El método de los elementos finitos

Francisco Chinesta y Antonio Falcó

Objetivo metodológico

Aproximar las soluciones de problemas a valores frontera:

$$-u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x) \tag{1}$$

$$u(0) = A \text{ and } u(L) = B. \tag{2}$$

- Las soluciones de (1) son funciones $u : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$,
- Podemos escribir (1) de la forma siguiente

$$-\frac{d^2}{dx^2}\,u(x) + c(x)\,u(x) = f(x) \tag{3}$$

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\right)\,u(x) = f(x). \tag{4}$$

- Consideramos una partición del intervalo

$$0 = x_0 \leq x_1 = L/d \leq \cdots \leq x_i = i(L/N) \leq \cdots \leq x_d = L.$$

- Construimos las funciones siguientes:

$$w_0(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{array} \right\}$$

$$w_1(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ \\ \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2 \\ \\ 0 & \text{en el resto} \end{array} \right\}$$

$$w_i(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \\ 0 & \text{en el resto} \end{array} \right\}$$

- De forma general:

$$w_0(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{array} \right\}$$

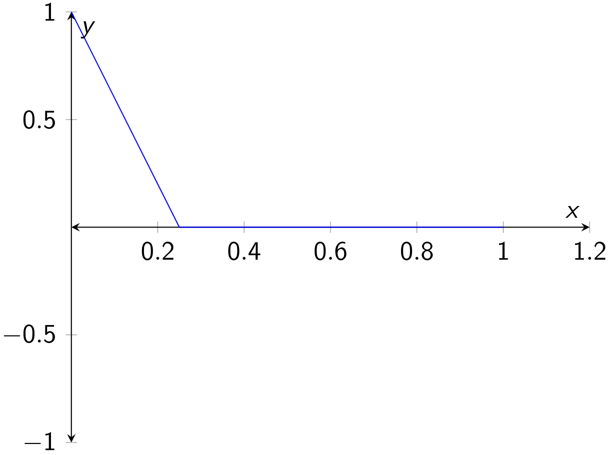
$$w_i(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \\ 0 & \text{en el resto} \end{array} \right\}$$

para $1 \leq i \leq d - 1$ y

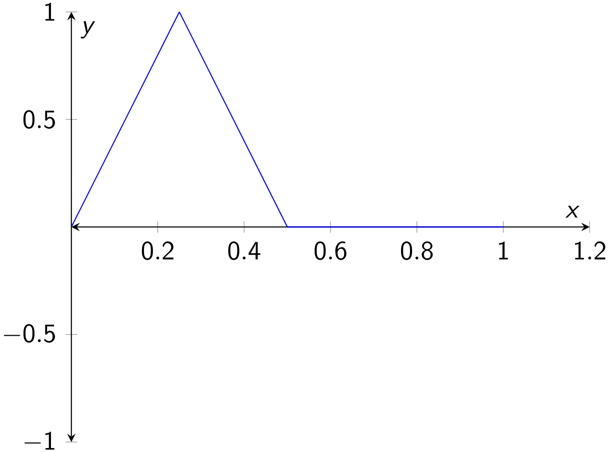
$$w_d(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{x - x_{d-1}}{x_d - x_{d-1}} & \text{si } x_{d-1} \leq x \leq x_d \\ 0 & \text{en el resto} \end{array} \right\}$$

Construimos un conjunto de $d + 1$-funciones linealmente independientes que coinciden con la imagen de la aplicación lineal $\mathcal{I}_{d+1} : \mathbb{R}^{d+1} \longrightarrow H_0^1([0, L])$, $\mathcal{I}_{d+1}(\mathbf{e}_i) = w_{i-1}$ para $1 \leq i \leq d + 1$.

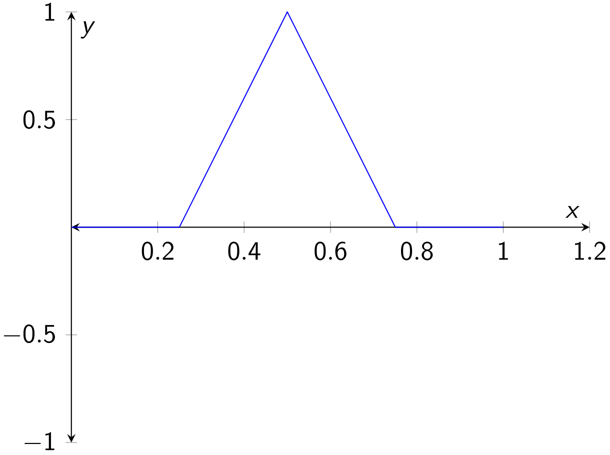
Ejemplo de w_0 con $d = 4$



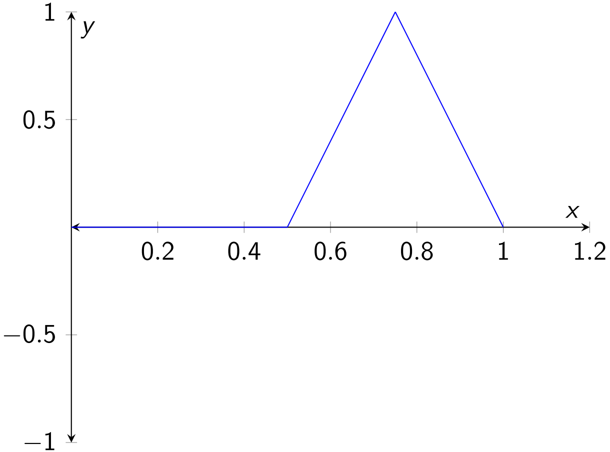
Ejemplo de w_1 con $d = 4$



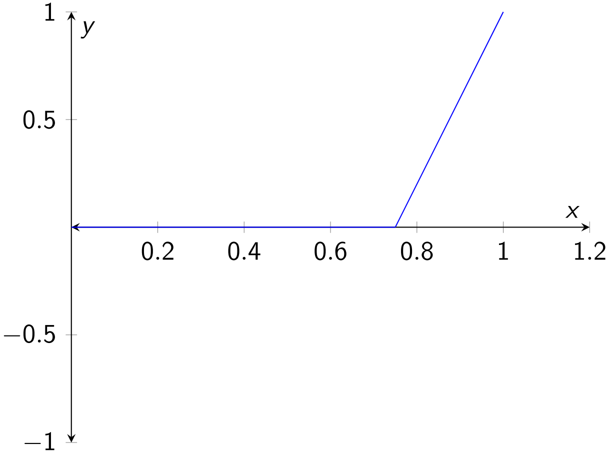
Ejemplo de w_2 con $d = 4$



Ejemplo de w_3 con $d = 4$



Ejemplo de w_4 con $d = 4$



Estrategia

- Conocemos que $\{w_0, w_1, \ldots, w_d\}$ es una base de un subspacio lineal $W \subset H^1([0, L])$ de dimensión $d + 1$. Entonces,

$$H_0^1([0, L]) = W \oplus U,$$

es decir la solución u del problema (1)–(2) se puede escribir de forma única como

$$u = \widehat{u} + (u - \widehat{u})$$

donde $\widehat{u} \in W$ y $(u - \widehat{u}) \in U$. Siendo $\widehat{u}$ y $(u - \widehat{u})$ dos funciones linealmente independientes. Además, conocemos que

$$\widehat{u} = \sum_{i=0}^{d} \widehat{u}_i \, w_i$$

se escribirá como una combinación lineal de elementos de la base de W (base de elementos finitos).

Estrategia

- Además, como $w_k(x_k) = 1$ para $0 \leq k \leq d$ se tiene que

$$\widehat{u}(x_k) = \sum_{i=0}^{d} \widehat{u}_i \, w_i(x_k) = \widehat{u}_k.$$

Como $\widehat{u}$ es una función que tiene que interpolar los puntos de u sobre el conjunto de nodos $\{x_0, x_1, \ldots, x_d\}$ asumiremos que

$$\widehat{u}_k \approx u(x_k) \text{ para } 0 \leq k \leq d.$$

En consecuencia, para construir la función interpoladora necesitamos obtener los valores del vector

$$\widehat{\mathbf{u}} := (\widehat{u}_0, \widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_d) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Estrategia

- Conocemos que $u(0) = u(x_0) = A$ y que $u(L) = u(x_d) = B$, en consecuencia tenemos que

$$\widehat{\mathbf{u}} := (A, \widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_{d-1}, B) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

- Con lo que el objetivo se reduce a encontrar un vector, que también denotaremos del mismo modo,

$$\widehat{\mathbf{u}} := (\widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1},$$

  y que corresponde a los valores de u sobre los nodos "interiores", es decir, los nodos que se encuentran en el interior del dominio $[0, L]$, que en este caso corresponde al intervalo abierto $(0, L)$.

- ¿Cómo podemos encontrar $\widehat{u} \in W \subset H^1([0,L])$ o lo que es equivalente encontrar el vector $\widehat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{d-1}$?
- Consideremos que podemos escribir

$$u = \widehat{u} + (u - \widehat{u}) = \sum_{i=0}^{d} \widehat{u}_i \, w_i + (u - \widehat{u}),$$

de forma que, el residuo $r := (u - \widehat{u})$, es ortogonal a la aproximación, esto es,

$$\langle w_i, (u - \widehat{u}) \rangle = 0 \text{ para } 0 \leq i \leq d.$$

- Tenemos ahora dos elecciones para el producto escalar,

$$\langle u, v \rangle_{L^2([0,L])} = \int_0^L u(x)v(x)dx,$$

y

$$\langle u, v \rangle_{H^1([0,L])} = \langle u, v \rangle_{L^2([0,L])} + \langle u', v' \rangle_{L^2([0,L])},$$

- Observemos que

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_{H^1([0,L])} &= \langle u, v\rangle_{L^2([0,L])} + \langle u', v'\rangle_{L^2([0,L])}\\ &= \langle u, v\rangle_{L^2([0,L])} + \int_0^L u'(x)v'(x)dx\\ &= \langle u, v\rangle_{L^2([0,L])} + [u'(x)v(x)]_0^L - \int_0^L u''(x)v(x)dx\end{aligned}$$

si consideramos que $v \in \mathcal{C}_{00}^{\infty}([0, L])$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_{H^1([0,L])} &= \langle u, v\rangle_{L^2([0,L])} - \int_0^L u''(x)v(x)dx\\ &= \langle u, v\rangle_{L^2([0,L])} - \langle u'', v\rangle_{L^2([0,L])}\\ &= \langle u - u'', v\rangle_{L^2([0,L])}\\ &= \langle -u'' + u, v\rangle_{L^2([0,L])}\end{aligned}$$

para $v \in \mathcal{C}_{00}^{\infty}([0, L])$ y la derivada u'' está considerada en el sentido de las distribuciones (o derivada generalizada).

- Si consideramos que la solución aproximada que buscamos en $H^k([0, L])$ cumple que $u'' = 0$ en el sentido de las distribuciones entonces $u' = \mathit{constante}$ salvo en un conjunto numerable de puntos del intervalo $[0, L]$.
- En consecuencia, si u es una función lineal a trozos, $u' = \mathit{constante}$ y $u'' = 0$ (en el sentido de las distribuciones) y por tanto

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{H^1([0,L])} &= \langle -u'' + u, v \rangle_{L^2([0,L])} \\ &= \langle u, v \rangle_{L^2([0,L])}, \end{aligned}$$

se cumplirá para todo $v \in \mathcal{C}_{00}^{\infty}([0, L])$.

- Consideremos que u cumple (1)-(2), entonces

$$\langle -u'' + c\,u, v \rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, v \rangle_{L^2([0,L])}\,, \tag{5}$$

se cumple para toda función $v \in L^2([0,L])$.

- Podemos escribir la anterior expresión como

$$\langle -u'', v \rangle_{L^2([0,L])} + \langle c\,u, v \rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, v \rangle_{L^2([0,L])}\,,$$

y empleando integración por partes obtenemos que

$$\langle -u'', v \rangle_{L^2([0,L])} = \langle u', v' \rangle_{L^2([0,L])}$$

se cumple para todo $v \in H_0^1([0,L])$.

- Podemos concluir que se cumplirá

$$\langle u', v' \rangle_{L^2([0,L])} + \langle c\,u, v \rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, v \rangle_{L^2([0,L])}\,,$$

para todo $v \in H_0^1([0,L])$.

- Consideremos, que $u = v$ en (5), entonces

$$\langle -u'', u\rangle_{L^2([0,L])} + \langle c\, u, u\rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, u\rangle_{L^2([0,L])},$$

- Si $c(x) \geq 0$ entonces se cumple que

$$\begin{aligned}\langle c\, u, u\rangle_{L^2([0,L])} &= \int_0^L c(x)u(x)^2\, dx \\ &= \int_0^L \sqrt{c(x)}u(x)\, \sqrt{c(x)}u(x)\, dx \\ &= \left\langle \sqrt{c}\, u, \sqrt{c}\, u\right\rangle_{L^2([0,L])} = \|\sqrt{c}\, u\|^2_{L^2([0,L])}\end{aligned}$$

- Consideremos, que $u = v$ en (5), entonces

$$\langle -u'', u \rangle_{L^2([0,L])} + \langle c\, u, u \rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, u \rangle_{L^2([0,L])}, \qquad (6)$$

- Por otro lado, empleando integración por partes y que $u \in H_0^1([0,L])$ obtenemos:

$$\langle -u'', u \rangle_{L^2([0,L])} = \langle u', u' \rangle_{L^2([0,L])} = \|u'\|^2_{L^2[0,L]}$$

- En consecuencia, si $c(x) \geq 0$ entonces podemos escribir (6) como

$$\|u'\|^2_{L^2[0,L]} + \|\sqrt{c}\, u\|^2_{L^2([0,L])} - \langle f, u \rangle_{L^2([0,L])} = 0. \qquad (7)$$

Definición

Si $c(x) \geq 0$ en una función de forma que $\sqrt{c(x)} \in L^2([0, L])$, definamos sobre $H^1([0, L])$ la norma

$$\|u\|^2_{H^1_c([0,L])} := \|u'\|^2_{L^2[0,L]} + \|\sqrt{c}\, u\|^2_{L^2([0,L])}$$

que deviene del producto escalar

$$\langle u, v\rangle_{H^1_c([0,L])} = \langle u', v'\rangle_{L^2([0,L])} + \langle \sqrt{c}\, u, \sqrt{c}\, v\rangle_{L^2([0,L])}$$

La derivada de la norma al cuadrado

Si consideramos la función

$$\mathcal{E} : H^1([0,L]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_c([0,L])} = \frac{1}{2}\langle u, u\rangle_{H^1_c([0,L])},$$

la derivada (en el sentido de Frèchet) de $\mathcal{E}$ es una función lineal

$$\mathcal{E}'(u) = \langle u, \cdot\rangle_{H^1_c([0,L])} : H^1([0,L]) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

, de forma que

$$\mathcal{E}'(u)v = \langle u, v\rangle_{H^1_c([0,L])}$$

se cumple para todo $v \in H^1([0,L])$.

La derivada de la norma al cuadrado

La derivada segunda, de forma intuitiva, es una forma cuadrática. Recordemos que

$$\mathcal{E}'(u) : H^1([0, L]) \longrightarrow \mathbb{R},$$

entonces

$$\mathcal{E}''(u) : H^1([0, L]) \times H^1([0, L]) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

En nuestro caso

$$\mathcal{E}''(u)(v, w) = \langle v, w \rangle_{H^1_c([0,L])},$$

es una forma cuadrática,

$$\mathcal{E}''(u)(v, v) = \langle v, v \rangle_{H^1_c([0,L])} = \|v\|^2_{H^1_c([0,L])} \geq 0,$$

definida positiva.

Si consideramos la función

$$J : H_0^1([0, L]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_c^1([0,L])} - \langle f, u \rangle_{L^2([0,L])} = \mathcal{E}(u) - \langle f, u \rangle_{L^2([0,L])} .$$

es derivable, su primera derivada es

$$J'(u) = \mathcal{E}'(u) - \langle f, \cdot \rangle_{L^2([0,L])}$$

y su segunda derivada

$$J''(u) = \mathcal{E}''(u)$$

es una forma cuadrática definida positiva, lo que implica que la función J es convexa.

Teorema (Existencia y unicidad de soluciones débiles)

Sean $c \in L^2([0,L])$ de forma que $c(x) \geq 0$. Entonces para cada $f \in L^2([0,L])$ existe una única función $u^\star \in H_0^1([0,L])$ se cumple que

$$J(u^\star) = \min_{u \in H_0^1([0,L])} J(u).$$

Además, si u^* es la solución de (1) con condiciones frontera de Dirichlet, entonces $u^* = u^\star$, y donde se cumple la condición de optimalidad primer orden siguiente:

$$J'(u^\star)v = 0, \tag{8}$$

para todo v en un conjunto denso de $H_0^1([0,L])$, es decir,

$$\langle (u^\star)', v' \rangle_{L^2([0,L])} + \langle c\, u^\star, v \rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, v \rangle_{L^2([0,L])}, \tag{9}$$

para todo v en un conjunto denso de $H_0^1([0,L])$.

Definición (Solución débil)

Diremos que una función $u \in H_0^1([0, L])$ es la solución débil de (1) con condiciones frontera de Dirichlet, es decir $u(0) = u(L) = 0$ si cumple que

$$\langle u', v' \rangle_{L^2([0,L])} + \langle c\, u, v \rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, v \rangle_{L^2([0,L])}, \qquad (10)$$

para toda función v en un conjunto denso de $H_0^1([0, L])$ (por ejemplo una base).

El Teorema 1 nos dice que una solución débil es la solución única de un problema de optimización convexo, por ese motivo decimos que es una *solución variacional*.

Consideremos el subespacio

$$U_{d-1} := \mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_{d-1}\} \subset H_0^1([0, L]),$$

donde omitimos las funciones w_0 y w_d que están en $H^1([0, L])$ pero no en $H_0^1([0, L])$. Conocemos que $\dim U_{d-1} = d - 1$, y en consecuencia

$$H_0^1([0, L]) = U_{d-1} \oplus U_{d-1}^{\perp},$$

donde

$$U_{d-1}^{\perp} := \left\{ z \in H_0^1([0, L]) : \langle z, w_i \rangle_{H_0^1([0,1])} = 0,\ 1 \leq i \leq d - 1 \right\}.$$

Una solución débil u se escribe entonces como

$$u = \sum_{i=1}^{d-1} \widehat{u}_i\, w_i + r \text{ de forma que } \left\langle \sum_{i=1}^{d-1} \widehat{u}_i\, w_i, r \right\rangle_{H_0^1([0,1])} = 0.$$

Escribamos

$$\widehat{u} := \sum_{i=1}^{d-1} \widehat{u}_i \, w_i.$$

Entonces, $u = \widehat{u} + r$ y se cumplen las siguientes igualdades:

$$\|u\|^2_{H_0^1([0,1])} = \|\widehat{u}\|^2_{H_0^1([0,1])} + \|r\|^2_{H_0^1([0,1])}, \tag{11}$$

y

$$\langle f, u \rangle_{H_0^1([0,1])} = \langle f, \widehat{u} \rangle_{H_0^1([0,1])} + \langle f, r \rangle_{H_0^1([0,1])}, \tag{12}$$

es decir,

$$J(u) = J(\widehat{u}) + J(r).$$

En consecuencia, $J(\widehat{u})$ es una aproximación de $J(u)$ con un error $J(r)$. Vamos pues a resolver, el problema variacional discreto siguiente:

$$\min_{(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \ldots, \widehat{u}_{d-1})} J\left(\sum_{i=1}^{d-1} \widehat{u}_i \, w_i \right). \tag{13}$$

Empleando el Teorema 1, resolver (13) es equivalente a encontrar $\widehat{u} = (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \ldots, \widehat{u}_{d-1})$ de forma que se cumpla

$$\left\langle \sum_{i=1}^{d-1} \widehat{u}_i \, w_i', w_k' \right\rangle_{L^2([0,L])} + \left\langle c \sum_{i=1}^{d-1} \widehat{u}_i \, w_i, w_k \right\rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, w_k \rangle_{L^2([0,L])} \tag{14}$$

para $1 \leq k \leq d-1$. La expresión (14) es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{d-1} \widehat{u}_i \, \langle w_i', w_k' \rangle_{L^2([0,L])} + \sum_{i=1}^{d-1} \widehat{u}_i \, \langle c\, w_i, w_k \rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, w_k \rangle_{L^2([0,L])} \,. \tag{15}$$

- Observemos que podemos calcular explícitamente

$$M_{k,i} := \langle w_i', w_k' \rangle_{L^2([0,L])} = \int_0^1 w_i'(x) w_k'(x)\, dx,$$

$$L_{k,i} := \langle c\, w_i, w_k \rangle_{L^2([0,L])} = \int_0^1 c(x)\, w_i(x) w_k(x)\, dx,$$

para $1 \leq i, k \leq d-1$, lo que nos proporciona dos matrices $M, L \in \mathbb{R}^{(d-1)\times(d-1)}$. Además, obtenemos un vector $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ de componentes:

$$f_i := \langle f, w_k \rangle_{L^2([0,L])} = \int_0^1 f(x)\, w_k(x) dx,$$

para $1 \leq i \leq d$.

Podemos concluir entonces que (15) es equivalente a resolver, el sistema lineal:

$$M\,\widehat{u} + L\,\widehat{u} = \mathbf{f},$$

es decir,

$$(M + L)\,\widehat{u} = \mathbf{f}. \tag{16}$$

Vamos a calcular, fijado el índice $i \geq 1$:

$$\langle w_i', w_k' \rangle_{L^2([0,L])} = \int_0^1 w_i'(x) w_k'(x)\, dx.$$

En primer lugar observemos que

$$]x_{i-1}, x_{i+1}[\cap]x_{k-1}, x_{k+1}[= \emptyset$$

si y solo si se cumple que $i+1 \leq k-1$ o $k+1 \leq i-1$, es decir $i+2 \leq k$ o $k \leq i-2$. Como w_i toma valores cero fuera del intervalo $]x_{i-1}, x_{i+1}[$ y w_k fuera del intervalo $]x_{k-1}, x_{k+1}[$ entones,

$$M_{k,i} = \langle w_i', w_k' \rangle_{L^2([0,L])} = 0$$

siempre que $i+2 \leq k$ o $k \leq i-2$. En consecuencia, hay que evaluar

$$M_{k,i} = \langle w_i', w_k' \rangle_{L^2([0,L])}$$

solo cuando $i-1 \leq k \leq i+1$. Lo mismo ocurre con las entradas $L_{k,i}$ de la matriz L.

Se puede comprobar que

$$w_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i-1} \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Entonces se obtiene,

$$M_{i,i} = \frac{1}{(x_i - x_{i-1})} + \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)},$$

$$M_{i-1,i} = -\frac{1}{(x_i - x_{i-1})} \text{ y } M_{i,i+1} = -\frac{1}{(x_{i+1} - x_i)}$$

En el caso particular, $h := x_i - x_{i-1}$ constante, obtenemos

$$M_{i-1,i} = -\frac{1}{h},\ M_{i,i} = \frac{2}{h},\ M_{i,i+1} = -\frac{1}{h}.$$

y el resto de componentes son igual a cero.

Si tomamos $c(x) = c > 0$ constante, entonces

$$L_{i,i} = c \, \langle w_i, w_i \rangle_{L^2([0,L])} = c \, \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{3},$$

$$L_{i-1,i} = \frac{c}{(x_i - x_{i-1})^2} \left(-\frac{x_i^3 - x_{i-1}^3}{3} + (x_i - x_{i-1}) \frac{x_i^2 + x_{i-1}^2}{2} \right),$$

y

$$L_{i,i+1} = \frac{c}{(x_{i+1} - x_i)^2} \left(-\frac{x_{i+1}^3 - x_i^3}{3} + (x_{i+1} - x_i) \frac{x_{i+1}^2 + x_i^2}{2} \right).$$

En el caso particular $h = x_i - x_{i-1}$ constante, obtenemos,

$$L_{i,i} = \frac{2h}{3}$$

y

$$L_{i-1,i} = L_{i,i+1} = \frac{h}{6}.$$

Podemos concluir, que para este caso que la matriz

$$(M+L) = \begin{pmatrix} \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} \end{pmatrix}$$

es una matriz triadiagonal.

Consideremos el problema

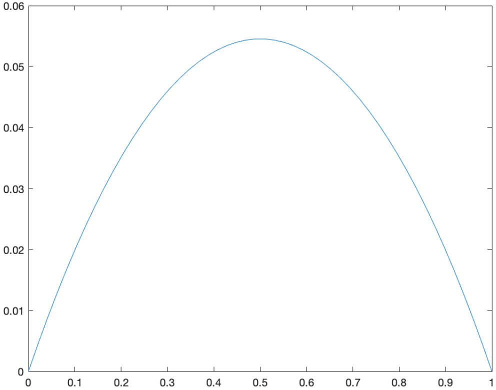
$$
\begin{aligned}
-u''(x) + u(x) &= 1 \text{ para } x \in]0,1[\\
u(0) = 0 \text{ and } u(1) &= 0.
\end{aligned}
$$

En este caso $f = 1$ y tenemos que calcular

$$
\langle 1, w_k \rangle_{L^2([0,L])} = \int_0^1 w_k(x)dx = \frac{h}{2}
$$

Código Matlab

```
clear all
d =50;
h = 1/d;
Adiag = (2/h+(2*h)/3)*ones(d-2,1);
Anodiag = (h/6-1/h)*ones(d-3,1);
A = diag(Anodiag,-1)+diag(Anodiag,1)+diag(Adiag,0);
f= (h/2) *ones(d-2,1);
sol = A\f;
y = [0;sol;0]
x = linspace(0,1,d);
plot(x,y)
```


0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Consideremos el problema

$$-u''(x) + u(x) = 3 - 2x \text{ para } x \in]0,1[$$
$$u(0) = 0 \text{ and } u(1) = 0.$$

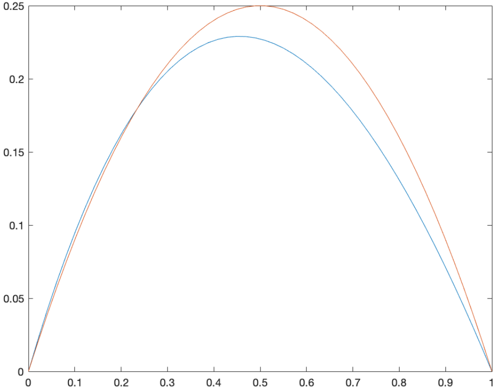
Podemos comprobar que la $u(x) = x - x^2$ es una solución de la ecuación. En este caso $f(x) = 2 - 3x$ y tenemos que calcular

$$\begin{aligned}
\langle 3-2x, w_i \rangle_{L^2([0,L])} &= \int_0^1 (3-2x) w_k(x) dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (3-2x) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} dx \\
&+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (3-2x) \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} dx \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} (3-2x)(x - x_{i-1}) dx \right. \\
&\left. + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (3-2x)(x_{i+1} - x) dx \right)
\end{aligned}$$

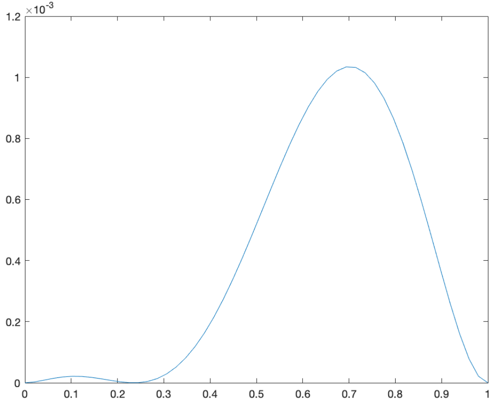
El método de los elementos finitos
Francisco Chinesta y Antonio Falcó
Motivación
El método de los elementos finitos

Código Matlab

```
g1 = @(a,b) (3/2)*(b^2-a^2)-(2/3)*(b^3-a^3)
g2 = @(a,b) 3*(b-a)-(b^2-a^2)
u = @(x) x-x^2
x = linspace(0,1,d);
for i=2:(d-1)
        sum1 = -x(i-1)*g2(x(i-1),x(i))+g1(x(i-1),x(i));
        sum2 = x(i+1)*g2(x(i),x(i+1))-g1(x(i),x(i+1));
        f(i-1,1) =(1/h)*(sum1+sum2);
        uhat(i-1,1) = u(x(i));
end;
sol = A\f; y = [0;sol;0]; yy = [0;uhat;0];
plot(x,y); hold on; plot(x,yy);
```


0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Estudio del error de aproximación



Error calculado como $\texttt{error}(i) = (u(x_i) - \widehat{u}_i)^2$. El error cuadrático medio: $MCE = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \texttt{error}(i) = 3.8 \times 10^{-4}$.