

Movimiento rotatorio y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional

Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

Movimiento angular uniformemente acelerado (MAUA)

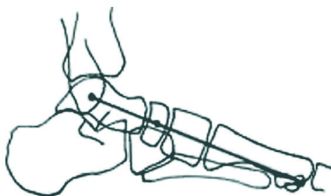
Relaciones entre cantidades lineales y angulares

El momento de inercia

El momento angular

Preliminares

- ▶ En los temas anteriores nos hemos referido a las fuerzas que actúan en un solo punto.
- ▶ Existe un equilibrio traslacional cuando la suma vectorial es cero.
- ▶ Sin embargo, en muchos casos las fuerzas que actúan sobre un objeto no tienen un punto de aplicación común.
- ▶ Este tipo de fuerzas se llaman *no concurrentes*.



Una fuerza vertical de apoyo en la punta del pie transmite una tensión al tobillo.

Movimiento rotatorio y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional
Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

Movimiento angular uniformemente acelerado (MAUA)

Relaciones entre cantidades lineales y angulares

El momento de inercia

El momento angular

Introducción

El momento de
torsiónEquilibrio rotacional
Centro de gravedadVelocidad y
aceleración angularMovimiento angular
uniformemente acelerado
(MAUA)Relaciones entre
cantidades lineales y
angulares

El momento de inercia

El momento angular

El efecto biomecánico del momento de torsión

"Todas las articulaciones de la extremidad inferior están interrelacionadas en cadena cinética cerrada. Teniendo en cuenta esto, se puede entender cómo una afectación en el pie puede causar disfunción y síntomas en otras partes del cuerpo enmascarando alteraciones biomecánicas que, a largo plazo, pueden causar problemas a distancia como: dolores, alteraciones funcionales, bloqueos, deformidades, crepitaciones, choques, trastornos vásculo-nerviosos y trastornos tróficos."

Referencia

Wallace L. Pronación del pie y dolor en la rodilla. En: Mangine RE. Fisioterapia de la rodilla. Barcelona: Jims; 1991. p. 103-25.

Discusión acerca de la noción de equilibrio

- ▶ Cuando un cuerpo está en equilibrio, debe encontrarse en reposo o en estado de movimiento rectilíneo uniforme. De acuerdo con la primera ley de Newton, lo único que puede cambiar dicha situación es la aplicación de una fuerza resultante.
- ▶ Hemos visto que si todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo tienen un solo punto de intersección y si su suma vectorial es igual a cero, el sistema debe estar en equilibrio.
- ▶ Cuando sobre un cuerpo actúan fuerzas que no tienen una línea de acción común, tal vez exista equilibrio traslacional y la aceleración lineal sea nula pero pueden existir aceleraciones de carácter no lineal no nulas.
- ▶ Puede que un cuerpo no se desplace ni a la derecha ni a la izquierda, tampoco hacia arriba ni hacia abajo, pero puede girar.
- ▶ *Al estudiar el equilibrio debemos tomar en cuenta el punto de aplicación de cada fuerza además de su magnitud.*

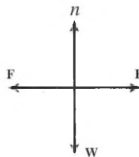
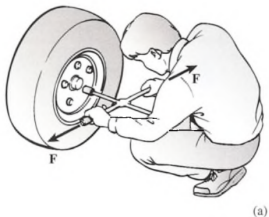
Teorema (Cinemática del sólido rígido)

Cualquier movimiento en el espacio que preserve el volumen se puede descomponer esencialmente en traslaciones y rotaciones.

- ▶ La ley de la inercia de Newton nos predice que las traslaciones de un sólido rígido son provocadas por la acción de una fuerza.
- ▶ La cuestión científica es: **¿Qué efecto físico provocan las rotaciones?**

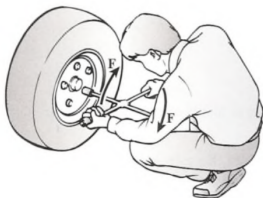
Definición (Línea de acción)

La línea de acción de una fuerza es una línea imaginaria que se extiende indefinidamente a lo largo del vector en ambas direcciones.

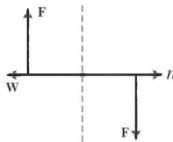


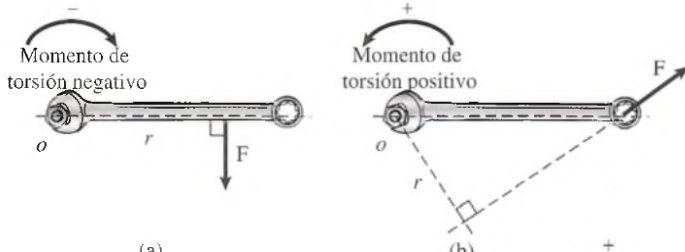
Definición (El brazo de palanca)

El brazo de palanca de una fuerza es la distancia perpendicular que hay de la línea de acción de la fuerza al eje de rotación.



(b)





Una fuerza ejercida sobre un brazo de palanca genera una tensión que es perpendicular al plano donde transcurre la acción.

Definición (Momento de torsión o momento de una fuerza)

El momento de torsión τ se define como la tendencia a producir un cambio en el movimiento angular del objeto. El momento de torsión se define como el **producto vectorial** de una fuerza por la posición de donde actúa dicha fuerza con respecto al eje de rotación.

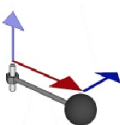
Momento de torsión = fuerza \times brazo de palanca.

Sea $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ la fuerza que actúa a una distancia $\mathbf{r} = (r_x, r_y)$ del eje de rotación. Si suponemos que \mathbf{F} y \mathbf{r} están contenidas en un mismo plano y el ángulo entre la fuerza \mathbf{F} y la posición es igual a θ , la magnitud τ del momento torsión τ es igual a

$$\tau = F \cdot r \cdot |\sin(\theta)| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \cdot \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \cdot |\sin(\theta)|.$$

El momento de torsión como efecto 3D

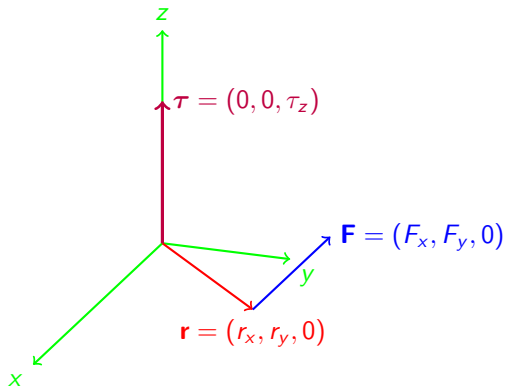
Consideremos una fuerza 3D $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0)$ (en azul en la figura) que actúa sobre el eje de rotación definido por el vector $\mathbf{r} = (r_x, r_y, 0)$ (en rojo en la figura). En este caso tanto la fuerza \mathbf{F} como la distancia \mathbf{r} actúan en el mismo plano (la coordenada z es cero en ambas fuerzas).



la torsión $\boldsymbol{\tau} := \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es una fuerza por unidad de longitud, representada por un vector perpendicular al plano donde actúan \mathbf{F} y \mathbf{r} y que coincide con el llamado eje de rotación. En consecuencia, el momento de torsión es un vector

$$\boldsymbol{\tau} = \left(0, 0, \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \cdot \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \cdot \sin(\theta) \right) \text{ N m}$$

La geometría del momento de torsión



La magnitud y signo del momento de torsión se puede calcular empleando la fórmula

$$\tau_z = r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x = F \cdot r \cdot \sin \theta.$$

Movimiento rotatorio
y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de
torsión

Equilibrio rotacional

Centro de gravedad

Velocidad y
aceleración angular

Movimiento angular
uniformemente acelerado
(MAUA)

Relaciones entre
cantidades lineales y
angulares

El momento de inercia

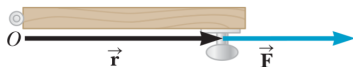
El momento angular

Introducción

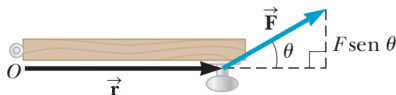
El momento de
torsiónEquilibrio rotacional
Centro de gravedadVelocidad y
aceleración angularMovimiento angular
uniformemente acelerado
(MAUA)Relaciones entre
cantidades lineales y
angulares

El momento de inercia

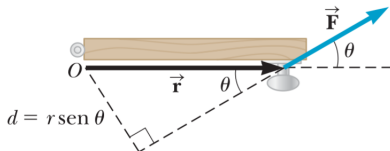
El momento angular



a



b



c

El sentido de giro del eje y el signo del momento de torsión

- ▶ Si $\tau_z = r_x F_y - r_y F_x > 0$ entonces el eje \mathbf{r} gira en el sentido opuesto a las agujas del reloj.
- ▶ Si $\tau_z = r_x F_y - r_y F_x < 0$ entonces el eje \mathbf{r} gira en el sentido de las agujas del reloj.

La regla de cálculo es

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \right) = (0, 0, r_x F_y - r_y F_x),$$

y es importante darse cuenta que

$$\mathbf{F} \times \mathbf{r} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ r_x & r_y \end{vmatrix} \right) = (0, 0, r_y F_x - r_x F_y) = -(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

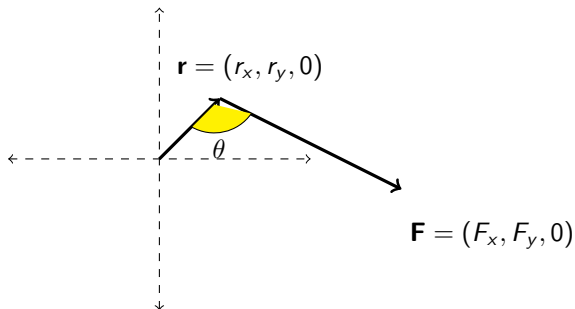
este *producto* no es conmutativo.

La fórmula adicional

Se conoce la siguiente relación

$$\tau = \|\boldsymbol{\tau}\| = |\tau_z| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \cdot \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \cdot |\sin(\theta)|$$

donde θ es el ángulo que forman la fuerza \mathbf{F} y \mathbf{r} es la posición entre el eje de rotación y el punto donde actúa la fuerza.



Discusión

$$\tau = \|\boldsymbol{\tau}\| = \|\mathbf{F}\| \cdot \|\mathbf{r}\| \cdot |\sin \theta|$$

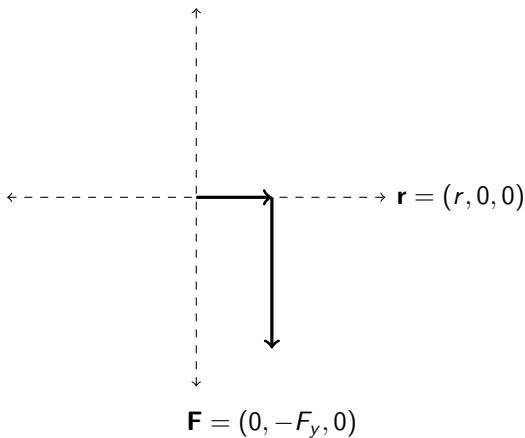
- ▶ Conocemos que $-1 \leq \sin \theta \leq 1$, es decir $0 \leq |\sin \theta| \leq 1$.
- ▶ Si suponemos que $\|\mathbf{F}\|$ y $\|\mathbf{r}\|$ son constantes. El módulo de la torsión τ solo depende entonces del ángulo θ y es máximo cuando
- ▶ Podemos afirmar entonces que

$$\tau = \begin{cases} \|\mathbf{F}\| \cdot \|\mathbf{r}\| & \text{máximo} & \theta = \pm \frac{\pi}{2} = \pm 90^\circ, \\ 0 & \text{mínimo} & \theta = 0. \end{cases}$$

- ▶ *Solo cuando la posición $\mathbf{r} = (\pm r_x, 0, 0)$ y la fuerza $\mathbf{F} = (0, \pm F_y, 0)$ son perpendiculares, podemos afirmar que la magnitud del momento de torsión $\tau = F_y \cdot r_x$ es el producto de la magnitud de la fuerza por la longitud del brazo de palanca.*

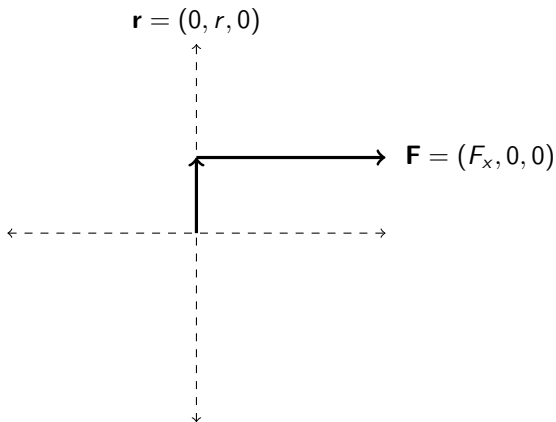
Formalmente, si \mathbf{F} actúa sobre un punto a una distancia r y la línea de acción es horizontal, entonces $\mathbf{F} = (0, -F_y, 0)$ y

$$\boldsymbol{\tau} = (0, 0, -r F_y),$$

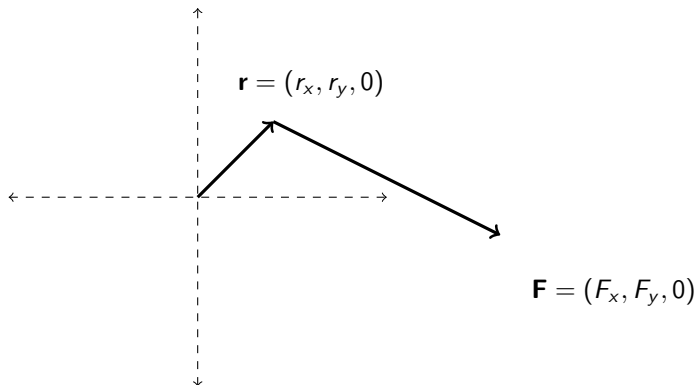


y si la línea de actuación es vertical entonces $\mathbf{F} = (F_x, 0, 0)$

$$\boldsymbol{\tau} = (0, 0, -r F_x),$$



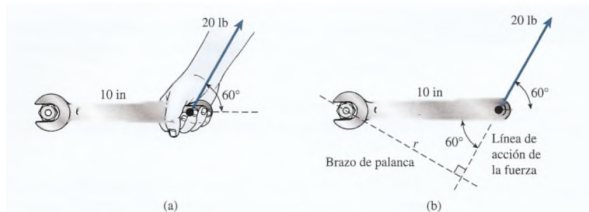
¿Cómo calculamos τ si tenemos la siguiente situación?



$$\tau := (0, 0, r_x F_y - r_y F_x) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Problema

Un mecánico ejerce una fuerza de 20 lb en el extremo de una llave inglesa de 10 pulgadas, como se observa en la figura. Si este tirón forma un ángulo de 60° con el mango de la llave, ¿cuál es el momento de torsión producido en la tuerca?



Solución

Como 20 lb son 9.07 N y 10 pulgadas son 0.25 metros En esta situación

$$\mathbf{F} = (9.07 \cos 60^\circ, 9.07 \sin 60^\circ, 0)$$

y

$$\mathbf{r} = (0.25, 0, 0).$$

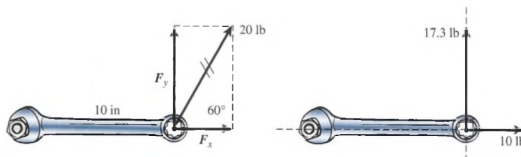
Entonces, el momento de la fuerza se calcula a partir de la expresión

$$\begin{vmatrix} 0.25 & 0 \\ 9.07 \cos 60^\circ & 9.07 \sin 60^\circ \end{vmatrix}$$

de donde

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (0, 0, 0.25 \cdot 9.07 \sin 60^\circ) = (0, 0, 1.96371) \text{ N} \cdot \text{m}.$$

La moraleja de la historia:



Solo la componente de la fuerza que es perpendicular a la línea de acción tiene efecto sobre el momento de torsión.

Unidades físicas del momento de torsión

$$[\tau] = \text{N m} = \text{kg (m/s}^2\text{) m} = \text{kg (m/s)}^2$$

Como las unidades m/s están relacionadas con la velocidad. El momento de torsión tiene las mismas unidades que la energía tal y como podemos comprobar con la famosa fórmula de Einstein:

$$E = m \cdot c^2.$$

Observar que también podemos interpretar la expresión:

$$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \frac{\text{Área recorrida}}{\text{s}^2}.$$

Efecto físico

- ▶ Si el momento de torsión es distinto de cero esto implica que el efecto de la fuerza sobre el eje provoca la aparición de una aceleración rotacional.
- ▶ El signo de la torsión nos indica el sentido de giro, y el módulo

$$\tau = \left\| \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \right\| = |r_x F_y - r_y F_x|$$

tiene que tener relación con una aceleración angular.

Definición (Equilibrio rotacional)

Supongamos que tenemos que una conjunto finito de pares de brazos de palanca y fuerzas que

$$\{\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1\}, \{\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_2\}, \dots, \{\mathbf{r}_n, \mathbf{F}_n\}$$

donde la fuerza \mathbf{F}_i actúa sobre el punto \mathbf{r}_i y todas las posiciones se toman desde un mismo punto que marca un eje de rotación común. Diremos que ese conjunto de fuerzas $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ se encuentran en equilibrio rotacional respecto al eje de rotación fijado si la suma de todos los momentos de torsión respecto a ese eje de rotación es nula, es decir, se tiene que que cumplir

$$\begin{aligned}\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n &= 0, \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

$$(r_x^{(1)}F_y^{(1)} - r_y^{(1)}F_x^{(1)}) + (r_x^{(2)}F_y^{(2)} - r_y^{(2)}F_x^{(2)}) + \dots + (r_x^{(n)}F_y^{(n)} - r_y^{(n)}F_x^{(1)}) = 0$$

Discusión

- ▶ La segunda condición de equilibrio simplemente nos indica que los momentos de torsión en el sentido de avance de las manecillas del reloj están equilibrados con precisión por los momentos de torsión en contrasentido al avance de las manecillas.
- ▶ Más aún, puesto que la rotación no ocurre respecto a ningún punto, podemos elegir cualquier punto como eje de rotación. Mientras los brazos de palanca se midan respecto al mismo punto para cada fuerza, el momento de torsión resultante será de cero.
- ▶ Los problemas se simplifican si se elige el eje de rotación en el punto de aplicación de una fuerza desconocida.
- ▶ Si una fuerza particular tiene un brazo de palanca de cero, no contribuye al momento de torsión, independientemente de su magnitud.

Movimiento rotatorio y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

Movimiento angular uniformemente acelerado (MAUA)

Relaciones entre cantidades lineales y angulares

El momento de inercia

El momento angular

Definición (Equilibrio)

Supongamos que tenemos que una conjunto finito de pares de brazos de palanca y fuerzas que

$$\{\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1\}, \{\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_2\}, \dots, \{\mathbf{r}_n, \mathbf{F}_n\}$$

donde la fuerza \mathbf{F}_i actúa sobre el punto \mathbf{r}_i y todas las posiciones se toman desde un mismo punto que marca un eje de rotación común. Diremos que el sistema está en equilibrio si está en equilibrio traslacional y en equilibrio rotacional, esto es,

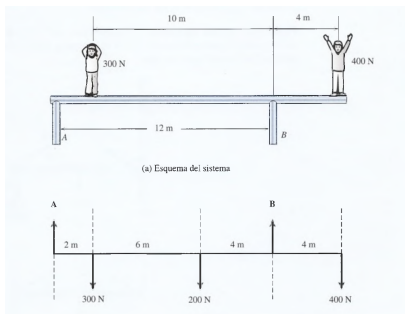
$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\tau_z^{(1)} + \tau_z^{(2)} + \dots + \tau_z^{(n)} = 0 \quad (2)$$

donde $\tau_z^{(i)} = r_x^{(i)} \cdot F_y^{(i)} - r_y^{(i)} \cdot F_x^{(i)}$.

Problema

Considere la situación que se presenta en la figura: Una niña que pesa 300 N y un niño que pesa 400 N están parados sobre una plataforma de 200 N de peso y sostenida por dos soportes *A* y *B*. ¿Qué fuerzas ejercen los soportes sobre la plataforma si se encuentra en equilibrio?



Movimiento rotatorio y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional

Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

Movimiento angular uniformemente acelerado (MAUA)

Relaciones entre cantidades lineales y angulares

El momento de inercia

El momento angular

Solución

Como la rotación no ocurre respecto a ningún punto, podemos elegir un eje de rotación en cualquier parte que deseemos. Una opción lógica sería elegir un punto donde actúe una de las fuerzas desconocidas porque así se tendría un brazo de palanca de cero. Tomemos la suma de los momentos de torsión respecto al soporte B . En este problema las fuerzas que actúan sobre la plataforma son

$$\mathbf{F}_1 = (0, A), \mathbf{F}_2 = (0, -300), \mathbf{F}_3 = (0, -200),$$

$$\mathbf{F}_4 = (0, B), \mathbf{F}_5 = (0, -400).$$

en las posiciones donde actúan cada una de estas fuerzas medidas considerando como eje de rotación el punto donde se encuentra la fuerza de soporte $\mathbf{F}_4 = (0, B)$ son

$$\mathbf{r}_1 = (-12, 0), \mathbf{r}_2 = (-10, 0), \mathbf{r}_3 = (-4, 0)$$

$$\mathbf{r}_4 = (0, 0), \mathbf{r}_5 = (4, 0).$$

Solución

La suma de las fuerzas verticales bajo la condición de equilibrio traslacional es cero, esto es,

$$\sum_{i=1}^5 F_y^{(i)} = A - 300\text{ N} - 200\text{ N} + B - 400\text{ N} = 0.$$

Simplificando

$$A + B = 900\text{ N}.$$

Solución

La suma de todos los momentos de torsión, en equilibrio rotacional, respecto a B es cero:

$$\sum_{i=1}^5 \tau_z^{(i)} = (-12 \text{ m})(A \text{ N}) + (-10 \text{ m})(-300 \text{ N}) \\ + (-4 \text{ m})(-200 \text{ N}) + (0 \text{ m})(B \text{ N}) + (4 \text{ m})(-400 \text{ N}) = 0.$$

Simplificando,

$$(12 \text{ m})A = 2200 \text{ N m} \quad \text{despejando} \quad A = 183.3333 \text{ N}.$$

Conocemos que $A = 183.3333 \text{ N}$, y

$$A + B = 900 \text{ N}.$$

Sustituyendo y despejando

$$B = 900 \text{ N} - A = 900 \text{ N} - 183.3333 \text{ N} = 716.66 \text{ N}.$$

Movimiento rotatorio y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional

Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

Movimiento angular uniformemente acelerado (MAUA)

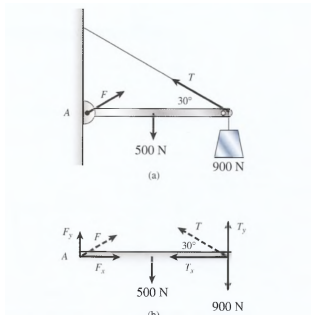
Relaciones entre cantidades lineales y angulares

El momento de inercia

El momento angular

Problema

Una viga uniforme de 500 N de peso y 3 m de longitud está sostenida por un cable, como se observa en la figura y se encuentra en equilibrio. La viga se apoya en la pared y el cable forma un ángulo de 30° con respecto a la viga, que está en posición horizontal. Si una carga de 900 N se cuelga del extremo derecho, ¿cuál es la tensión T del cable? ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por el pivote?



Movimiento rotatorio y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional

Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

Movimiento angular uniformemente acelerado (MAUA)

Relaciones entre cantidades lineales y angulares

El momento de inercia

El momento angular

Observaciones preliminares

- Observe que no conocemos ni la magnitud ni la dirección de la fuerza \mathbf{F} ejercida por la pared en el extremo izquierdo de la viga. (No cometas el error de suponer que la fuerza se ejerce totalmente sobre el pivote como en la lectura anterior cuando no consideramos el peso de la viga.)
- Resulta lógico elegir el extremo izquierdo como eje de rotación debido a que, sin importar cuál sea el ángulo, esa fuerza aún tiene un brazo de palanca de cero y su momento de torsión con respecto al punto A también será cero.

Solución

Asumiremos que la tensión de la cuerda y la fuerza se escriben como

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y) \text{ N}, \quad \mathbf{P}_1 = (0, -500) \text{ N},$$

$$\mathbf{T} = (-T \cos 30^\circ, T \sin 30^\circ) \text{ N}, \quad \mathbf{P}_2 = (0, -900) \text{ N}.$$

Los radios con respecto al punto A se escriben entonces

$$\mathbf{r}_F = (0, 0) \text{ m}, \quad \mathbf{r}_{P_1} = (1.5, 0) \text{ m}, \quad \mathbf{r}_{T, P_2} = (3, 0) \text{ m}.$$

La suma de los momentos de torsión igual a cero implica

$$\begin{aligned} \tau_z &= (0 \cdot F_y - 0 \cdot F_x) + (1.5 \cdot (-500) - 0 \cdot 0) \\ &+ (3 \cdot T \sin 30^\circ - 0 \cdot (-T \cos 30^\circ)) + (3 \cdot (-900) - 0 \cdot 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

es decir

$$-750 - 2700 + 3T \sin 30^\circ = 0,$$

luego $T = 3450.0/3 \sin 30^\circ = 2300.0 \text{ N}$.

Solución (continuación)

En equilibrio traslacional la suma de todas las fuerzas tiene que ser igual a cero,

$$\mathbf{F} + \mathbf{T} + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{0}.$$

Esto implica

$$F_x + 0 + (-T \cos 30^\circ) + 0 = 0$$

$$F_y + (-500) + (T \sin 30^\circ) + (-900) = 0.$$

De la primera ecuación deducimos

$$F_x = T \cos 30^\circ = 1991.858 \text{ N}$$

y de la segunda ecuación

$$F_y = 1400 - T \sin 30^\circ = 250 \text{ N}.$$

Introducción

- ▶ Cada partícula que existe en la Tierra tiene al menos una fuerza en común con cualquier otra partícula: su peso.
- ▶ En el caso de un cuerpo formado por múltiples partículas, estas fuerzas son esencialmente paralelas y están dirigidas hacia el centro de la Tierra.
- ▶ Independientemente de la forma y tamaño del cuerpo, existe un punto en el que se puede considerar que está concentrado todo el peso del cuerpo. Este punto se llama **centro de gravedad** del cuerpo.
- ▶ Por supuesto, el peso no actúa de hecho en este punto, pero podemos calcular el mismo tipo de momento de torsión respecto a un eje dado si consideramos que todo el peso actúa en este punto.

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional

Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

Movimiento angular uniformemente acelerado (MAUA)

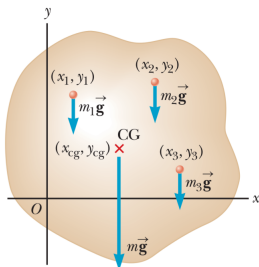
Relaciones entre cantidades lineales y angulares

El momento de inercia

El momento angular

- Un sólido rígido se divide en una gran cantidad de partículas muy pequeñas de pesos $m_1 g$, $m_2 g$, \dots , $m_k g$ con coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , \dots , (x_k, y_k) .
- Si el objeto rota libremente alrededor del origen, cada partícula contribuye con un momento de torsión sobre el origen que es igual a su peso multiplicado por su brazo de palanca,

$$\begin{aligned}\tau_z &= x_1 \cdot (-m_1 g) + x_2 \cdot (-m_2 g) + \dots + x_k \cdot (-m_k g) \\ &= -g(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_k x_k).\end{aligned}$$



Movimiento rotatorio y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional

Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

Movimiento angular uniformemente acelerado (MAUA)

Relaciones entre cantidades lineales y angulares

El momento de inercia

El momento angular

Definición (centro de gravedad)

Llamamos centro de gravedad al punto de coordenadas (x_{cg}, y_{cg}) de forma que el peso $(m_1 + m_2 + \dots + m_k)g$ concentrado en ese punto genera un momento de torsión equivalente al generado por el peso de todas las partículas en sus posiciones

$$\tau_z = -g(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k),$$

es decir

$$-g(m_1 + m_2 + \dots + m_k)x_{cg} = \tau_z = -g(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k)$$

despejando x_{cg} obtenemos

$$x_{cg} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}.$$

que coincide con la definición clásica de **centro de masa**.

Teorema

Si un sólido rígido plano de coordenadas (x, y) en el campo gravitatorio terrestre con aceleración gravitatoria $\mathbf{g} = (0, -g)$ m/s^2 se encuentra en equilibrio traslacional, entonces su momento de torsión τ_z es cero.

Como el sólido rígido está en equilibrio traslacional entonces existe una fuerza

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)g$$

en sentido contrario al peso, de forma que la fuerza neta vertical

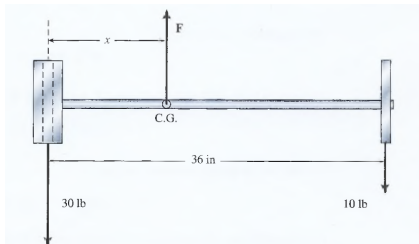
$$-(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)g + (m_1 + m_2 + \cdots + m_k)g = 0.$$

En consecuencia, el momento de torsión en el centro de gravedad (x_{cg}, y_{cg}) es

$$\begin{aligned}\tau_z &= x_{cg}(-(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)g) + x_{xg}((m_1 + m_2 + \cdots + m_k)g) \\ &= 0\end{aligned}$$

Problema

Calcule el centro de gravedad del sistema de barra con pesas que se presenta en la figura y que se supone se encuentra en equilibrio traslacional. Suponga que el peso de la barra de longitud 36 pulgadas es insignificante.



Solución

La fuerza resultante paralela al eje y que denotamos $\mathbf{F} = (0, F_y)$ tiene que cumplir que $F_y = 30 + 10 = 40$ lb. Entonces tomamos dos radios respecto a la pesa izquierda que tomamos como eje de rotación para calcular el momento de torsión:

$$\mathbf{r}_1 = (x, 0) \quad \mathbf{r}_2 = (36, 0)$$

Entonces, el equilibrio rotacional:

$$40x + (36)(-10) = 0, \quad 40x - 360 = 0, \quad x = 9 \text{ pulgadas.}$$

Si las pesas estuvieran suspendidas desde el techo a un punto a 9 pulgadas del centro de la masa izquierda, el sistema estaría en equilibrio.

Independencia del eje de rotación

Se llega a la misma conclusión si se elige el eje en el extremo derecho o en cualquier otro lugar. Si se elige el propio centro de gravedad como eje de rotación, entonces el punto donde actúa \mathbf{F} será el origen $(0, 0)$. Obtenemos pues que

$$\mathbf{P}_1 = (0, -30) \text{ actúa en } \mathbf{r}_1 = (-x, 0)$$

y

$$\mathbf{P}_2 = (0, -10) \text{ actúa en } \mathbf{r}_2 = (36 - x, 0)$$

Entonces, calculamos

$$\tau_z = (-30)(-x) + (36 - x)(-10) = 0,$$

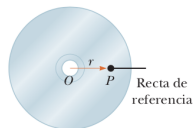
luego

$$40x - 360 = 0, \quad x = 360/40 = 9 \text{ pulgadas.}$$

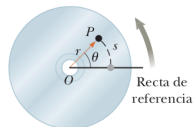
Definición (Coordenadas angulares)

Consideremos un sólido rígido plano, entonces podemos determinar cada punto de coordenadas lineales respecto un punto de referencia O y una línea de referencia empleando el radio r y el ángulo θ tal y como podemos ver en la figura mediante las expresiones equivalentes:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x}. \end{cases}$$



a



b

Movimiento rotatorio y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional

Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

Movimiento angular uniformemente acelerado (MAUA)

Relaciones entre cantidades lineales y angulares

El momento de inercia

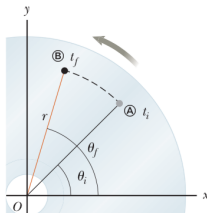
El momento angular

Definición (Desplazamiento angular)

Consideremos un sólido rígido plano y tomemos un punto situado en A que en un instante de tiempo t_i se encuentra situado en una posición de ángulo $\theta(t_i)$ y radio r que en un instante de tiempo t_f se encuentra en una posición B con un ángulo $\theta(t_f)$ y radio r . Llamamos desplazamiento angular a la cantidad

$$\theta(t_f) - \theta(t_i)$$

medida en radianes.

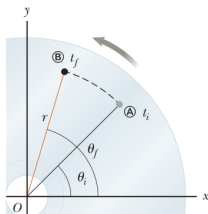


Definición (Velocidad angular media)

La velocidad angular media de un punto un punto situado en A que en un instante de tiempo t_i se encuentra situado en una posición de ángulo $\theta(t_i)$ y radio r que en un instante de tiempo t_f se encuentra en una posición B con un ángulo $\theta(t_f)$ y radio r se define como

$$\frac{1}{2}(\omega(t_f) + \omega(t_i)) := \frac{\theta(t_f) - \theta(t_i)}{t_f - t_i}$$

y se mide en rad/s. Si $t_f = t = t_i$ entonces se llama a $\omega(t)$ **velocidad angular instantánea**.

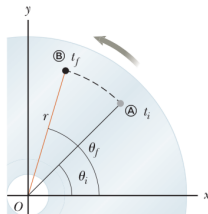


Definición (Aceleración angular media)

La aceleración angular media de un punto un punto situado en A que en un instante de tiempo t_i lleva una velocidad angular $\omega(t_i)$ y que en un instante de tiempo t_f lleva una velocidad angular $\omega(t_f)$ se define como

$$\frac{1}{2}(\alpha(t_f) + \alpha(t_i)) := \frac{\omega(t_f) - \omega(t_i)}{t_f - t_i}$$

y se mide en rad/s^2 . Si $t_f = t = t_i$ entonces se llama a $\alpha(t)$ **aceleración angular instantánea**.



Movimiento rotatorio y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional
Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

Movimiento angular
uniformemente acelerado (MAUA)

Relaciones entre
cantidades lineales y
angulares

El momento de inercia

El momento angular

Teorema

En un sólido rígido que gira alrededor de un eje fijo, cada punto del objeto tiene la misma velocidad y aceleración angular.

Ejemplo

En una rueda de bicicleta que gira todos los puntos de la rueda tienen la misma velocidad y aceleración angular.

Nota

En contraste, la velocidad y la aceleración lineales del objeto toman valores diferentes en función del punto de la distancia al eje de rotación.

Definición

Diremos que un sólido rígido tiene un **movimiento angular uniformemente acelerado** (MAUA) si su aceleración angular instantánea $\alpha(t)$ es constante, es decir, $\alpha(t) = \alpha \text{ rad/s}^2$ para todo instante de tiempo $t \geq t_0$.

Como consecuencia de la similitud entre las cantidades lineales y angulares podemos deducir el resultado siguiente.

Teorema

Supongamos que un sólido rígido sigue un movimiento angular uniformemente acelerado (MAUA) con aceleración constante $\alpha \text{ rad/s}^2$. Entonces la velocidad angular $\omega(t)$ y la posición angular $\theta(t)$ quedan completamente determinadas si observamos la posición angular inicial $\theta(t_0)$ y la velocidad angular inicial $\omega(t_0)$ de forma que

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha \cdot (t - t_0), \quad (3)$$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (t - t_0)^2, \quad (4)$$

se cumple para todo instante de tiempo $t \geq t_0$.

La ecuación de la cinemática angular independiente del tiempo

Del mismo modo que en el caso lineal podemos deducir las ecuación horarias angular independiente del tiempo, esto es, se cumple la relación

$$\omega(t)^2 - \omega(t_0)^2 = 2\alpha(\theta(t) - \theta(t_0)) \quad (5)$$

para todo $t \geq t_0$.

Movimiento rotatorio y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional

Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

Movimiento angular uniformemente acelerado (MAUA)

Relaciones entre cantidades lineales y angulares

El momento de inercia

El momento angular

Problema

Una rueda gira con una aceleración angular constante de 3.50 rad/s^2 . Si la velocidad angular de la rueda es de 2.00 rad/s en $t = 0 \text{ s}$ se pide

- (a) ¿Cuál es el ángulo en el que gira la rueda entre $t = 0$ y $t = 2.00 \text{ s}$?
- (b) ¿Cuál es la velocidad angular de la rueda en $t = 2.00$?
- (c) ¿Qué desplazamiento angular (en revoluciones) resulta cuando partiendo de una velocidad angular como la obtenida en el apartado anterior esta se duplica?

► En este problema $\alpha = 3.50 \text{ rad/s}^2$, $t_0 = 0$ entonces $\omega(0) = 2.00 \text{ rad/s}$.

► Suponemos que $\theta(0) = 0 \text{ rad}$.

Las ecuaciones (3)-(4) quedan entonces

$$\omega(t) = 2.00 + 3.50 \cdot t,$$

$$\theta(t) = 0 + 2.00 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 3.50 \cdot t^2$$

Solución

(a) Podemos predecir cual es el ángulo en $t = 2.00$ s:

$$\theta(2.00) = 2.00 \cdot 2.00 + \frac{1}{2} \cdot 3.50 \cdot (2.00)^2 = 11.0 \text{ rad.}$$

(b) Podemos predecir la velocidad angular en $t = 2.00$ s:

$$\omega(2.00) = 2.00 + 3.50 \cdot 2.00 = 9.0 \text{ rad/s.}$$

(c) Partimos de una velocidad inicial de $\omega(t_i) = 9.0 \text{ rad/s}$ esta la duplicamos $\omega(t_f) = 18.0 \text{ rad/s}$, el problema nos pide que calculemos el desplazamiento angular $\theta(t_f) - \theta(t_i)$. Para ello emplearemos la ecuación de la cinemática angular independiente del tiempo (5):

$$\omega(t_f)^2 - \omega(t_i)^2 = 2 \alpha (\theta(t_f) - \theta(t_i))$$

luego

$$(\theta(t_f) - \theta(t_i)) = \frac{\omega(t_f)^2 - \omega(t_i)^2}{2 \alpha} = \frac{324.0 - 81.0}{2 \cdot 3.50} = 34.71428 \text{ rad.}$$

Movimiento rotatorio
y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de
torsión

Equilibrio rotacional
Centro de gravedad

Velocidad y
aceleración angular

Movimiento angular
uniformemente acelerado
(MAUA)

Relaciones entre
cantidades lineales y
angulares

El momento de inercia

El momento angular

Radianes y revoluciones

Definición

Un revolución (rev) es una vuelta completa de circunferencia que son 2π rad. En consecuencia el factor de conversión es

$$1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad.}$$

Ejemplo

Si tenemos 34.71428 rad entonces esto equivale a

$$34.71428 \text{ rad} \frac{1 \cdot \text{rev}}{2\pi \text{ rad}} = 5.52496 \text{ rev.}$$

Movimiento rotatorio y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional

Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

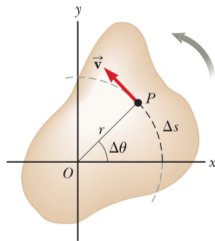
Movimiento angular uniformemente acelerado (MAUA)

Relaciones entre cantidades lineales y angulares

El momento de inercia

El momento angular

Veamos ahora la relación entre las cantidades lineales (\mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{a}) y las angulares (θ , ω , α).



En una circunferencia la relación entre la longitud y el radio permanece constante y es igual a 2π rad. Si denotamos por $\Delta s = s(t) - s(t_0)$ la longitud del arco recorrido en el tiempo $t - t_0$ entonces esta cantidad dividida por el radio tiene que ser constante e igual al desplazamiento angular entre estos dos instantes de tiempo:

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{r} = \frac{\Delta s}{r} = (\theta(t) - \theta(t_0)) = \Delta\theta.$$

Movimiento rotatorio y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional
Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

Movimiento angular uniformemente acelerado (MAUA)

Relaciones entre cantidades lineales y angulares

El momento de inercia

El momento angular

Si partimos de la expresión

$$(\theta(t) - \theta(t_0)) = \frac{1}{r} (s(t) - s(t_0))$$

y dividimos los dos lados de esta ecuación por $(t - t_0)$, obtenemos

$$\frac{\theta(t) - \theta(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{r} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Si $t = t_0$ esta ecuación se transforma en

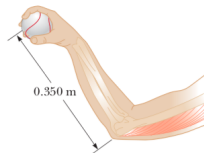
$$\omega(t) = \frac{v(t)}{r} \quad (6)$$

donde $v(t)$ es la magnitud de la velocidad lineal $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$. A esta magnitud se la conoce como **velocidad tangencial** y se denota por $v_t(t)$ de donde

$$v_t(t) = r \omega(t).$$

Problema

Un jugador de béisbol calienta su brazo antes de lanzar en un juego una pelota de 0.150 kg, usando solamente la rotación de su antebrazo para acelerarla. El antebrazo tiene una masa de 1.50 kg y una longitud de 0.350 m. La bola parte del reposo y se lanza con una velocidad de 30.0 m/s en 0.300 s. Encuentre la aceleración angular constante del brazo y de la pelota.



Solución

Como la aceleración angular α es constante entonces la velocidad angular es

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha(t - t_0).$$

Tomamos $t_0 = 0$ y velocidad angular inicial nula ya que la bola parte del reposo, $\omega(0) = 0$. Entonces

$$\omega(t) = \alpha \cdot t \Rightarrow \alpha = \frac{\omega(t)}{t}.$$

Conocemos que la velocidad tangencial $v_t(t) = r \cdot \omega(t)$ y por los datos del problema la longitud del brazo $r = 0.350$ m, $v_t(t) = 30.0$ m/s y $t = 0.300$ s, luego

$$\omega(t) = \frac{30.0}{0.350} = 85.719 \text{ rad.}$$

Finalmente obtenemos que $\alpha = \frac{85.719}{0.300} = 285.73346 \text{ rad/s}^2$.

Movimiento rotatorio
y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de
torsión

Equilibrio rotacional
Centro de gravedad

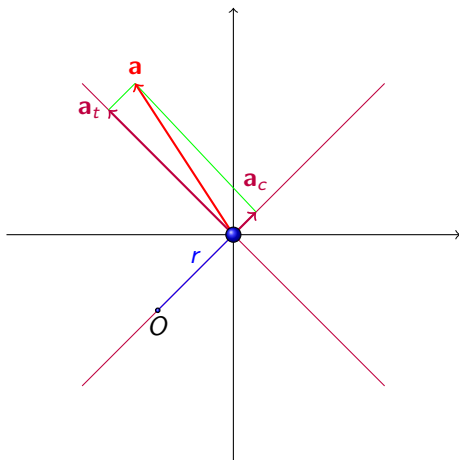
Velocidad y
aceleración angular

Movimiento angular
uniformemente acelerado
(MAUA)

Relaciones entre
cantidades lineales y
angulares

El momento de inercia

El momento angular



Un objeto se mueve siguiendo una trayectoria circular de radio r con una aceleración \mathbf{a} que descomponemos como suma de dos aceleraciones perpendiculares $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c$, donde \mathbf{a}_c está en la dirección del radio de giro y \mathbf{a}_t es perpendicular al radio de giro.

Movimiento rotatorio y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de torsión

Equilibrio rotacional
Centro de gravedad

Velocidad y aceleración angular

Movimiento angular
uniformemente acelerado (MAUA)

Relaciones entre
cantidades lineales y
angulares

El momento de inercia

El momento angular

Finalmente, de la expresión

$$v_t(t) = r \omega(t).$$

podemos deducir que la **aceleración tangencial** que denotamos por $a_t(t)$ es igual a

$$a_t(t) = r \alpha(t). \quad (7)$$

Empleando el argumento previo podemos descomponer la aceleración lineal

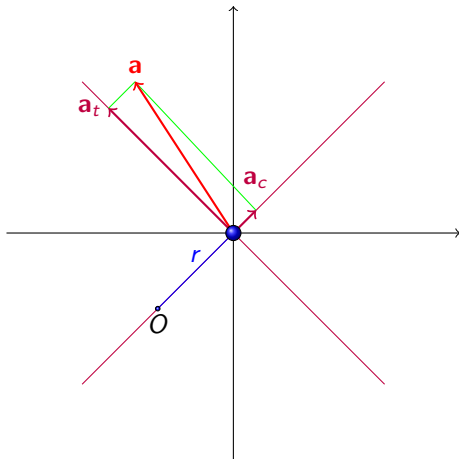
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_t(t) + \mathbf{a}_c(t) \text{ donde } \mathbf{a}_t(t) \perp \mathbf{a}_c(t).$$

El Teorema de Pitágoras nos dice que si consideremos la magnitud de la aceleración lineal al cuadrado:

$$a(t)^2 = \|\mathbf{a}(t)\|^2 = \|\mathbf{a}_t(t)\|^2 + \|\mathbf{a}_c(t)\|^2$$

Podemos entonces concluir que la aceleración tangencial coincide con $a_t(t) = \|\mathbf{a}_t(t)\|$, a la magnitud $a_c(t) := \|\mathbf{a}_c(t)\|$ se le llama **aceleración centrípeta**.

La descomposición de la aceleración



Se cumple que

$$a(t) = \|\mathbf{a}(t)\| = \sqrt{a_t(t)^2 + a_c(t)^2}$$

Movimiento rotatorio
y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de
torsión

Equilibrio rotacional
Centro de gravedad

Velocidad y
aceleración angular

Movimiento angular
uniformemente acelerado
(MAUA)

Relaciones entre
cantidades lineales y
angulares

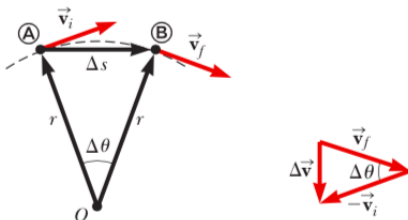
El momento de inercia

El momento angular

Para encontrar una expresión equivalente a

$$a_t(t) = r \alpha(t).$$

para la aceleración centrípeta nos fijamos en la figura siguiente que muestra dos triángulos semejantes:



es decir,

$$\frac{\|v(t_f) - v(t_i)\|}{v(t_f)} = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{r},$$

que es equivalente a

$$\frac{\|v(t_f) - v(t_i)\|}{t_f - t_i} = \frac{v(t_f)}{r} \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i}$$

Si en la expresión

$$\frac{\|v(t_f) - v(t_i)\|}{t_f - t_i} = \frac{v(t_f)}{r} \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i}$$

tomamos $t_i = t = t_f$ obtenemos

$$a_c(t) = \frac{v(t)}{r} \cdot v(t) = \frac{v(t)^2}{r}. \quad (8)$$

Recordemos que $v(t) = v_t(t) = r\omega(t)$ coincide con la velocidad tangencial, en consecuencia

$$a_c(t) = r\omega(t)^2. \quad (9)$$

Nota

Conocemos que cuando un sistema de masa m no está en equilibrio traslacional entonces la fuerza neta que actúa sobre el sistema

$$\mathbf{F} \neq 0.$$

La segunda ley de Newton predice que el sistema se encuentra en movimiento acelerado y su aceleración es

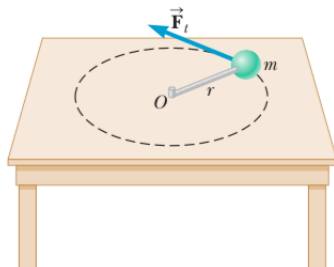
$$\mathbf{a} = \frac{1}{m} \cdot \mathbf{F}$$

Cuestión científica

Supongamos que un sistema de masa m no está en equilibrio rotacional entonces el momento de torsión del sistema con respecto a un eje es

$$\tau_z \neq 0.$$

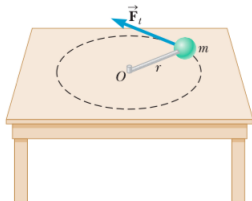
¿Que efecto físico se produce entonces?



Consideremos un sistema formado por una barra que gira alrededor de un punto O en una tabla horizontal sin fricción. Supongamos que la fuerza que actúa sobre el cuerpo de masa m es perpendicular al radio de giro, luego $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t$ y $\mathbf{a}_c = \mathbf{0}$. Se tiene entonces que empleando (7) obtenemos

$$F = \|\mathbf{F}\| = m \cdot a = m \cdot a_t = m \cdot r \cdot \alpha$$

La relación con el momento de torsión



Observemos que la fuerza \mathbf{F} es perpendicular al radio \mathbf{r} que hace de brazo de palanca. Entonces podemos escribir

$$\mathbf{F} = (0, F) \text{ y } \mathbf{r} = (r, 0)$$

luego el momento de torsión se obtiene

$$\tau_z = F \cdot r = m \cdot r \cdot \alpha \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \alpha$$

como la aceleración angular α multiplicada por $I := m \cdot r^2$, cantidad que se conoce con el nombre de **momento de inercia**.

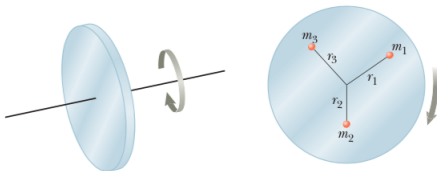
Consideremos un disco que gira con aceleración angular α sobre su eje central. El disco está compuesto por partículas de masas

$$m_1, m_2, \dots, m_k$$

situadas cada una de ellas a una distancia

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k$$

del centro de rotación



El momento de torsión neto sobre el eje de rotación es

$$\tau_z = m_1 \cdot r_1^2 \cdot \alpha + m_2 \cdot r_2^2 \cdot \alpha + \dots + m_k \cdot r_k^2 \cdot \alpha = \left(\sum_{i=1}^k m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \alpha.$$

Definición (Momento de inercia)

Se llama momento de inercia a la cantidad

$$I = \sum_{i=1}^k m_i \cdot r_i^2.$$

En consecuencia, el momento de torsión es

$$\tau_z = I \cdot \alpha.$$

Nota

La masa m es intrínseca al objeto, no depende de la forma del objeto, sin embargo el momento de inercia depende de la forma del objeto, en particular de como se distribuye la masa y de la ubicación del eje de rotación.

Conclusión

Si un sistema con un momento de inercia I no se encuentra en equilibrio rotacional entonces $\tau_z \neq 0$ y el sistema gira con respecto a un eje de rotación con una aceleración angular α que podemos predecir y es igual a

$$\alpha = \frac{\tau_z}{I}.$$

Nota

El cálculo del momento de inercia de un sólido rígido, como por ejemplo una varilla larga y delgada de material con una composición uniforme,



es difícil de calcular, ya que se basan en lo que se conoce como distribución de masa:

$$dm(x) = \frac{M}{L} dx,$$

donde x representa la posición respecto el eje de rotación. En el caso particular del eje de rotación en un extremo, el momento de inercia se calcula a partir de la expresión integral

$$I = \int_0^L x^2 dm(x) = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} ML^2.$$

El momento lineal $\mathbf{p}(t)$ de un objeto de masa m se calculaba como

$$\mathbf{p}(t) = m \cdot \mathbf{v}(t).$$

Recordemos que en equilibrio traslacional el momento lineal se conserva (es constante).

Definición (Momento angular)

El momento angular de un sistema con momento de inercia I que lleva una velocidad angular $\omega(t)$ es igual al

$$L(t) = I \cdot \omega(t)$$

Nota

Si la aceleración angular es nula $\alpha = 0$ (el sistema se encuentra en equilibrio rotacional) entonces la velocidad angular es constante $\omega(t) = \omega(t_0)$ para todo $t \geq t_0$. Podemos concluir entonces que el momento angular se conserva

$$L(t) = I \cdot \omega(t) = I \cdot \omega(t_0) = L(t_0),$$

para todo instante de tiempo $t \geq t_0$.

Nota

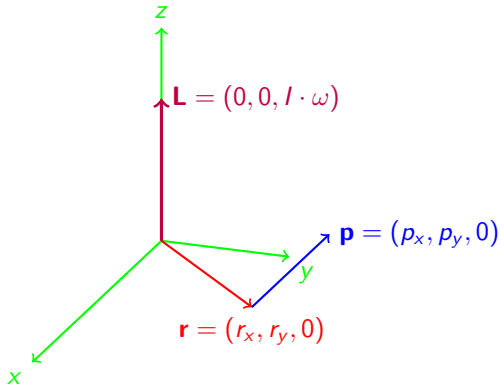
En general se define el momento angular como una cantidad vectorial empleando el llamado producto vectorial

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m \cdot \mathbf{v}).$$

Si consideramos que la posición $\mathbf{r} = (r_x, r_y, 0)$ y el momento $\mathbf{p} = (p_x, p_y, 0)$ actúan en el mismo plano, entonces el momento angular es un vector perpendicular a ese plano:

$$\mathbf{L} = (0, 0, L) = (0, 0, I \cdot \omega).$$

La geometría del momento angular



Movimiento rotatorio
y equilibrio

Antonio Falcó

Introducción

El momento de
torsión

Equilibrio rotacional
Centro de gravedad

Velocidad y
aceleración angular

Movimiento angular
uniformemente acelerado
(MAUA)

Relaciones entre
cantidades lineales y
angulares

El momento de inercia

El momento angular