

# Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas  
de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o  
cizalladura

Elasticidad de  
volumen: módulo  
volumétrico o de  
compresibilidad

Propiedades elásticas  
de materiales  
biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de  
Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y  
flujo sanguíneo

Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernouilli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas  
de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o  
cizalladura

Elasticidad de  
volumen: módulo  
volumétrico o de  
compresibilidad

Propiedades elásticas  
de materiales  
biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de  
Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernouilli

Fluidos viscosos y  
flujo sanguíneo

## Motivación

Hasta ahora hemos estudiado objetos en movimiento o en reposo. Se ha partido de la suposición de que los objetos son rígidos y totalmente sólidos. Sin embargo, sabemos que el alambre puede alargarse, que los neumáticos de hule se comprimen y que los pernos se rompen en algunas ocasiones. Para tener una comprensión más completa de la naturaleza, es necesario estudiar las propiedades mecánicas de la materia. En este capítulo se analizarán los conceptos de elasticidad, tensión y compresión. En la medida en que aumentan los tipos de aleaciones y la demanda de ellas es cada vez mayor, se vuelve más importante que conozcamos bien todos estos conceptos. Por ejemplo, el esfuerzo al que se someten los vehículos espaciales o los cables de los puentes modernos es de una magnitud que hace apenas unos años era inconcebible.

### Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

## Cuerpo elástico

Definimos como *cuerpo elástico* aquel que recobra su tamaño y su forma originales cuando deja de actuar sobre él una fuerza deformante.

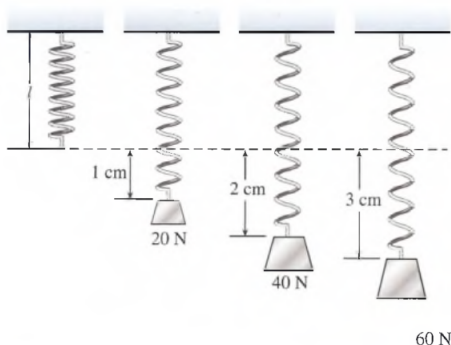
### Ejemplo

La piel, las bandas de hule, las pelotas de golf, los trampolines, las camas elásticas, las pelotas de fútbol y los resortes son ejemplos comunes de cuerpos elásticos.

### Ejemplo

La masilla, la pasta y la arcilla son ejemplos de cuerpos inelásticos. Para todos los cuerpos elásticos, conviene establecer relaciones de causa y efecto entre la deformación y las fuerzas deformantes.

Podemos estudiar la elasticidad de un resorte añadiendo pesas sucesivamente y observando el incremento en su longitud. Una pesa de 20 N alarga el resorte en 1 cm, una pesa de 40 N alarga el resorte 2 cm, y una pesa de 60 N alarga el resorte 3 cm. Es evidente que existe una relación directa entre el estiramiento del resorte y la fuerza aplicada.



## Ley de Hooke

Robert Hooke fue el primero en establecer esta relación por medio de la invención de un volante de resorte para reloj. En términos generales, Hooke descubrió que cuando una fuerza  $\mathbf{F}$  actúa sobre un resorte produce en él un alargamiento  $s$  que es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza. La ley de Hooke se representa como

$$F = \|\mathbf{F}\| = k \cdot s.$$

La constante de proporcionalidad  $k$  varía mucho de acuerdo con el tipo de material y recibe el nombre de constante elástica. Sus unidades son N/m.

## Esfuerzo y deformación

- ▶ La ley de Hooke no se limita al caso de los resortes en espiral; de hecho, se aplica a la deformación de todos los cuerpos elásticos. Para que la ley se pueda aplicar de un modo más general, es conveniente definir los términos esfuerzo y deformación.
- ▶ El **esfuerzo** se refiere a la causa de una deformación elástica, mientras que la **deformación** se refiere a su efecto, en otras palabras, a la alteración de la forma en sí misma.

## Deformaciones elásticas: ley de Hooke

- ▶ Un cuerpo sometido a fuerzas exteriores rompe el equilibrio interior y las partículas se desplazan hasta que se establece de nuevo dicho equilibrio entre las fuerzas interiores y exteriores,
- ▶ Se produce una deformación que se mantendrá en tanto y cuando sigan actuando las fuerzas externas, de forma que si las fuerzas externas disminuye poco a poco, las fuerzas interiores tenderán a volver a poner las partículas en sus posiciones originales y el cuerpo recupera su forma y volumen original. Cuando ocurre esto el cuerpo ha experimentado una **deformación elástica**. Pero si la deformación persiste, al menos en parte, se dice que el cuerpo ha experimentado una **deformación plástica**.
- ▶ El tipo de deformación depende de la naturaleza del cuerpo y del grado de deformación. Si el grado de recuperación del cuerpo se mantiene para un rango muy amplio de deformaciones el cuerpo se dice que es **elástico**, y si predominan las deformaciones el cuerpo se considera como **plástico**.

Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas  
de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o  
cizalladuraElasticidad de  
volumen: módulo  
volumétrico o de  
compresibilidadPropiedades elásticas  
de materiales  
biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de  
Arquímedes

Flujo de fluidos

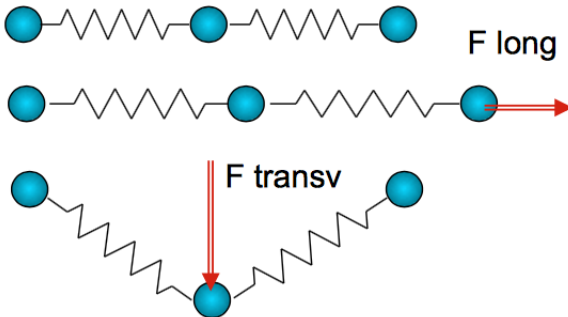
Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y  
flujo sanguíneo



# Muelles vs. átomos



Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas  
de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o  
cizalladuraElasticidad de  
volumen: módulo  
volumétrico o de  
compresibilidadPropiedades elásticas  
de materiales  
biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de  
Arquímedes

Flujo de fluidos

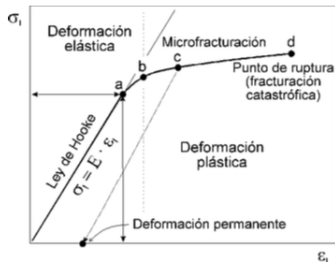
Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y  
flujo sanguíneo

## Esfuerzo vs. Deformación

Para estudiar las propiedades elásticas de los materiales se realizan experimentos en los que se someten a esfuerzos longitudinales  $\sigma_l$  (generalmente poniendo un peso a una varilla de dicho material) y se mide la deformación  $\varepsilon_l$  producida. Con estos datos se elaboran diagramas como los de la figura que corresponde a un metal dúctil como el acero o el cobre:



$$\sigma_I = f(\varepsilon_I)$$

- En el primer tramo de la curva hasta una deformación unitaria inferior al 0.5 % el tensor de esfuerzos  $\sigma_I$  es directamente proporcional a la deformación unitaria es decir

$$\sigma_I = E \varepsilon_I$$

donde  $E$  es una constante de proporcionalidad. Este es un resultado experimental que se conoce como la Ley de Hooke. Es válida sólo para pequeñas deformaciones unitarias hasta que se alcanza el punto (a) o límite de proporcionalidad.

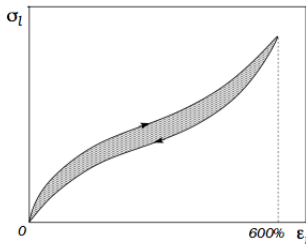
- Entre los puntos (a) y (b) no existe proporcionalidad pero si se disminuye el esfuerzo entre cualquier punto entre 0 y b, la curva se recorre hacia atrás y el material recobra su longitud inicial. En este tramo (0, b) el material presenta un comportamiento elástico y el punto b se llama **límite elástico**.

$$\sigma_I = f(\varepsilon_I)$$

- ▶ Si aumentamos más el esfuerzo por encima de (b), por ejemplo en el punto (c), la deformación unitaria aumenta rápidamente con el esfuerzo pero al disminuir éste el material no recupera su totalmente su longitud original (en este proceso el material sigue ahora la trayectoria a trazos incluyendo a esfuerzo nulo) y en consecuencia tendrá una **deformación permanente**.
- ▶ Este comportamiento es el que ocurre en los materiales dúctiles que se pueden laminar o estirar en hilos y definen el **comportamiento plástico** donde se consiguen deformaciones muy grandes sin aumento significativo del esfuerzo, como si el material fluyera.
- ▶ En ciertos materiales frágiles se produce la ruptura cuando se sobrepasa el punto (b) por lo que no tiene deformaciones permanentes (p.e. el vidrio).
- ▶ Si aumentamos el esfuerzo más se llegará al punto (d) **punto de ruptura** (la varilla se rompe).

## Comportamiento no-lineal

Hay materiales elásticos en los que la ley de Hooke no es válida como por ejemplo en el caucho vulcanizado. Estos materiales tienen un diagrama esfuerzo-deformación:



Motivación

**Propiedades elásticas de la materia**

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

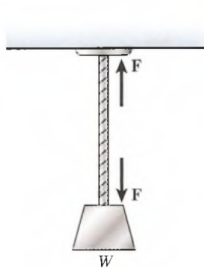
## Comportamiento no-lineal, fatiga

- ▶ Incluso para deformaciones pequeñas se aleja de la ley de Hooke. El material es elástico pues al cesar el esfuerzo el objeto recupera su longitud original. Si el esfuerzo se suprime de forma gradual la curva no es recorrida en sentido contrario sino que el sistema se recupera por otra trayectoria. Cuando las curvas de esfuerzo-deformación para esfuerzos crecientes y decrecientes no coincide se dice que el material presenta **histéresis elástica**. Se puede demostrar que el área encerrada entre las dos curvas es igual a la energía disipada (en forma de calor) en el interior del material elástico.
- ▶ Finalmente hay materiales que presentan **fatiga elástica**, en el sentido de que la deformación definitiva se adquiere después de un tiempo de haber sufrido el esfuerzo.

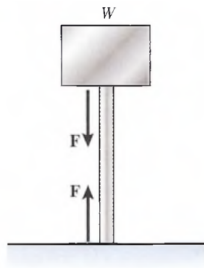
## Tipos de esfuerzos y sus deformaciones correspondientes

Los tres tipos más comunes de esfuerzos y sus correspondientes deformaciones son:

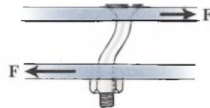
- ▶ Un *esfuerzo de tensión o tracción* se presenta cuando fuerzas iguales y opuestas se apartan entre sí.
- ▶ En un *esfuerzo de compresión o contracción* las fuerzas son iguales y opuestas y se acercan entre sí.
- ▶ Un *esfuerzo cortante o de cizalladura* ocurre cuando fuerzas iguales y opuestas no tienen la misma línea de acción.



(a) Tensión



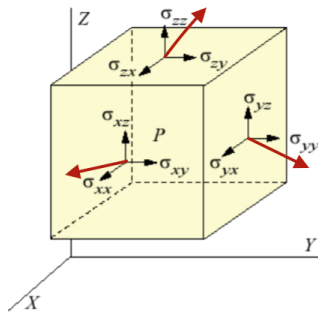
(b) Compresión



(c) Cortante



# Representando el tensor de esfuerzos



El tensor de esfuerzos se escribe como

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_x \\ \mathbf{T}_y \\ \mathbf{T}_z \end{pmatrix}$$

Cada fila representa la tracción en la dirección correspondiente.

Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas  
de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o  
cizalladuraElasticidad de  
volumen: módulo  
volumétrico o de  
compresibilidadPropiedades elásticas  
de materiales  
biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de  
Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y  
flujo sanguíneo

## Clasificación de esfuerzos

La tracción representa el esfuerzo realizado sobre la superficie correspondiente. Por ejemplo:

$$\mathbf{T}_x = (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz})$$

representa el esfuerzo realizado sobre la cara del cubo perpendicular al eje  $X$ .

- ▶ Esfuerzos normales:  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ .
- ▶ Esfuerzos cortantes o de cizalladura

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx},$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx},$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}.$$

## Esfuerzo y deformación: Definición

- ▶ Esfuerzo es la razón de una fuerza aplicada entre el área sobre la que actúa, por ejemplo, newtons por metro cuadrado o libras por pie cuadrado.
- ▶ Deformación es el cambio relativo en las dimensiones o en la forma de un cuerpo como resultado de la aplicación de un esfuerzo.

## Esfuerzo y deformación: Comentario

- ▶ En el caso de un esfuerzo de tensión o de compresión, la deformación puede considerarse como un cambio en la longitud por unidad de longitud.
- ▶ Un esfuerzo cortante, por otra parte, puede alterar únicamente la forma de un cuerpo sin cambiar sus dimensiones. Generalmente el esfuerzo cortante se mide en función de un desplazamiento angular.

## Límite elástico

El *límite elástico* es el esfuerzo máximo que puede sufrir un cuerpo sin que la deformación sea permanente.

## Ejemplo

Una pieza de aluminio cuya área en sección transversal es de  $1 \text{ in}^2$  se deforma permanentemente si se le aplica un esfuerzo de tensión mayor de 19000 lb. Esto no significa que la varilla de aluminio se romperá en ese punto, sino únicamente que la pieza no recuperará su tamaño original. En realidad, se puede incrementar la tensión hasta casi 21 000 lb antes de que la varilla se rompa. El mayor esfuerzo al que se puede someter una pieza sin que se rompa recibe el nombre de **resistencia límite**.

## Ley de Hooke

Siempre que no se exceda el límite elástico, una deformación elástica es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada por unidad de área. Si llamamos a la constante de proporcionalidad **el módulo de elasticidad**, podemos escribir la ley de Hooke en su forma más general:

$$\text{Módulo de elasticidad} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}}.$$

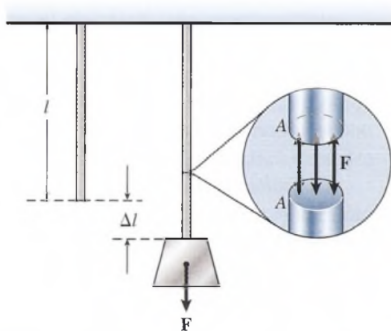
## Esfuerzo y deformación longitudinal

Una fuerza  $\mathbf{F}$  se aplica al extremo de un alambre con un área en sección transversal  $A$ . El esfuerzo longitudinal está dado por

$$\text{Esfuerzo longitudinal} = \sigma = \frac{F}{A}.$$

La unidad métrica para el esfuerzo es el newton por metro cuadrado, que es idéntico al pascal (Pa).  $\text{Pa} = \text{N/m}^2$  El efecto de tal esfuerzo es el alargamiento del alambre, o sea, un incremento en su longitud. Por tanto, la deformación longitudinal puede representarse mediante el cambio de longitud por unidad de longitud. Podemos escribir

$$\text{Deformación longitudinal} = \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$



## Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas de la materia

**Módulo de Young**

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo



## Módulo de Young

Si definimos el módulo de elasticidad longitudinal como módulo de Young  $Y$ , podemos escribir la ecuación

$$\text{Módulo de elasticidad} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} = \frac{\sigma}{\varepsilon},$$

como

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F/A}{\Delta l/l} = \frac{F \cdot l}{A \cdot \Delta l}$$

Tabla 1. Datos de entrada para los materiales de la cabeza

	Densidad	Módulo Elástico	Módulo Poisson	Módulo Cizalle	Material
Unidades	kg/m <sup>3</sup>	N/mm <sup>2</sup>		N/mm <sup>2</sup>	
Cerebro	1.040				
LCR	1.020	2.250	0,4	0,00002	elástico
Hueso	1.200	8.000	0,2	3,100	elástico
Piel	1.030	20	0,4	0,002	elástico

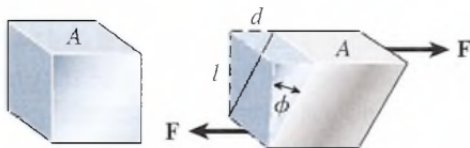
Fuente: Ernesto Ponce1a, Jesús Pérez, Daniel Ponce, Max Andresen. Traumas cerebrales en niños secundarios a cabeceo de balones en fútbol. Modelo de simulación matemática. Rev Med Chile 2011; 139: 1089-1096. (2011).

## Problema

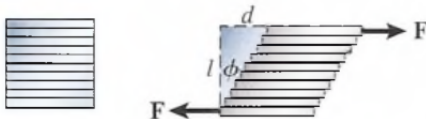
Un cable telefónico de 120 m de largo y de 2.2 mm de diámetro se estira debido a una fuerza de 380 N a lo largo del cable. ¿Cuál es el esfuerzo longitudinal? Si la longitud después de ser estirado es de 120.10 m, ¿cuál es la deformación longitudinal? Determine el módulo de Young para el cable.

Recordar que el área de un círculo de radio  $r$  es

$$A = \pi r^2$$



(a)



(b)

## Esfuerzo y deformación cortante o de cizalladura

El esfuerzo cortante o de cizalladura se define como la relación de la fuerza tangencial  $F$  entre el área  $A$  sobre la que se aplica. La deformación cortante o de cizalladura se define como el ángulo  $\phi$  (en radianes), que se conoce como ángulo de corte. Si se aplica la ley de Hooke, podemos ahora definir el módulo de corte o cizalladura  $S$  en la siguiente forma:

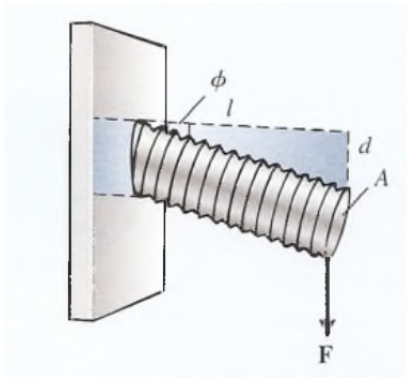
$$S = \frac{\text{Esfuerzo cortante}}{\text{Deformación cortante}} = \frac{\sigma}{\phi}$$

El ángulo  $\phi$  por lo general es tan pequeño que es aproximadamente igual a  $\tan \phi$ . Aprovechando este hecho, podemos volver a escribir la ecuación en la siguiente forma:

$$S = \frac{\sigma}{\tan \phi} = \frac{\varepsilon}{d/l}$$

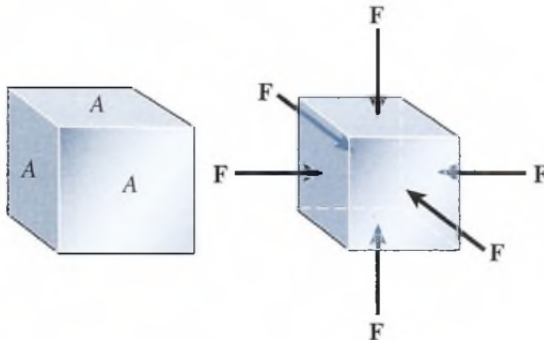
## Problema

Un perno de acero tiene una sección transversal de  $1.8 \times 10^4 \text{ m}^2$  y sobresale 3.8 cm de la pared. Si el extremo del perno está sometido a una fuerza cortante de 35 kN, ¿cuál será la flexión hacia abajo del perno? El módulo de corte o cizalladura  $S$  para el acero es de 82700 MPa ( $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa}$ ).



## Motivación

Hasta ahora hemos considerado los esfuerzos que causan un cambio en la forma de un objeto o que dan por resultado principalmente deformaciones en una sola dimensión. En esta sección nos ocuparemos de los cambios en el volumen.



Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

## Deducción de la fórmula

El volumen inicial del cubo se indica como  $V$  y el área de cada cara se representa por  $A$ . La fuerza resultante  $F$  que se aplica normalmente a cada una de las caras provoca un cambio en el volumen  $\Delta V$ . El signo menos indica que el cambio representa una reducción de volumen. El esfuerzo de volumen  $F/A$  es la fuerza normal por unidad de área, mientras que la deformación de volumen  $\Delta V/V$  es el cambio de volumen por unidad de volumen. Al aplicar la ley de Hooke, definimos el módulo de elasticidad de volumen, o módulo volumétrico o de compresibilidad, de la manera siguiente:

$$B = \frac{\text{Esfuerzo de volumen}}{\text{Deformación de volumen}} = -\frac{\sigma}{\Delta V/V} = -\frac{F \cdot V}{A \cdot \Delta V}$$



## Discusión

Este tipo de deformación se aplica tanto a líquidos como a sólidos. Cuando se trabaja con líquidos a veces es más conveniente representar el esfuerzo  $\sigma$  como la presión  $P$ , que se define también como la fuerza por unidad de área  $F/A$ .

$$B = \frac{P}{\Delta V/V}.$$

## Problema

Una prensa hidráulica contiene cinco litros de agua. Determine el decremento en volumen de agua cuando se ve sometida a una presión de 2000 kPa. El módulo volumétrico o de compresibilidad del agua es de 2100 MPa.

## Músculos, tendones y ligamentos

- ▶ En general son materiales que sin perder sus propiedades elásticas, son capaces de experimentar una gran deformación bajo la acción de fuerzas (músculos).
- ▶ En el proceso de deformación de un músculo hay dos aspectos diferentes que es necesario considerar. Uno es el puramente elástico: los músculos se alargan cuando están sometidos a fuerzas externas, y se encogen cuando dichas fuerzas dejan de actuar. Pero, por otra parte, puede haber un acortamiento voluntario o espontáneo (sin estar sometido a fuerzas) de los músculos y que no es un fenómeno puramente elástico, sino que se parece más al acortamiento de un tubo telescópico, en el que unas partes se insertan dentro de otras teniendo, al estar extendido, una longitud mucho mayor que cuando está recogido. Estos dos aspectos son los que se denominan **comportamiento elástico pasivo**, el primero, y **comportamiento contráctil activo**, el segundo.

### Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

## Músculos, tendones y ligamentos

El músculo actúa como un motor de desplazamiento lineal, en una sola dirección: ejerce las fuerzas al contraerse pero no al extenderse. Normalmente, los movimientos de doble dirección se producen en el cuerpo mediante la acción de dos músculos antagónicos, de tal forma que cuando uno se contrae, el otro está relajado, estirándose por la acción del otro pero sin ejercer fuerza de origen activo. La deformación que experimentan y la tensión que ejercen los músculos son una combinación de sus mecanismos activos y pasivos tal y como se muestra en el dibujo

### Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

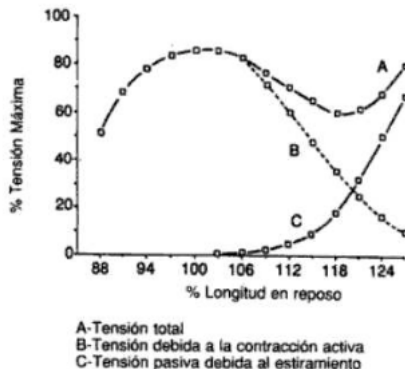
Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo



## Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

## Músculos, tendones y ligamentos

Los ligamentos y tendones son materiales biológicos elásticos que unen los músculos a los huesos. Los ligamentos tienen la curva de tensión-deformación desplazada a la derecha respecto a los tendones. Esto obedece a las diferentes funciones de unos y otros. Los tendones son responsables de transmitir las fuerzas generadas por los músculos a los puntos de origen e inserción en el esqueleto óseo. Si tuvieran bajos módulos de Young no cumplirían bien su función. En cambio los ligamentos han de permitir el normal funcionamiento de las articulaciones en lo que se considera el rango de movimiento fisiológico. Sobrepasado este rango ejercen barreras mecánicas que protegen la integridad de la articulación. Precisamente en ese momento de barrera sus módulos de Young crecen rápidamente. En el gráfico siguiente se muestra la diferencia en los diagramas de esfuerzo-deformación entre huesos y ligamentos y entre tendones y ligamentos.

### Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

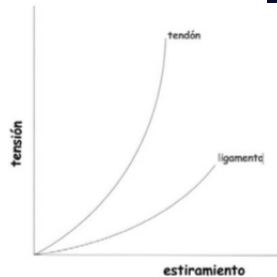
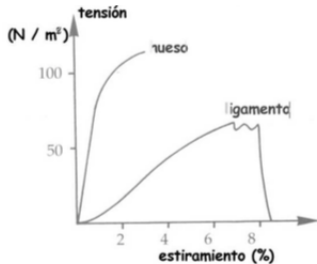
Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

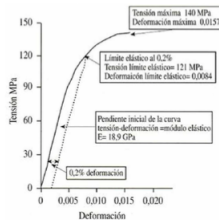
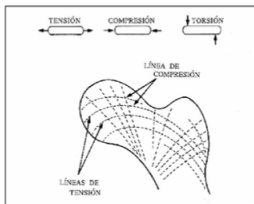
Fluidos viscosos y flujo sanguíneo



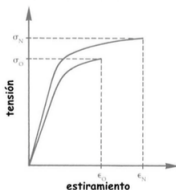
## Huesos

- En el cuerpo humano, los huesos ejercen la función de soporte, locomoción, protección de órganos, almacén de componentes químicos, alimentación y transmisión del sonido.
- La función de soporte es muy obvia en las piernas: los músculos se ligan a los huesos por tendones y ligamentos y el sistema de huesos y músculos soporta el cuerpo entero, función que puede verse afectada con la edad y la presencia de ciertas enfermedades.
- En las etapas iniciales, los huesos están formados por cartilago flexible, pero en pocas semanas comienza el proceso de osificación por la que el cartilago es reemplazado por depósitos duros de fosfato de calcio y colágeno.
- En términos mecánicos el hueso es un material compuesto con diferentes fases líquidas y sólidas y entre todos los tejidos conectivos, el hueso es el único que es duro. Esta dureza se debe a que su principal componente orgánico, la matriz colagínica extracelular, está impregnada de una fase mineral constituida por cristales de tipo hidroxiapatita  $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$  con un cierto contenido de iones carbonato.
- Las propiedades elásticas de los huesos se estudian mediante las típicas curvas esfuerzo-deformación que permiten calcular el módulo elástico de Young en la región donde se satisface la Ley de Hooke. En la figura se muestra también el límite de elasticidad y el punto de ruptura.





- La osteoporosis conlleva descalcificación ósea que vuelve los huesos más frágiles (disminuye el esfuerzo máximo antes de la fractura) y deformables (la curva esfuerzo-deformación se desplaza



hacia la derecha)

# Huesos

## Tracción y contracción

- ▶ Tienen un módulo de Young distinto para los esfuerzos de tracción y compresión.
- ▶ Se cumple que

$$Y_{\text{tracción}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{tracción}}} > Y_{\text{contracción}} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_{\text{contracción}}}.$$

- ▶ Si sometemos un hueso a un mismo esfuerzo pero de signo opuesto  $\sigma_{\text{tracción}} = -\sigma_{\text{contracción}} = \sigma > 0$  entonces la deformación actúa:

$$0 < \varepsilon_{\text{tracción}} = \frac{\sigma}{Y_{\text{tracción}}} < |\varepsilon_{\text{contracción}}| = \left| \frac{-\sigma}{Y_{\text{contracción}}} \right|$$

- ▶ Consecuencia: Es más probable romperse una pierna saltado y golpeando el suelo que dando una patada al aire.

Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

## Relación entre masa y volumen

La densidad o masa específica  $\rho$  de un cuerpo se define como la relación de su masa  $m$  con respecto a su volumen  $V$ .

$$\rho = \frac{m}{V}$$

o

$$m = \rho \cdot V$$

La unidad del SI para la densidad es kilogramos por metro cúbico ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ). Por tanto, si un objeto tiene una masa de 4 kg y un volumen de  $0.002 \text{ m}^3$ , tiene una densidad de  $2000 \text{ kg}/\text{m}^3$ . Cuando trabajamos con volúmenes pequeños la densidad se expresa en gramos por centímetro cúbico ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ).

## Peso específico

El peso específico  $D$  de un cuerpo se define como la relación entre su peso  $W$  y su volumen  $V$ . La unidad común es la libra por pie cúbico ( $\text{lb} / \text{ft}^3$ ).

$$D = \frac{W}{V}$$

o

$$W = D \cdot V.$$

## La relación entre peso específico y densidad

$$D = \frac{W}{V} = \frac{m \cdot g}{V} = \frac{\rho \cdot V \cdot g}{V} = \rho \cdot g.$$

Tabla 15.1

Densidad y peso específico

Sustancia	$\rho$		$D$ , lb/ft <sup>3</sup>
	kg/m <sup>3</sup>	g/cm <sup>3</sup>	
Sólidos:			
Acero	7 800	7.8	487
Aluminio	2 700	2.7	169
Cobre	8 890	8.89	555
Hielo	920	0.92	57
Hierro	7 850	7.85	490
Latón	8 700	8.7	540
Oro	19 300	19.3	1 204
Plata	10 500	10.5	654
Plomo	11 300	11.3	705
Roble	810	0.81	51
Vidrio	2 600	2.6	162
Líquidos:			
Agua	1 000	1.0	62.4
Alcohol	790	0.79	49
Benceno	880	0.88	54.7
Gasolina	680	0.68	42
Mercurio	13 600	13.6	850
Gases (0°C):			
Aire	1.29	0.00129	0.0807
Helio	0.178	0.000178	0.0110
Hidrógeno	0.090	0.000090	0.0058
Nitrógeno	1.25	0.00126	0.0782
Oxígeno	1.43	0.00143	0.00892

Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

## Presión

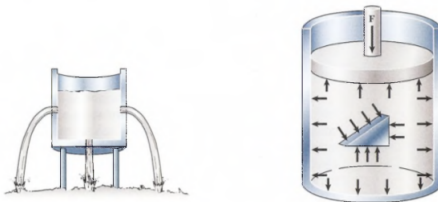
A la fuerza normal por unidad de área se le llama presión.  
Simbólicamente, la presión  $P$  está dada por

$$P = \frac{F}{A}$$

La presión se puede ver como un esfuerzo normal.

## Presión de un fluido: Características

- ▶ La fuerza que ejerce un fluido sobre las paredes del recipiente que lo contiene siempre actúa en forma perpendicular a esas paredes.
- ▶ Los fluidos ejercen presión en todas direcciones.
- ▶ Los fluidos ejercen mayor presión al aumentar la profundidad



Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

**Presión del fluido**

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

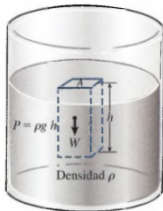
## Relación entre presión, densidad y profundidad

El peso de la columna

$$W = D \cdot V = D \cdot A \cdot h$$

La presión  $P$  a la profundidad  $h$  está dada por

$$P = \frac{W}{A} = \frac{D \cdot A \cdot h}{A} = D \cdot h = \rho \cdot g \cdot h$$



Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas  
de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o  
cizalladuraElasticidad de  
volumen: módulo  
volumétrico o de  
compresibilidadPropiedades elásticas  
de materiales  
biológicos

Densidad

Presión

**Presión del fluido**

Medición de la presión

Principio de  
Arquímedes

Flujo de fluidos

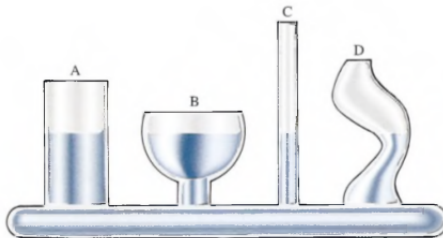
Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y  
flujo sanguíneo



Considere una serie de recipientes que se comunican entre sí y que tienen diferentes áreas y formas interconectadas, como muestra la figura. Parecería a primera vista que el mayor volumen contenido en el recipiente *A* ejercería mayor presión en el fondo que el recipiente *D*.



Si se llenan los recipientes con líquido se demuestra que los niveles son iguales en todos los recipientes.

## Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

**Presión del fluido**

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

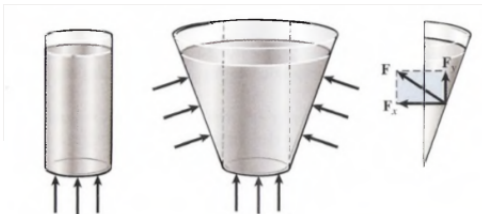
Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

Cuando las paredes del recipiente son verticales, las fuerzas que actúan sobre los lados no tienen componentes hacia arriba. Por tanto, la fuerza total al fondo de un recipiente es igual al peso de una columna recta de agua sobre el área de la base.



La presión que se estudió en la sección previa se debe únicamente al propio fluido. Cualquier líquido en un recipiente abierto, por ejemplo, está sujeto a la presión atmosférica además de la presión debida a su propio peso. Puesto que el líquido es relativamente incompresible, la presión externa de la atmósfera se transmite por igual a todo el volumen del líquido.

## Ley de Pascal (1623-1662)

Una presión externa aplicada a un fluido confinado se transmite uniformemente (de manera constante) a través del volumen del líquido.

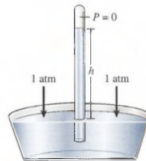
## Medición de la presión

La mayoría de los dispositivos que permiten medir la presión directamente miden en realidad la diferencia entre la presión absoluta y la presión atmosférica. El resultado obtenido se conoce como la presión manométrica.

$$\text{Presión absoluta} = \text{Presión manométrica} + \text{Presión atmosférica.}$$

La presión atmosférica al nivel del mar es 101.3 kPa. Debido a que la presión atmosférica participa en gran número de cálculos, con frecuencia se usa una unidad de presión de 1 atmósfera (atm), definida como la presión media que la atmósfera ejerce al nivel del mar, es decir, 101.3 kPa.

Por lo general, la presión atmosférica se mide en el laboratorio con un barómetro de mercurio. El principio de su operación se muestra en la figura. Un tubo de vidrio, cerrado en un extremo, se llena de mercurio. El extremo abierto se tapa y el tubo se invierte en una cubeta de mercurio. Si no se tapa el extremo abierto, el mercurio fluye hacia afuera del tubo hasta que la presión ejercida por la columna de mercurio equilibra exactamente la presión atmosférica que actúa sobre el mercurio de la cubeta. Puesto que la presión en el tubo sobre la columna de mercurio es cero, la altura de la columna por arriba del nivel del mercurio en la cubeta indica la presión atmosférica.

**Sólidos y Fluidos**

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas  
de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o  
cizalladuraElasticidad de  
volumen: módulo  
volumétrico o de  
compresibilidadPropiedades elásticas  
de materiales  
biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

**Medición de la presión**Principio de  
Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y  
flujo sanguíneo

## Prensa hidráulica

De acuerdo con el principio de Pascal, una presión aplicada al líquido en la columna izquierda se transmitirá íntegramente al líquido de la columna de la derecha. Por lo tanto, si una fuerza de entrada  $F_i$  actúa sobre un émbolo de área  $A_i$ , causará una fuerza de salida  $F_o$  que actúa sobre un émbolo de área  $A_o$  de modo que

$$\frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_o}$$

luego

$$F_i = F_o \frac{A_i}{A_o}.$$

Si la fuerza de entrada recorre  $s_i$  y la de salida  $s_o$

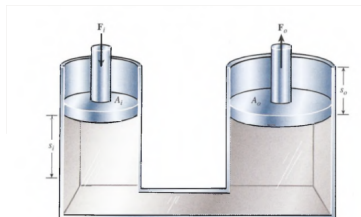
## Prensa hidráulica

Si la fuerza de entrada recorre  $s_i$  y la de salida  $s_o$  podemos escribir también

$$F_i \cdot s_i = F_o \cdot s_o$$

luego la ventaja mecánica ideal de una prensa hidráulica es:

$$\frac{F_i}{F_o} = \frac{s_o}{s_i}$$



Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

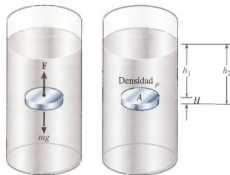
Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

## Principio de Arquímedes

Un objeto que se encuentra parcial o totalmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza ascendente (empuje) igual al peso del fluido desalojado. El principio de Arquímedes se puede demostrar estudiando las fuerzas que ejerce el fluido sobre un cuerpo que se encuentra suspendido en él. Considere un disco de área  $A$  y de altura  $H$  que está totalmente sumergido en un fluido, como se muestra en la figura. Recuerde que la presión a cualquier profundidad  $h$  en el fluido está dada por

$$P = \rho \cdot g \cdot h,$$



### Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

**Principio de Arquímedes**

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo



La presión total hacia abajo  $P_1$  ejercida sobre la parte superior del disco, según la figura es por lo tanto:

$$P_1 = P_a + \rho \cdot g \cdot h_1$$

donde  $P_a$  es la presión atmosférica y  $h_1$  es la profundidad en la parte superior del disco. En forma similar, la presión hacia arriba  $P_2$  en la parte inferior del disco es

$$P_2 = P_a + \rho \cdot g \cdot h_2$$

donde  $h_2$  es la profundidad medida en la parte inferior del disco. Si representamos la fuerza hacia abajo como  $F_1$  y la fuerza hacia arriba como  $F_2$ , podemos escribir

$$F_1 = P_1 \cdot A \text{ y } F_2 = P_2 \cdot A$$

La fuerza neta hacia arriba ejercida por el fluido sobre el disco se llama empuje está dada por

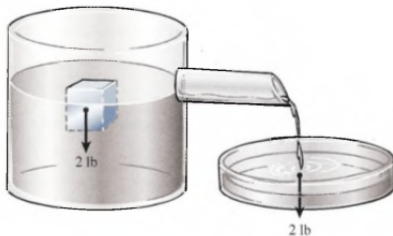
$$\begin{aligned} F_B &= F_2 - F_1 = A(P_2 - P_1) \\ &= A((P_a + \rho \cdot g \cdot h_2) - (P_a + \rho \cdot g \cdot h_1)) \\ &= A \cdot \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \end{aligned}$$

donde  $H = h_2 - h_1$ . Finalmente, si recordamos que el volumen del disco es  $V = AH$ , obtenemos este importante resultado:

$$F_B = \rho \cdot g \cdot V = m \cdot g.$$

*El empuje es igual al peso de fluido desalojado.*

Un cuerpo que flota desaloja su propio peso de fluido.



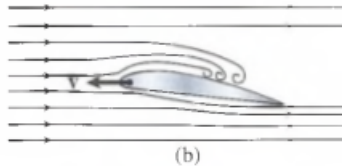
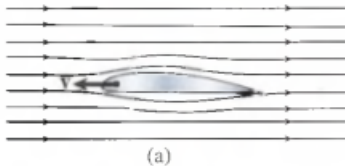
## Hipótesis de trabajo: Ausencia de turbulencia

Todos los fluidos en movimiento muestran una corriente laminar o flujo aerodinámico.

## Corriente laminar o flujo aerodinámico

El **flujo aerodinámico** es el movimiento de un fluido en el cual cada partícula en el fluido sigue la misma trayectoria (pasa por un punto particular) que siguió la partícula anterior. El **flujo del fluido** (gasto) se define como el volumen de fluido que pasa a través de cierta sección transversal en una unidad de tiempo.

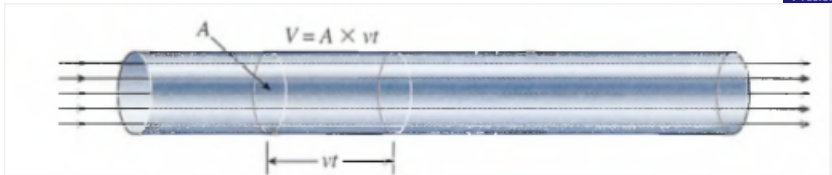
## Flujos laminar y turbulento en la trayectoria de un fluido.



## Flujo de fluido

Para expresar esta razón en forma cuantitativa, consideraremos el caso de un líquido que fluye a lo largo de una tubería como la que se ilustra en la figura, con una velocidad media  $v$ . En un espacio de tiempo  $t$ , cada partícula en la corriente se mueve a través de una distancia  $v \cdot t$ . El volumen  $V$  que fluye a través de la sección transversal  $A$  está dado por

$$V = A \cdot v \cdot t.$$



Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas  
de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o  
cizalladuraElasticidad de  
volumen: módulo  
volumétrico o de  
compresibilidadPropiedades elásticas  
de materiales  
biológicos

Densidad

Presión

del fluido

ón de la presión

io de

edes

e fluidos

y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y  
flujo sanguíneo

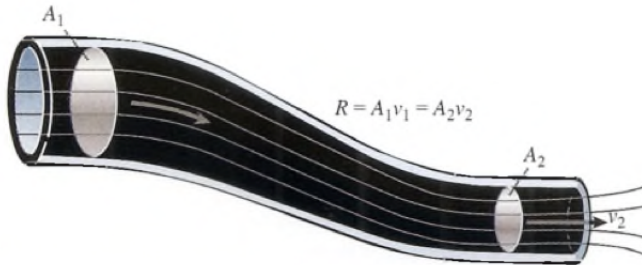
## Flujo de fluido

Por lo tanto, el gasto (volumen por unidad de tiempo) se puede calcular partiendo de

$$G = \frac{V}{t} = \frac{A \cdot v \cdot t}{t} = A \cdot v.$$

Si el fluido es incompresible y no tomamos en cuenta los efectos de la fricción interna, el gasto  $G$  permanecerá constante. Esto significa que una variación en la sección transversal en la tubería, como se muestra en la figura, da por resultado un cambio en la rapidez del líquido, de tal modo que el producto  $v \cdot A$  permanece constante. Simbólicamente escribimos

$$G = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$



## Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

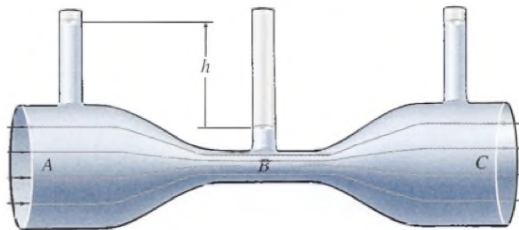
Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo





La velocidad de un fluido aumenta cuando fluye a través de un angostamiento. Un incremento en la velocidad únicamente se puede deber a la presencia de una fuerza de aceleración. Para acelerar un líquido que entra al angostamiento, la fuerza de empuje proveniente de la sección transversal amplia debe ser mayor que la fuerza de resistencia del angostamiento. En otras palabras, la presión en los puntos *A* y *C*, en la figura debe ser mayor que la presión en *B*.

## Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

**Presión y velocidad**

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

Si el fluido es incompresible y no tomamos en cuenta los efectos de la fricción interna, entonces

$$v_A \cdot A_A = v_B \cdot A_B$$

es decir

$$v_A = \frac{A_B}{A_A} \cdot v_B, \text{ si } A_B < A_A \text{ entonces } \frac{A_B}{A_A} < 1,$$

y en consecuencia

$$v_A = \frac{A_B}{A_A} v_B < v_B.$$

Empleando la ecuación de Bernoulli veremos el efecto de este aumento de velocidad en la presión.

Los tubos insertados en la tubería sobre dichos puntos indican claramente la diferencia de presión. El nivel del fluido en el tubo situado sobre la parte angosta es más bajo que el nivel en las áreas adyacentes. Si  $h$  es la diferencia de altura, la diferencia de presión está dada por

$$P_A - P_B = \rho \cdot g \cdot h$$

Esto es cierto si se supone que la tubería está en posición horizontal y que no se producen cambios de presión debido al cambio de energía potencial.

## Efecto Venturi

El efecto venturi tiene muchas otras aplicaciones tanto para líquidos como para gases. El carburador de un automóvil utiliza el principio venturi para mezclar vapor de gasolina y aire. El aire que pasa a través de un angostamiento en su camino hacia los cilindros, origina un área de baja presión a medida que aumenta su velocidad. La disminución en la presión se usa para enviar combustible a la columna de aire, donde se vaporiza rápidamente.

En nuestro estudio sobre fluidos, hemos destacado cuatro parámetros: la presión  $P$ , la densidad  $\rho$ , la velocidad  $v$ , y la altura  $h$  sobre algún nivel de referencia. El primero en establecer la relación entre estas cantidades y su capacidad para describir fluidos en movimiento fue el matemático suizo Daniel Bernoulli (1700-1782).

**Sólidos y Fluidos**

Antonio Falcó

Motivación

Propiedades elásticas  
de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o  
cizalladuraElasticidad de  
volumen: módulo  
volumétrico o de  
compresibilidadPropiedades elásticas  
de materiales  
biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

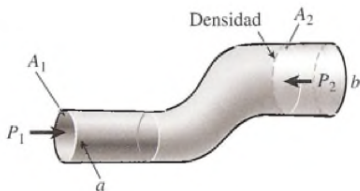
Medición de la presión

Principio de  
Arquímedes

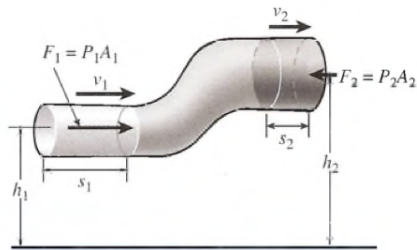
Flujo de fluidos

Presión y velocidad

**Ecuación de Bernoulli**Fluidos viscosos y  
flujo sanguíneo



(a)



(b)

Puesto que un fluido tiene masa, debe obedecer a las mismas leyes de la conservación establecidas para los sólidos. En consecuencia, el trabajo necesario para mover cierto volumen de fluido a lo largo de la tubería debe ser igual al cambio total en energía potencial y cinética. Consideremos el trabajo requerido para mover el fluido del punto *a* al punto *b* en la figura (a). El trabajo neto debe ser la suma del trabajo realizado por la fuerza de entrada  $F_1$  y el trabajo negativo efectuado por la fuerza de resistencia  $F_2$

$$\text{Trabajo neto} = F_1 \cdot s_1 - F_2 \cdot s_2$$

Como  $F_1 = P_1 \cdot A_1$  y  $F_2 = P_2 \cdot A_2$  de donde

$$\text{Trabajo neto} = P_1 \cdot A_1 \cdot s_1 - P_2 \cdot A_2 \cdot s_2$$

La energía cinética  $E_K$  de un fluido se define como  $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ , donde  $m$  es la masa del fluido y  $v$  es su velocidad. Puesto que la masa permanece constante, únicamente hay un cambio en la energía cinética  $\Delta E_k$  debido a la diferencia de velocidad del fluido. En nuestro ejemplo, el cambio en la energía cinética es

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$



La energía potencial de un fluido a una altura  $h$  sobre algún punto de referencia se define como  $m \cdot g \cdot h$ , donde  $m \cdot g$  representa el peso del fluido. El volumen del fluido que se mueve a lo largo de la tubería es constante. Por consiguiente, el cambio en la energía potencial  $\Delta E_p$  es el resultado del incremento de altura del fluido de  $h_1$  a  $h_2$  :

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1$$

Ahora estamos preparados para aplicar el principio de la conservación de la energía. El trabajo neto realizado sobre el sistema debe ser igual a la suma de los incrementos en energía cinética y energía potencial. Por tanto,

$$\text{Trabajo neto} = \Delta E_k + \Delta E_p$$

$$(P_1 - P_2)V = \left( \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \right) + (m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1)$$

Si la densidad del fluido es  $\rho$ , podemos sustituir  $V = m/\rho$ , lo que nos da

$$(P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} = \left( \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \right) + (m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1)$$

Si se multiplica por  $\rho/m$  y se reordenan los términos se obtiene la ecuación de Bernoulli:

$$(P_1 - P_2) \cdot \frac{m}{\rho} \cdot \frac{\rho}{m} = \frac{\rho}{m} \left( \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \right) + \frac{\rho}{m} (m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1)$$

es decir

$$(P_1 - P_2) = \left( \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 \right) + (\rho \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot g \cdot h_1).$$

Finalmente

$$P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2 = P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1. \quad (1)$$

En vista de que los subíndices 1 y 2 se refieren a dos puntos cualesquiera, la ecuación de Bernoulli se puede enunciar en una forma más simple como

## Ecuación de Bernoulli

$$P + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h = \text{constante.}$$

La ecuación de Bernoulli se aplica en casi todos los aspectos del flujo de fluidos. La presión  $P$  debe reconocerse como la presión absoluta y no la presión manométrica. Recuerde que  $\rho$  es la densidad y no el peso específico del fluido. Observe que las unidades de cada término de la ecuación de Bernoulli son unidades de presión

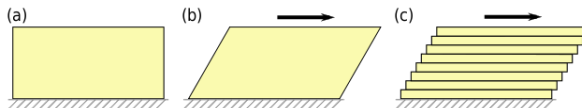
## Cambios en velocidades y presiones

Consideremos un fluido incompresible y en el que no tomamos en cuenta los efectos de la fricción interna mientras fluye por un conducto horizontal, es decir la altura  $h = 0$ . Si el área en un sector  $A$  del conducto es mayor que el área de otro sector  $B$  del conducto, entonces

$$v_A < v_B.$$

La ecuación de Bernoulli nos dice

$$P_B - P_A = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_A^2 - v_B^2) < 0 \text{ es decir } P_B < P_A.$$



En los líquidos, el pequeño rozamiento existente entre capas adyacentes se denomina viscosidad. Es su pequeña magnitud la que le confiere al fluido sus peculiares características; así, por ejemplo, si arrastramos la superficie de un líquido con la palma de la mano como lo haríamos con una goma de borrar, las capas inferiores no se moverán o lo harán mucho más lentamente que la superficie ya que son arrastradas por efecto de la pequeña resistencia tangencial, mientras que las capas superiores fluyen con facilidad.

## Sólidos y Fluidos

Antonio Falcó

## Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

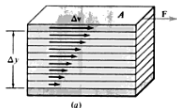
## Viscosidad de un fluido

La fuerza de resistencia de una placa que se mueve es

$$F = \eta \cdot A_{\text{placa}} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

donde  $A_{\text{placa}}$  es el área de la placa,  $\Delta v$  es la velocidad de la capa superior,  $\Delta y$  la separación entre las placas y a  $\eta$  se le denomina viscosidad. Observemos que

$$P = \frac{F}{A_{\text{placa}}} = \eta \cdot \frac{\Delta v}{\Delta y}$$



Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

## Ley de Poiseuille

Consideremos ahora un fluido viscoso que circula en régimen laminar por una tubería de radio interior  $r$ , y de longitud  $L$ , bajo la acción de una fuerza debida a la diferencia de presión existente en los extremos del tubo:

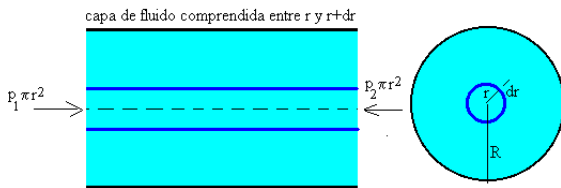
$$F = (P_1 - P_2)\pi r^2$$

Sustituyendo  $F$  en la fórmula y teniendo en cuenta que el área  $A$  de la capa es ahora el área lateral de un cilindro de longitud  $L$  y radio  $r$ .

$$\frac{(P_1 - P_2)\pi r^2}{2\pi rL} = -\eta \cdot \frac{\Delta v}{\Delta r}$$

El signo negativo se debe a que  $v$  disminuye al aumentar  $r$ .





## Velocidad parabólica de Poiseuille

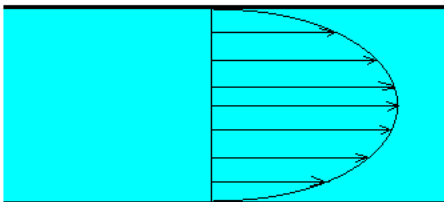
Obtenemos la ecuación para  $v = v(r)$  siguiente:

$$\Delta v = -\frac{(P_1 - P_2)r}{2\eta L} \cdot \Delta r.$$

Si suponemos que  $v = v(R) = 0$ , la velocidad sobre la pared de la tubería es cero, entonces obtenemos una expresión para la velocidad horizontal en función del radio:

$$v(r) = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L} \cdot (R^2 - r^2)$$

perfil de velocidades



## Gasto o caudal

El volumen de fluido que atraviesa cualquier sección normal del tubo en la unidad de tiempo se denomina gasto. El volumen de fluido que atraviesa el área del anillo comprendido entre  $r$  y  $r + \Delta r$  en la unidad de tiempo es  $v(r)(2\pi r \Delta r)$ . Donde  $v(r)$  es la velocidad del fluido a una distancia  $r$  del eje del tubo y  $2\pi r \Delta r$  es el área del anillo, entonces

$$\Delta G = v(r)(2\pi r \Delta r) = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L} \cdot (R^2 - r^2)(2\pi r \Delta r),$$

de donde obtenemos la fórmula de Poiseuille:

$$G(R) = \frac{(P_1 - P_2)\pi R^4}{8\eta L}.$$

Motivación

Propiedades elásticas de la materia

Módulo de Young

Módulo de corte o cizalladura

Elasticidad de volumen: módulo volumétrico o de compresibilidad

Propiedades elásticas de materiales biológicos

Densidad

Presión

Presión del fluido

Medición de la presión

Principio de Arquímedes

Flujo de fluidos

Presión y velocidad

Ecuación de Bernoulli

Fluidos viscosos y flujo sanguíneo

## Consecuencias físicas

- (Pérdida de carga) Si el disminuimos el radio a la mitad  $R/2$  entonces

$$G(R/2) = \frac{(P_1 - P_2)\pi R^4/2^4}{8\eta L} = \frac{G(R)}{16},$$

es decir la reducción del caudal es exponencial.

- La ley de Poiseuille explica porque es muy difícil de hacer pasar un líquido viscoso por una cánula muy fina manteniendo el gasto. La aterosclerosis es un síndrome caracterizado por el depósito e infiltración de sustancias lipídicas en las paredes de las arterias de mediano y grueso calibre. Es la forma más común de arteriosclerosis. Las placas de ateroma o ateromas son lesiones focales que se inician en la capa íntima de una arteria y fuerzan al corazón a trabajar más con tal de mantener el caudal sanguíneo.

La fórmula de Poiseuille se puede escribir como

$$(P_1 - P_2) = \Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \cdot G.$$

Resistencia hidráulica (o vascular)

$$R_{\text{vascular}} = R_{\text{hidráulica}} = \frac{P_1 - P_2}{G} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}.$$

las unidades son  $\text{Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^3$

## Sistema circulatorio

El sistema circulatorio puede visualizarse como un sistema de resistencias eléctricas en paralelo. Entonces la resistencia total  $R_{\text{total}}$  se calcula como

$$\frac{1}{R_{\text{total}}} = \sum_i \frac{1}{R_i} = \sum_i \frac{\pi R_i^4}{8\eta L_i}$$

	Núm.	P. sanguínea	Vel. media	Diam. de los vasos
		mbar	cm/s	cm
Aorta	1		30	2.6
Arterias		133	18	0.8
Arteriolas			1.5	$2 \cdot 10^{-3}$
Capilares		33	0.02-0.1	$0.9 \cdot 10^{-3}$
Venas			1	$2.5 \cdot 10^{-3}$
Venas cavas	2	2.6 a 5.3	6	3.2