

# Syllabus del Curso

## Método de los Elementos Finitos (MEF)

Profesor: Antonio Falcó

Duración total: 8 horas (4 sesiones de 2 h)

### Descripción general del curso

El Método de los Elementos Finitos (MEF) constituye una herramienta fundamental en ingeniería, física computacional y análisis numérico moderno para la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales. Este curso introductorio, de 8 horas distribuidas en cuatro sesiones, proporciona una visión matemática rigurosa del MEF, unida a su implementación práctica en 1D y 2D.

### Objetivos formativos

Al finalizar el curso, el estudiante será capaz de:

- Formular problemas elípticos mediante espacios de Sobolev y técnicas variacionales.
- Construir elementos finitos en 1D y 2D, incluyendo funciones de forma, gradientes y matrices elementales.
- Implementar el proceso de ensamblaje y tratamiento de condiciones de contorno.
- Analizar el error de aproximación usando resultados clásicos como la desigualdad de Céa y los estimadores de interpolación.
- Entender técnicas básicas de adaptatividad de malla y refinamiento.

### Requisitos previos

- Cálculo diferencial e integral en varias variables.
- Álgebra lineal (matrices, sistemas lineales).
- Conceptos básicos de ecuaciones diferenciales y métodos numéricos.

### Estructura del curso

#### Sesión 1: Fundamentos matemáticos y formulación variacional (2 h)

- Motivación del MEF: ecuaciones elípticas en ingeniería y física.
- Recordatorio de espacios funcionales:  $L^2(\Omega)$ , derivadas débiles.
- Espacios de Sobolev  $H^1(\Omega)$  y  $H_0^1(\Omega)$ .
- Interpretación energética del problema de Poisson.

- Formulación variacional: integración por partes, forma débil.
- Existencia y unicidad mediante el teorema de Lax–Milgram.
- Definición de solución débil.

### Sesión 2: Elementos finitos en 1D (2 h)

- Particiones del intervalo y nociones de malla.
- Espacios discretos y funciones de forma lineales ( $P_1$ ).
- Construcción del espacio  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ .
- Sistema discreto: matriz de rigidez y vector de cargas.
- Matrices elementales en 1D y ensamblaje global.
- Cuadratura numérica en elementos 1D.
- Ejemplo práctico: resolución de  $-u'' = f$  en  $(0, L)$ .

### Sesión 3: Elementos finitos en 2D (2 h)

- Mallas triangulares en dominios poligonales.
- Triángulo de referencia y coordenadas baricéntricas.
- Funciones de forma  $P_1$  en 2D.
- Transformaciones afines: Jacobiano, gradientes y áreas.
- Matriz elemental en triángulos: fórmula explícita.
- Cuadratura sobre triángulos: reglas básicas.
- Ensamblaje global en 2D y ejemplos numéricos.

### Sesión 4: Análisis de error, convergencia y adaptatividad (2 h)

- Proyección de Galerkin y ortogonalidad del error.
- Teorema de Céa y cuasi-óptimalidad.
- Interpolación con elementos  $P_1$ .
- Órdenes de convergencia:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(h), \quad \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^2).$$

- Refinamiento  $h$ , refinamiento  $p$  y métodos hp-FEM.
- Estimadores de error a posteriori basados en residuales.
- Ciclo adaptativo: SOLVE  $\rightarrow$  ESTIMATE  $\rightarrow$  MARK  $\rightarrow$  REFINE.
- Singularidades y fenómenos de capas.

## Metodología docente

- Exposición teórica combinada con ejemplos prácticos.
- Resolución guiada de ejercicios.
- Uso opcional de software FEM (Python/FEniCS, FreeFEM, MATLAB).

## Evaluación recomendada

- Ejercicios individuales por sesión (conceptuales y computacionales).
- Mini-proyecto final consistente en la implementación de un problema FEM en 1D o 2D.

## Bibliografía

### Básica

- Brenner, S. C., & Scott, L. R. (2008). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer.
- Braess, D. (2007). *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications*. Cambridge University Press.
- Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (2013). *The Finite Element Method*. Elsevier.

### Complementaria

- Ern, A., & Guermond, J.-L. (2004). *Theory and Practice of Finite Elements*. Springer.
- Larson, M. G., & Bengzon, F. (2013). *The Finite Element Method: Theory, Implementation and Applications*. Springer.