Las leyes de la mecánica newtoniana

Antonio Falcó

Definición

Un **axioma** es una enunciado asumido cierto dentro de la construcción de una teoría científica.

Definición

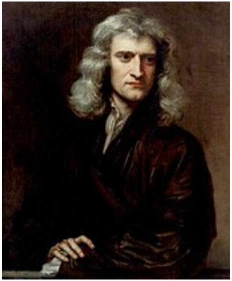
En lógica y matemáticas, un **sistema axiomático** consiste en un conjunto de axiomas que se utilizan para formular y deducir afirmaciones que unidas a los primeros principios (axiomas) constituyen todos juntos el cuerpo de conocimiento de una teoría científica.

Ejemplo

- La geometría euclídea desarrollada por Euclides en su libro sobre los *Elementos*
- La lógica proposicional.
- La teoría de la probabilidad desarrollada por Kolmogorov.
- La mecánica cuántica desarrollada por Von Neumann.

Definición

La mecánica newtoniana es un sistema axiomático construido para estudiar el movimiento de partículas y sólidos. Su formulación básica se basa en la introducción de los llamados **sistemas de referencia inerciales** donde las ecuaciones básicas del movimiento se reducen a las Leyes de Newton, llamadas así en honor a Isaac Newton (1643–1727) quien hizo contribuciones fundamentales a esta teoría.



Primera ley de Newton

Un cuerpo permanece en **estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme** a menos que una fuerza externa no equilibrada actúe sobre él.

Inercia

Newton denominó **inercia** a la propiedad de una partícula que le permite mantenerse en constante estado de movimiento o de reposo. A esta primera ley se le conoce con el nombre de *ley de la inercia.*

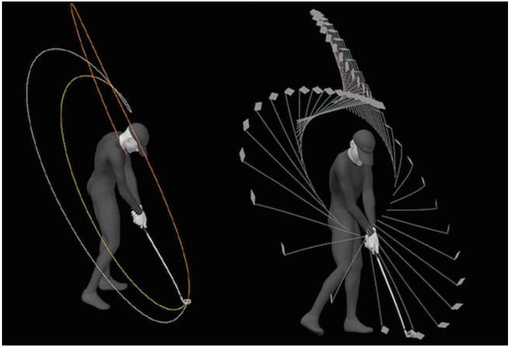
Reposo y movimiento rectilíneo uniforme

Definición

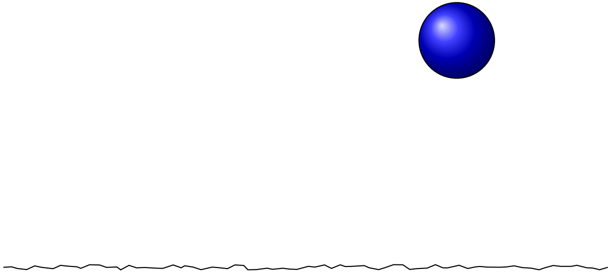
La **cinemática** es la rama de la mecánica que describe las componentes espacio-temporales del movimiento

Datos cinemáticos

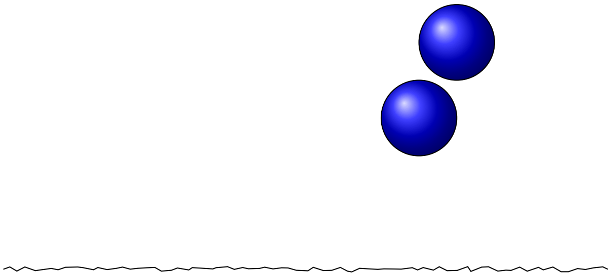
¿Cómo se recogen los datos de un cuerpo en movimiento?



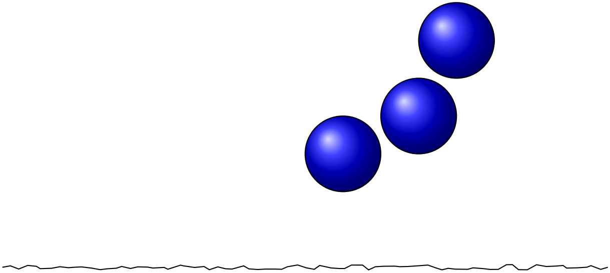
Trayectoria observada



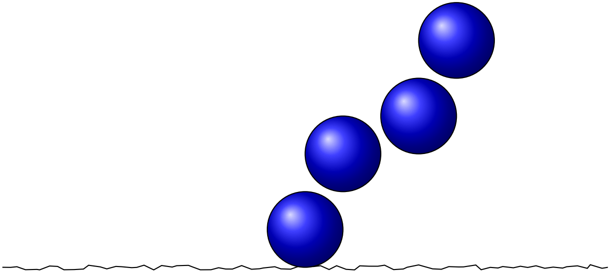
Trayectoria observada



Trayectoria observada

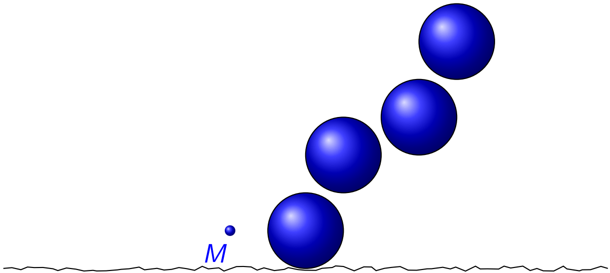


Trayectoria observada



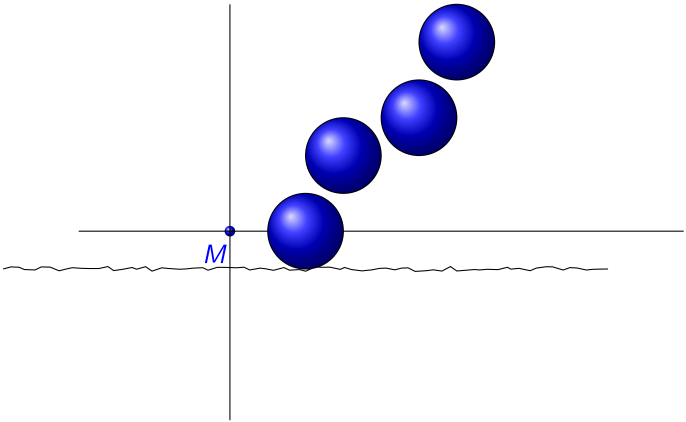
Descripción del movimiento

Fijamos un punto de referencia.



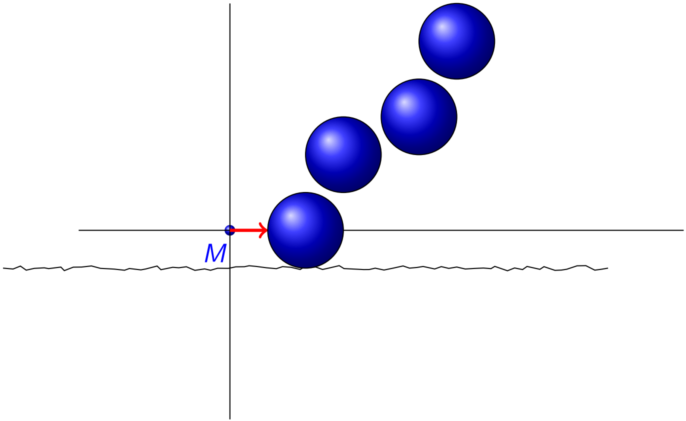
Descripción del movimiento

Construimos los ejes de referencia



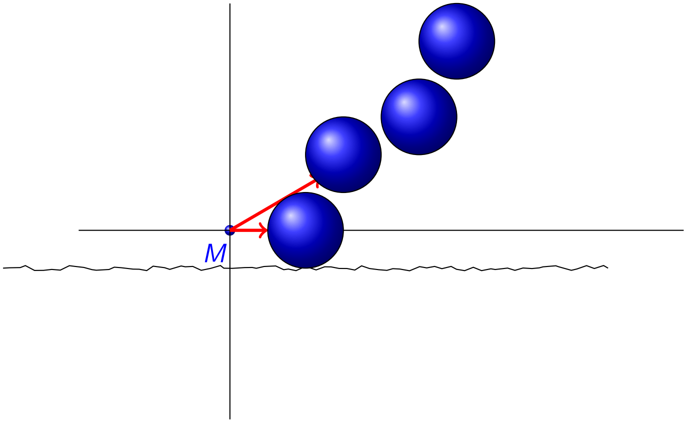
Descripción del movimiento

Describimos la posición del objeto empleando vectores concurrentes en el origen $\mathbf{0}$. Primera observación:



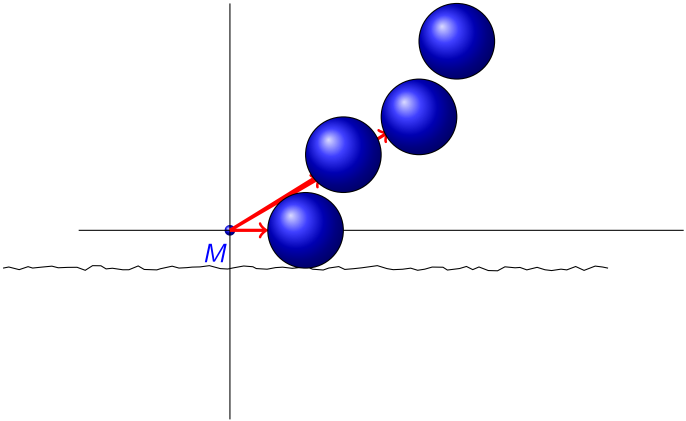
Descripción del movimiento

Describimos la posición del objeto empleando vectores concurrentes en el origen $\mathbf{0}$. Segunda observación:



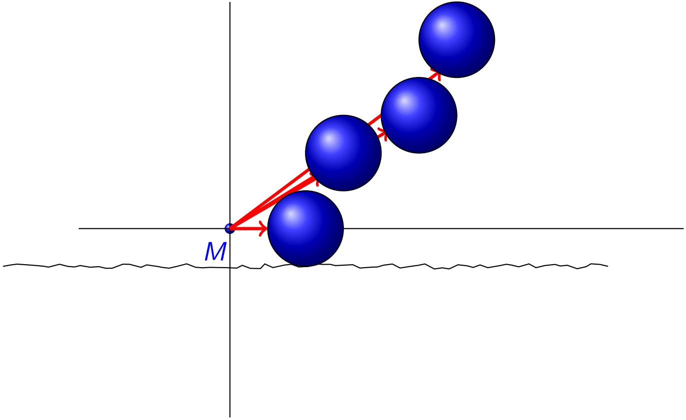
Descripción del movimiento

Describimos la posición del objeto empleando vectores concurrentes en el origen $\mathbf{0}$. Tercera observación.



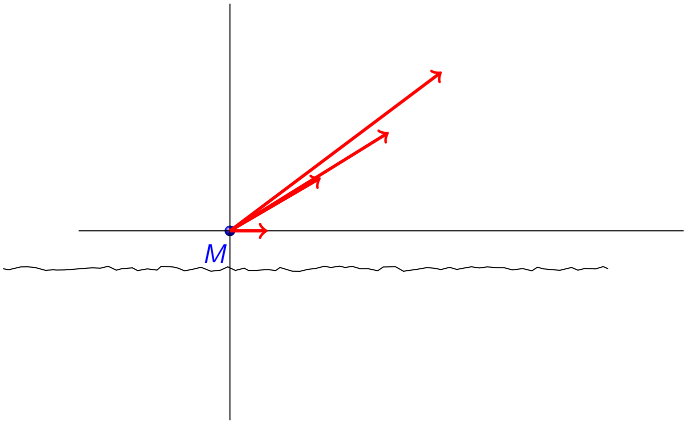
Descripción del movimiento

Describimos la posición del objeto empleando vectores concurrentes en el origen $\mathbf{0}$. Cuarta observación, el objeto se detiene en el suelo:



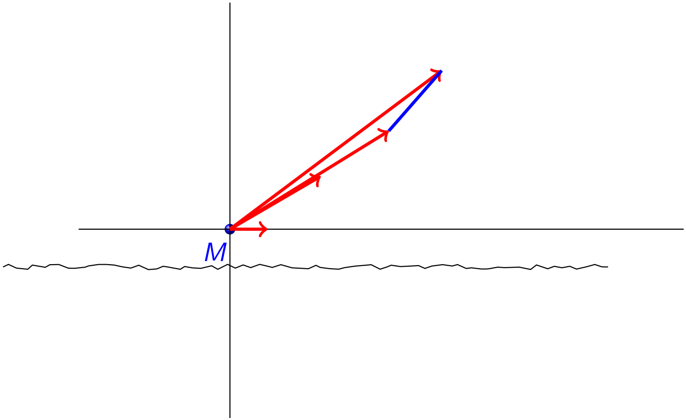
Descripción del movimiento

Eliminamos el objeto de la imagen para poder visualizar las diferentes observaciones de la posición del objeto medidas empleando vectores que representan la posición en metros respecto al punto de referencia:



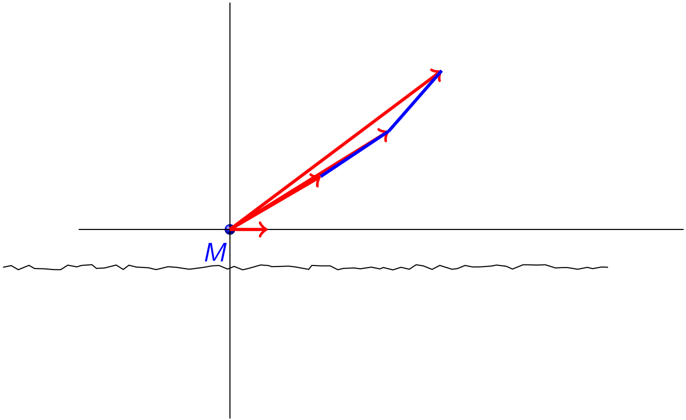
Descripción del movimiento

Interpolamos los puntos de la trayectoria observada uniéndolos con segmentos de recta en color azul. La línea azul muestra entonces el recorrido del objeto respecto al punto de referencia $\mathbf{0}$.



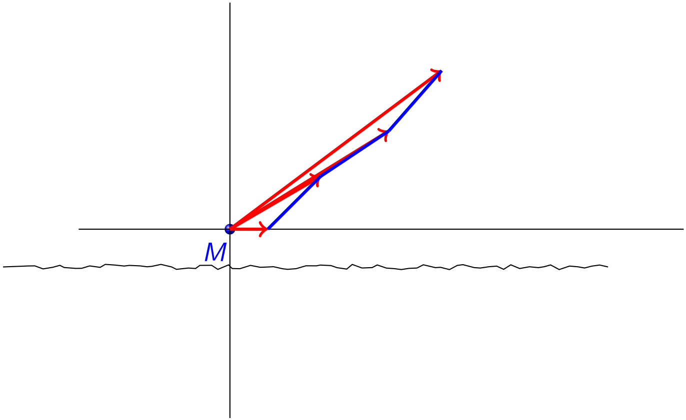
Descripción del movimiento

Interpolamos los puntos de la trayectoria observada uniéndolos con segmentos de recta en color azul. La línea azul muestra entonces el recorrido del objeto respecto al punto de referencia $\mathbf{0}$.



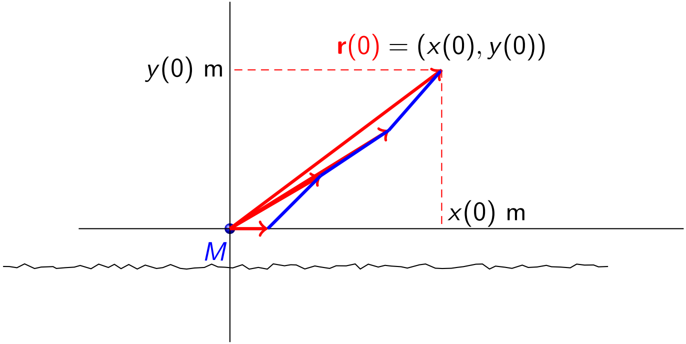
Descripción del movimiento

Interpolamos los puntos de la trayectoria observada uniéndolos con segmentos de recta en color azul. La línea azul muestra entonces el recorrido del objeto respecto al punto de referencia $\mathbf{0}$.



Descripción del movimiento

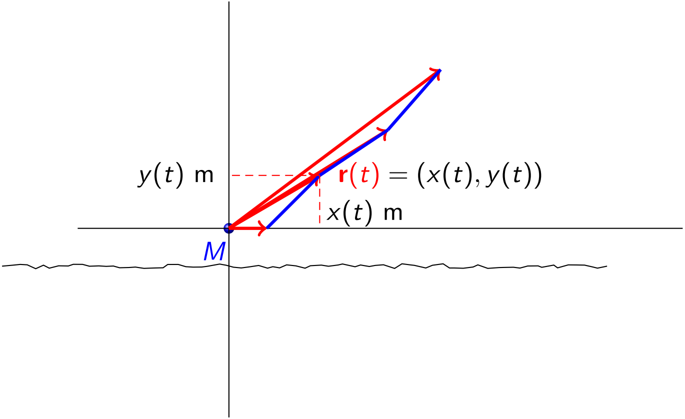
Para describir el movimiento emplearemos un cronómetro y las posiciones relativas horizontal y vertical del objeto. De forma que en el instante de tiempo $t = 0$, la posición del objeto respecto el punto de referencia $\mathbf{0}$ se describe como:



$x(0)$ es la distancia (en metros) horizontal al punto de referencia e $y(0)$ la distancia (en metros) vertical.

Descripción del movimiento

En cualquier instante de tiempo posterior genérico t la posición del objeto respecto el punto de referencia M se describe empleando un vector posición $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$:



Cuestión científica

¿Qué es la velocidad y cuál es su relación con respecto a la posición?

Definición

La **velocidad** de un objeto es el cociente entre la variación de la posición con respecto la variación de tiempo transcurrido

- En t_0 el objeto se encuentra en la posición $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$
- En $t > t_0$ el objeto se encuentra en la posición $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$
- Entonces se define la velocidad media del intervalo de tiempo $[t_0, t]$ como

$$\boldsymbol{v}_{[t_0,t]} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{v}(t_0)) = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t0}$$

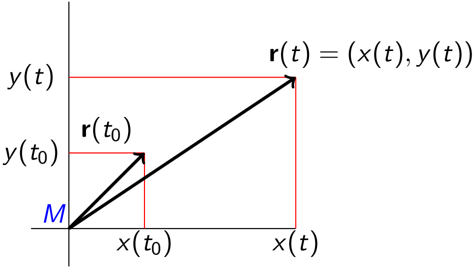
donde $\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ representa el vector velocidad del objeto en el instante de tiempo t, donde $v_x(t)$ la velocidad horizontal y $v_y(t)$ la velocidad vertical. **Las unidades en el S.I. son m/s.**

Vamos a calcular el vector

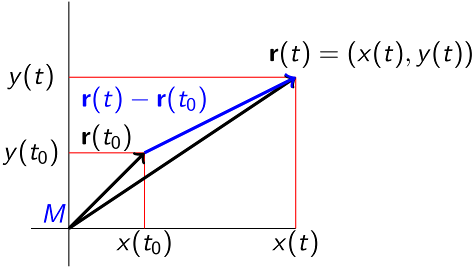
$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$$

ya que la velocidad media es el vector:

$$\frac{1}{t - t_0}(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0))$$

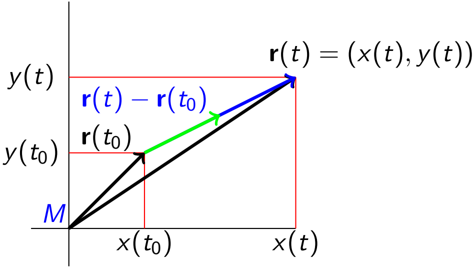


Calculamos el vector $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$:



Para poder visualizar el vector velocidad media tomamos una variación temporal de $t - t_0 = 2$ segundos, entonces

$$\boldsymbol{v}_{[t_0,t]} = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{2} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0))$$



La velocidad media es un vector situado en la dirección del vector $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$.

Empleando las componentes vertical y horizontal

Si calculamos las coordenadas de la velocidad media respecto a la referencia dada:

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-t_0}(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)) &= \frac{1}{t-t_0}\left((x(t),y(t))-(x(t_0),y(t_0))\right)\\ &= \frac{1}{t-t_0}\left(x(t)-x(t_0),y(t)-y(t_0)\right)\\ &= \left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)\end{aligned}$$

de donde, la velocidad media horizontal es

$$\frac{1}{2}(v_x(t)+v_x(t_0)) := \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$$

y la velocidad media vertical

$$\frac{1}{2}(v_y(t)+v_y(t_0)) := \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$$

Las componentes horizontal y vertical de la velocidad media

La velocidad media es un vector de componentes

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{[t_0,t]} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{v}(t_0)) \\ &= \left(\frac{1}{2}(v_x(t) + v_x(t_0)), \frac{1}{2}(v_y(t) + v_y(t_0)) \right) \\ &= \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \right) \end{aligned}$$

Nota (Velocidad instantánea)

Cuando $t = t_0$ la velocidad media toma el valor

$$\boldsymbol{v}_{[t_0,t_0]} = \boldsymbol{v}(t_0).$$

Entonces decimos que $\boldsymbol{v}(t)$ representa para cualquier instante de tiempo t la **velocidad instantánea** del objeto en t.

Las unidades de fuerza son kg $\times$ m/s^2 en consecuencia para encontrar una variable cinemática relacionada con la fuerza, como tanto la posición (m) y la velocidad (m/s) solo emplean unidades de longitud y tiempo (no de masa), la variable física que buscamos se debería que observar en unidades de m/s^2 es decir

$$\frac{L}{T^2} = \frac{\frac{L}{T}}{T} = \frac{[\boldsymbol{v}]}{T}$$

Definición

Se define la **aceleración media** entre t_0 y t de un objeto que se desplaza a lo largo de una trayectoria $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ con una velocidad instantánea $\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ como

$$\mathbf{a}_{[t_0,t]} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}(t_0)) = \frac{\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(t_0)}{t - t_0}.$$

Las unidades de la aceleración media $[\mathbf{a}_{[t_0,t]}] = LT^{-2}$ son compatibles con las unidades de fuerza.

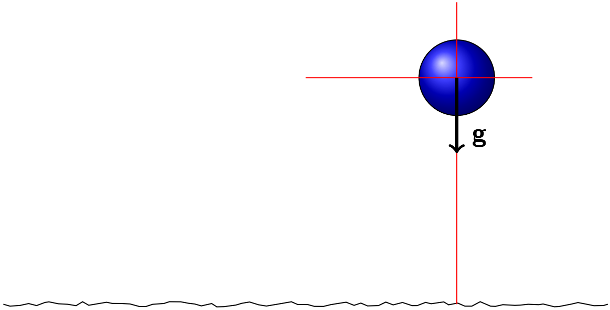
Conocemos que la gravedad

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

es la aceleración gravitatoria, que podemos escribir de forma vectorial como

$$\mathbf{g} = (0, -g).$$

Representa la aceleración con la que la tierra atrae los objetos en la dirección perpendicular a la superficie de la tierra. El signo negativo está asociado a la dirección de caída de los objetos.



La aceleración gravitatoria $\mathbf{g} = (0, -9.81)$ es constante en el sentido que para cualquier instante de tiempo t toma siempre el mismo valor. Esto nos lleva a introducir la siguiente definición

Definición

La cinemática de sistema mecánico con aceleración constante (es decir que no depende del tiempo como la gravedad) produce un tipo de movimiento llamado **movimiento uniformemente acelerado** MUA.

Si la aceleración instantánea $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a} = (a_x, a_y)$ es constante (no depende del tiempo) entonces se cumple

$$\mathbf{a}_{[t_0,t]} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}) = \mathbf{a} = \frac{\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(t_0)}{t - t_0},$$

es decir si despejamos la velocidad $\boldsymbol{v}(t)$ en t obtenemos que

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) + (t - t_0)\,\mathbf{a}, \qquad \text{para todo } t \geq t_0. \tag{1}$$

Nota

La fórmula (1)

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) + (t - t_0)\,\mathbf{a}$$

nos dice que si observamos la velocidad inicial $\boldsymbol{v}(t_0)$ y la aceleración **a** en un sistema con MUA, podemos predecir la velocidad $\boldsymbol{v}(t)$ del objeto en cualquier instante de tiempo posterior.

Nota

Si la aceleración $\mathbf{a} = \mathbf{0} = (0,0)$ es nula, entonces la fórmula (1) nos dice que

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) \text{ para todo } t \geq t_0$$

lo que implica que la velocidad no depende del tiempo y permanece constante con valor igual a la velocidad inicial observada $\boldsymbol{v}(t_0)$. **Esta situación es la que Newton identificaba como movimiento rectilíneo y uniforme en ausencia de fuerzas externas**, es decir $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ es equivalente a $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Cuestión científica

¿Podemos predecir bajo la misma hipótesis, no solo la velocidad si no también la posición futura del objeto?

Objetivo

Veamos que cuando la aceleración es constante (MUA) e igual al vector cero, entonces obtenemos una ecuación que representa la física de lo que Newton denominó movimiento rectilíneo y uniforme.

Movimiento rectilíneo y uniforme

Supongamos que fijado un punto de referencia M,

1. la aceleración del objeto es nula $\mathbf{a} = \mathbf{0} = (0,0)$, en consecuencia
2. la velocidad del objeto es constante e igual a su velocidad inicial $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) = (v_x^{(0)}, v_y^{(0)})$ para todo $t \geq t_0$,
3. La velocidad media es

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{[t_0,t]} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{v}(t_0)) \\ &= \boldsymbol{v}(t_0) = (v_x^{(0)}, v_y^{(0)}) \\ &= \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)\end{aligned}$$

Luego

$$v_x^{(0)} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \text{ y } v_y^{(0)} = \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}.$$

Movimiento rectilíneo y uniforme

Teorema (Ley de la inercia)

Supongamos que fijado un punto de referencia M,

1. *la aceleración de un objeto es nula* $\mathbf{a} = \mathbf{0} = (0, 0)$, *en consecuencia*
2. *la velocidad del objeto es constante e igual a su velocidad inicial* $\boldsymbol{\upsilon}(t) = \boldsymbol{\upsilon}(t_0) = (\upsilon_x^{(0)}, \upsilon_y^{(0)})$ *para todo* $t \geq t_0$.

Si observamos la posición inicial del objeto $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y_(t_0))$ *y su velocidad inicial* $\boldsymbol{\upsilon}(t_0) = (\upsilon_x^{(0)}, \upsilon_y^{(0)})$ *entonces podemos predecir su posición horizontal*

$$x(t) = x(t_0) + \upsilon_x^{(0)}(t - t_0)$$

y su posición vertical

$$y(t) = y(t_0) + \upsilon_y^{(0)}(t - t_0)$$

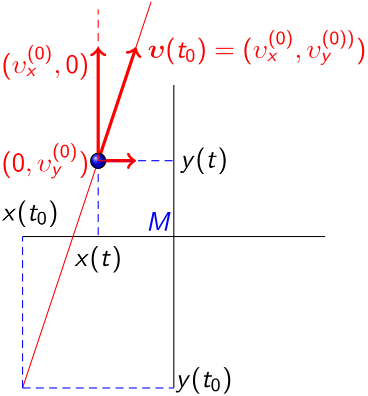
para todo instante de tiempo $t \geq t_0$.

Ejemplo

- Cuando un automóvil en reposo se acelera, los pasajeros obedecen esta ley tendiendo a permanecer en reposo hasta que la fuerza externa de los asientos los obliga a moverse.
- De manera similar, cuando el automóvil se detiene los pasajeros continúan en movimiento a rapidez constante hasta que son detenidos por los cinturones de seguridad o por su propio esfuerzo.

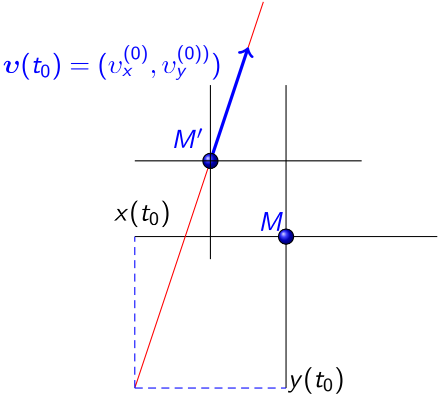
- Si el objeto está en reposo tanto la velocidad horizontal $v_x^{(0)} = 0$ como la vertical $v_y^{(0)} = 0$ desde cualquier punto de referencia M. La ley de la inercia predice entonces que su posición horizontal $x(t) = x(t_0)$ y su posición vertical $y(t) = y(t_0)$ no cambian desde ningún punto de referencia M.

- Supongamos que el coche de desplaza a velocidad constante no nula. La velocidad horizontal $v_x^{(0)}$ como la vertical $v_y^{(0)}$ serán constantes desde cualquier punto de referencia M.



La inercia del objeto consiste en desplazarse a velocidad constante a los largo de la trayectoria recta de color rojo (con respecto el punto de referencia M)

- Un observador situado en M' vería a un objeto situado en M desplazarse a velocidad constante (el observador toma como referencia el punto donde está situado, en este caso M').



Este experimento constituye el llamado **Principio de relatividad de Galileo**.

Preliminares

- La experiencia nos indica que cuanto más y más grandes fuerzas resultantes se ejerzan en un objeto, más y más grande será el cambio en la velocidad de éste.
- Además, si se mantiene constante la fuerza resultante y se aplica a masas cada vez más grandes, el cambio en la velocidad disminuye.
- El cambio de velocidad por unidad de tiempo se define como aceleración $\mathbf{a}$.
- *Newton demostró que hay una relación directa entre la fuerza aplicada* $\mathbf{F}$ *a un objeto y la aceleración resultante* $\mathbf{a}$.

Segunda ley de Newton

La aceleración $\mathbf{a}$ de un objeto en la dirección de una fuerza resultante $(\mathbf{F})$ es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza e inversamente proporcional a la masa (m), esto es,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \text{ o bien } \mathbf{F} = m\,\mathbf{a}. \tag{2}$$

La siguientes afirmaciones son consecuencia de la segunda ley de Newton.

Proposición (Ley de la Inercia)

Un objeto de masa $m > 0$ tiene una aceleración nula $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ si y solo si la fuerza neta que actúa sobre el mismo en nula, esto es, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Corolario

Un objeto de masa $m > 0$ se encuentra en equilibrio traslacional si y solo si tiene una aceleración nula $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, es decir, se desplaza a velocidad constante con respecto una referencia dada.

La conservación del momento lineal

Definición

Si un objeto de masa $m > 0$ se desplaza a velocidad $\boldsymbol{v}(t)$ entonces se llama momento lineal del objeto respecto una referencia dada a la cantidad:

$$\mathbf{p}(t) = m\,\boldsymbol{v}(t).$$

Nota

Si un objeto de masa $m > 0$ se desplaza con aceleración $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0)$ para todo $t \geq t_0$. En consecuencia, el momento lineal cumple que

$$\mathbf{p}(t) = m\,\boldsymbol{v}(t) = m\,\boldsymbol{v}(t_0) = \mathbf{p}(t_0) \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Podemos afirmar entonces, que en equilibrio traslacional un objeto físico conserva el momento lineal (la cantidad $\mathbf{p}(t)$ permanece invariante en el tiempo).

Consecuencias cinemáticas en MUA

1. Supongamos que la aceleración de un objeto $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ es constante y no nula para todo instante de tiempo $t \geq t_0$.
2. Sabemos entonces de la ecuación (1) que la velocidad

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) + (t - t_0)\,\mathbf{a}, \qquad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Si empleamos velocidades y aceleraciones verticales y horizontales:

$$\begin{aligned}(v_x(t), v_y(t)) &= (v_x(t_0), v_y(t_0)) + (t - t_0)\,(a_x, a_y)\\ &= (v_x(t_0), v_y(t_0)) + ((t - t_0)\,a_x, (t - t_0)\,a_y)\\ &= (v_x(t_0) + (t - t_0)\,a_x, v_y(t_0) + (t - t_0)\,a_y).\end{aligned}$$

Obtenemos las velocidades horizontal y vertical:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + (t - t_0)\,a_x, \tag{3}$$
$$v_y(t) = v_y(t_0) + (t - t_0)\,a_y. \tag{4}$$

para todo instante de tiempo $t \geq t_0$.

La predicción de la posición $\mathbf{r}(t)$ en el MUA

1. Recordemos que la relación entre la velocidad media y la posición es:

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = (t - t_0)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}(t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}(t_0)\right). \tag{5}$$

2. Escrita en posiciones y velocidades horizontales y verticales:

$$\begin{aligned}&(x(t), y(t)) - (x(t_0), y(t_0))\\ &= (t - t_0)\frac{1}{2}((v_x(t), v_y(t)) + (v_x(t_0), v_y(t_0)))\end{aligned}$$

3. Utilizamos las ecuaciones (3) y (4):

$$\begin{aligned}&(x(t), y(t)) - (x(t_0), y(t_0))\\ &= (t - t_0)\frac{1}{2}((v_x(t_0) + (t - t_0)\, a_x, v_y(t_0) + (t - t_0)\, a_y)\\ &\quad + (v_x(t_0), v_y(t_0)))\\ &= (t - t_0)\frac{1}{2}(2v_x(t_0) + (t - t_0)\, a_x, 2v_y(t_0) + (t - t_0)\, a_y)\end{aligned}$$

La predicción de la posición $\mathbf{r}(t)$ en el MUA

1. En resumen,

$$(x(t)-x(t_0), y(t)-y(t_0)) = \left(v_x(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2\,a_x, v_y(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2\,a_y\right)$$

2. Obtenemos entonces las ecuaciones para las posiciones horizontal y vertical:

$$x(t) = x(t_0)+v_x(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2\,a_x$$
$$y(t) = y(t_0)+v_y(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2\,a_y$$

que pueden predecirse si observamos la posición inicial $\mathbf{r}(t_0)$, la velocidad inicial $v(t_0)$ y la aceleración constante $\mathbf{a}$.

Definición (Ecuaciones horarias)

Llamamos **ecuaciones horarias del MUA** al conjunto de expresiones matemáticas:

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\, a_x \tag{6}$$

$$y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\, a_y \tag{7}$$

$$v_x(t) = v_x(t_0) + (t - t_0)\, a_x, \tag{8}$$

$$v_y(t) = v_y(t_0) + (t - t_0)\, a_y. \tag{9}$$

Si observamos (a_x, a_y), $(v_x(t_0), v_y(t_0))$ y $(x(t_0), y(t_0))$ entonces podemos predecir empleando las ecuaciones horarias $(v_x(t), v_y(t))$ y $(x(t), y(t))$ para todo tiempo $t \geq t_0$.

La ecuaciones horarias independientes del tiempo

De las ecuaciones (8) y (9) podemos despejar el tiempo $(t - t_0)$ obteniendo la igualdad

$$(t - t_0) = \frac{\upsilon_x(t) - \upsilon_x(t_0)}{a_x} = \frac{\upsilon_y(t) - \upsilon_y(t_0)}{a_y}$$

sustituyendo estas cantidades en las ecuaciones (6) y (7) respectivamente, obtenemos las cantidades

$$x(t) = x(t_0) + \upsilon_x(t_0)\left(\frac{\upsilon_x(t) - \upsilon_x(t_0)}{a_x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_x(t) - \upsilon_x(t_0)}{a_x}\right)^2 a_x$$

$$y(t) = y(t_0) + \upsilon_y(t_0)\left(\frac{\upsilon_y(t) - \upsilon_y(t_0)}{a_y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_y(t) - \upsilon_y(t_0)}{a_y}\right)^2 a_y$$

La ecuaciones horarias independientes del tiempo

Las dos ecuaciones las reescribimos

$$x(t)-x(t_0)=\frac{\upsilon_x(t)-\upsilon_x(t_0)}{a_x}\left(\upsilon_x(t_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_x(t)-\upsilon_x(t_0)}{a_x}\right)a_x\right),$$

$$y(t)-y(t_0)=\frac{\upsilon_y(t)-\upsilon_y(t_0)}{a_y}\left(\upsilon_y(t_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_y(t)-\upsilon_y(t_0)}{a_y}\right)a_y\right),$$

es decir,

$$x(t)-x(t_0)=\frac{1}{2}\frac{(\upsilon_x(t)-\upsilon_x(t_0))}{a_x}(\upsilon_x(t)+\upsilon_x(t_0)),$$

$$y(t)-y(t_0)=\frac{1}{2}\frac{(\upsilon_y(t)-\upsilon_y(t_0))}{a_y}(\upsilon_y(t)+\upsilon_y(t_0)).$$

Finalmente obtenemos las **ecuaciones horarias independientes del tiempo**:

$$\upsilon_x(t)^2-\upsilon_x(t_0)^2=2\,a_x\,(x(t)-x(t_0)) \tag{10}$$

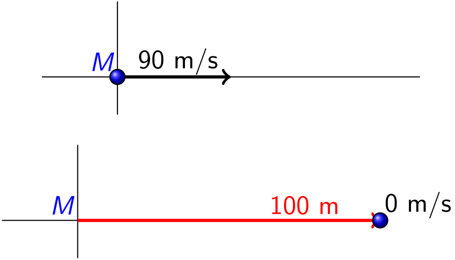
$$\upsilon_y(t)^2-\upsilon_y(t_0)^2=2\,a_y\,(y(t)-y(t_0)) \tag{11}$$

para todo $t\geq t_0$.

Problema

Un avión aterriza en la cubierta de un portaaviones con una velocidad inicial de 90 m/s y se detiene por completo en una distancia de 100 m. Encuentre la aceleración y el tiempo necesario para detenerlo.

El esquema siguiente representa la situación física del problema:



Solución

Si suponemos que toda la acción ocurre en una dimensión, escribiremos la velocidad inicial

$$\boldsymbol{v}(t_0) = (90, 0)$$

donde t_0 representa el instante de tiempo en el que el avión se posa por primera vez sobre el portaaviones. La posición inicial

$$\mathbf{r}(t_0) = (0, 0)$$

la tomaremos en el origen de coordenadas. Entonces

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = (100, 0)$$

nos dice que en el instante de tiempo t el avión se para a una distancia de 100 metros. Luego

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + (100, 0) = (0, 0) + (100, 0) = (100, 0).$$

Solución (continuación)

Las variables de interés son en este caso la aceleración $\mathbf{a} = (a_x.a_y)$, que suponemos constante, y el tiempo que el avión tarda en detenerse $t - t_0$. Conocemos

$$\begin{array}{ccc} x(t_0) = 0, & y(t_0) = 0, & \upsilon_x(t_0) = 90, \\ \upsilon_y(t_0) = 0, & x(t) = 100, & y(t) = 0. \end{array}$$

Con estos datos sustituimos y escribimos las ecuaciones horarias

$$100 = 0 + 90(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2, \tag{12}$$

$$0 = 0 + 0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_y(t - t_0)^2, \tag{13}$$

$$\upsilon_x(t) = 90 + a_x(t - t_0), \tag{14}$$

$$\upsilon_y(t) = 0 + a_y(t - t_0). \tag{15}$$

Solución (continuación ...)

La ecuación (13) queda como

$$0 = \frac{1}{2} a_y (t - t_0)^2$$

al ser

$$t - t_0 > 0$$

obtenemos que

$$a_y = 0$$

con lo que la componente vertical de la aceleración en nula. Sustituyendo en la ecuación (15) se tiene que

$$v_y(t) = 0.$$

Solución (continuación)

Nos quedan pues las dos ecuaciones siguientes:

$$100 = 0 + 90(t - t_0) + \frac{1}{2} a_x (t - t_0)^2, \tag{16}$$

$$v_x(t) = 90 + a_x(t - t_0), \tag{17}$$

Cuando en t el avión se detiene sabemos que su velocidad horizontal tiene que ser cero $v_x(t) = 0$, (en caso contrario el avión seguiría avanzando más allá de los 100 m) luego se ha de cumplir

$$0 = 90 + a_x(t - t_0), \quad \text{esto es,} \quad a_x = -\frac{90}{(t - t_0)}$$

Solución (continuación...)

Sustituimos a_x por su valor $-\frac{90}{(t-t_0)}$ en la ecuación (16), obteniendo

$$
\begin{aligned}
100 &= 90(t-t_0) + \frac{1}{2}\left(-\frac{90}{(t-t_0)}\right)(t-t_0)^2 \\
&= 90(t-t_0) - 45(t-t_0) \\
&= 45(t-t_0).
\end{aligned}
$$

lo que nos dice que el tiempo transcurrido hasta detenerse es de

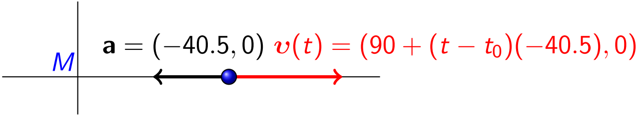
$$(t-t_0) = \frac{100}{45} = 2.22221 \text{ s},$$

y la aceleración

$$a_x = -40.50015 \text{ m/s}^2.$$

Solución (final)

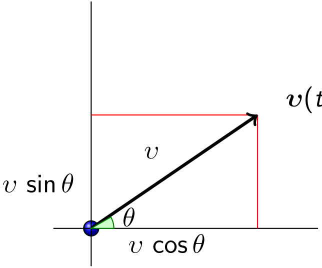
La interpretación gráfica de los valores de la velocidad y la aceleración es la siguiente:



La aceleración tiene dirección opuesta a la velocidad y esto es lo que produce que el avión se detenga cuando han transcurrido $(t - t_0) = 2.22$ s.

Problema

Supongamos que deseamos entrenar a un jugador de rugby para tirar a palos desde la línea de 22 metros sabiendo que el travesaño que tiene una altura de 2.5 metros. El balón será impulsado con una velocidad inicial de módulo $v = \|\boldsymbol{v}(t_0)\|$ y con un ángulo de tiro θ con respecto a la horizontal:



$$\boldsymbol{v}(t_0) = (v \cos\theta, v \sin\theta)$$

.

¿Cuanto tiempo tardará el balón en llegar al punto de mayor altura en su trayectoria?

Solución

La única aceleración que interviene en este problema es la aceleración gravitatoria $\mathbf{g} = (0, -9.81)$ m/s^2, es decir, $a_x = 0$ y $a_y = -9.81$. Sabemos por las ecuaciones horarias (8) y (9) que las velocidades horizontal y vertical son:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x(t_0) + (t - t_0) \cdot 0 = v_x(t_0), \\ v_y(t) &= v_y(t_0) + (t - t_0)(-9.81). \end{aligned}$$

Obsérvese que la velocidad horizontal es constante. Además en el punto de máxima altura su velocidad vertical

$$v_y(t) = v_y(t_0) - 9.81\,(t - t_0) = v \sin\theta - 9.81\,(t - t_0)$$

tendrá que ser cero, ya que en caso contrario o bien el balón seguiría ascendiendo o bien descendiendo. En consecuencia, el tiempo de parada en el ascenso $(t - t_0)$ se obtiene cuando

$$v \sin\theta - 9.81\,(t - t_0) = 0 \Rightarrow (t - t_0) = \frac{v \sin\theta}{9.81}.$$

Sustituyendo en (6) y (7) obtenemos las ecuaciones que gobiernan la trayectoria del balón:

$$x(t) = (t - t_0)\,\upsilon\,\cos\theta \tag{18}$$

$$y(t) = (t - t_0)\,\upsilon\,\sin\theta - \frac{1}{2}\,9.81\,(t - t_0)^2, \tag{19}$$

Conocemos que el balón alcanza su máxima altura en el instante de tiempo

$$(t - t_0) = \frac{\upsilon\,\sin\theta}{9.81}.$$

Sustituyendo $t - t_0$ por $\frac{\upsilon\,\sin\theta}{9.81}$ en (18) y (19) obtendremos la distancia $x(t)$ recorrida desde la posición inicial cuando el balón alcanza su altura máxima $y(t)$:

$$x(t) = \frac{\upsilon\,\sin\theta}{9.81}\,\upsilon\,\cos\theta$$

$$y(t) = \frac{\upsilon\,\sin\theta}{9.81}\,\upsilon\,\sin\theta - \frac{1}{2}\,9.81\left(\frac{\upsilon\,\sin\theta}{9.81}\right)^2.$$

Estas expresiones las podemos escribir como

$$x(t) = \frac{\upsilon^2 \sin\theta \cos\theta}{9.81}$$
$$y(t) = \frac{\upsilon^2 \sin^2\theta}{2\cdot 9.81}.$$

Si queremos que el balón supere los 2.5 metros en el momento que alcance la altura máxima sabiendo que lanzamos desde una distancia de 22 metros, tendremos que encontrar la velocidad inicial υ y el ángulo θ de forma que se cumpla

$$\begin{aligned} 22 \text{ m} &= x(t) = \frac{\upsilon^2 \sin\theta \cos\theta}{9.81} \\ 2.5 \text{ m} &\leq y(t) = \frac{\upsilon^2 \sin^2\theta}{2\cdot 9.81}. \end{aligned}$$

Las trayectorias de los objetos con aceleración constante

Veamos la gráfica de un objeto que se mueve con aceleración

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y) = (-0.2, -9.81) \text{ m/s}^2$$

que sale en $t_0 = 0$ s de la posición

$$\mathbf{r}(0) = (x(0), y(0)) = (0, 5) \text{ m},$$

con velocidad inicial

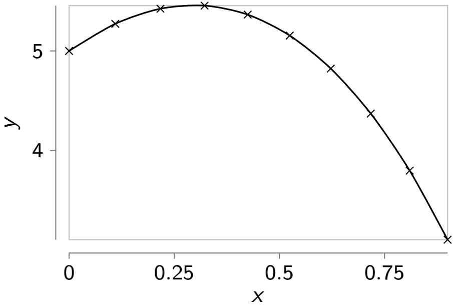
$$\boldsymbol{v}(0) = (v_x(0), v_y(0)) = (1, 3) \text{ m/s}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones horarias (6) y (7) obtenemos $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ para todo tiempo $t \geq 0$ donde

$$x(t) = 1 \cdot t - \frac{1}{2} t^2\, 0.2 = t - 0.1\, t^2$$

$$y(t) = 5 + 3 \cdot t - \frac{1}{2} t^2\, 9.81 = 5 + t - 4.90\, t^2.$$

Las trayectorias parabólicas



$$x(t) = t - 0.1\,t^2$$
$$y(t) = 5 + 3\,t - 4.90\,t^2,$$

para $0 \leq t \leq 1$ s , representamos los valores para

$$t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1 \text{ s}.$$

Problema

Predecir el instante de tiempo en el que el objeto tocará suelo y a que distancia del punto de partida.

Conocemos que la altura del objeto viene descrita en cada instante de tiempo t por su posición vertical

$$y(t) = 5 + 3\,t - 4.90\,t^2.$$

El objeto tocará tierra en el momento $t > 0$ en el que la altura sea nula:

$$y(t) = 0 = 5 + 3\,t - 4.90\,t^2.$$

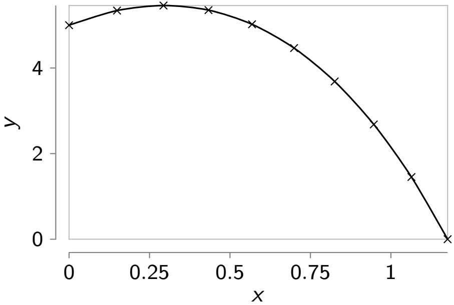
Resolvemos la ecuación de segundo grado en t :

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-4.90) \cdot 5}}{2 \cdot (-4.90)} = -0.749396, 1.361641$$

como el tiempo no puede ser negativo, la solución es $t = 1.361641$ s lo que nos proporciona una distancia de

$$x(1.361641) = 1.361641 - 0.1\,(1.361641)^2 = 1.17624 \text{ m}.$$

Comprobación gráfica de la predicción



$$x(t) = t - 0.1\,t^2$$
$$y(t) = 5 + 3\,t - 4.90\,t^2,$$

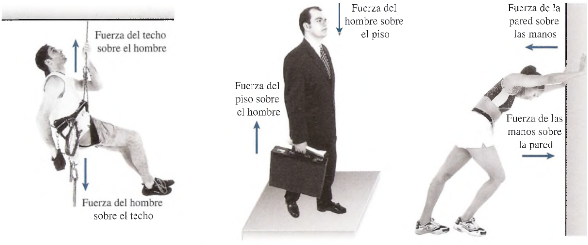
para $0 \leq t \leq 1.361641$ s

Preliminares

- No puede haber una fuerza si no están implicados dos cuerpos.
- Cuando un martillo golpea un clavo ejerce una fuerza de “acción"sobre él. Pero el clavo también “reacciona” empujando hacia atrás al martillo.

Tercera ley de Newton

Para cada fuerza de acción debe haber una fuerza de reacción igual y opuesta.



Problema

Un bloque de peso $W = 40$ N cuelga de una cuerda atada a otras dos cuerdas, A y B, las cuales, a su vez, están sujetas del techo. Si la cuerda B forma un ángulo de 60° con el techo y la cuerda A uno de 30°. Analizar las fuerzas que concurren en el punto marcado dentro del círculo discontinuo y discutir el comportamiento físico del sistema en función del valor de la fuerza neta resultante.

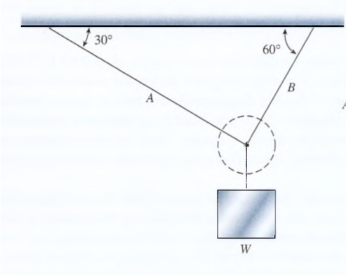
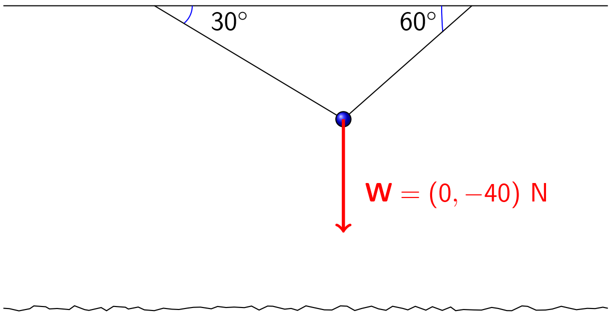


Diagrama del cuerpo libre

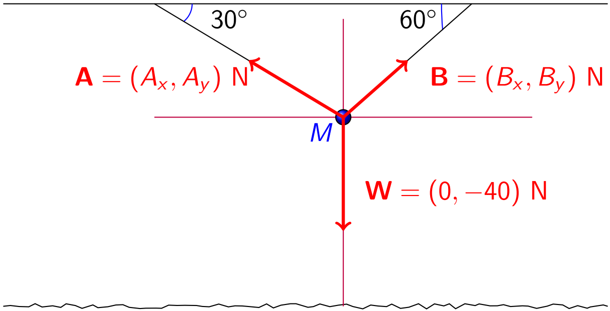
Dibujamos un esquema (llamado **diagrama del cuerpo libre**) del problema



El peso del objeto (la fuerza de acción) provocada por la gravedad terrestre crea una tensión en cada una las dos cuerdas que sujetan el peso (la fuerza de reacción).

Diagrama del cuerpo libre

Incluimos ejes coordenados tomando como referencia el punto M y añadimos después las tensiones en las cuerdas



La suma neta $\mathbf{F}$ de todas las fuerzas que concurren en M es igual a

$$\mathbf{F} = \mathbf{W} + \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

Nota

La tercera ley de Newton nos permite analizar las fuerzas que actúan sobre el punto de referencia M.

Una vez calculada la fuerza neta resultante nos podemos encontrar con dos situaciones distintas:

$$\mathbf{F} = \mathbf{W} + \mathbf{A} + \mathbf{B} \begin{cases} = \mathbf{0} & \text{Primera Ley de Newton,} \\ \neq \mathbf{0} & \text{Segunda Ley de Newton.} \end{cases}$$

Vamos a analizar cada una de estas situaciones.

Caso $(\mathbf{F} = \mathbf{0})$

- En esta situación la ley de la inercia (primera ley de Newton) nos dice que la aceleración del sistema con respecto al punto de referencia M es $\mathbf{0}$.
- En consecuencia el sistema se mueve a velocidad constante $\boldsymbol{v}(t_0)$.
- Si asumimos que la velocidad inicial es nula, $\boldsymbol{v}(t_0) = \mathbf{0}$, entonces el sistema permanecerá inmóvil , $\boldsymbol{v}(t) = \mathbf{0}$, para todo instante de tiempo $t \geq t_0$.
- Se conserva el momento lineal $\mathbf{p}(t) = m\,\boldsymbol{v}(t) = \mathbf{0}$ para todo instante de tiempo $t \geq t_0$.
- Esta situación coincide con un sistema en equilibrio traslacional.

Caso $(\mathbf{F} \neq \mathbf{0})$

- En esta situación la segunda ley de Newton nos asegura la existencia de una aceleración $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ del sistema con respecto al punto de referencia M.
- Además la relación de la aceleración $\mathbf{a}$ con la fuerza neta resultante es

$$\mathbf{F} = \mathbf{W} + \mathbf{A} + \mathbf{B} = m\,\mathbf{a}.$$

- En esta situación la velocidad del sistema no es constante y se cumple que existe al menos un instante de tiempo $t \geq t_0$ de forma que $v(t) \neq v(t_0)$.
- Veríamos entonces al punto M desplazarse siguiendo el sentido de la fuerza resultante $\mathbf{F}$.

Problema

Un bloque de peso $W = 40$ N cuelga de una cuerda atada a otras dos cuerdas, A y B, las cuales, a su vez, están sujetas del techo. Si la cuerda B forma un ángulo de 60° con el techo y la cuerda A uno de 30°. Si el sistema se encuentra en equilibro traslacional determinar el valor del módulo $A = \|\mathbf{A}\|$ y $B = \|\mathbf{B}\|$ para cada una de las tensiones en las cuerdas que sujetan el objeto.

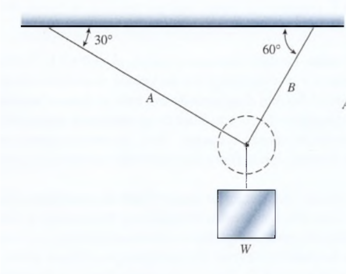


Diagrama del cuerpo libre

En esta nueva situación nos encontramos con los datos siguientes:

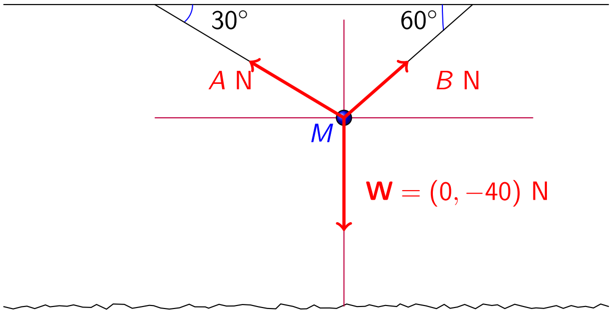
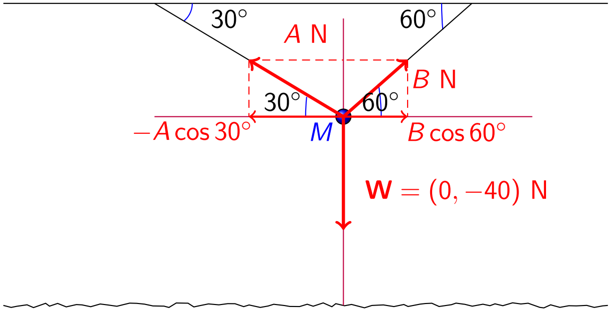


Diagrama del cuerpo libre

La trigonometría nos ayuda de forma que podemos calcular los ángulos opuestos:



Entonces la tensión $\mathbf{A} = (-A\cos 30^\circ, A\sin 30^\circ)$ y la tensión $\mathbf{B} = (B\cos 60^\circ, B\sin 60^\circ)$. Observar en el dibujo porqué el signo de $-A\cos 30^\circ$ es negativo y $B\cos 60^\circ$ positivo.

El objetivo es calcular los valores de las tensiones A y B. Como la fuerza resultante

$$\mathbf{F} = \mathbf{W} + \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

ya que el sistema se encuentra en equilibrio traslacional, empleando coordenadas, obtenemos que la fuerza resultante es igual a

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= (0, 40) + (-A\cos 30^\circ, A\sin 30^\circ) + (B\cos 60^\circ, B\sin 60^\circ)\\ &= (-A\cos 30^\circ + B\cos 60^\circ, -40 + A\sin 30^\circ + B\sin 60^\circ)\\ &= (0, 0),\end{aligned}$$

lo que nos conduce a las siguientes dos ecuaciones:

$$-A\cos 30^\circ + B\cos 60^\circ = 0, \tag{20}$$

$$-40 + A\sin 30^\circ + B\sin 60^\circ = 0. \tag{21}$$

De la ecuación (20) obtenemos que

$$A\cos 30^\circ = B\cos 60^\circ \text{ luego } A = B\,\frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 0.57732\,B.$$

Sustituimos A por su valor equivalente $A = 0.57732\,B$ dependiente de B en la ecuación (21):

$$A \sin 30^\circ + B \sin 60^\circ = 40,$$

calculando $\sin 30^\circ = 0.5$ y $\sin 60^\circ = 0.86603$ y sustituyendo en la ecuación por sus valores:

$$0.57732\,B\,0.5 + B\,0.86603 = 40,$$

obtenemos que

$$B(0.28865 + 0.86603) = 40,$$

luego

$$B = 34.6416 \text{ N},$$

y

$$A = 0.57732\,B = 19.9991 \text{ N}.$$

Motivación

- Siempre que un cuerpo se mueve estando en contacto con otro objeto, existen fuerzas de fricción que se oponen al movimiento relativo.
- Estas fuerzas se deben a que una superficie se adhiere contra la otra y a que encajan entre sí las irregularidades de las superficies de rozamiento.
- Es precisamente esta fricción la que mantiene a un clavo dentro de una tabla, la que nos permite caminar y la que hace que los frenos de un automóvil cumplan su función.
- Sin embargo, en muchas otras circunstancias es indispensable minimizar la fricción. Por ejemplo, provoca que se requiera mayor trabajo para operar maquinaria, causa desgaste y genera calor.
- Los automóviles y los aviones se diseñan con formas aerodinámicas para reducir la fricción con el aire, ya que ésta es muy grande a gran rapidez

Descripción de la fricción

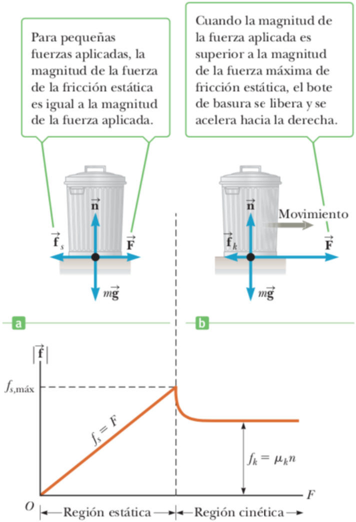
- Siempre que se desliza una superficie sobre otra, la fuerza de fricción que ejercen los cuerpos entre sí es paralela o tangente a ambas superficies y actúa de tal modo que se opone al movimiento relativo de las superficies.
- Es importante observar que estas fuerzas existen no sólo cuando hay un movimiento relativo, sino también cuando uno de los cuerpos tan sólo tiende a deslizarse sobre el otro.

Fuerzas de fricción estática y cinética

- Suponga que se ejerce una fuerza sobre un objeto.
- Al principio el bloque no se mueve debido a la acción de una fuerza llamada fuerza de fricción estática $\mathbf{f}_s$, pero a medida que aumenta la fuerza aplicada llega el momento en que el bloque se mueve a partir de una fuerza de fricción estática límite que denotamos por $\mathbf{f}_{s,\text{máx}}$,
- La fuerza de fricción ejercida por la superficie horizontal mientras se mueve el objeto se denomina fuerza de fricción cinética $\mathbf{f}_k$.
- En este caso la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida sobre el objeto es mayor o igual que la magnitud de la fuerza de fricción estática límite $\mathbf{f}_{s,\text{máx}}$, es decir:

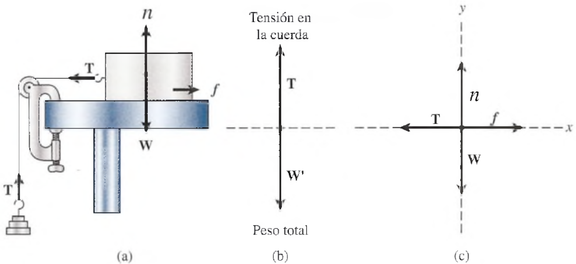
$$F > f_{s,\text{máx}}$$

Fuerzas de fricción estática y cinética



Cálculo experimental de las fuerzas de fricción

- Las leyes que rigen a las fuerzas de fricción se determinan experimentalmente en el laboratorio utilizando un aparato similar al que se ilustra en la figura.
- Considere una caja de peso **W** colocada sobre una mesa horizontal y atada con una cuerda que pasa por una polea, ligera y sin fricción; además, en el otro extremo de la cuerda se cuelgan varias pesas.
- Se obtiene que $f_s \leq \mu_s n$ donde n es la magnitud de la fuerza normal entre superficies de contacto (en la figura $n = W$).



Sensibilidad al equilibrio traslacional con velocidad constante

- Mientras $F \leq f_{s,\text{máx}}$ la velocidad del objeto es nula $v = 0$.
- Una vez que $F > f_{s,\text{máx}}$, que llamaremos *fuerza de fricción estática*, la velocidad del objeto será distinta de cero $v \neq 0$.
- Si aumentamos la fuerza F hasta que conseguimos alcanzar una velocidad aproximadamente constante distinta de cero $v^* \neq 0$.
- Como la velocidad es aproximadamente constante obtendremos que la fuerza neta sobre el objeto tiene que ser aproximadamente nula, y en consecuencia el objeto se encontrará en equilibrio traslacional de forma aproximada.
- La fuerza aplicada F^* a partir de la cual la velocidad del objeto puede mantenerse aproximadamente constante se le llama *fuerza de fricción cinética:*

$$f_k = F^*.$$

Coeficiente de fricción estática

El símbolo μ_s es una constante de proporcionalidad llamada *coeficiente de fricción estática*. Puesto que μ_s es una razón constante entre dos fuerzas, se trata de una cantidad sin dimensiones. En general, se suele identificar la fuerza de fricción estática a la fuerza máxima, por lo que se escribe:

$$f_{s,\text{máx}} = f_s = \mu_s\, n.$$

Coeficiente de fricción cinética

- En el experimento anterior se debe observar que una vez que se sobrepasa el máximo valor de fricción estática, la caja aumenta su velocidad, es decir, se acelera, hasta topar con la polea.
- Esto significa que bastaría un valor menor de $F^* < f_{s,\text{máx}}$ para mantener el objeto en movimiento aplicando una fuerza constante.
- Por tanto, la fuerza de fricción cinética f_k es menor que fuerza de fricción estática f_s para las dos superficies $f_k \leq f_s$.

Un razonamiento similar nos lleva a la siguiente proporcionalidad para la fricción cinética:

$$f_k = F^* = \text{constante} = \mu_k\, n,$$

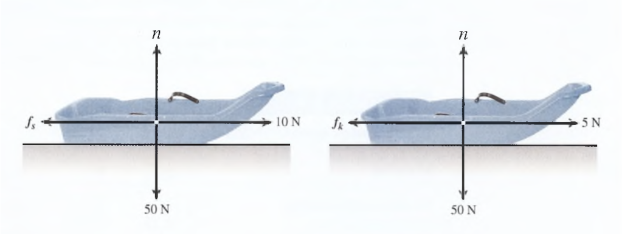
donde μ_k es una constante de proporcionalidad llamada *coeficiente de fricción cinética.*

Conclusiones

- Se puede demostrar que los coeficientes de proporcionalidad μ_s y μ_k dependen de la rugosidad de las superficies pero no del área de contacto entre ellas.
- Al analizar las ecuaciones anteriores se observa que μ depende únicamente de la fuerza de fricción f y de la fuerza normal f entre las superficies.
- Se debe aceptar, desde luego, que las ecuaciones obtenidas no son fundamentalmente rigurosas, como otras ecuaciones físicas.
- Gran número de variables interfieren con la aplicación general de estas fórmulas. Por ejemplo, nadie que tenga experiencia en carreras de automóviles puede creer que la fuerza de fricción sea completamente independiente del área de contacto

Problema

Un trineo de 50 N descansa sobre una superficie horizontal y se requiere un tirón horizontal de 10 N para lograr que empiece a moverse. Después de que comienza el movimiento basta una fuerza de 5 N para que el trineo siga moviéndose con una velocidad constante. Encuentre los coeficientes de fricción estática y cinética.



Solución

La condición de equilibrio, cuando el trineo se encuentra en reposo, nos dice que

$$10\,N - f_s = 0$$
$$n - 50\,N = 0.$$

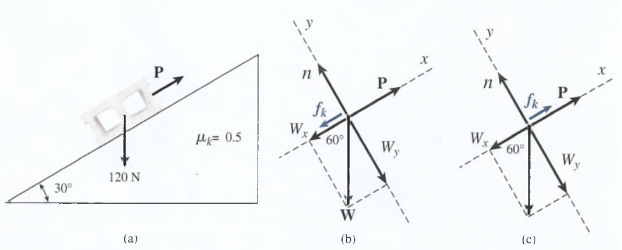
Luego $f_s = 10$ N y $n = 50$ N. Como $f_s = \mu_s\, n$ se tiene que $\mu_s = f_s/n = 10/50 = 0.20$. La fuerza que contrarresta la fricción cinética f_k es de sólo 5 N. En consecuencia, como la velocidad es constante, el sistema se encuentra en equilibrio:

$$5\,N - f_k = 0, \quad f_k = 5\,N.$$

Como $f_k = \mu_k\, n$ se tiene que $\mu_k = f_k/n = 5/50 = 0.10$.

Problema

Un bloque de hormigón de 120 N se encuentra en reposo en un plano inclinado a 30°. Si $\mu_k = 0.5$, ¿qué fuerza **P** paralela al plano y dirigida hacia arriba de éste hará que el bloque se mueva (a) hacia arriba del plano con velocidad constante y (b) hacia abajo del plano con velocidad constante?



Recordemos que velocidad constante implica aceleración nula y en consecuencia la fuerza neta es cero. El sistema se encuentra entonces en equilibrio traslacional.

Solución(a)

Conocemos $\mathbf{W} = (-120\cos 60^\circ, -120\sin 60^\circ)$, $\mathbf{P} = (P, 0)$ y $\mathbf{f}_k = (-f_k, 0)$. En equilibrio traslacional, $\mathbf{W} + \mathbf{P} + \mathbf{f}_k = \mathbf{0}$, y empleando coordenadas:

$$\begin{aligned} -120\cos 60^\circ - f_k + P &= 0, \\ -120\sin 60^\circ + n &= 0. \end{aligned}$$

Es decir

$$-120\cos 60^\circ - 0.5n + P = 0, \quad -120\sin 60^\circ + n = 0.$$

Obtenemos $n = 120\sin 60^\circ = 104.0$ N, y $P = 120\cos 60^\circ + 0.5n = 112.0$ N. Observe que el empuje P horizontal al plano debe en este caso contrarrestar tanto la fuerza de fricción de $f_k = \mu_k \cdot n = 52.0$ N como la componente de $W_x = 120\cos 60^\circ = 60$ N del peso del bloque hacia abajo del plano.

Solución(b)

En el segundo caso, la fuerza $\mathbf{P} = (P, 0)$ necesaria para retrasar el natural movimiento hacia abajo del bloque hasta que su velocidad permanezca constante. La fuerza de fricción se dirige ahora hacia arriba del plano inclinado $\mathbf{f}_k = (f_k, 0)$, en la misma dirección que la fuerza $\mathbf{P}$. En equilibrio traslacional y empleando coordenadas,

$$\begin{aligned} -120\cos 60^\circ + f_k + P &= 0, \\ -120\sin 60^\circ + n &= 0. \end{aligned}$$

Es decir

$$-120\cos 60^\circ + 0.5n + P = 0, \quad -120\sin 60^\circ + n = 0.$$

Obtenemos $n = 120\sin 60^\circ = 104.0$ N, y
$P = 120\cos 60^\circ - 0.5n = 8.0$ N. Observe que el empuje horizontal al plano P y la fuerza de fricción de $f_k = \mu_k \cdot n = 52.0$ N contrarrestan el peso $W_x = 120\cos 60^\circ = 60$ N del bloque hacia abajo del plano.