Fuerzas

Antonio Falcó

Definición

Llamamos **sistema** (físico) al conjunto de objetos de la naturaleza que conforman el objetivo del estudio científico de un fenómeno natural.

Definición

En física se llaman **estados (espacio de estados)** al conjunto donde las variables de interés toman sus valores. En consecuencia, este conjunto permite describir completamente el sistema físico objeto de estudio.

Definición

Llamamos **observables** a las cantidades físicas que podemos medir (distancia, velocidad, energía, ...).

Definición

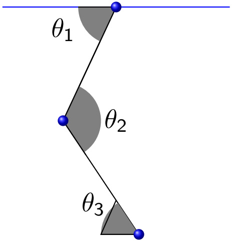
Llamamos **estática de un sistema** a la descripción de la relación entre los diferentes estados que constituyen un sistema.

Definición

Llamamos **dinámica de un sistema** a la descripción de la evolución temporal de los estados del sistema.

Ejemplo

Sistema físico: Muslo-Pierna-Pie.



Estados: $\underbrace{[-\pi, -\pi/2]}_{\theta_1} \times \overbrace{[\pi/2, -\pi/2]}^{\theta_2} \times \underbrace{[-3.3, -3]}_{\theta_3}$ rad.

Observables: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$

Ejemplo (Estática)

Estudiamos el efecto de la presión de la mano sobre la espalda. Los observables son la presión P que ejerce la mano sobre el cuerpo, la fuerza F ejercida sobre la espalda y el área A del cuerpo sobre el que se ejerce la presión. La estática de este sistema viene caracterizada por la relación

$$P = \frac{F}{A}.$$

Ejemplo (Dinámica)

Estudiamos el movimiento de una canica lanzada horizontalmente en el suelo con una velocidad constante 0.02 m/s que en el tiempo inicial $t = 0$ se encuentra situada en una posición $x_0 = 0.3$ m. La posición en cualquier instante de tiempo posterior se obtiene mediante la fórmula que determina la dinámica del sistema:

$$x(t) = 0.3 + 0.02 \cdot t$$

¿Qué es una fuerza?

Una fuerza es el resultado de una interacción entre dos objetos físicos.

Ejemplo

La tierra interactúa con el cuerpo humano mediante la llamada *fuerza de gravedad terrestre*.

Ejemplo

La mesa interactúa con el libro apoyado sobre ella mediante la llamada *fuerza de tensión superficial*.

Ejemplo

Un hierro imantado actúa sobre unas limaduras de hierro mediante la llamada *fuerza electro-magnética*.

¿Cómo podemos medir una fuerza?

- En los anteriores ejemplos, los fenómenos que observamos son consecuencia de la acción de la fuerzas que actúan sobre los objetos del sistema.
- En consecuencia, **observamos las consecuencias de las acciones de las fuerzas, no las fuerzas en si**.
- Para medir una fuerza necesitamos relacionarla con los objetos con los que interactúa mediante expresiones matemáticas que relacionen la fuerza F con otras variables físicas. Como ejemplos podemos citar la expresión

$$F = m\,a \text{ (ley de Newton)},$$

donde m representa la masa de los objetos que intervienen y a la aceleración de los mismos o bien

$$F = k\,x \text{ (Ley de Hooke)},$$

donde k representa la constante de deformación elástica y x el desplazamiento.

Propiedades de las Fuerzas

- *No existen fuerzas aisladas, se necesitan como mínimo dos objetos físicos.*
- La unidad de medida de la fuerza (S.I.) es el Newton

$$\mathrm{N} = \mathrm{kg} \times \mathrm{m/s}^2$$

- Como la existencia de la fuerza necesita la interactuación de dos objetos físicos, no solo necesitamos una *magnitud* para su descripción sino además una *dirección*.

Ejemplo

En la interactuación del cuerpo humano con la tierra, la dirección de la fuerza de gravedad es siempre *perpendicular a la superficíe de la tierra*.

Categorías de fuerzas

- Fuerzas fundamentales.
- Fuerzas de conveniencia

Fuerzas fundamentales

Son fuerzas libres de contacto y no se pueden explicar por composición de otras fuerzas.

- Fuerza gravitacional (gravedad)
- Fuerza electro-magnética.
- Fuerza nuclear fuerte.
- Fuerza nuclear débil.

Fuerza de gravedad

Matemáticamente la fuerza de atracción gravitatoria viene expresada mediante la *ley universal de gravitación de Newton* que en nuestro caso particular se expresa como

$$W = F = G \times \frac{m_{\text{tierra}} \times m_{\text{c. humano}}}{r^2} = m_{\text{c. humano}} \times \overbrace{\left(G \times \frac{m_{\text{tierra}}}{r^2}\right)}^{\approx 9.81}$$

siendo $G = 6.674 \times 10^{-11}$ N $\times$ m^2/kg^2 la *constante de gravitación universal*, r la distancia entre los dos objetos (tierra y cuerpo humano), y $m_{\text{tierra}}, m_{\text{c. humano}}$ representan las masas de ambos.

Nota (Peso y masa (no confundir!))

Si al subirnos en la báscula determinamos que nuestra *masa* es de

$$m = 80 \text{ kg} ,$$

y conocemos que la aceleración gravitatoria es constante de un valor aproximado

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

entonces nuestro *peso*, que lo denotamos por W (weight) lo calculamos empleando la ley de Newton, $F = m\,a$, de forma que

$$W = 80 \text{ kg } \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 784 \text{ N}.$$

Llamamos peso a la fuerza con que la masa de la tierra atrae la masa del cuerpo humano.

Ley de Coulomb

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales de magnitudes q_1 y q_2 medidas en C., respectivamente y que se encuentran separadas a una distancia r es

$$F = k \times \frac{q_1 \times q_2}{r^2}$$

donde $k = 8.99 \times 10^9$ N m^2/C^2 es la constante de fuerza eléctrica.

Fuerza nuclear fuerte

Son las fuerzas que se generan en el interior del núcleo atómico formado fundamentalmente por protones y neutrones. Los protones se repelen entre ellos por efecto de la fuerza eléctrica que es extremadamente fuerte en comparativa a las distancias en las que se produce $\approx 10^{-15}$m.

Fuerza nuclear débil

Esta fuerza tiene un papel prominente en la desintegración de ciertos núcleos radioactivos. Su rango de actuación es de aproximadamente de $\approx 10^{-17}$m mucho menor que la fuerza nuclear fuerte.

Fuerzas de conveniencia

Todas las fuerzas de conveniencia son **fuerzas de contacto**. A nivel microscópico las fuerzas de contacto son de naturaleza electro-magnética.

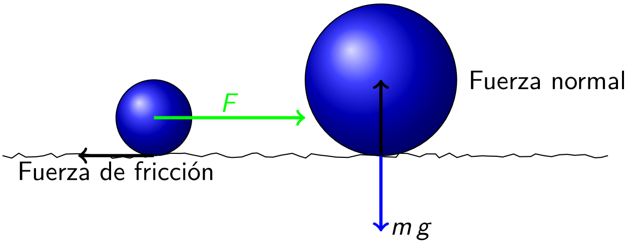
- Fuerzas de superficie.
  - Fuerza normal.
  - Fuerza de fricción.
- Fuerza de tensión.
- Fuerza de deformación (muelles).
- Fuerza de resistencia.

Fuerzas de superficie

Aparecen a partir del contacto de la superficie de un objeto físico con la superficie de otro.

- La *fuerza normal* es una fuerza de contacto que la superficie de un objeto físico ejerce perpendicularmente sobre otro presionando en sentido contrario a la otra superficie.
- La *fuerza de fricción* es una de las fuerzas más usuales en el día a día. Esta se produce por el contacto de la superficie de dos objetos físicos. La fuerza de fricción de cada objeto tiene sentido perpendicular a la fuerza normal del mismo y de magnitud proporcional a la magnitud de la fuerza normal. Los sentidos de las fuerzas de fricción de los dos objetos físicos es de naturaleza opuesta y cada uno de ellas es proporcional a su correspondiente fuerza normal.

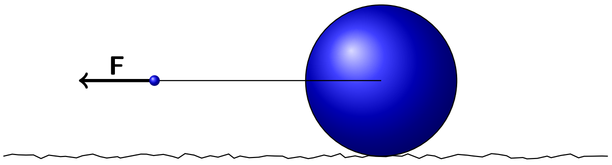
Fuerza normal y de fricción



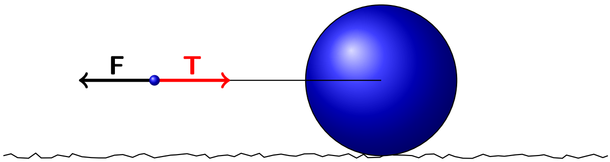
Fuerza de tensión

La fuerza de tensión es tambien conocida como la *fuerza de arrastre.* Supongamos que un objeto arrastra a otro mediante un cable, muelle, cuerda, tendón ... Supongamos por ejemplo que arrastramos una caja empleando, una *cuerda ideal (que suponemos sin masa y no deformable)*. La cuerda trasmite al objeto una fuerza que interactua con la caja. En consecuencia, la cuerda ejerce una fuerza de contacto con la caja. La fuerza ejercida por la cuerda sobre la caja se le llama *fuerza de tensión, que de forma genérica y por abuso de lenguaje se le conoce también como tensión.*

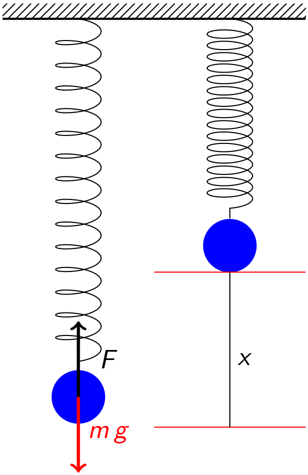
Fuerza de tensión



Fuerza de tensión



Fuerza de deformación



Un muelle se puede comprimir o extender. Fijemos un muelle y ejerzamos una fuerza de arrastre para extenderlo lo máximo posible.

Fuerza de deformación

Esta fuerza se observa ya que el muelle pierde su *forma original, es decir, se deforma*. Si soltamos el muelle este vuelve a su forma original. *La magnitud de la fuerza de contacto ejercida sobre la parte no fijada del muelle es aproximadamente proporcional a la longitud de su extensión o compresión (deformación)*. Este resultado fué enunciado por Robert Hooke y se le conoce con el nombre de *Ley de Hooke*. Matemáticamente se expresa:

$$F_{\text{aplicada sobre el muelle}} = k \cdot x$$

la fuerza que ejerce el muelle es entonces:

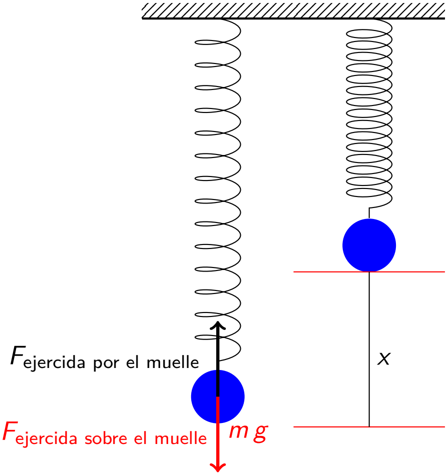
$$F_{\text{ejercida por el muelle}} = -k \cdot x$$

En resumen,

$$F_{\text{ejercida por el muelle}} + F_{\text{aplicada sobre el muelle}} = 0.$$

A la constante k se le conoce como *coeficiente de deformación* del muelle.

Ley de Hooke



La consecuencia es que $-k\,x + m\,g = 0$.

Fuerzas de resistencia

Hemos descrito las fuerzas que aparecen de la interacción entre dos objetos físicos. Existen también fuerzas que aparecen de la interacción de un objeto en estado sólido con un fluido (por ejemplo aire o agua). Podemos hablar de la resistencia que ofrece el aire a un ciclista o de la resistencia que ofrece el agua a un nadador. En el primer caso hablamos de la *resistencia del aire*, en el segundo caso de la *viscosidad del líquido*, por lo que la denominamos *fuerza viscosa, que por abuso de lenguaje denominamos viscosidad del medio*.

Definición

En física se entiende que un *fluido* es un objeto físico que podemos cizallar (batir). La resistencia del mismo a ser cizallado (batido) se le conoce como *fuerza viscosa*.

Formulación matemática de la fuerza de resistencia

La dirección de la fuerza de resistencia *es siempre opuesta al movimiento* del objeto. La fuerza de resistencia R se expresa como

$$R = \frac{1}{2} D \rho A v^2,$$

donde

- D es el coeficiente de resistencia (sin dimensión física),
- $\rho \, (= \frac{m}{V})$ la densidad del medio (m la masa del objeto y V el volumen del objeto), por ejemplo $\rho_{\text{aire}} = 1.29 \text{ kg}/\text{m}^3$.
- A el área de la sección cruzada del objeto y
- v la velocidad relativa con respecto el medio.

Nota

Esta relación no es válida para objetos muy pequeños (por ejemplo, granos de arena) que se mueven muy rápido o se mueven en un líquido (por ejemplo, agua).

Fuerza viscosa

La fuerza de resistencia de un sólido a moverse por un medio fluido se le llama *fuerza de viscosa o, por abuso de lenguaje simplemente viscosidad*. Para el **caso especial de una esfera moviéndose a través de un líquido**, la magnitud de la fuerza viscosa viene determinada por la ley de Stokes como

$$F_{\text{viscosa}} = 6\pi\eta r\upsilon,$$

donde

- η es el coeficiente de viscosidad del líquido,
- r el radio de la esfera, y
- υ la velocidad relativa del objeto con respecto al líquido.

Nota

Este modelo es útil para estudiar la mecánica de las células en biología.

Magnitudes escalares

- A las magnitudes físicas que se representan con un único valor, es decir, su medida es representada con un número, se les llama *magnitudes escalares*.

Ejemplo

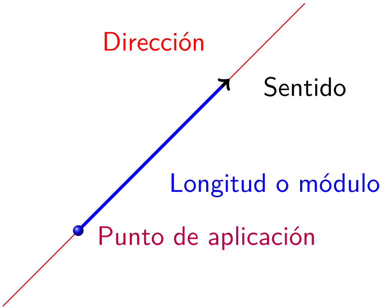
La temperatura, la densidad.

Magnitudes vectoriales

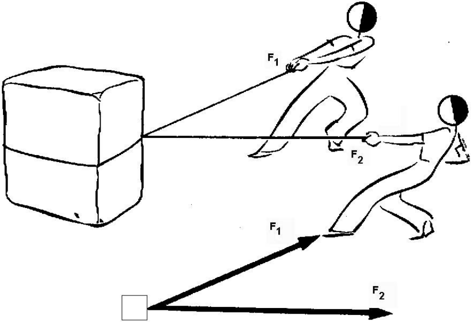
- A las cantidades físicas que además de *punto de aplicación* y y *módulo* tienen *dirección*, *sentido* se les conoce como *magnitudes vectoriales.*

Ejemplo

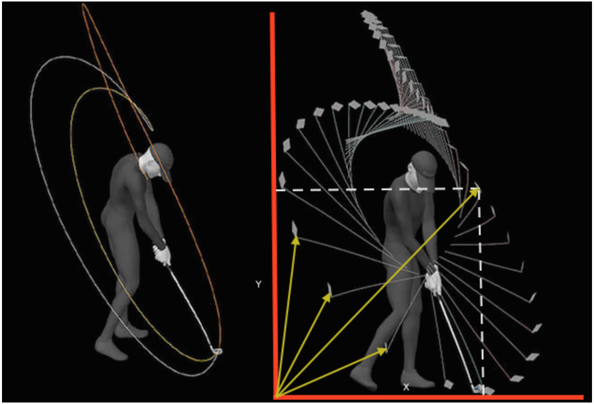
La fuerza, la posición.



Fuerza

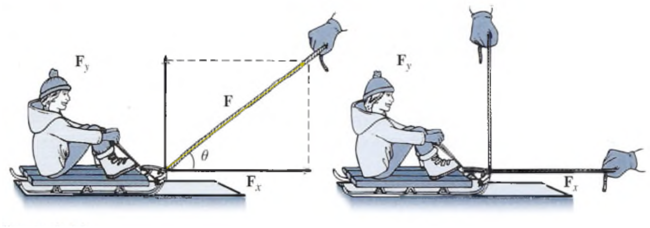


Posición



Ejemplo

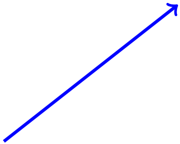
Consideremos la fuerza que emplea una persona que desplaza un trineo por la nieve empleando una cuerda atada al trineo:



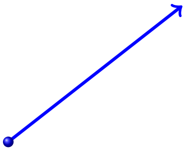
Problema

¿Cómo podemos cuantificar esa fuerza?

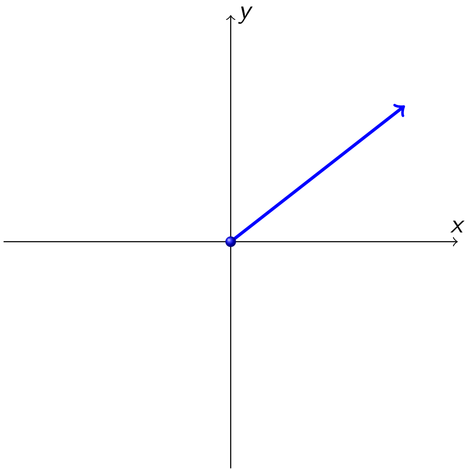
Fuerza



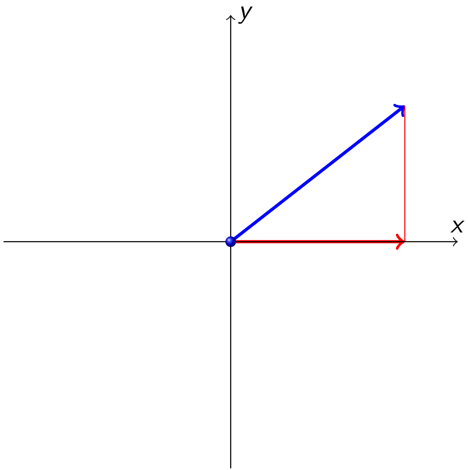
Punto de aplicación de la fuerza



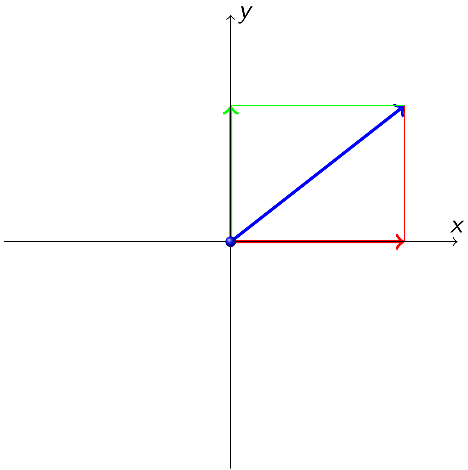
Ejes coordenados



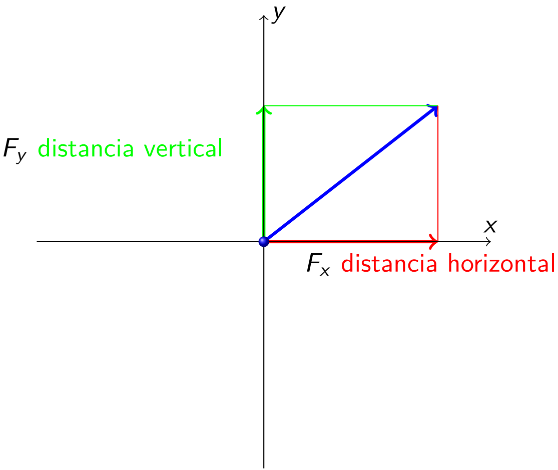
Proyección horizontal



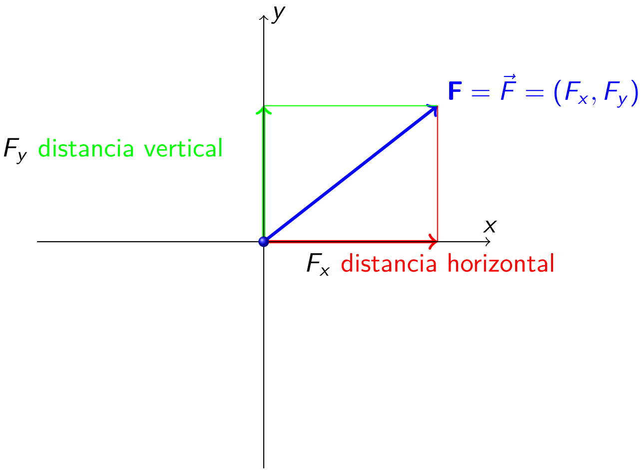
Proyección vertical



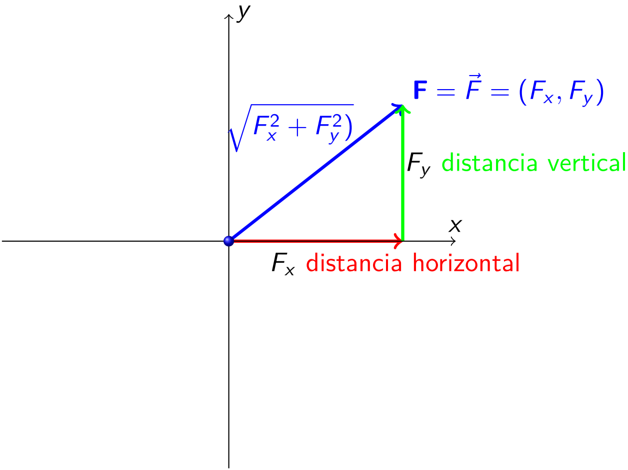
Distancias horizontal y vertical



Representación de la fuerza



Teorema de Pitágoras

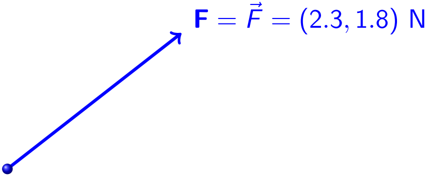


Se asume que

$$\mathbf{F} = \vec{F} = (F_x, F_y) = (F_x, 0) + (0, F_y) = F_x\,(1, 0) + F_y\,(0, 1)$$

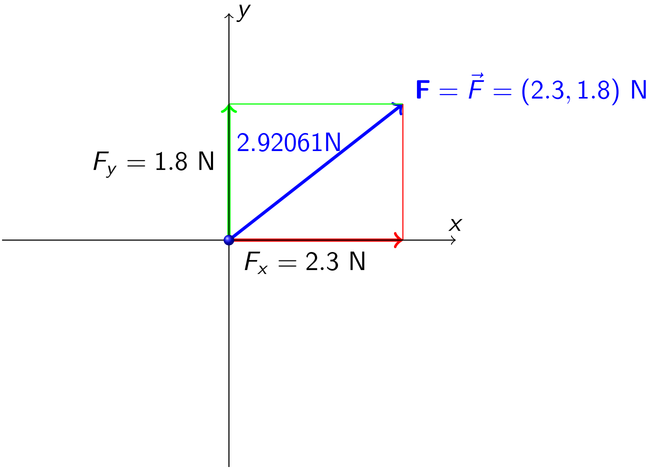
Ejemplo

Representemos una fuerza de $\mathbf{F} = (2.3, 1.8)$ N



Ejemplo

Representemos una fuerza de $\mathbf{F} = (2.3, 1.8)$ N



$$\sqrt{2.3^2 + 1.8^2} = 2.92061 \approx 3$$

Representación de una fuerza

- La representación de una fuerza $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ que es una magnitud vectorial puede efectuarse descomponiéndola en una fuerza horizontal F_x y una fuerza vertical F_y o bien empleando su módulo

$$F = \|\mathbf{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{(Teorema de Pitágoras).}$$

- El módulo del vector fuerza $F = \|\mathbf{F}\|$ representa la magnitud de la fuerza empleada y es una cantidad **escalar** no negativa con unidades de fuerza.

Ejemplo

Una fuerza de $\mathbf{F} = (2.3, 1.8)$ N tiene un módulo o magnitud de $F = \|\mathbf{F}\| = \sqrt{2.3^2 + 1.8^2} = 2.92061$ N.

Descomposición de una fuerza (obviando unidades)

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y) = \underbrace{(F_x, 0)}_{\text{Fuerza horizontal}} + \overbrace{(0, F_y)}^{\text{Fuerza vertical}}$$

de donde

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y) = (F_x, 0) + (0, F_y) = F_x\,(1,0) + F_y\,(0,1).$$

Llamamos

- $\mathbf{i} := (1, 0)$ **fuerza unitaria horizontal** y
- $\mathbf{j} := (0, 1)$ **fuerza unitaria vertical**.

entonces, empleando unidades,

$$\mathbf{F}\ \mathrm{N} = F_x\ \mathrm{N}\ \mathbf{i} + F_y\ \mathrm{N}\ \mathbf{j},$$

en esta situación $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ son vectores sin unidades que cumplen $\|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = 1$.

Conclusión

Cualquier magnitud física vectorial

$$\mathbf{u}\,[u] = (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)\,[u],$$

donde $[u]$ representa unidades de la magnitud física de $\mathbf{u}$, Se escribe empleando unidades físicas como

$$\mathbf{u}\,[u] = u_x\,[u]\,\mathbf{i} + u_y\,[u]\,\mathbf{j}$$

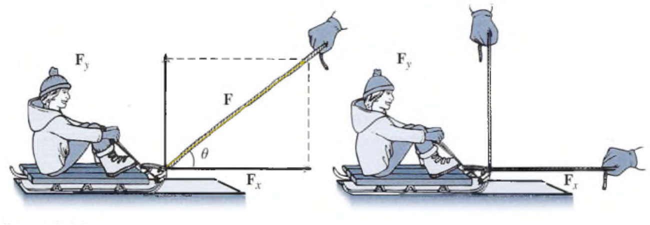
y obviando las unidades físicas

$$\mathbf{u} = u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j},$$

donde u_x es la magnitud física horizontal y u_y la magnitud física vertical.

Problema

Conocemos la fuerza de magnitud F N empleada con un ángulo de θ grados con respecto a la horizontal. Calcular los valores de las fuerzas horizontal F_x y F_y empleadas



De la trigonometría conocemos que

$$\cos\theta = \frac{F_x}{F} \text{ y } \sin\theta = \frac{F_y}{F},$$

es decir $F_x = F\cos\theta$ y $F_y = F\sin\theta$, entonces podemos expresar la fuerza

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y) = (F\cos\theta, F\sin\theta) = F(\cos\theta, \sin\theta)$$

Nota

Observar que al emplear el Teorema de Pitágoras se cumple:

$$F_x^2 + F_y^2 = (F\cos\theta)^2 + (F\sin\theta)^2 = F^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = F^2.$$

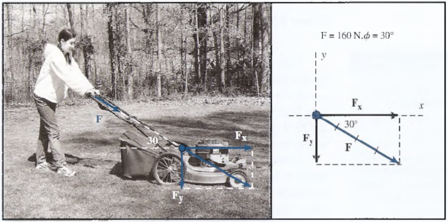
Luego, el módulo de la fuerza

$$F = \|\mathbf{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \geq 0.$$

Recordemos que el módulo $F = \|\mathbf{F}\|$ es una cantidad no negativa.

Problema

Una cortadora de cesped se empuja hacia abajo por el asa con una fuerza de 160 N, con un ángulo de 30 grados con respecto a la horizontal. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza horizontal?

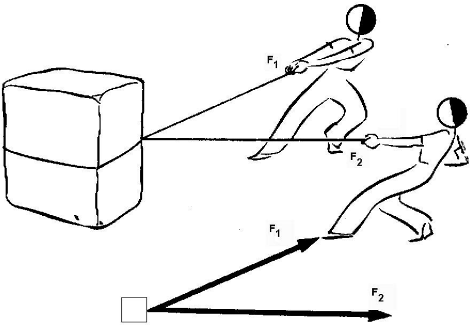


(a) (b)

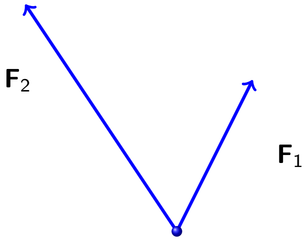
Solución: La longitud del vector **F** equivale a 160 N que según el T. de Pitágoras es igual al radio $\|\mathbf{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ N $= 160$ N. Entonces, $F_x = \|\mathbf{F}\| \cos\theta = 160 \cos 30^\circ = 138.56445$ N.

La fuerza resultante

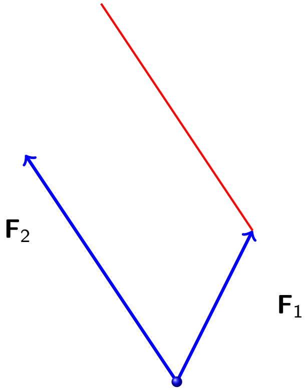
- Cuando dos o más fuerzas actuan sobre un mismo punto se dice que son *fuerzas concurrentes.*
- El efecto combinado de tales fuerzas se llama *fuerza resultante*.



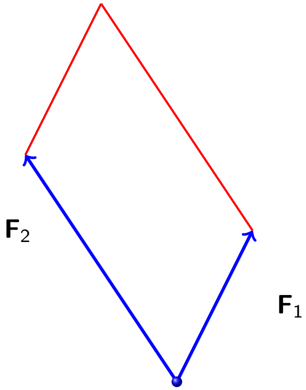
Cálculo gráfico de la fuerza resultante



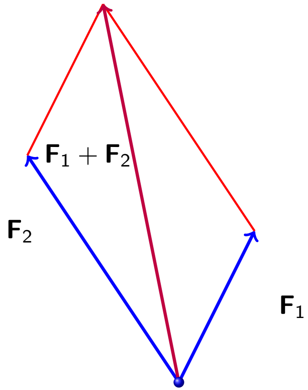
Cálculo gráfico de la fuerza resultante



Cálculo gráfico de la fuerza resultante

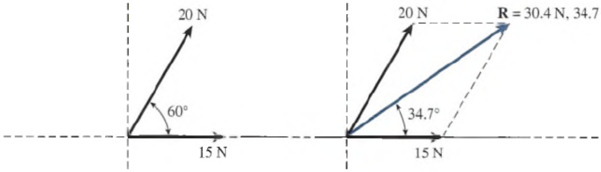


Cálculo gráfico de la fuerza resultante



Regla del paralelogramo

Ejemplo



$$\mathbf{F}_1 = (20\cos 60^\circ, 20\sin 60^\circ)\ \mathrm{N} = (10.0, 17.32056)\ \mathrm{N}$$
$$\mathbf{F}_2 = (15, 0)\ \mathrm{N},$$

la fuerza resultante

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (10.0 + 15, 17.32056 + 0)\ \mathrm{N} = (25.0, 17.32056)\ \mathrm{N},$$

de donde $\|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\| = \sqrt{25^2 + (17.32056)^2}\ \mathrm{N} = 30.41384\ \mathrm{N}$

El ángulo de una fuerza $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$

Como $\mathbf{F} = (F_x = \|\mathbf{F}\| \cos\theta, F_y = \|\mathbf{F}\| \sin\theta)$ entonces

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{\|\mathbf{F}\| \sin\theta}{\|\mathbf{F}\| \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta.$$

Ejemplo

Si por ejemplo tenemos una fuerza de $\mathbf{F} = (25, 17.3205)$ N, para calcular el ángulo θ :

$$\tan\theta = \frac{17.3205}{25} = 0.69281, \quad \theta = \arctan 0.69281 = 34.71458^\circ.$$

El método de las componentes para la suma o adición de vectores

Si tenemos un conjunto de fuerzas concurrentes en un punto:

$$\mathbf{F}_1 = (F_x^{(1)}, F_y^{(1)}), \mathbf{F}_2 = (F_x^{(2)}, F_y^{(2)}), \ldots, \mathbf{F}_n = (F_x^{(n)}, F_y^{(n)})$$

la fuerza resultante

$$\mathbf{R} := \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = (F_x, F_y)$$

se representa median un vector donde cada componente se calcula:

$$\text{Eje X: } F_x = F_x^{(1)} + F_x^{(2)} + \cdots + F_x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} F_x^{(i)},$$

$$\text{Eje Y: } F_y = F_y^{(1)} + F_y^{(2)} + \cdots + F_y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} F_y^{(i)}.$$

Ejemplo

Consideremos tres fuerzas concurrentes en un punto

$$\mathbf{F}_1 = (1, 3), \mathbf{F}_2 = (7, -1), \mathbf{F}_3 = (-4, 2).$$

Calcular la fuerza resultante $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$.

Solución: La fuerza resultante será $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = (F_x, F_y)$, donde

$$\text{Eje X: } F_x = 1 + 7 - 4 = 4$$
$$\text{Eje Y: } F_y = 3 - 1 + 2 = 4$$

Finalmente, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = (4, 4)$.

Nota

Recordemos que la resta la podemos ver como una suma

$$4 - 5 = 4 + (-5) = \text{a cuatro le sumamos el opuesto de } 5$$

Resta o sustracción de vectores

Si $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ se define el *vector opuesto*

$$-\mathbf{F} = (-F_x, -F_y),$$

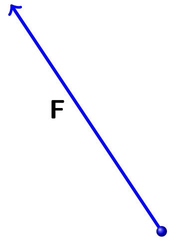
de forma que $\mathbf{F} + (-\mathbf{F}) = (F_x - F_x, F_y - F_y) = (0, 0) := \mathbf{0}$ nos proporciona el *vector cero o fuerza nula.*

Ejemplo

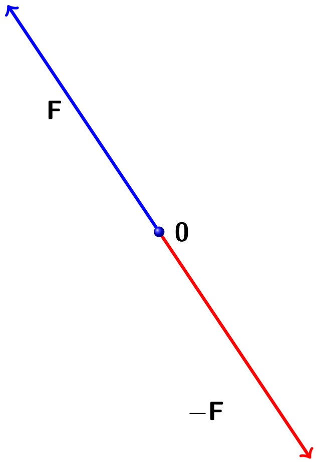
Calcular el vector opuesto de $\mathbf{F} = (1, -3)$.
Solución: En este caso

$$-\mathbf{F} = (-1, 3).$$

Graficamente



Graficamente



Propiedades

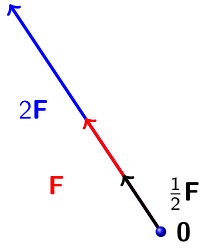
- El vector opuesto tiene el mismo módulo que el vector original:

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2},$$

$$\|-\mathbf{F}\| = \sqrt{(-F_x)^2 + (-F_y)^2} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \|\mathbf{F}\|,$$

pero la dirección opuesta.

Multiplicación por escalares (números)



Operaciones algebraicas con vectores (fuerzas)

Consideremos que $\mathbf{F}_1 = (F_x^1, F_y^1)$ y $\mathbf{F}_2 = (F_x^2, F_y^2)$ son fuerzas λ y β dos números reales cualesquiera.

- **Suma de fuerzas:**

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (F_x^1 + F_x^2, F_y^1 + F_y^2)$$

- **Resta de fuerzas:**

$$\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = (F_x^1 - F_x^2, F_y^1 - F_y^2)$$

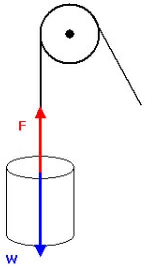
- **Multiplicación de una fuerza por un escalar (número)**

$$\lambda \cdot \mathbf{F}_1 = (\lambda \cdot F_x^1, \lambda \cdot F_x^2)$$

- **Linealidad de las operaciones con fuerzas (vectores)**

$$\lambda \cdot \mathbf{F}_1 + \beta \cdot \mathbf{F}_2 = (\lambda \cdot F_x^1 + \beta \cdot F_x^2, \lambda \cdot F_y^1 + \beta \cdot F_y^2)$$

Fuerzas verticales



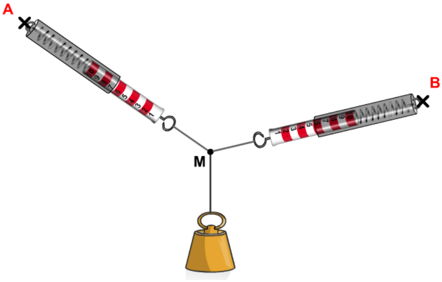
En este ejemplo tenemos dos fuerzas verticales $\mathbf{W} = (0, -W)$ y $\mathbf{F} = (0, F)$ la fuerza resultante es

$$\mathbf{W} + \mathbf{F} = (0, -W + F).$$

Si $-W + F = 0$, es decir $F = W$ el peso se iguala con una fuerza vertical en sentido contrario. Como consecuencia veríamos el objeto inmóvil.

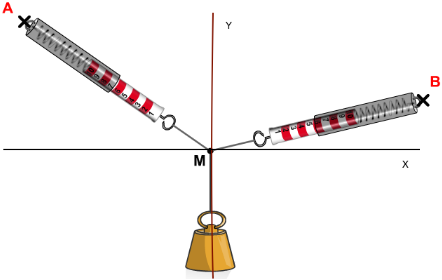
Composición de Fuerzas

Objetivo: Determinar y describir las coordenadas de las fuerzas que concurren en el punto M. Calcular las coordenadas de la fuerza concurrente en M.



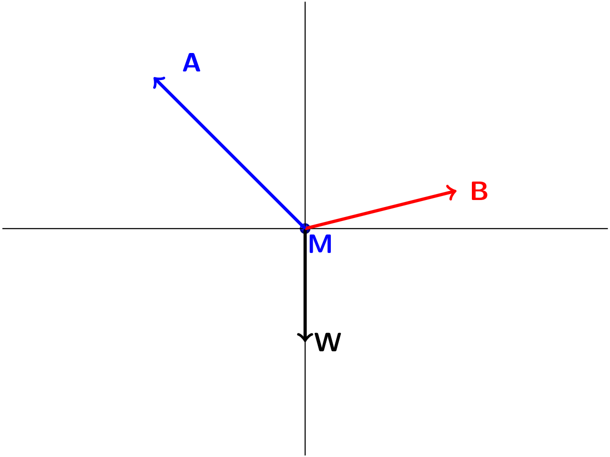
Composición de Fuerzas

En primer lugar situamos los ejes de coordenadas en el punto M para situar las fuerzas que concurren en dicho punto.



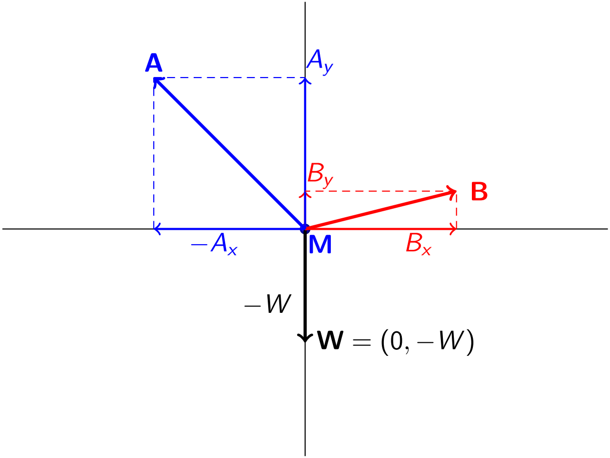
Composición de Fuerzas

Construimos un diagrama con todas las fuerzas que concurren en M.

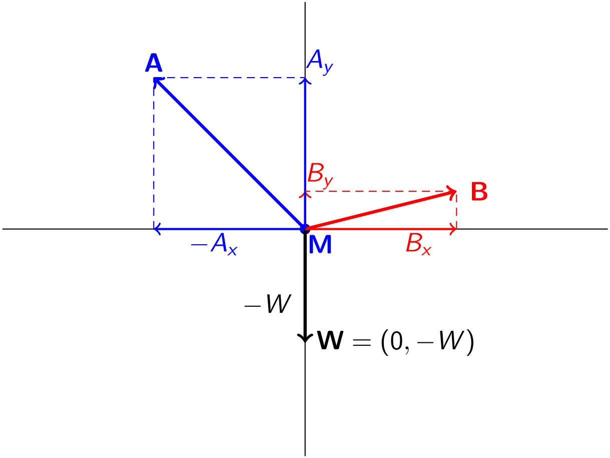


Composición de Fuerzas

Descomponemos todas las fuerzas que concurren en M empleando los ejes de coordenadas y teniendo en cuenta los signos de cada cada uno de los cuatro cuadrantes.



Composición de Fuerzas



Escribimos las fuerzas empleando coordenadas. $\mathbf{W} = (0, -W)$, $\mathbf{A} = (-A_x, A_y)$ y $\mathbf{B} = (B_x, B_y)$. La fuerza concurrente en M es

$$\mathbf{W} + \mathbf{A} + \mathbf{B} = (0 - A_x + B_x, -W + A_y + B_y).$$

El concepto de equilibrio

Diremos que el sistema mecánico compuesto por las fuerzas $\mathbf{W}, \mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ que concurren en M está en **equilibrio traslacional** (es decir que no observamos que el punto M se traslada o desplaza) si la suma de todas las fuerzas que concurren en M es cero:

$$\mathbf{W} + \mathbf{A} + \mathbf{B} = (0 - A_x + B_x, -W + A_y + B_y) = \mathbf{0} = (0, 0).$$

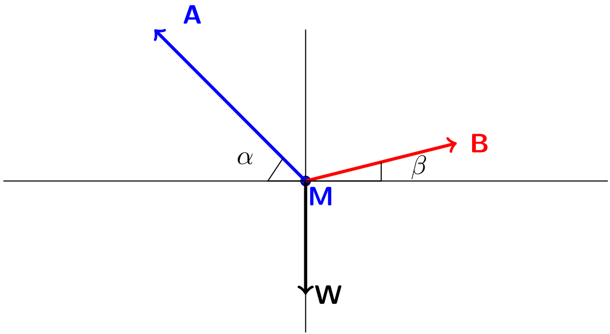
es decir

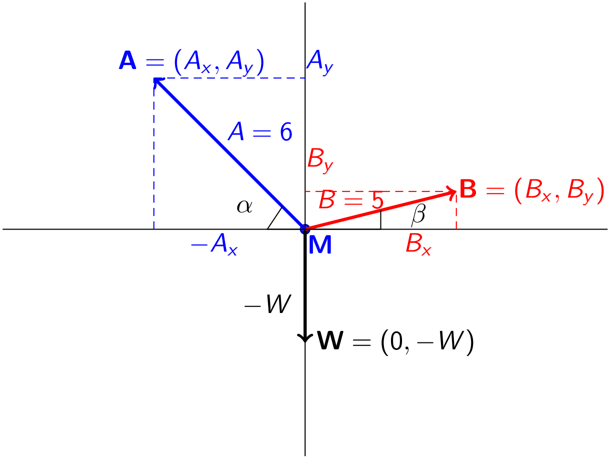
$$0 - A_x + B_x = 0, \tag{1}$$
$$-W + A_y + B_y = 0. \tag{2}$$

Tenemos 5 variables y 2 ecuaciones. Como los grados de libertad son 3, esto quiere decir que necesitamos observar solo 3 de estas 5 variables para poder determinar las otras 2 restantes.

Composición de Fuerzas

Objetivo: Determinar y describir las coordenadas de las fuerzas que concurren en el punto M conociendo que el módulo de la fuerza en **A** es $A = 6$ N, el módulo de **B** es $B = 5$ N (es lo que marcan los dinamómetros) y el ángulo $\alpha = 45^\circ$ obtenido empleando un goniómetro. Calcular el módulo del peso W, suponiendo que el sistema se encuentra en equilibrio traslacional.





Conocemos que

$$\cos\alpha = \frac{-Ax}{A}, \sin\alpha = \frac{Ay}{A}, \cos\beta = \frac{Bx}{B}, \sin\beta = \frac{-By}{B}$$

Composición de Fuerzas

Descomponemos las fuerzas empleando los módulos A, B y el ángulo α que conocemos sus valores obteniendo:

$$\cos 45^\circ = \frac{-Ax}{6}, \sin 45^\circ = \frac{Ay}{6}, \cos\beta = \frac{Bx}{5}, \sin\beta = \frac{-By}{5}$$

las componentes son entonces

$$A_x = -6\cos 45^\circ, A_y = 6\sin 45^\circ, B_x = 5\cos\beta, B_y = 5\sin\beta.$$

es decir

$$A_x = -4.24265, A_y = 4.24265, B_x = 5\cos\beta, B_y = 5\sin\beta.$$

Composición de Fuerzas

Las fuerzas que concurren en M son entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} &= (0, -W)\,\mathrm{N}, \\
\mathbf{A} &= (-4.24265, 4.24265)\,\mathrm{N}, \\
\mathbf{B} &= (5\cos\beta, 5\sin\beta)\,\mathrm{N}, \\
\mathbf{W}+\mathbf{A}+\mathbf{B} &= (0 - 4.24265 + 5\cos\beta, -W + 4.24265 + 5\sin\beta)\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Si el sistema está en equilibrio observaremos que el punto M permanece inmóvil. Esto nos indica que la suma de las fuerzas que concurren en M es cero, en caso contrario observaríamos que el punto M se desplaza. Esta relación se expresa matemáticamente como

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = (0,0) &= \mathbf{W}+\mathbf{A}+\mathbf{B} \\
&= (\underbrace{0 - 4.24265 + 5\cos\beta}_{=0}, \underbrace{-W + 4.24265 + 5\sin\beta}_{=0})
\end{aligned}$$

Composición de Fuerzas

En consecuencia, en equilibrio traslacional, el peso W y el ángulo β tienen que cumplir las ecuaciones:

$$0 = -4.24265 + 5\cos\beta, \tag{3}$$
$$0 = -W + 4.24265 + 5\sin\beta, \tag{4}$$

De la ecuación (3) obtenemos que

$$\cos\beta = \frac{4.24265}{5} = 0.84853,$$

luego $\beta = \arccos(0.84853) = 31.94783^\circ$. Sustituyendo en (4), obtenemos

$$0 = -W + 4.24265 + 5\sin(31.94783^\circ) = -W + 4.24265 + 0.52913$$

es decir $W = 4.77177$ N.

Composición de Fuerzas

Conclusión: Bajo las condiciones de equilibrio traslacional, solo necesitamos observar los modulos A y B de las fuerzas **A** y **B**, empleando un dinamómetro, y el ángulo α, empleando un goniómetro, para obtener los valores del ángulo β y el peso W sin necesidad de observarlos.

Definición

Diremos que un conjunto finito de fuerzas $\{\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n\}$ concurrentes en un punto M se encuentran en **equilibrio traslacional** si la fuerza resultante es nula, esto es, si cumplen la ecuación:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdot + \mathbf{F}_n = \mathbf{0}. \tag{5}$$

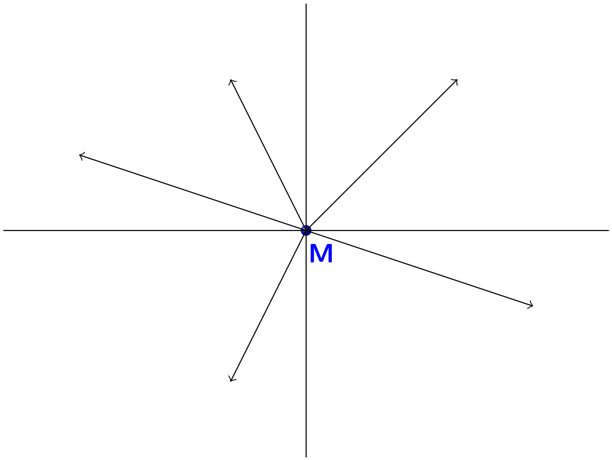
Nota

Si cada fuerza $\mathbf{F}_i$ tiene de componentes horizontal $F_x^{(i)}$ y vertical $F_y^{(i)}$, esto es, $\mathbf{F}_i = F_x^{(i)}\,\mathbf{i} + F_y^{(i)}\,\mathbf{j}, \quad 1 \leq i \leq n$, entonces la ecuación (5) es equivalente a

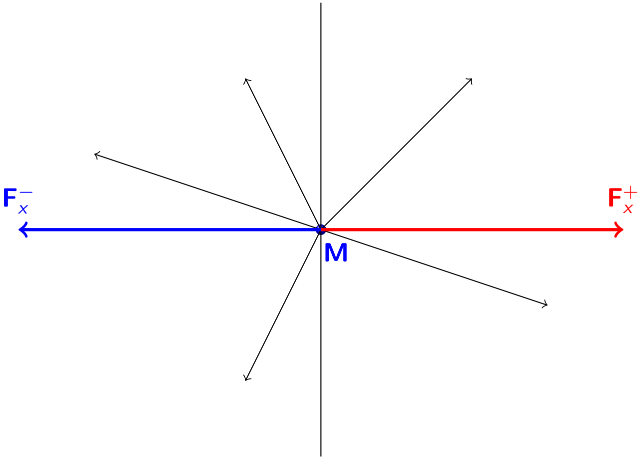
$$\sum_{i=1}^{n} F_x^{(i)} = F_x^{(1)} + F_x^{(2)} + \cdots + F_x^{(n)} = 0, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_y^{(i)} = F_y^{(1)} + F_y^{(2)} + \cdots + F_y^{(n)} = 0. \tag{7}$$

Consideremos un conjunto de fuerzas que concurren en un punto M :

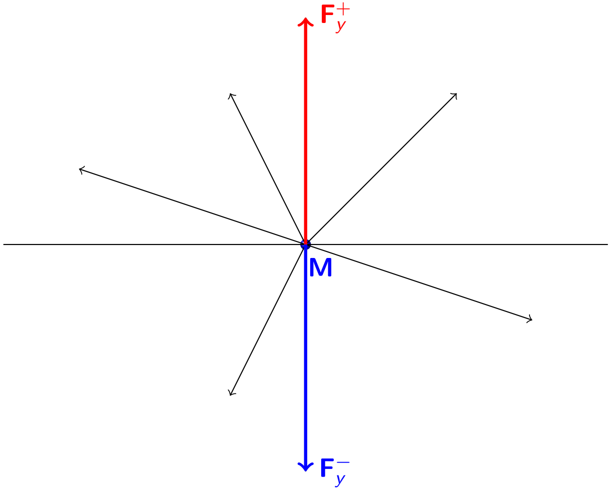


Agrupemos todas las componentes horizontales positivas en una fuerza $\mathbf{F}_x^+ = (F_x^+, 0)$ donde $F_x^+ > 0$, y realicemos la misma operación con todas las componentes horizontales negativas $\mathbf{F}_x^- = (-F_x^-, 0)$ donde $F_x^- > 0$,



En equilibrio: $\mathbf{F}_x^- + \mathbf{F}_x^+ = \mathbf{0}$, es decir $F_x^+ - F_x^- = 0$.

Agrupemos todas las componentes verticales positivas en una fuerza $\mathbf{F}_y^+ = (0, F_y^+)$ donde $F_y^+ > 0$, y realicemos la misma operación con todas las componentes verticales negativas $\mathbf{F}_y^- = (-F_y^-, 0)$ donde $F_y^- > 0$. En equilibrio: $\mathbf{F}_y^- + \mathbf{F}_y^+ = \mathbf{0}$, es decir $F_y^+ - F_y^- = 0$.



Problema

El conjunto de fuerzas $\{(1,2),(-1,3),(-3,3),(A,B)\}$ concurrentes en un punto M se encuentra en equilibrio traslacional. Calcular los valores de A y B.

Fijémonos que si consideramos el conjunto de fuerzas conocidas $\{(1,2),(-1,3),(-3,3)\}$

$$\begin{aligned} F_x^+ &= 1 \\ -F_x^- &= -1-3=-4 \\ F_y^+ &= 2+3+3=8 \\ -F_y^- &= 0. \end{aligned}$$

Las sumas horizontales y verticales son entonces

$$\begin{aligned} F_x^+ - F_x^- &= 1-4=-3, \\ F_y^+ - F_y^- &= 8-0=8, \end{aligned}$$

y al ser ambas distintas de cero, este conjunto no se encuentra en equilibrio traslacional.

Al analizar las expresiones

$$F_x^+ - F_x^- - 3,$$
$$F_y^+ - F_y^- = 8,$$

vemos que se pueden escribir de forma equivalente como

$$F_x^+ - F_x^- + 3 = 0,$$
$$F_y^+ - F_y^- - 8 = 0.$$

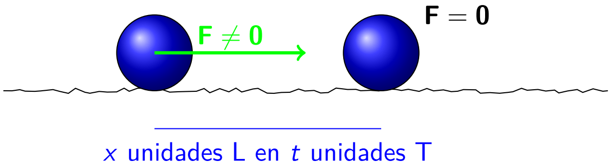
Podemos entonces deducir que si añadimos un término $A = +3$ horizontal y un término $B = -8$ vertical entonces el sistema estará verdaderamente en equilibrio traslacional. Luego la fuerza que nos falta es $(A, B) = (3, -8)$. En este caso el conjunto de fuerzas concurrentes $\{(1,2), (-1,3), (-3,3), (3,-8)\}$ en M nos lleva a un sistema en equilibrio traslacional:

$$F_x^+ - F_x^- = (1+3) + (-1-3) = 0,$$
$$F_y^+ - F_y^- = (2+3+3) + (-8) = 0.$$

Cuestión científica

¿Qué sentido físico tiene que la suma de todas las fuerzas que concurren en un punto M se anulen?, es decir, ¿cuál es el significado físico de la ecuación

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}?$$



La consecuencia que obtengo de este experimento es que al emplear una fuerza no nula sobre un objeto este se desplaza y en cuanto la fuerza se anula el objeto se detiene.

Objetivo

Tenemos que investigar la relación que existe entre fuerzas y movimiento (cinemática).