_0 \quad \text{et} \quad \dot{Y}(0) = (d_{Y_0}\pi)^{-1}(v)$$

et

$$(d_{Y_0}\pi)^{-1}(v)({}^tY_0Y_0)^{-1/2} = U\Sigma{}^tV$$

est une décomposition en valeurs singuliers.
L'application exponentielle $\exp_{\bar{Y_0}} : T_{\bar{Y_0}}G_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\exp_{\bar{Y_0}}(v) := \gamma_{\bar{Y}_0,v}(1)$$

On va utiliser le resultat suivante, pour une preuve on peut voir S.E.Kozlov [5].

Théorème 5.3. *Soient n, k deux entiers positives tels que $min\{k, n-k\} \geq 2$; alors le rayon d'injectivité de la variété de Grassmann $G_k(\mathbb{R}^n)$ est $\pi/2$.*

Par le théorème précédente on a $exp_{\bar{Y_0}} : B(0, \pi/2) \to B_d(\bar{Y}_0, \pi/2)$ est un difféomorphisme où $B_d(\bar{Y}_0, \pi/2)$ désigne la boule dans $G_k(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie induite par la distance. Soit $\bar{Z} \in B_d(\bar{Y}_0, \pi/2)$ il existe une unique géodésique $\gamma : \mathbb{R} \to G_k(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\gamma_{\bar{Y}_0,v}(1) = \bar{Z} \text{ et } v = exp^{-1}_{\bar{Y_0}}(\bar{Z})$$

où $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}_*^{n\times k}$ est la géodésique horizontale associe à γ.
Comme $\overline{Y(1)} = \bar{Z}$ il existe $B \in GL_k(\mathbb{R})$ tel que

$$Y(1) = ZB \tag{10}$$

Si l'on considère une décomposition en valeurs singuliers

$$\dot{Y}_0({}^tY_0Y_0)^{-1/2} = U\Sigma{}^tV$$

On a vu que

$$Y(t)A = Y_0 A\cos(\Sigma t) + \dot{Y}_0 A\Sigma^{-1}\sin(\Sigma t) \tag{11}$$

où $A := ({}^tY_0Y_0)^{-1/2}V \in GL_k(\mathbb{R})$, et comme par construction

$$d_{Y_0}\pi : H_{Y_0} \to T_{\bar{Y}_0}G_k(\mathbb{R}^n)$$

est une isométrie donc si $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_k)$ alors

$$\begin{aligned}
d(\bar{Y}_0, \bar{Z})^2 &= d(\bar{Y}_0, exp_{\bar{Y}_0}(v))^2 \\
&= \bar{g}_{\bar{Y}_0}(v, v) \\
&= g_{Y_0}(\dot{Y}_0, \dot{Y}_0) \\
&= tr\left[({}^tY_0Y_0)^{-1/2}V\Sigma^2\left[({}^tY_0Y_0)^{-1/2}V\right]^{-1}\right] \\
&= tr\Sigma^2 \\
&= \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_k^2
\end{aligned}$$

ainsi $|\sigma_i| < \pi/2$ donc il existe un unique $\tilde{\sigma}_i \in \mathbb{R}$ tel que $\tan^{-1}\tilde{\sigma}_i = \sigma_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$, ainsi si $\tilde{\Sigma} := diag(\tilde{\sigma}_1, \cdots, \tilde{\sigma}_k)$ on a $\Sigma = \tan^{-1}(\tilde{\Sigma})$.
On va montrer que les $\tilde{\sigma}_i$ sont les valeurs singuliers de $\left(\pi|_{U_{Y_0}}^{-1}(\bar{Z}) - Y_0\right)({}^tY_0Y_0)^{-1/2}$.
D'abord $d(\bar{Z}, \bar{Y}_0) < \pi/2$ implique $\bar{Z} \cap \bar{Y}_0^{\perp} = \phi$ (ie. ${}^tY_0Z \in GL_k(\mathbb{R})$), donc $Z \in U_{Y_0}$.
On peu remarquer aussi que

$$P_{Y_0}^h(\pi|_{U_{Y_0}}^{-1}(\bar{Z})) = \pi|_{U_{Y_0}}^{-1}(\bar{Z}) - Y_0$$

où $P_{Y_0}^h : \mathbb{R}^{n\times k} \to H_{Y_0}$ est la projection horizontale.
A partir de l'identité $\cos\sigma_i = \tilde{\sigma}_i^{-1}\sin\sigma_i = (1+\tilde{\sigma}_i^2)^{-1/2}$ on s'aperçoit que

$$\cos(\tan^{-1}(\tilde{\Sigma})) = \tilde{\Sigma}^{-1}\sin(\tan^{-1}(\tilde{\Sigma})) = (I_k + \tilde{\Sigma}^2)^{-1/2} \in GL_k(\mathbb{R}) \tag{12}$$

donc de (10),(11) et (12) on a

$$\begin{aligned}
ZBA &= Y(1)A \\
&= Y_0A\cos(\Sigma) + \dot{Y}_0A\Sigma^{-1}\sin(\Sigma) \\
&= \left(Y_0A + \dot{Y}_0A\Sigma^{-1}\tilde{\Sigma}\right)\left(I_k + \tilde{\Sigma}^2\right)^{-1/2} \\
Z &= \left(Y_0A + \dot{Y}_0A\Sigma^{-1}\tilde{\Sigma}\right)\left(I_k + \tilde{\Sigma}^2\right)^{-1/2}(BA)^{-1}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\pi|_{U_{Y_0}}^{-1}(\bar{Z}) &:= Z({}^tY_0Z)^{-1}\,{}^tY_0Y_0 \\
&= \left(Y_0A + \dot{Y}_0A\Sigma^{-1}\tilde{\Sigma}\right)({}^tY_0Y_0)^{-1}({}^tY_0Y_0) \\
&= Y_0 + \dot{Y}_0A\Sigma^{-1}\tilde{\Sigma}A^{-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\pi|_{U_{Y_0}}^{-1}(\bar{Z}) - Y_0 &= \dot{Y}_0({}^tY_0Y_0)^{-1/2}V\Sigma^{-1}\tilde{\Sigma}{}^tV({}^tY_0Y_0)^{1/2} \\
&= (U\tilde{\Sigma}{}^tV)({}^tY_0Y_0)^{1/2}
\end{aligned}$$

donc

$$(\pi|_{U_{Y_0}}^{-1}(\bar{Z}) - Y_0)({}^tY_0Y_0)^{-1/2} = U\tilde{\Sigma}{}^tV$$

Comme $(d_{Y_0}\pi)^{-1}(v) = \dot{Y}_0$, on a montre

$$(d_{Y_0}\pi)^{-1}(exp_{\bar{Y}_0}^{-1}(\bar{Z}))({}^tY_0Y_0)^{-1/2} = U\tan^{-1}(\tilde{\Sigma})^tV$$

i.e

$$exp_{\bar{Y}_0}^{-1}(\bar{Z}) = d_{Y_0}\pi\left(U\tan^{-1}(\tilde{\Sigma})^tV({}^tY_0Y_0)^{1/2}\right)$$

où

$$U\tilde{\Sigma}^tV = (\pi|_{U_{Y_0}}^{-1}(\bar{Z}) - Y_0)({}^tY_0Y_0)^{-1/2}$$

est la décomposition en valeurs singuliers.

6 Interpolation des bases d'ordre réduit issues de la projection de Petrov-Galerkin

Soient $\{y_i = y(\mu_i)\}_{i=1}^N$ un ensemble de points de $G_k(\mathbb{R}^n)$ associé aux paramètres distincts $\mu_1 \dots \mu_N$. On suppose que l'ensemble $\{y_1 \dots y_N\}$ vérifie la condition suivante :
Il existe au moins un point $y_{i_0} \in \{y_1 \dots y_N\}$ tel que $B_d(y_{i_0}, \pi/2)$ et $\{y_1 \dots y_N\}\backslash\{y_{i_0}\}$ ont une intersection non vide où $B_d(y_{i_0}, \pi/2)$ est le domaine de définition de la carte normale dans y_{i_0}. Ce point, on l'appelle point de référence.
Sous ces hypothèses, pour un nouvel paramètre μ la méthode suivante nous permet de lui associer un nouvel point y de M. En effet, On considère $\{y_{i_1} \dots y_{i_l}\} = B_d(y_{i_0}, \pi/2) \cap \{y_1 \dots y_N\}$, donc $\{v_j = \mathrm{Log}_{y_{i_0}}(y_{i_j})\}_{j=1}^l \subset T_{y_{i_0}}M$, et comme chaque élément v_j est représenté par une matrice $\Gamma_j \in \mathbb{R}^{n\times k}$, associé au paramètre μ_j, on peut interpoler chaque $n \times k$ entrée des matrices $\{\Gamma_1 \dots \Gamma_l\}$ pour construire une nouvelle matrice Γ de $\mathbb{R}^{n\times k}$ associé à μ. Si v est le nouvel élément de $T_{y_{i_0}}M$ représenté par la matrice Γ, alors $\exp_{y_{i_0}}(v)$ est un nouvel élément de M associé au paramètre μ.

1. Projection de Galerkin
   Dans le cas de la projection de Galerkin, nous avons des sous-espaces vectoriels $\overline{V}_1(\mu^1), \dots, \overline{V}_N(\mu^N) \in \mathcal{ST}(k,n)/O(k)$. Si on suppose que ces espaces vérifient l'hypothèse demandée dans la section 1, on applique directement la procédure d'interpolation décrite et on obtient un nouveau sous-espace $\overline{V}(\mu)$ associé à un nouveau réel μ. Il faut remarquer que par construction, ce nouveau sous-espace vérifie la contrainte ${}^tV(\mu)V(\mu) = I_k$.
2. Projection de Petrov-Galerkin
   Dans ce cas, nous avons deux ensembles de sous-espaces $\overline{V}_1(\mu^1), \dots, \overline{V}_N(\mu^N) \in \mathbb{R}_*^{n\times k}/\sim$ et $\overline{W}_1(\mu^1), \dots, \overline{W}_N(\mu^N) \in \mathbb{R}_*^{n\times k}/\sim$ qui vérifient la contrainte additionnelle ${}^tW(\mu^i)V(\mu^i) = I_k$. Nous devons trouver un nouveau couple $(\overline{V}(\mu), \overline{W}(\mu))$ d'éléments de $\mathbb{R}_*^{n\times k}/\sim$ associé à un nouveau réel μ tel que ${}^tW(\mu)V(\mu) = I_k$. Si chaque ensemble vérifie la condition requise par la section 1, on interpole séparément chaque ensemble et on obtient un couple $({}^tW(\mu), V(\mu))$, d'éléments de $\mathbb{R}_*^{n\times k}$. Si on normalise $W(\mu)$ et $V(\mu)$ et en supposant que $2k \leq n$ par la procédure de Gram-Schmidt on obtient ${}^tW(\mu)V(\mu) = I_k$.

Références

[1] Absil, P.-A., Mahony, R. and Sepulchre, R., Optimization Algorithms on Matrix Manifolds, Princeton, 2008.

[2] Absil, P.-A., Mahony, R. and Sepulchre, R., Riemannian Geometry of Grassmann Manifolds with a View on Algorithmic Computation, Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 80, No. 2, 2004, pp. 199-220.

[3] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry, volumes 1 and 2, John Wiley Sons, 1963.

[4] Lang Serge. Indroduction to differentiable manifolds.

[5] S.E. Kozlov. Geometry of real Grassmann manifolds.Part 3.