Método de los Elementos Finitos

Clase 3: Elementos finitos en 2D

Antonio Falcó

Departamento de Matemáticas

Estructura de la clase

1. Dominios y mallas en 2D
2. Coordenadas baricéntricas y funciones de forma
3. Transformación al triángulo físico
4. Matrices locales y ensamblaje global
5. Cuadratura en 2D
6. Ejemplo numérico
7. Cierre

El problema modelo en 2D

Consideremos el problema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

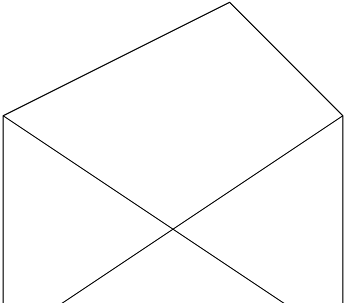
- El método en 2D sigue la misma filosofía que en 1D.
- Pero necesitamos:
  - Una malla que discretice Ω.
  - Un elemento de referencia en 2D.
  - Mapeos del elemento de referencia al elemento físico.

Mallas triangulares en 2D

Definición

Una **malla triangular** $\mathcal{T}_h$ de un dominio poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto de triángulos abiertos $\{K\}$ tales que:

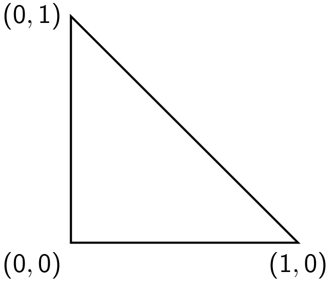
1. $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \overline{K}$.
2. La intersección de dos triángulos es vacía, un vértice o un lado.
3. Los triángulos no se solapan y la malla es conforme.



Triángulo de referencia

El elemento básico en 2D es el triángulo de referencia:

$$\widehat{K} = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \ \xi \geq 0, \ \eta \geq 0, \ \xi + \eta \leq 1\}.$$



- Sobre este triángulo definiremos las funciones de forma.
- Luego trasladaremos estas funciones a un triángulo físico K.

Coordenadas baricéntricas

Sea K un triángulo con vértices a_1, a_2, a_3.

Definición

Las **coordenadas baricéntricas** de un punto $x \in K$ son funciones $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que:

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3, \qquad \lambda_i \geq 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

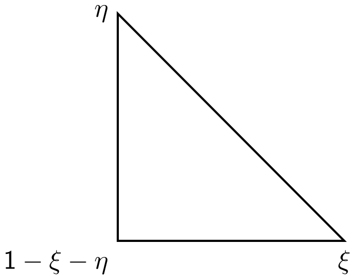
Propiedades:

- $\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$: son funciones nodales.
- Son afines en cada triángulo.
- Forman una base natural para elementos finitos lineales (P1).

Funciones de forma P1 en 2D

Para el triángulo de referencia:

$$\widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta, \qquad \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) = \xi, \qquad \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta) = \eta.$$



- Son polinomios afines.
- En un triángulo físico K, las funciones de forma se obtienen mediante el mapeo afín F_K.

Mapeo afín F_K

Sea K un triángulo con vértices x_1, x_2, x_3. El mapeo afín desde $\widehat{K}$ es:

$$F_K(\xi, \eta) = x_1 + (x_2 - x_1)\,\xi + (x_3 - x_1)\,\eta.$$

- Linealidad local $\rightarrow$ fácil de invertir.
- Jacobiano constante en elementos P1.

$$J_K = \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{bmatrix}.$$

El área del triángulo:

$$|K| = \frac{1}{2}|J_K|.$$

Transformación de gradientes

Para una función $v = \widehat{v} \circ F_K^{-1}$,

$$\nabla v(x) = B_K^{-T} \nabla_\xi \widehat{v}(\xi),$$

donde la matriz

$$B_K = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Consecuencia fundamental:

$$\int_K \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx = \int_{\widehat{K}} (B_K^{-T} \nabla\widehat{\varphi}_i) \cdot (B_K^{-T} \nabla\widehat{\varphi}_j) \, |J_K| \, d\xi d\eta.$$

- El gradiente es constante en cada triángulo para elementos P1.
- El cálculo es explícito y muy eficiente.

Matriz elemental de rigidez en 2D

Para un triángulo K con funciones de forma $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$,

$$A_K(i,j) = \int_K \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx.$$

Se obtiene la fórmula explícita:

$$A_K(i,j) = \frac{1}{4|K|}(b_i b_j + c_i c_j),$$

donde b_i, c_i dependen de los vértices:
Si $x_i = (x_i, y_i)$, entonces

$$b_i = y_j - y_k, \qquad c_i = x_k - x_j,$$

para $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

- Fórmula clásica para triángulos P1.
- Matriz 3×3 simétrica y definida positiva.

Vector de cargas elemental

$$F_K(i) = \int_K f(x)\,\varphi_i(x)\,dx.$$

Para cuadratura exacta en P1:

$$F_K(i) \approx f(x_K)\,|K|/3,$$

donde x_K es el baricentro del triángulo.

- Regla de un punto en el baricentro es exacta si f es afín.
- Para más precisión: cuadratura de 3 puntos de Dunavant.

Ensamblaje global

1. Se inicializan matrices globales A y $\mathbf{F}$.
2. Para cada triángulo K:
    - Identificar los índices globales de sus vértices.
    - Construir A_K y F_K.
    - Sumar sus contribuciones a A y $\mathbf{F}$.
3. Imponer condiciones de contorno:
    - Dirichlet: fijación de grados de libertad.
    - Neumann: contribución al vector de cargas.
4. Resolver el sistema lineal final.

Reglas de cuadratura en el triángulo de referencia

- Para integrar sobre K, transformamos a $\widehat{K}$.
- Regla de un punto (baricentro):

$$\int_{\widehat{K}} g(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \approx g\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)\frac{1}{2}.$$

- Regla de 3 puntos:

$$\int_{\widehat{K}} g \approx \frac{1}{6}\left[g(p_1)+g(p_2)+g(p_3)\right].$$

Ejemplo: Poisson en un dominio poligonal

$$-\Delta u = 1 \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

- Se genera una malla triangular de Ω.
- Para cada triángulo:
  - Se computan los coeficientes A_K mediante la fórmula explícita.
  - Se evalúa el vector F_K en el baricentro.
- Ensamblaje y resolución.

Resultados típicos:

- Convergencia en $H^1(\Omega)$: orden $\mathcal{O}(h)$.
- Convergencia en $L^2(\Omega)$: orden $\mathcal{O}(h^2)$.

Dificultades en 2D

- Calidad de malla: triángulos muy agudos dañan la estabilidad.
- Manejo correcto de condiciones de contorno mixtas.
- Integración numérica precisa en triángulos curvos o no afines.
- Ensamblaje eficiente para mallas muy grandes.

Resumen de la Clase 3

- Introducción de mallas triangulares en 2D.
- Definición del triángulo de referencia y coordenadas baricéntricas.
- Funciones de forma P1 y gradientes constantes en cada elemento.
- Mapeo afín y jacobiano.
- Integración en K mediante transformación al triángulo de referencia.
- Construcción de matrices elementales y ensamblaje global.

Próxima clase (Clase 4)

Análisis de error, estabilidad, estimadores a posteriori y ejemplos completos.

¿Preguntas?