Método de los Elementos Finitos

Clase 4: Análisis de error, estabilidad y ejemplos completos

Antonio Falcó

Departamento de Matemáticas

Estructura de la clase

1. Recordatorio del problema continuo y discreto
2. Proyección de Galerkin y Desigualdad de Céa
3. Interpolación y órdenes de convergencia
4. Refinamiento de malla y adaptatividad
5. Ejemplos numéricos y discusión
6. Cierre del curso

Formulación continua

Consideramos el problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

con formulación variacional:

$$\text{Encontrar } u \in H_0^1(\Omega) : \quad a(u,v) = L(v) \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donde

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \qquad L(v) = \int_\Omega fv.$$

Formulación discreta

Sea $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ un espacio de elementos finitos (P1). Buscamos:

$$u_h \in V_h : \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \ \forall v_h \in V_h.$$

- Sistema lineal:
$$A\mathbf{U} = \mathbf{F}.$$
- El objetivo teórico: acotar $\|u - u_h\|$ en normas relevantes.

Galerkin: error ortogonal

El error $e = u - u_h$ satisface:

$$a(e, v_h) = 0 \qquad \forall v_h \in V_h.$$

Es decir, el error es ortogonal a V_h en el producto escalar inducido por $a(\cdot, \cdot)$.

- Esta propiedad es la clave del análisis de error.
- El error sólo depende de qué tan bien u se pueda aproximar dentro de V_h.

Teorema de Céa

Teorema (Desigualdad de Céa)

Si $a(\cdot,\cdot)$ es continua y coerciva en $H_0^1(\Omega)$, entonces la solución FEM verifica

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)},$$

con C constante de continuidad y α de coercividad.

- El MEF es cuasi-óptimo en la norma H^1.
- El error depende sólo de la capacidad de aproximación del espacio V_h.

Interpolador nodal en 2D

Para un triángulo K, definimos el interpolador:

$$I_h u = \sum_{i=1}^{3} u(a_i)\,\varphi_i,$$

donde a_i son los vértices.

- $I_h u \in V_h$ es la mejor aproximación nodal.
- El error de interpolación determina el error global.

Estimaciones de interpolación

Si $u \in H^2(\Omega)$, entonces en cada elemento K:

$$\|u - I_h u\|_{L^2(K)} \leq C h_K^2 \|u\|_{H^2(K)},$$

$$\|u - I_h u\|_{H^1(K)} \leq C h_K \|u\|_{H^2(K)}.$$

Consecuencia global:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C h \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

- Orden de convergencia en H^1: $\mathcal{O}(h)$.
- Orden de convergencia en L^2: $\mathcal{O}(h^2)$.

Estimación en la norma L^2

Error dualidad (técnica de Aubin–Nitsche):

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^2\|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

- Justifica por qué el error en L^2 converge más rápido.
- Necesita regularidad adicional del problema dual.

Refinamiento h y p

Existen dos estrategias principales de mejora:

- **Refinamiento h**: reducir tamaño de elementos.

$$h \to h/2, \quad \text{(malla más fina)}.$$

- **Refinamiento p**: usar polinomios de mayor grado.

$$P_1 \to P_2 \to P_3.$$

- **hp-FEM**: combinación de ambas técnicas (muy eficiente).

Estimadores de error a posteriori

Para guiar el refinamiento adaptativo, se emplean indicadores:

$$\eta_K^2 = h_K^2 \|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \subset \partial K} h_e \|[\nabla u_h \cdot n_e]\|_{L^2(e)}^2.$$

- Basados en residuales internos y saltos de gradiente.
- Permiten refinar sólo donde el error es mayor.
- Garantizan eficiencia y fiabilidad:

$$C_1 \eta \leq \|u - u_h\|_{H^1} \leq C_2 \eta.$$

Algoritmo adaptativo típico

Ciclo adaptativo:

1. Resolver el problema en la malla actual.
2. Estimar el error con η_K.
3. Marcar los elementos a refinar.
4. Refinar la malla.
5. Repetir.

Este proceso concentra puntos de malla en regiones de capas, singularidades o zonas con grandes gradientes.

Ejemplo 1: Poisson en el cuadrado

$$-\Delta u = 1 \text{ en } (0,1)^2, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

- Malla uniforme triangular.
- Convergencia observada:
$$\|u - u_h\|_{H^1} \approx Ch, \quad \|u - u_h\|_{L^2} \approx Ch^2.$$
- Confirmación empírica de la teoría.

Ejemplo 2: Singularidad en un dominio con ángulo no convexo

Problema clásico: L-shape domain.

$$\Omega = (-1,1)^2 \setminus [0,1] \times [-1,0].$$

- La solución tiene singularidad en el rincón con ángulo de 270°.
- Convergencia deteriorada con mallas uniformes.
- Adaptatividad recupera los órdenes óptimos refinando localmente.

Limitaciones del MEF clásico

- Problemas con saltos de coeficientes requieren técnicas específicas (FEM discontínuo, DG).
- Problemas con geometría compleja $\rightarrow$ isogeometric analysis.
- FEM estándar puede fallar en:
  - Flujos dominados por advección.
  - EDP hiperbólicas y transientes rápidos.
- Métodos estabilizados (SUPG, GLS) pueden ser necesarios.

Resumen global del curso

Hemos visto:

1. Formulación variacional y espacios de Sobolev.
2. Construcción de elementos finitos en 1D.
3. Elementos triangulares, baricéntricos y ensamblaje en 2D.
4. Análisis de error, convergencia y adaptatividad.

Conclusión:

- El MEF es robusto, general y matemáticamente sólido.
- Se aplica a problemas lineales y no lineales, estáticos y dinámicos.
- Constituye la base de la simulación computacional moderna.

¡Gracias por asistir!

¿Preguntas finales?