Problème 1

Antonio Falcó

10/8/2019

Question

Un examen comporte quinze questions, chacune ayant trois réponses possibles. Supposons que 70% des étudiants passant l'examen sont bien préparés et répondent correctement à chaque question avec une probabilité de 0.8; les 30% restants répondent au hasard.

1. Caractériser la distribution de S, la note de chaque étudiant, si un point est accordé à chaque bonne réponse.
2. Il faut huit bonnes réponses pour réussir l'examen. Conditionnellement au fait qu'un étudiant réussisse un examen, quelle est la probabilité qu'il était bien préparé?

Reponse

Soit $E \equiv$ ensemble des étudiants et $S \equiv$ note obtenu par l'étudiant à l'examen. Alors, l'ensemble de tous les étudiants on peut l'écrire comme:

$$E = \bigcup_{k=0}^{15} \{S = k\}$$

où $\{S = k\} \equiv$ l'ensemble des étudiants qui a repondu l'examen avec k bonnes reponses, avec $0 \leq k \leq 15$. Soit $RC \equiv$ l'événement avoir une réponse quelqu'un correcte, alors on peut rejoint l'événement $\{S = k\}$ avec l'événement

$$\overbrace{\{RC\} \cap \{RC\} \cap \cdots \cap \{RC\}}^{k} \cap \overbrace{\{\overline{RC}\} \cap \cdots \cap \{\overline{RC}\}}^{15-k}.$$

On peut penser qu'on a une urne avec 15 boules numérotés $\{1, 2, \ldots, 15\}$ et on choix k en représentant les k questions bien répondues, alors ce k questions on peut les choisir entre les 15 possibles avec une totale de $\binom{15}{k}$-combinaisons. Supposant que toutes les réponses sont indépendantes on a:

$$\Pr(\{S = k\}) = \binom{15}{k} \Pr(RC)^k \Pr(\overline{RC})^{15-k}$$

où $\Pr(\overline{RC}) = 1 - \Pr(RC)$ et alors tout depends de la conaissance de la probabilité $\Pr(RC)$. Pour le calculer on utilise la probabilité totale avec l'aide de l'événement

$$Examen \cap BP \equiv \text{ensemble des étudiants passant l'examen et sont bien préparés.}$$

Il est la combinaison de les deux événements:

$$Examen \equiv \text{reussir l'examen}$$

et

$$BP \equiv \text{l'étudiant est bien préparé.}$$

Alors, avec la probabilité totale:

$$\Pr(RC) = \Pr(RC|Examen \cap BP) \Pr(Examen \cap BP) + \Pr(RC|\overline{Examen \cap BP}) \Pr(\overline{Examen \cap BP})$$

comme

$$\Pr(RC|Examen \cap BP) = 0.8,$$

$$\Pr(Examen \cap BP) = 0.7,$$
$$\Pr(\overline{Examen \cap BP}) = 1 - \Pr(Examen \cap BP) = 0.3$$

et

$$\Pr(RC|\overline{Examen \cap BP}) = 1/3,$$

d'où

```
p <- 0.8*0.7+(1/3)*0.3
p
```

```
## [1] 0.66
```

En particulier, S est un variable que suit une loi binomiale avec $n = 15$ et $p = 0.66$. On va construire la distribution de S parmi la fonction

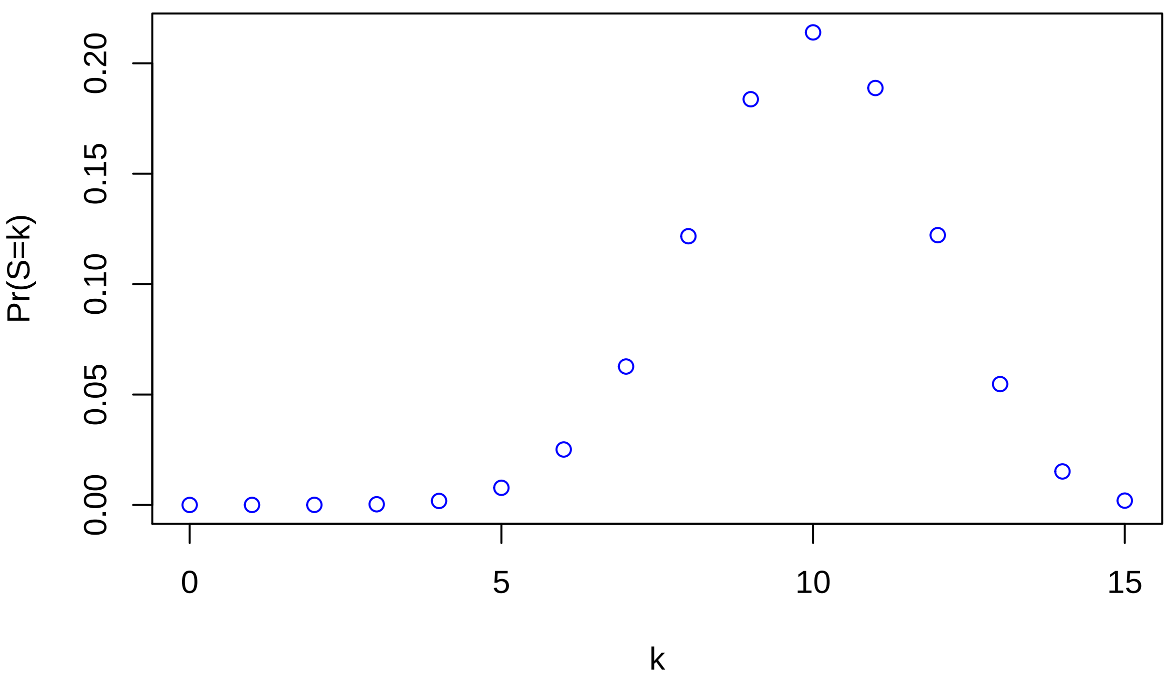
$$k \mapsto \Pr(S = k) = \binom{15}{k} 0.66^k 0.33^{15-k}$$

avec le logiciel R:

```
n <- 15
k <- seq(from=0,to=n,by=1)
S <- dbinom(k,n,p)
```

La distribution de probabilité de S

```
plot(k,S,ylab = "Pr(S=k)" ,col='blue')
```



Maintenant (avec 2.) on sait que l'événement réussi l'examen:

$$Examen = \{S \geq 8\}.$$

ce que nous permet de calculer

$$\Pr(Examen) = \Pr(\{S \geq 8\}) = 1 - \Pr(\{S \leq 7\})$$

avec le logiciel R:

```
Pr.Examen <- 1 - pbinom(7,n,p)
Pr.Examen
```

```
## [1] 0.9022603
```

Alors on a de calculer

$$\Pr(BP|Examen) = \frac{\Pr(BP \cap Examen)}{\Pr(Examen)} = \frac{0.7}{0.9022} = 0.7758812.$$

Question (à rentrer) pour 24/10/2019

Expliquer en utilissant les axiomes de la probabilité pourquoi on peut écrire l'égalité

$$\Pr(\{S \geq 8\}) = 1 - \Pr(\{S \leq 7\})$$