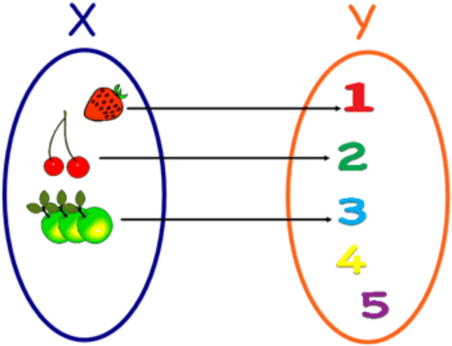
Medidas y magnitudes físicas

Antonio Falcó

Medida o cantidad física

Es una asignación entre un conjunto de observaciones experimentales y un conjunto de números, de forma que cada observación tiene asociada **un único número, al que llamamos medida o cantidad física de la observación**.

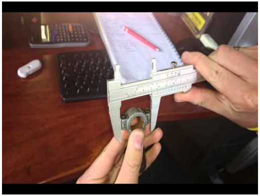


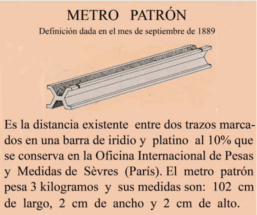
Instrumento de medida

Es un mecanismo que nos permite realizar una asignación entre una característica del objeto de estudio y un número.

Patrón de medida

Las unidades que añadimos al número hacen referencia al patrón de medida que empleamos para realizar la asignación.





METRO PATRÓN

Definición dada en el mes de septiembre de 1889

Es la distancia existente entre dos trazos marcados en una barra de iridio y platino al 10% que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sèvres (París). El metro patrón pesa 3 kilogramos y sus medidas son: 102 cm de largo, 2 cm de ancho y 2 cm de alto.

Tamaños

En las ciencias de la salud y la biología estudiamos seres vivos o con gran disparidad en sus tamaños. Podemos afirmar por ejemplo que una ballena mide alrededor de 10 metros o que una célula tiene una longitud de alrededor 0.000001 metros.

Orden de magnitud

No tiene mucho sentido sumar cifras de diferentes ordenes de magnitud

$$10 + 0.000001 = 10.000001$$

Causa del problema

La elección en la forma de representar los números:

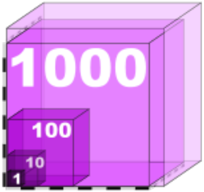
$$
\begin{aligned}
&1234.567\\
&= 1000 + 200 + 30 + 4 + 0.5 + 0.06 + 0.007\\
&= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
&12.78 + 25.53 = 38.31\\
&1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}\\
&2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}\\
=&(1 + 2) \cdot 10^1 + (2 + 5) \cdot 10^0 + (7 + 5) \cdot 10^{-1} + (8 + 3) \cdot 10^{-2}\\
=&3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 12 \cdot 10^{-1} + 11 \cdot 10^{-2}\\
=&3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2}
\end{aligned}
$$

Orden de magnitud

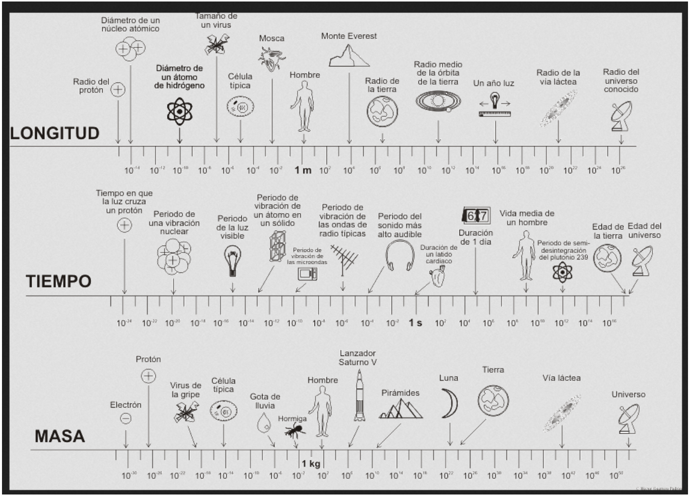
El *orden de magnitud* de un número es la cantidad de ceros antes o después de la coma decimal; así, un rango de ocho órdenes de magnitud implica cien millones o 10^8. Por ejemplo, se dice que dos números difieren 3 órdenes de magnitud si uno es 1000 veces más grande que el otro (10^3). El uso más extendido de describir los órdenes de magnitud es mediante la *notación científica* y las *potencias de diez*.



Prefijos comunes empleados en el sistema métrico

Prefijo	Abreviación	Multiplicar por
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

Observar que están separados por tres órdenes de magnitud, excepto el paso de kilo a mili que son 6.


LONGITUD
Diámetro de un núcleo atómico
Tamaño de un virus
Mosca
Monte Everest
Radio del protón
Diámetro de un átomo de hidrógeno
Célula típica
Hombre
Radio de la tierra
Radio medio de la órbita de la tierra
Un año luz
Radio de la vía láctea
Radio del universo conocido
1 m
TIEMPO
Tiempo en que la luz cruza un protón
Periodo de una vibración nuclear
Periodo de la luz visible
Periodo de vibración de un átomo en un sólido
Periodo de vibración de las microondas
Periodo de vibración de las ondas de radio típicas
Periodo del sonido más alto audible
Duración de un latido cardiaco
Duración de 1 dia
Vida media de un hombre
Periodo de semi-desintegración del plutonio 239
Edad de la tierra
Edad del universo
1 s
MASA
Protón
Electrón
Virus de la gripe
Célula típica
Gota de lluvia
Hormiga
Hombre
Lanzador Saturno V
Pirámides
Luna
Tierra
Vía láctea
Universo
1 kg

Tamaños aproximados de objetos biológicos

Objeto	Tamaño
Protozoos	100 μm
Células	10 μm
Bacterias	1 μm
Virus	100 nm
Macromoléculas	10 nm
Moléculas	1 nm
Átomos	100 pm

Estimaciones por órdenes de magnitud

Una habilidad valiosa para la física es la capacidad de hacer estimaciones de orden de magnitud, es decir, para calcular el valor una cantidad física de interés de forma aproximada.

Ejemplo

Supongamos que deseemos calcular el número de células en el cuerpo humano. Procedemos entonces del modo siguiente:

- Las células tienen una longitud aproximada de 10 μm o $10 \cdot 10^{-6}$m $= 10^{-5}$m.
- Su volumen es de aproximadamente $(10^{-5}\mathrm{m})^3 = 10^{-15}\mathrm{m}^3$.
- Un adulto de 2m de alto y de alrededor de 0.3m de amplitud, tiene un volumen aproximado de $2 \times 0.3 \times 0.3 = 0.18\mathrm{m}^3$ de volumen.
- El número de células será entonces de aproximadamente igual a $0.18\mathrm{m}^3/10^{-15}\mathrm{m}^3 = 0.18 \cdot 10^{15} = 1.8 \cdot 10^{14} \approx 2 \cdot 10^{14}$ células.

Definición

La **notación científica** (o notación índice estándar) es una manera rápida de representar un número utilizando potencias de base diez. Esta notación se utiliza para poder expresar muy fácilmente números muy grandes o muy pequeños. Los números se escriben como un producto:

$$a \times 10^n$$

siendo

- a un número real mayor o igual que 1 y menor que 10, que recibe el nombre de **mantisa**.
- n un número entero $(\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$, que recibe el nombre de **exponente u orden de magnitud**.

Ejemplo

- $0.345 = 3.45 \times 10^{-1}$.
- $40000 = 4 \times 10^{4}$.
- $0.000345 = 3.45 \times 10^{-4}$.
- $1 = 1 \times 10^{0}$.
- $-0.345 = -3.45 \times 10^{-1}$.
- 2.71828×10^{-2} representa al número real 0.0271828
- 2.71828×10^{-1} representa al número real 0.271828
- 2.71828×10^{0} representa al número real 2.71828 (el exponente cero indica que la coma no se desplaza).
- $2.71828x10^{1}$ representa al número real 27.1828.
- $2.71828x10^{2}$ representa al número real 271.828.

Algunas reglas útiles

- $10^3 \times 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$.
- $10^4/10^7 = 10^4 \times 1/10^7 = 10^4 \times 10^{-7} = 10^{4-7} = 10^{-3}$.
- $10^4/10^{-7} = 10^4 \times 1/10^{-7} = 10^4 \times 10^7 = 10^{4+7} = 10^{11}$.
- En general, $1/10^m = 10^{-m}$.
- $4 = 4 \times 10^{-5} \times 10^5 = 0.00004 \times 10^5$.
- $4 = 4 \times 10^5 \times 10^{-5} = 400000 \times 10^{-5}$.
- Podemos entonces escribir

$$4 = 0.4 \times 10^1 = 0.04 \times 10^2 = 0.004 \times 10^3 = \cdots$$

y

$$4 = 40 \times 10^{-1} = 400 \times 10^{-2} = 4000 \times 10^{-3} = \cdots$$

Suma y resta

Siempre que las potencias de 10 sean las mismas, se deben sumar los coeficientes , dejando la potencia de 10 con el mismo grado. En caso de que no tengan el mismo exponente, debe convertirse el coeficiente, multiplicándolo o dividiéndolo por 10 tantas veces como se necesite para obtener el mismo exponente.

Ejemplo

$$2 \times 10^5 + 3 \times 10^5 = 5 \times 10^5$$
$$3 \times 10^5 - 1.2 \times 10^5 = 1.8 \times 10^5$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
& 2 \times 10^4 + 3 \times 10^5 - 6 \times 10^3 \\
& = (\text{tomamos el exponente 5 como referencia}) \\
& = 0.2 \times 10^5 + 3 \times 10^5 - 0.06 \times 10^5 = 3.14 \times 10^5
\end{aligned}
$$

Aquí se emplea que

$$2 = 0.2 \times 10^1$$

luego

$$2 \times 10^4 = 0.2 \times 10^1 \times 10^4 = 0.2 \times 10^{1+4} = 0.2 \times 10^5$$

y $6 = 0.06 \times 10^2$ entonces

$$6 \times 10^3 = 0.06 \times 10^2 \times 10^3 = 0.06 \times 10^{2+3} = 0.06 \times 10^5.$$

Multiplicación

Para multiplicar cantidades escritas en notación científica se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes.

Ejemplo

$(4 \times 10^{12}) \times (2 \times 10^{5}) = 8 \times 10^{17}$

División

Para dividir cantidades escritas en notación científica se dividen los coeficientes y se restan los exponentes.

Ejemplo

$(48 \times 10^{-10})/(12 \times 10^{-1}) = 4 \times 10^{-9}$. Recordar para restar los exponentes: $-10 - (-1) = -10 + 1 = -9$.

Potenciación

Se eleva el coeficiente a la potencia y se multiplican los exponentes.

Ejemplo

$(3 \times 10^6)^2 = 9 \times 10^{12}$.

Radicación

Se debe extraer la raíz del coeficiente y se divide el exponente por el índice de la raíz.

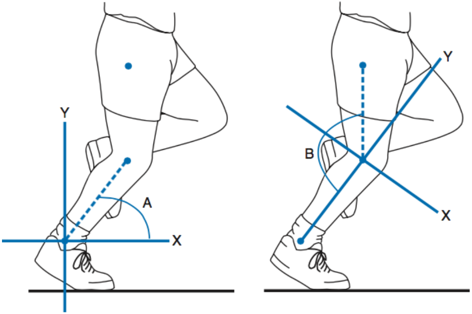
Ejemplo

$\sqrt{4 \times 10^8} = \sqrt{4} \times \sqrt{10^8} = 2 \times 10^{8/2} = 2 \times 10^4$.

Empleamos que $\sqrt{a} = a^{1/2}$.

Cuestión

¿Como podemos **medir** un giro?



Definición

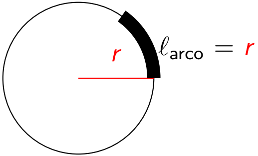
1. *Forma geométrica:* Se le llama "ángulo.ª la amplitud entre dos líneas de cualquier tipo que concurren en un punto común llamado vértice. Coloquialmente, ángulo es la figura formada por dos líneas con origen común. El ángulo entre dos curvas es el ángulo que forman sus rectas tangentes en el punto de intersección.
2. *Forma trigonométrica:* Es la amplitud de rotación o giro que describe un segmento rectilíneo en torno de uno de sus extremos tomado como vértice desde una posición inicial hasta una posición final. Si la rotación es en sentido levógiro (contrario a las manecillas del reloj), el ángulo se considera positivo. Si la rotación es en sentido dextrógiro (conforme a las manecillas del reloj), el ángulo se considera negativo.

La medida de un ángulo

Suelen medirse en unidades tales como el radián, el grado sexagesimal o el grado centesimal. Los ángulos se pueden medir mediante utensilios tales como el goniómetro, el cuadrante, el sextante, la ballestina, el transportador de ángulos o semicírculo graduado, etc.

Definición

- El radián es la unidad de ángulo plano en el Sistema Internacional de Unidades.
- **Un ángulo de 1 radián corresponde un arco de circunferencia cuya longitud coincide con su radio**.



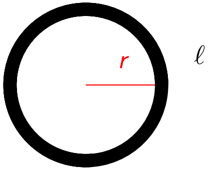
- Su símbolo es rad. Hasta 1995 tuvo la categoría de unidad suplementaria en el Sistema Internacional de Unidades, junto con el estereorradián. A partir de ese año, y hasta el momento presente, ambas unidades figuran en la categoría de unidades derivadas.

Longitud y radio de la circunferencia

- Una circunferencia de radio r unidades de longitud tiene una longitud $\ell = 2\pi r$ unidades de longitud.
- En consecuencia, la siguiente relación es universal (se cumple para cualquier circunferencia):

$$\frac{\ell}{r} = 2\pi.$$

- Una circunferencia completa (independientemente de su radio) su ángulo mide 2π radianes.



Es complicado implementar en la práctica la medida física de la longitud de arco.

Definición

El grado sexagesimal, como unidad del sistema de medida de ángulos sexagesimal, está definido partiendo de que un ángulo recto tiene 90^o (90 grados sexagesimales), y sus divisores: el minuto sexagesimal y el segundo sexagesimal, están definidos del siguiente modo:

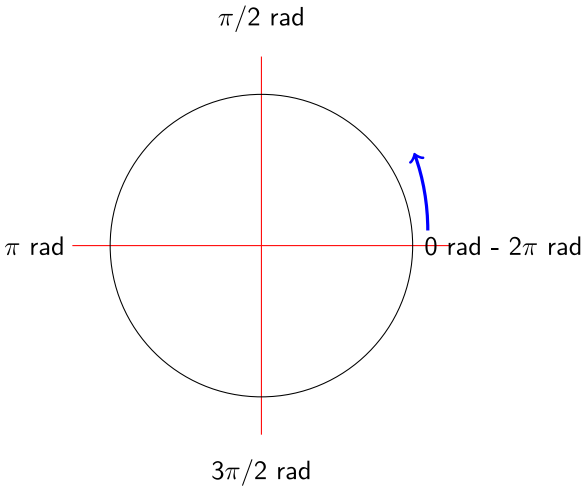
- 1 ángulo recto $=$ 90^o (grados sexagesimales).
- 1 grado sexagesimal $=$ 60$'$ (minutos sexagesimales).
- 1 minuto sexagesimal $=$ 60$''$ (segundos sexagesimales).

La relación con el radian viene determinada por la expresión:

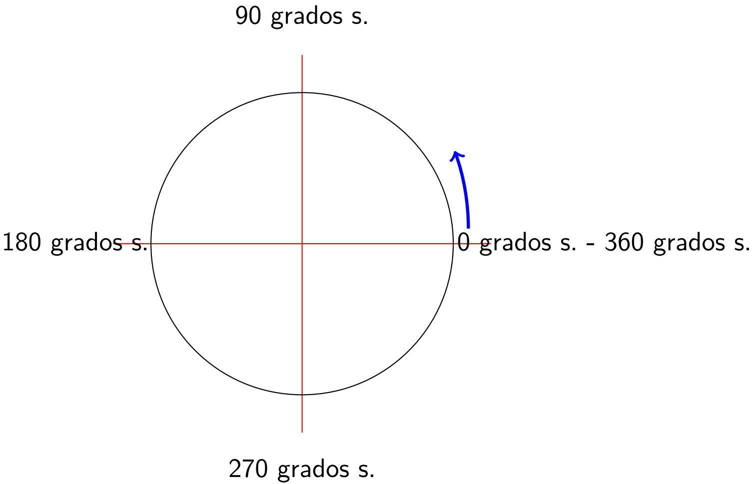
$$360 \text{ grados sexagesimales } = 2\pi \text{ rad.}$$

que es equivalente a

$$180 \text{ grados sexagesimales } = \pi \text{ rad.}$$



$\pi/2$ rad
π rad
0 rad - 2π rad
$3\pi/2$ rad


90 grados s.
180 grados s.
0 grados s. - 360 grados s.
270 grados s.

Factor de conversión

De la expresión $180\,grados = \pi\ radianes$ obtenemos

$$\frac{\pi}{180} \cdot \frac{radianes}{grados} = 1 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{grados}{radianes}$$

Si tengo X grados, entonces para convertirlos en Y radianes procedo:

$$Y \text{ radianes} = X \text{ grados} \cdot 1 = X \text{ grados} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{radianes}{grados},$$

obteniendo que

$$Y \text{ radianes} = X\,\frac{\pi}{180}\,radianes \Rightarrow Y = X\,\frac{\pi}{180}.$$

Por el contrario si tengo X radianes, para convertirlos Y grados en grados procedo:

$$Y \text{ grados} = X \text{ radianes} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{grados}{radianes} \Rightarrow Y = X\,\frac{180}{\pi}$$

Ejemplo

$X = 90$ grados son

$$Y = 90 \times \frac{\pi}{180} \text{ radianes } = 90 \times \frac{\pi}{90 \times 2} \text{ radianes } = \frac{\pi}{2} \text{ radianes } .$$

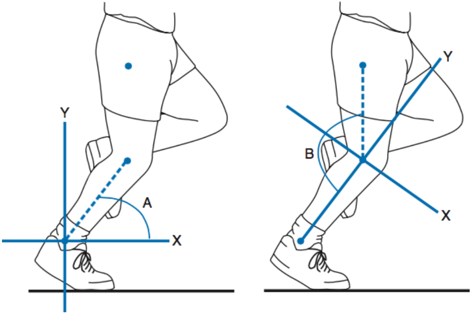
Ejemplo

$X = \pi/4$ radianes son

$$Y = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grados } = \frac{180}{4} \text{ grados } = 45 \text{ grados } .$$

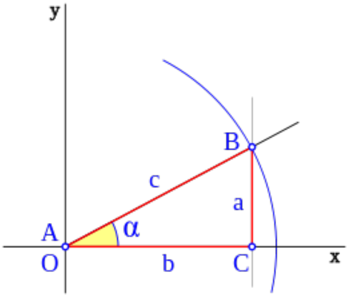
Definición

Las *funciones trigonométricas* son las funciones establecidas para relacionar ángulos y longitudes.



Razones trigonométricas

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones *seno, coseno y tangente*, del ángulo α, correspondiente al vértice A, situado en el centro de la circunferencia.



$$\sin\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$

- El seno (abreviado como sen, o sin por llamarse "sinus.en latín) es la razón entre el cateto opuesto sobre la hipotenusa,

$$\sin\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}.$$

- El coseno (abreviado como cos) es la razón entre el cateto adyacente sobre la hipotenusa,

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

- La tangente (abreviado como tan o tg) es la razón entre el cateto opuesto sobre el cateto adyacente,

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$

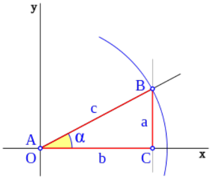
Teorema (Teorema de Pitágoras)

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, esto es,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Dividiendo por c^2 obtenemos

$$\frac{c^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2, \quad 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha.$$



Algunas consecuencias importantes de $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

- Tanto el seno como el coseno toman como valor mínimo -1 y como valor máximo 1,

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

Esto se deduce de observar que si por ejemplo $\cos\alpha < -1$, entonces

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha &> 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \\
\cos^2\alpha &> \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \text{ (restamos } \cos^2\alpha \text{ en ambos lados)} \\
\cos^2\alpha - \cos^2\alpha &> \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha \\
0 &> \sin^2\alpha \text{ (esto es imposible que pueda ocurrir)}
\end{aligned}$$

Cualquier número real al cuadrado es siempre mayor o igual a cero.

Comentario

Existen también las llamadas *razones trigonométricas inversas*, como son la *cosecante, secante y cotangente*. Normalmente se emplean las relaciones trigonométricas seno, coseno y tangente, y salvo que haya un interés específico en hablar de ellos o las expresiones matemáticas se simplifiquen mucho, los términos *cosecante, secante y cotangente* no suelen utilizarse.

	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\csc\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\csc^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\csc\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\csc\theta$

Ecuaciones con expresiones trigonométricas

Muchas veces nos encontraremos que para resolver un problema debemos determinar el valor del ángulo α que cumple por ejemplo

$$\sin\alpha = 0.5$$

```
Archivo  Editar  Ver  Buscar  Terminal  Ayuda
R version 2.15.1 (2012-06-22) -- "Roasted Marshmallows"
Copyright (C) 2012 The R Foundation for Statistical Computing
ISBN 3-900051-07-0
Platform: x86_64-pc-linux-gnu (64-bit)

R es un software libre y viene sin GARANTIA ALGUNA.
Usted puede redistribuirlo bajo ciertas circunstancias.
Escriba 'license()' o 'licence()' para detalles de distribucion.

R es un proyecto colaborativo con muchos contribuyentes.
Escriba 'contributors()' para obtener más información y
'citation()' para saber cómo citar R o paquetes de R en publicaciones.

Escriba 'demo()' para demostraciones, 'help()' para el sistema on-line de ayuda,
o 'help.start()' para abrir el sistema de ayuda HTML con su navegador.
Escriba 'q()' para salir de R.

[Previously saved workspace restored]

> asin(0.5)
[1] 0.5235988
> sin(0.5235988)
[1] 0.5
>
```

Funciones trigonométricas recíprocas

Estas funciones son

$$\alpha = \arcsin x, \text{ de forma que } \sin\alpha = x,$$
$$\alpha = \arccos x, \text{ de forma que } \cos\alpha = x,$$
$$\alpha = \arctan x, \text{ de forma que } \tan\alpha = x,$$

Importante

Por lo general x es un número real cualquiera y el ángulo α viene expresado en radianes, por lo que si queremos expresarlo en grados sexagesimales tenemos que proceder

$$\alpha \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

```
Archivo  Editar  Ver  Buscar  Terminal  Ayuda
ISBN 3-900051-07-0
Platform: x86_64-pc-linux-gnu (64-bit)

R es un software libre y viene sin GARANTIA ALGUNA.
Usted puede redistribuirlo bajo ciertas circunstancias.
Escriba 'license()' o 'licence()' para detalles de distribucion.

R es un proyecto colaborativo con muchos contribuyentes.
Escriba 'contributors()' para obtener más información y
'citation()' para saber cómo citar R o paquetes de R en publicaciones.

Escriba 'demo()' para demostraciones, 'help()' para el sistema on-line de ayuda,
o 'help.start()' para abrir el sistema de ayuda HTML con su navegador.
Escriba 'q()' para salir de R.

[Previously saved workspace restored]

> asin(0.5)
[1] 0.5235988
> sin(0.5235988)
[1] 0.5
> 0.5235988*180/pi
[1] 30
> 
```

Para consultar en Wikipedia

Pichando con el ratón sobre el texto, accederás a la página web correspondiente:

- Trigonometría
- Teorema de Pitágoras
- Función trigonométrica

Magnitudes físicas

¿Como se mide el desplazamiento de un pistón en una jeringuilla?

- Este representa el volumen que el pistón desplaza o explusa en su movimiento desde el fondo a la parte superior del cilindro,
- El *volumen* es una magnitud física.
- Otras son longitud, peso, tiempo, velocidad, fuerza y masa.
- Una magnitud física se mide comparándola con un patrón previamente conocido.

Magnitud

La *magnitud* física se declara mediante un *número* y una *unidad de medida*:

- 1.5 unidades de longitud (distancia).
- 3.46×10^{-3} unidades de longitud^3 (volumen).
- 34 unidades de tiempo (tiempo).

Magnitudes básicas y derivadas

Nadie ha encontrado jamás una medida que no pueda expresarse en términos de *[longitud]* $= L$, *[masa]*$=M$, *[tiempo]*$=T$, *[corriente]*$=I$, *[temperatura]*$=\Theta$, *[intensidad luminosa]* $= N$ *o* *[sustancia]* $=J$. Por lo que a estas cantidades se les llama *magnitudes básicas*, y a las restantes *magnitudes derivadas.*

Magnitud de base	Símbolo para determinar la dimensión
[longitud]	L
[masa]	M
[tiempo]	T
[corriente]	I
[temperatura]	Θ
[intensidad luminosa]	N
[sustancia]	J

- En física con frecuencia es necesario ya sea deducir una expresión matemática o una ecuación o bien verificar su validez. A este procedimiento, se le conoce como análisis dimensional, que hace uso del hecho de que las dimensiones pueden ser tratadas como **cantidades algebraicas**.
- La dimensión de una magnitud física X cualquiera se representa mediante corchetes:

$$[X] := \text{ dimensiones físicas de la magnitud } X.$$

- **Los números no tienen dimensión física** $[\pi] = [\sqrt{2}] = 1.$
- Conocemos que la longitud de la circunferencia $\ell = 2\pi \cdot r$ entonces

$$[\ell] = [2\pi \cdot r] = [2\pi] \cdot [r] = 1 \cdot [\text{longitud}] = 1 \cdot L$$

que son unidades de longitud.

Ejemplos

Problema

Determinar la dimensión del área de una circunferencia $A = \pi r^2 = \pi \cdot r \cdot r$ como magnitud física.

Respuesta

$$[A] = [\pi] \cdot [r] \cdot [r] = 1 \cdot [\text{longitud}] \cdot [\text{longitud}] = L^2.$$

Problema

Determinar la dimensión del volumen de una esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ como magnitud física.

Respuesta

$$[A] = [\frac{4}{3}\pi \cdot r \cdot r \cdot r] = [\frac{4}{3}\pi] \cdot [r] \cdot [r] \cdot [r] = 1 \cdot L \cdot L \cdot L = L^3.$$

Ejemplos

Problema

Determinar la dimensión de la velocidad como magnitud física. **La velocidad es la distancia recorrido por unidad de tiempo**.

Respuesta

La [velocidad] = [distancia]/[tiempo] es una magnitud derivada, donde la distancia se mide en unidades de longitud.

$$[\text{velocidad}] = [\text{longitud}] \times [\text{tiempo}]^{-1} = L \times T^{-1}.$$

Coherencia dimensional

Teorema (Principio de coherencia dimensional)

Toda fórmula tiene que ser dimensionalmente coherente, esto es, si X e Y son dos magnitudes físicas y

$$X = Y \Rightarrow [X] = [Y].$$

Ejemplo

Sea m la masa, υ la velocidad, d la distancia recorrida, t el tiempo y V el volumen. ¿Es la fórmula

$$m \cdot \upsilon^2 = \frac{m}{d \cdot t} \cdot \frac{V}{t}$$

dimensionalmente coherente? Si analizamos la expresión de la derecha

$$[m \cdot \upsilon^2] = [m] \cdot [\upsilon] \cdot [\upsilon] = [\text{masa}] \cdot [\text{velocidad}]^2 = M \left(\frac{L}{T} \right)^2,$$

mientras la expresión de la izquierda

$$\left[\frac{m}{d \cdot t} \cdot \frac{V}{t} \right] = \frac{[m]}{[d] \cdot [t]} \cdot \frac{[V]}{[t]} = \frac{[\text{masa}]}{[\text{longitud}] \times [\text{tiempo}]} \times \frac{[\text{volumen}]}{[\text{tiempo}]}$$
$$= \frac{M}{LT} \frac{L^3}{T} = M \left(\frac{L^3}{LT^2} \right) = M \left(\frac{L^2}{T^2} \right) = M \left(\frac{L}{T} \right)^2.$$

Es coherente ya que las dimensiones coinciden.

Expresiones algebraicas

Observar que empleamos expresiones algebraicas con las variables L M y T (que representan longitud, masa y tiempo, respectivamente). Por ejemplo, antes hemos empleado el argumento siguiente

$$\frac{L^3}{L\,T^2} = L^3\,\frac{1}{L^1\,T^2} = L^3\,\left(L^{-1}\,T^{-2}\right)$$

$$\text{usamos que } \frac{1}{L^1\,T^2} = L^{-1}\,T^{-2}$$

$$= L^3\,L^{-1}\,T^{-2} = L^{3-1}\,T^{-2}$$

$$\text{usamos que } L^3\,L^{-1} = L^{3-1}$$

$$= L^2\,T^{-2} = L^2\,\frac{1}{T^2} = \frac{L^2}{T^2} = \left(\frac{L}{T}\right)^2.$$

El Sistema Internacional

El Sistema Internacional de unidades se llama *Sistème International d'Unités (SI)* y en esencia es el mismo que se conoce como *sistema métrico.* El Comité de Pesas y Medidas ha establecido siete cantidades básicas, y ha asignado **patrones de medida oficiales** a cada cantidad.

Tabla 3.1

Unidades básicas del SI para siete magnitudes fundamentales y dos unidades complementarias

Magnitud	Unidad	Símbolo
Unidades básicas		
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol
Unidades complementarias		
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereorradián	sr

Patrones de longitud y tiempo

- Un *metro* es la longitud de la trayectoria que recorre una onda luminosa en el vacío durante un espacio de $1/299\,792\,458$ segundos
- Un *segundo* representa el tiempo necesario para que el átomo de cesio vibre $9\,192\,631\,700$ veces.
- La velocidad de la luz es una constante universal

$$c = 2.99792458 \times 10^8 = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

- La física es una ciencia en la que las fórmulas matemáticas son verificadas a través de la experimentación.
- Ninguna cantidad física puede ser determinada con precisión íntegra porque nuestros sentidos están limitados, incluso cuando los extendemos empleando mecanismos de medición avanzada (como microscopios electrónicos u otros aparatos similares).
- En consecuencia, es importante desarrollar métodos para determinar la precisión de las mediciones.
- **La precisión de una medición depende de la sensibilidad del aparato, la habilidad de la persona que la efectúa y el número de veces que se repite**.

Ejemplo

Consideremos que en un laboratorio se mide con una regla el área de una placa rectangular. Supongamos que la precisión a la cual se puede medir una dimensión particular de la placa es ± 0.1 cm.

- Si la longitud ℓ de la placa se observa que es 16.3 cm, es posible afirmar que sólo se encuentra en algún lugar entre $16.2 = 16.3 - 0.1$ y $16.4 = 16.3 + 0.1$ cm, esto es,

$$16.2 \leq \ell \leq 16.3 \Leftrightarrow \ell \in [16.2, 16.3].$$

- En este caso, diremos que el valor observado tiene tres cifras significativas.

Cifras significativas

- Las mediciones físicas son aproximadas y se asume que el último dígito significativo se ha calculado mediante alguna estimación de algún tipo.
- Al escribir tales números, con frecuencia se incluyen ceros para indicar la posición correcta del punto decimal. A excepción de estos ceros, todos los demás dígitos se consideran *cifras significativas*.

Ejemplo

- 76 000 metros, tiene dos cifras significativas, empleando notación científica 7.6×10^4.
- 4.003 centímetros, tiene cuatro cifras significativas,
- 0.34 centímetros, tiene dos cifras significativas, empleando notación científica 3.4×10^{-1}.
- 60 400 centímetros, tiene tres cifras significativas, empleando notación científica 6.04×10^4.

Regla 1

Cuando se multiplican o dividen números aproximados, el número de cifras significativas de la respuesta final contiene el mismo número de cifras significativas que el valor de *menor precisión*. Al decir “menor precisión” nos referimos al factor que contiene el menor número de cifras representativas.

Ejemplo

$$\underbrace{9.54}_{\text{3 cifras}} \text{ cm} \times \underbrace{3.4}_{\text{2 cifras}} \text{ cm} = \underbrace{32.436}_{\text{5 cifras}} \text{ cm}^2 \approx 3.2 \times 10^1 \text{ cm}^2 = \underbrace{32}_{\text{2 cifras}} \text{ cm}^2 \text{ º}$$

Regla 2

Cuando se suman o restan números aproximados, el número de lugares decimales en el resultado debe ser igual al menor número de cifras decimales de cualquier término que se suma.

Ejemplo

$$9.54 \text{ cm } + 3.4 \text{ cm } + 9.54 \text{ cm } + 3.4 \text{ cm } = 25.88 \text{ cm } \approx 25.9 \text{ cm}$$

Definición (Error absoluto)

Llamamos **error absoluto** al valor absoluto de la diferencia entre el valor exacto X que toma una magnitud física y el valor aproximado medido $\widehat{X}$:

$$\text{Error absoluto} := |X - \widetilde{X}|.$$

Ejemplo

Si $X = 25.88$ cm y el valor medido es $\widehat{X} = 25.9$ cm entonces el error absoluto es de $|25.88 - 25.9| = | - 0.02| = 0.02 = 2 \times 10^{-2}$ cm.

Definición (Error relativo)

Llamamos **error relativo** al valor absoluto del cociente entre el error relativo $|X - \widetilde{X}|$ dividido por el valor absoluto del valor exacto

$$\text{Error relativo} := \left| \frac{X - \widetilde{X}}{X} \right|.$$

Ejemplo

Si $X = 25.88$ cm y el valor medido es $\widehat{X} = 25.9$ cm entonces el error relativo es de

$$\frac{|25.88 - 25.9|}{|25.88|} = \frac{|-0.02|}{25.88} = 0.00078 = 7.8 \times 10^{-4}.$$

- Algunas veces es necesario convertir unidades de un sistema a otro.
- Los factores de conversión entre los sistemas SI y el acostumbrado en Estados Unidos para unidades de longitud son los siguientes:

$$
\begin{array}{rr}
1 \text{ mi} = 1609 \text{ m} = 1.609 \text{ km} & 1 \text{ pie} = 0.3048 \text{ m} = 30.48 \text{ cm} \\
1 \text{ m} = 39.37 \text{ pulg} = 3.281 \text{ pies} & 1 \text{ pulg} = 0.0254 \text{ m} = 2.54 \text{ cm}
\end{array}
$$

Ejemplo

Como 1 pulg $= 25.4$ mm esto quiere decir que la razón entre milímetros y pulgadas se expresa como

$$1 \times \text{ pulg } = 25.4 \times \text{ mm } \Leftrightarrow \frac{25.4}{1} \times \frac{\text{mm}}{\text{pulg}} = 1.$$

A la pregunta de cuantos milimetros son 1.19 pulg (pulgadas) procedemos como sigue:

$$1.19 \text{ pulg } \times 1$$

$$= 1.19 \text{ pulg } \times \underbrace{\frac{25.4}{1} \times \frac{\text{mm}}{\text{pulg}}}_{\text{factor de conversión}} = \underbrace{1.19 \times \frac{25.4}{1}}_{30.226 \approx 30.2} \times \underbrace{\text{mm } \times \frac{\text{pulg}}{\text{pulg}}}_{\text{mm}}.$$

Podemos escribir finalmente que 1.19 pulg $= 30.2$ mm .

Problema

1. Lee el problema cuidadosamente por lo menos dos veces. Asegúrate de que comprendes la naturaleza del problema antes de proceder a trabajar en su resolución.
2. Traza un diagrama mientras vuelves a leer el problema.
3. Etiqueta todas las cantidades físicas en el diagrama, utilizando letras que te recuerden esas cantidades (por ejemplo, m para la masa).

Estrategia

1. **Identificación de las magnitudes físicas**, las que se conocen y las que se desconocen y ordénalas. Marca con círculos alrededor de las que se desconocen.
2. **Identificación de los principios físicos que relacionan las magnitudes físicas entre si.**
3. **Escribe las ecuaciones que relacionan entre si las magnitudes físicas identificadas**. Estas serán reescritas a continuación. Naturalmente, las ecuaciones elegidas tienen que ser consistentes con los principios físicos identificados en la etapa precedente.

Solución

1. **Resuelve el conjunto de ecuaciones para las cantidades desconocidas en términos de las que se conocen**. Realice esta operación de forma algebraica, sin sustituir valores hasta la siguiente etapa, excepto donde los valores de las magnitudes físicas sean igual a cero.
2. **Sustituye los valores conocidos, junto con sus unidades**. A continuación calcula para cada incógnita (magnitud física desconocida del problema) un valor numérico concreto con sus unidades correspondientes.

Verificación de la respuesta

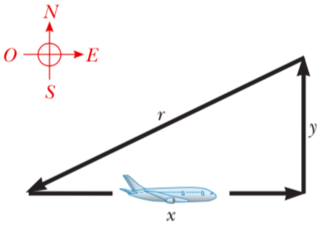
1. **Verifica tu respuesta**. ¿Corresponden las unidades? ¿La respuesta es sensata? ¿Los signos más o menos tienen sentido? ¿Tu respuesta es consistente con el orden de magnitud que se evalúa?

Problema

Un avión viaja $x = 4.50 \times 10^2$ km al este y después recorre una distancia desconocida al norte. Por último regresa a su punto de partida recorriendo una distancia de $r = 525$ km. ¿Qué distancia viajó el avión en su dirección al norte?

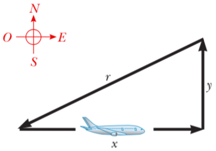
Respuesta

Al finalizar la lectura tracemos un diagrama:



Conocemos los valores de $x = 4.50 \times 10^2$ km y $r = 525$ km. Tenemos pues que encontrar el valor de la distancia etiquetada con y.

Respuesta



Reconocemos un triángulo que tiene un ángulo recto (90 grados s.) y en consecuencia podemos emplear el Teorema de Pitágoras que nos dice que $r^2 = x^2 + y^2$, como desconocemos el valor de y, aislamos de la ecuación su valor al cuadrado:

$$y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Como la distancia no puede ser negativa: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
Sustituimos los valores

$$y = \sqrt{(525 \text{ km })^2 - (4.50 \times 10^2 \text{ km })^2} = 2.7041629e2 \text{ km}.$$

Lo que nos da una distancia de alrededor de 270 km.