Métodos numéricos en Ingeniería: Ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales (Método de los Elementos Finitos)

F. Chinesta y A. Falcó

A entregar el 21 de Enero de 2022

1. Consideremos la función de $H_0^2([0,1])$ definida por

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 3x & \text{si } 0 \leq x < 1/3, \\ 2 & \text{si } x = 1/3, \\ 2x+1 & \text{si } 1/3 < x < 2/3, \\ 2 & \text{si } x = 2/3 \\ \frac{x^2}{2} + 5x & \text{si } 2/3 < x \leq 1. \end{cases}$$

   Sea $f \in L_2([0,1])$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 3x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/3, \\ 2x+1 & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ \frac{x^2}{2} + 5x - 1 & \text{si } 2/3 < x \leq 1. \end{cases}$$

   Demuestra que u es solución débil del problema a valor frontera

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \text{ en } 0 < x < 1 \tag{0.1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{0.2}$$

2. Calcula empleando el método de los elementos finitos una aproximación $\widehat{u} \in \mathbb{R}^{d-2}$ del problema a valor frontera (0.1)-(0.2), con $d = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500$ y efectúa un análisis del error de aproximación, empleando los valores entre la solución exacta y la solución aproximada.

3. Calcula empleando un método de diferencias finitas (implícito o explícito) una aproximación $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{d-2}$ del problema a valor frontera (0.1)-(0.2), con $d = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500$ y efectúa un análisis del error de aproximación, empleando los valores entre la solución exacta y la solución aproximada.

4. Compara las soluciones aproximadas $\widehat{u}$ obtenidas en el apartado 2 y las soluciones aproximadas $\tilde{u}$ obtenidas en el apartado 3.

5. ¿Qué conclusiones podemos extraer de la comparación efectuada en el apartado anterior?