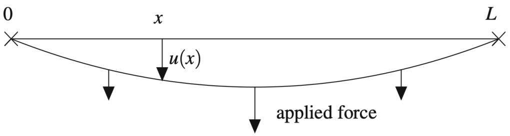
Modelización matemática y Ecuaciones en Derivadas Parciales

Francisco Chinesta y Antonio Falcó

- Estudiemos la deformación u de una cuerda elástica sujeta por los extremos situados en los puntos $x = 0$ y $x = L$



- La cuerda se deforma por efecto de las cargas. Estudiaremos el problema estático, en el que consideraremos que la cuerda se encuentra en equilibrio estático. Denotaremos por $u(x)$ la deformación vertical de la cuerda en la posición $0 \leq x \leq 1$ (esta deformación la supondremos, por hipótesis, estacionaria es decir independiente del tiempo).

- El módulo de la tensión en cada punto $(x, 0)$, que denotaremos simplemente por x, de la cuerda es igual a $T(x) = \|\mathbf{T}(x)\|$.
- Si una fuerza vertical actua sobre la cuerda

$$\mathbf{F}(x) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \int_0^x f(s)ds \end{array} \right),$$

donde $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dada por $f(x) = \rho(x)g$ donde $\rho(x)$ es la densidad de masa en x.

- Si asumimos que la cuerda se encuentra en equilibrio se cumplirá que

$$\mathbf{T}(y) - \mathbf{T}(x) + (\mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x)) = \mathbf{0} \text{ para todo } 0 \leq x < y \leq L$$

Modelización matemática y Ecuaciones en Derivadas Parciales

Francisco Chinesta y Antonio Falcó

La cuerda elástica

La viga elástica

La membrana elástica

- Describiremos la cuerda deformada como una curva parametrizada por la posición x :

$$\gamma(x) = \left(\begin{array}{c} x \\ u(x) \end{array} \right)$$

entonces

$$\gamma'(x) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ u'(x) \end{array} \right)$$

donde asumiremos que $\|\gamma'(x)\| = \sqrt{1 + u'(x)} \approx 1.$

- Describiremos entonces la tensión

$$\mathbf{T}(x) = T(x)\,\boldsymbol{\tau}(x) = T(x) \left(\begin{array}{c} 1 \\ u'(x) \end{array} \right)$$

donde $T(x) = \|T(x)\|$ y $\boldsymbol{\tau}(x)$ es un vector unitario perpendicular a $\gamma(x)$.

- Empleamos la condición de equilibrio

$$\mathbf{T}(x+\delta x) - \mathbf{T}(x) + \mathbf{F}(x+\delta x) - \mathbf{F}(x) = \mathbf{0}$$

$$T(x+\delta x)\begin{pmatrix} 1 \\ u'(x+\delta x) \end{pmatrix} - T(x)\begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \int_x^{x+\delta x} f(s)ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  que se cumple para todo $\delta x > 0$.
- Igualando componente a componente obtenemos,

$$\begin{aligned} T(x+\delta x) - T(x) &= 0 \\ T(x+\delta x)u'(x+\delta x) - T(x)u'(x) + \int_x^{x+\delta x} f(s)ds &= 0. \end{aligned}$$

- De la primera ecuación obtenemos que $T(x) = T$ es constante para todo $0 \leq x \leq L$, en consecuencia
- Dividimos la segunda ecuación por δx :

$$T\frac{u'(x+\delta x) - u'(x)}{\delta x} + \frac{1}{\delta x}\int_{x}^{x+\delta x} f(s)ds = 0$$

- Tomando límites cuando $\delta x \to 0$ obtenemos la expresión

$$T\,u''(x) + f(x) = 0,$$

es decir la ecuación:

$$-u''(x) = \frac{1}{T}f(x). \tag{1}$$

Ecuación de la cuerda

La deformación $u(x)$ de la cuerda satisface la ecuación

$$-u''(x) = \frac{1}{T} f(x) \text{ para todo } 0 < x < L \tag{2}$$

$$u(0) = u(L) = 0 \text{ (Condiciones frontera)} \tag{3}$$

Ecuación generalizada del problema de la cuerda

- La resolución del problema consiste en encontrar una función $u : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple la ecuación

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) + c(x)\,u(x) = f(x) \text{ para } x \in]0, L[\qquad (4)$$

$$u(0) = A, \quad u(L) = B, \qquad (5)$$

  donde c y f son dos funciones dadas, definidas en $[0, 1]$ ligadas a características mecánicas del material que compone la cuerda y a los esfuerzos externos.
- La ecuación (4) es una EDO definida en el interior del dominio, en nuestro caso el intervalo $[0, L]$, y la ecuación (5) representan las condiciones frontera.

Cuestiones científicas acerca de este problema

1. ¿Bajo que condiciones admite soluciones este problema?
2. ¿Bajo que condiciones admite solución única este problema?
3. ¿Bajo que condiciones la regularidad de dicha solución (continua, n-veces diferenciable, analítica) es posible?
4. ¿Cómo podemos aproximar numéricamente dicha solución en el caso de que no podamos obtener una solución cerrada?
5. ¿Cuál es la precisión del método numérico elegido?
6. ¿Cuál es la estabilidad del método numérico elegido?
7. ¿Es este modelo lo suficientemente preciso para representar a la física del proceso que pretende explicar?

- Según la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, este problema solo tiene solución si las funciones f y c son continuas y conocemos la condiciones iniciales $u(0) = A$ y $u'(0)$ que en este caso desconocemos.
- Estudiemos pues un primer ejemplo simple para ver el comportamiento de este tipo de ecuaciones. Tomemos

$$L = 1,\ A = B = 0,\ c(x) = -\pi^2,\ f(x) = 1,$$

es decir

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) - \pi^2 u(x) = 1 \text{ para } x \in]0,1[\tag{6}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{7}$$

- Consideremos soluciones de la forma siguiente:

$$u(x) = \lambda \cos(\pi x) + \mu \sin(\pi x) - \frac{1}{\pi^2},$$

siendo λ y μ dos parámetros, como

$$u'(x) = -\lambda\pi \sin(\pi x) + \mu\pi \cos(\pi x)$$
$$u''(x) = -\lambda\pi^2 \cos(\pi x) - \mu\pi^2 \sin(\pi x)$$

se comprueba fácilmente que cumple (6).

- Sien embargo si sustituimos $u(0) = u(1) = 0$ obtenemos

$$-\lambda - \frac{1}{\pi^2} = 0,$$
$$\lambda - \frac{1}{\pi^2} = 0,$$

que no se pueden verificar de manera simultánea, luego no cumple (7).

Integración por partes

Para dos funciones u y v derivables en $]0,1[$ y continuas en $[0,1]$ podemos escribir

$$\int_0^1 u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx.$$

Recordemos que

$$[u(x)v(x)]_0^1 = u(1)v(1) - u(0)v(0).$$

Si suponemos que al menos una de las dos funciones se anula en los extremos del intervalo $[0,1]$ obtendremos que

$$\int_0^1 u(x)v'(x)dx = -\int_0^1 u'(x)v(x)dx.$$

- Consideremos el problema general

$$-u''(x) - \pi^2 u(x) = f(x) \text{ para } x \in]0,1[\tag{8}$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{9}$$

- Supongamos que el problema (8)-(9) posee una solución de clase $\mathcal{C}^2(]0,L[)$.
- Multiplicamos (8) por $\sin(\pi x)$:

$$-\sin(\pi x)\, u''(x) - \pi^2 \sin(\pi x) u(x) = \sin(\pi x)\, f(x),$$

- e integramos entre 0 y 1 :

$$-\int_0^1 \sin(\pi x)\, u''(x) dx - \pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) u(x) dx = \int_0^1 \sin(\pi x)\, f(x) dx.$$

- Integramos por partes la integral

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\, u''(x) dx = [\sin(\pi x)\, u'(x)]_0^1 - \pi \int_0^1 \cos(\pi x)\, u'(x) dx$$

- y repetimos el proceso

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin(\pi x)\, u''(x) dx &= [\sin(\pi x)\, u'(x)]_0^1 - \pi \int_0^1 \cos(\pi x)\, u'(x) \\ &= [\sin(\pi x)\, u'(x)]_0^1 - \pi[\cos(\pi x)\, u(x)]_0^1 \\ &- \pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) u(x) dx \\ &= 0 - 0 - \pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) u(x) dx,\end{aligned}$$

luego se cumple que

$$-\int_0^1 \sin(\pi x)\, u''(x) dx - \pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x)\, u(x) dx = 0.$$

- De la igualdad

$$-\int_0^1 \sin(\pi x)\, u''(x)dx - \pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) u(x)dx = 0$$
$$= \int_0^1 \sin(\pi x)\, f(x)dx.$$

- Obtenemos finalmente que si existe una solución $u \in \mathcal{C}^2(]0, L[)$ para el problema (8)-(9) entonces f ha de cumplir

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\, f(x)dx = 0 \tag{10}$$

- En particular, si f cumple que $\int_0^1 \sin(\pi x)\, f(x)dx \neq 0$, como es el caso $f = 1$, entonces no existe solución en el espacio vectorial $\mathcal{C}^2(]0, L[)$ al problema (8)-(9).

- Si nos preguntamos acerca de la unicidad de soluciones, basta considerar el caso $f = 0$.
- Si consideramos
$$u(x) = \mu \sin(\pi x)$$
entonces $u(0) = u(1) = 0$ y
$$u''(x) = -\pi^2 \mu \sin(\pi x).$$
- Luego se cumple que
$$-u''(x) - \pi^2 u(x) = 0$$
para todo $\mu \in \mathbb{R}$. Existe entonces todo un sub-espacio de dimension uno de soluciones en $\mathcal{C}^2(]0, L[)$:
$$\mathrm{span}\{\sin(\pi x)\} = \{\mu \sin(\pi x) : \mu \in \mathbb{R}\}.$$
En consecuencia, no tenemos unicidad en la solución.

Consideremos (6)-(7) y estudiemos la existencia y unicidad de soluciones a este problema.

Teorema

Si $c(x)$ es una función contínua no negativa, entonces el problema (6)-(7) tiene como máximo una solución en el espacio vectorial $\mathcal{C}^2(]0, L[)$.

Demostración

Consideremos que el problema (6) tuviese dos soluciones u_1 y u_2 en $\mathcal{C}^2(]0, L[)$. Entonces, $u_1(0) = u_2(0)$, $u_1(L) = u_2(L)$ y

$$-u_1''(x) + c(x)\, u_1(x) = f(x)$$
$$-u_2''(x) + c(x)\, u_2(x) = f(x)$$

Entonces construyamos $w = u_1 - u_2$ que resuelve es siguiente problema homogéneo a valores frontera:

$$-w''(x) + c(x)\, w(x) = 0 \tag{11}$$
$$w(0) = w(L) = 0 \tag{12}$$

Multiplicando (11) por w e integrando entre 0 y L obtenemos

$$-\int_0^L w''(x)w(x)dx + \int_0^L c(x)\, w^2(x)dx = 0$$

Demostración

Integrando por partes el primer término:

$$\int_0^L w''(x)w(x)dx = [w'(x)w(x)]_0^L - \int_0^L w'(x)w'(x)dx$$
$$= 0 - \int_0^L w'(x)w'(x)dx,$$

luego

$$-\int_0^L w''(x)w(x)dx + \int_0^L c(x)\, w^2(x)dx = 0$$
$$= \int_0^L [(w'(x))^2 + c(x)\, w^2(x)]dx$$

como las dos integrales son cantidades no negativas, la única posibilidad es que $w = u_1 - u_2 = 0$, lo que nos permite concluir que si $c \geq 0$ y existe solución esta tiene que ser única.

Teorema

Si $c(x)$ es una función contínua no negativa, entonces el problema (6)-(7) tiene como una y solo una solución en el espacio vectorial $\mathcal{C}^2(]0, L[)$.

Demostración

Vamos emplear el método siguiente. Conocemos, empleando el Teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias, que el problema siguiente tiene, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, una y solo una solución en el espacio vectorial $\mathcal{C}^2(]0, L[)$:

$$-u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x) \tag{13}$$

$$u(0) = A \text{ and } u'(0) = \lambda. \tag{14}$$

Denotemos por $u_\lambda(x)$ dicha solución. Buscaremos en la función de $\mathbb{R}$ and $\mathcal{C}^2(]0, L[)$ dada por

$$\lambda \mapsto u_\lambda,$$

el valor λ^* para el que se cumpla que $u_{\lambda^*}(L) = B$. Esta función $u_{\lambda^*}(x)$, en el caso de que exista, será la solución de nuestro problema.

Demostración

Para ver si esto es cierto en primer lugar construiremos la función

$$S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad S(\lambda) := u_\lambda(L).$$

Observemos que la función S es afín, es decir cumple

$$S(\lambda) = \lambda S(1) + (1 - \lambda) S(0) \tag{15}$$

Para demostrar (15) basta observar para $S(0) = u_0$ se cumple

$$\begin{gathered} -u_0''(x) + c(x)\, u_0(x) = f(x) \\ u_0(0) = A \text{ and } u_0'(0) = 0, \end{gathered}$$

para $S(1) = u_1$ se tiene

$$\begin{gathered} -u_1''(x) + c(x)\, u_1(x) = f(x) \\ u_1(0) = A \text{ and } u_1'(0) = 1. \end{gathered}$$

Entonces, $\lambda u_1(0) + (1 - \lambda) u_0(0) = A$ y $\lambda u_1'(0) + (1 - \lambda) u_0'(0) = \lambda$.

Demostración

Además, la función $\lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_0(x)$ satisface de la ecuación diferencial ordinaria (13). En consecuencia, por la unicidad de las soluciones de dicha ecuación diferencial ordinaria se cumple que

$$u_\lambda(x) = \lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_0(x)$$

para todo $0 < x < L$. Observemos que

$$S(\lambda) = \lambda S(1) + (1-\lambda)S(0) = \lambda(S(1) - S(0)) + S(0)$$

Si $S(1) - S(0) \neq 0$ entonces S es una función biyectiva, de forma que si $(S(1) - S(0)) > 0$ es creciente y en caso contrario decreciente. En consecuencia, dado $B \in \mathbb{R}$ existirá un único valor $\lambda^* \in \mathbb{R}$ de forma que $S(\lambda^*) = u_{\lambda^*}(L) = B$.

Nota

Recordemos que la existencia y unicidad de soluciones falla en el caso particular $L = 1$ y $c = -\pi^2 < 0$.

Nota

Los problemas del tipo (6)-(7) poseen una importante propiedad conocida como *principio del máximo*. Como veremos a continuación la demostración de dicha propiedad en dimensión uno es fácil e instructiva.

Teorema (Principio del máximo)

Supongamos que $c \geq 0$ *y que el problema* (6)-(7) *tiene una solución* u *en el espacio vectorial* $\mathcal{C}^2(]0, L[)$. *Si* $f(x) \geq 0$, *para* $0 < x < L$, $A \geq 0$ *y* $B \geq 0$, *entonces* $u \geq 0$.

Demostración

Procedamos por reducción al absurdo asumiendo la existencia de una valor $0 < x_0 < L$ para el que se cumple que $u(x_0) < 0$. Como $u(0) = A \geq 0$ y $u(L) = B \geq 0$ y la función es contínua, tiene que existir un pequeño intervalo abierto (α, β) que contiene a x_0 de forma que se cumple

$$u(x) < 0 \text{ para todo } \alpha < x < \beta.$$

Podemos asumir que $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ empleando el teorema de los valores intermedios. Como la función u cumple que

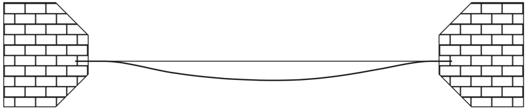
$$u''(x) = c(x)u(x) - f(x)$$

luego $u''(x) < 0$ para $\alpha < x < \beta$, es decir u es una función cóncava en $]\alpha, \beta[$. Entonces, sea λ^* tal que $x_0 = \lambda^*\beta + (1 - \lambda^*)\alpha$, tenemos

$$u(x_0) = u(\lambda^*\beta + (1 - \lambda^*)\beta) \geq \lambda^* u(\beta) + 1 - \lambda^* u(\alpha) = 0,$$

que contradice la hipótesis de partida.

Consideremos una viga sujeta entre dos muros tal y como muestra la figura adjunta.



al igual que en el ejemplo anterior $u(x)$ nos da el desplazamiento vertical en la posición x. En este caso la ecuación que gobierna el modelo es la siguiente:

$$E\,I\,u^{(4)}(x) = f(x) \text{ en }]0,L[, \qquad (16)$$

$$u(0) = u'(0) = u(L) = u'(L) = 0, \qquad (17)$$

donde f es la densidad de carga que emplea la fuerza vertical sobre la viga, $E > 0$ es un coeficiente característico del material de la viga e I es un coeficiente geométrico que depende de la forma geométrica de la sección transversal de la viga.

Al igual que en el caso precedente podemos generalizar dicho modelo de la forma siguiente:

$$u^{(4)}(x) - (a(x)u'(x))' + c(x)u(x) = f(x) \text{ en }]0, L[, \tag{18}$$

$$u(0) = u'(0) = u(L) = u'(L) = 0, \tag{19}$$

donde las funciones $a(x)$ y $c(x)$ no tienen un particular sentido mecánico.

- En este caso si $a \geq 0$ y $c \geq 0$ se obtiene unicidad de las soluciones en el espacio vectorial $\mathcal{C}^4(]0, L[)$.

Si tomamos $w = u_1 - u_2$, siendo u_1 y u_2 dos soluciones de (18)-(19) y multiplicamos por w la ecuación diferencial (18) e integramos por partes obtenemos la expresión

$$\int_0^L [(w''(x))^2 + a(x)(w'(x))^2 + c(x)w^2(x)]dx = 0.$$

En consecuencia, $w'' = 0$ lo que implica $w(x) = \alpha x + \beta$ y como se anula en 0 y L obtenemos que $w \equiv 0$

Nota

En general no existe principio del máximo para este tipo de problemas como el (18)-(19). El principio del máximo es propio de sistemas de segundo orden, y este problema es de cuarto orden. Físicamente la falta de esta propiedad indica que algunos sistemas mecánicos gobernados por ecuaciones diferenciales de cuarto orden pueden exhibir el extraño comportamiento que de si algunas de las partes de la viga sufre una deformación hacia abajo, $u \geq 0$ para x en esa zona, otra de las partes pueden tener una deformación hacia arriba, y en consecuencia $u \leq 0$ para x en esa zona afectada.

Vamos a cambiar a una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) definida sobre un dominio de dimensión dos.

- Consideremos ahora un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. *Recordemos que esto quiere decir que dado cualquier $x \in \Omega$ podemos encontrar un radio $\varepsilon > 0$ de forma que el disco de radio ε centrado en x está estrictamente contenido en Ω :*

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^2 : \|x - y\| < \varepsilon\} \subset \Omega.$$

- La clausura del conjunto $\overline{\Omega}$ está formada por todos los puntos de Ω unión los llamados puntos frontera que denotaremos por $\partial\Omega$.
- $x \in \partial\Omega$ si $x \notin \Omega$ pero existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos en Ω de forma que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. *Gráficamente se representa como el perímetro del conjunto.*

Consideremos una región rectangular sometida a una densidad de fuerza o presión externa representada mediante una función

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

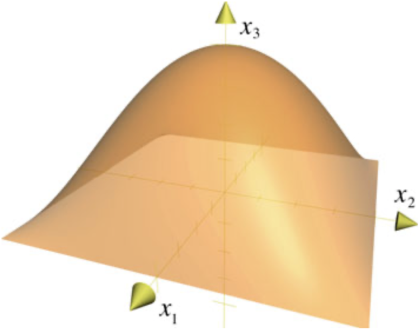
de forma que la densidad de fuerza en la región $A \subset \Omega$ viene determinada por

$$\mathbf{F}|_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_A f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \end{pmatrix}$$

Esta fuerza provoca un desplazamiento en $(x_1, x_2) \in \Omega$ perpendicular a Ω y que representaremos mediante el vector

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

tal y como podemos ver en la figura:



Asumiremos que la membrana está fijada sobre los puntos de la frontera $\partial\Omega$, introduciendo lo que se conoce como condiciones de frontera de Dirichlet:

$$u(x_1, x_2) = 0 \text{ para todo } (x_1, x_2) \in \partial\Omega, \tag{20}$$

o de forma más general:

$$u(\mathbf{x}) = 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{21}$$

El plano tangente a la superficie de la membrana en $(x_1, x_2) \in \Omega$ viene caracterizado por los vectores

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2) \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Al igual que en la cuerda elástica asumiremos que $\|\mathbf{a}_i\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u(x_1, x_2)\right)^2} \approx 1$ para $i = 1, 2$.

La anterior hipótesis implica que el gradiente de la deformación:

$$\nabla u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

tiene una norma

$$\|\nabla u(x_1, x_2)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2)\right)^2} \approx 0.$$

Con un razonamiento similar pero más complejo podemos determinar la ecuación de la membrana elástica que viene caracterizada por

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u(x_1,x_2) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) \text{ si } (x_1,x_2)\in\Omega,$$
$$u(x_1,x_2) = 0 \text{ si } (x_1,x_2)\in\partial\Omega.$$

Para simplificar se introduce el llamado *operador laplaciano*

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

y la anterior ecuación se escribe como

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \text{ si } \mathbf{x}\in\Omega, \tag{22}$$
$$u(\mathbf{x}) = 0 \text{ si } \mathbf{x}\in\partial\Omega. \tag{23}$$

y es conocida como *Ecuación de Poisson*. Si $f = 0$ entonces se le llama *Ecuación de Laplace.*

La ecuación de Poisson satisface el *pricipio del máximo:*

Teorema (Principio del máximo)

Sea Ω *un abierto acotado en* $\mathbb{R}^d$ *y* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ *una solución del problema de Poisson* (22)-(23) *con* $f \geq 0$ *en* Ω*. Entonces se cumple que* $u \geq 0$ *en* Ω*.*