

El Método de los Elementos Finitos

Antonio Falcó

Métodos Numéricos EDO-EDP

1 Introducción

- Un problema modelo: La cuerda elástica
- Aspectos teóricos de la solución al problema de la cuerda

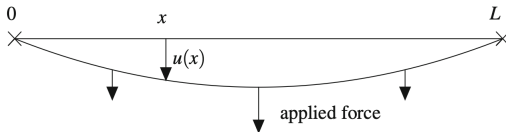
2 Teoría básica de espacios de Hilbert de funciones

- Motivación
- Las funciones de cuadrado integrable
- Las funciones simples
- Funciones de clase \mathcal{C}^∞ con soporte compacto
- La derivada débil y el producto escalar
- Las funciones derivables en sentido débil

3 El método de los elementos finitos

- Motivación
- La aproximación variacional del problema

- Estudiemos la deformación u de una cuerda elástica sujeta por los extremos situados en los puntos $x = 0$ y $x = L$



- La cuerda se deforma por efecto de las cargas. Estudiaremos el problema estático, en el que consideraremos que la cuerda se encuentra en equilibrio estático. Denotaremos por $u(x)$ la deformación vertical de la cuerda en la posición $0 \leq x \leq 1$ (esta deformación la supondremos, por hipótesis, estacionaria es decir independiente del tiempo).

- El módulo de la tensión en cada punto $(x, 0)$, que denotaremos simplemente por x , de la cuerda es igual a $T(x) = \|\mathbf{T}(x)\|$.
- Si una fuerza vertical actúa sobre la cuerda

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^x f(s) ds \end{pmatrix},$$

donde $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por $f(x) = \rho(x)g$ donde $\rho(x)$ es la densidad de masa en x .

- Si asumimos que la cuerda se encuentra en equilibrio se cumplirá que $\mathbf{T}(y) + \mathbf{F}(y) = \mathbf{T}(x) + \mathbf{F}(x)$, es decir:

$$\mathbf{T}(y) - \mathbf{T}(x) + (\mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x)) = \mathbf{0} \text{ para todo } 0 \leq x < y \leq L$$

- Describiremos la cuerda deformada como una curva parametrizada por la posición x :

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix}$$

entonces

$$\gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \end{pmatrix}$$

- La longitud de la curva es

$$\int_0^L \|\gamma'(x)\| dx = \int_0^L \sqrt{1 + u'(x)^2} dx.$$

Si asumimos que $\|\gamma'(x)\| = \sqrt{1 + u'(x)^2} \approx 1$, entonces la longitud de la curva es aproximadamente L coincidiendo con la longitud de la cuerda.

- Describiremos entonces la tensión

$$\mathbf{T}(x) = T(x) \boldsymbol{\tau}(x) = T(x) \begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \end{pmatrix}$$

donde $T(x) = \|\mathbf{T}(x)\|$ es el módulo de la tensión y

$$\boldsymbol{\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ u'(x) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ u'(x) \end{bmatrix}$$

es un vector unitario tangente a la curva en el punto $(x, u(x))$.

- Empleamos la condición de equilibrio en forma variacional. Es decir para todo $\delta x > 0$ se ha de cumplir que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(x + \delta x) - \mathbf{T}(x) + \mathbf{F}(x + \delta x) - \mathbf{F}(x) &= \mathbf{0} \\ T(x + \delta x) \begin{pmatrix} 1 \\ u'(x + \delta x) \end{pmatrix} - T(x) \begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ \int_x^{x+\delta x} f(s) ds \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Igualando componente a componente obtenemos, las ecuaciones:

$$\begin{aligned} T(x + \delta x) - T(x) &= 0 \\ T(x + \delta x)u'(x + \delta x) - T(x)u'(x) + \int_x^{x+\delta x} f(s) ds &= 0. \end{aligned}$$

- De la primera ecuación concluimos que el módulo de la tensión $T(x) = T$ es constante para todo $0 \leq x \leq L$.
- Si dividimos la segunda ecuación por δx :

$$T \frac{u'(x + \delta x) - u'(x)}{\delta x} + \frac{1}{\delta x} \int_x^{x+\delta x} f(s) ds = 0,$$

- y tomamos límites cuando $\delta x \rightarrow 0$ obtenemos la expresión

$$T u''(x) + f(x) = 0,$$

es decir la ecuación:

$$-u''(x) = \frac{1}{T} f(x). \tag{1}$$

Ecuación de la cuerda

La deformación $u(x)$ de la cuerda satisface la ecuación diferencial de segundo orden a valores frontera:

$$-u''(x) = \frac{1}{T} f(x) \text{ para todo } 0 < x < L \quad (2)$$

$$u(0) = u(L) = 0 \text{ (Condiciones frontera)} \quad (3)$$

Ecuación generalizada del problema de la cuerda

- La resolución del problema consiste en encontrar una función $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple la ecuación

$$-\frac{d^2}{dx^2} u(x) + c(x) u(x) = f(x) \text{ para } x \in]0, L[\quad (4)$$

$$u(0) = A, \quad u(L) = B, \quad (5)$$

donde c y f son dos funciones dadas, definidas en $[0, 1]$ ligadas a características mecánicas del material que compone la cuerda y a los esfuerzos externos.

- La ecuación (4) es una EDO definida en el interior del dominio, en nuestro caso el intervalo $[0, L]$, y la ecuación (5) representan las condiciones frontera.

Cuestiones científicas acerca de este problema

- 1 ¿Bajo que condiciones admite soluciones este problema?
- 2 ¿Bajo que condiciones admite solución única este problema?
- 3 ¿Bajo que condiciones la regularidad de dicha solución (continua, n -veces diferenciable, analítica) es posible?
- 4 ¿Cómo podemos aproximar numéricamente dicha solución en el caso de que no podamos obtener una solución cerrada?
- 5 ¿Cuál es la precisión del método numérico elegido?
- 6 ¿Cuál es la estabilidad del método numérico elegido?
- 7 ¿Es este modelo lo suficientemente preciso para representar a la física del proceso que pretende explicar?

- Según la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, este problema solo tiene solución si las funciones f y c son continuas y conocemos la condiciones iniciales $u(0) = A$ y $u'(0)$ que en este caso desconocemos.
- Estudiemos pues un primer ejemplo simple para ver el comportamiento de este tipo de ecuaciones. Tomemos

$$L = 1, A = B = 0, c(x) = -\pi^2, f(x) = 1,$$

es decir

$$-\frac{d^2}{dx^2} u(x) - \pi^2 u(x) = 1 \text{ para } x \in]0, 1[\quad (6)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (7)$$

- Consideremos soluciones de la forma siguiente:

$$u(x) = \lambda \cos(\pi x) + \mu \sin(\pi x) - \frac{1}{\pi^2},$$

siendo λ y μ dos parámetros, como

$$\begin{aligned}u'(x) &= -\lambda\pi \sin(\pi x) + \mu\pi \cos(\pi x) \\u''(x) &= -\lambda\pi^2 \cos(\pi x) - \mu\pi^2 \sin(\pi x)\end{aligned}$$

se comprueba fácilmente que cumple (6).

- Sin embargo si sustituimos $u(0) = u(1) = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}-\lambda - \frac{1}{\pi^2} &= 0, \\ \lambda - \frac{1}{\pi^2} &= 0,\end{aligned}$$

que no se pueden verificar de manera simultánea, luego no cumple (7).

Recordatorio: Integración por partes

Para dos funciones u y v derivables en $]0, 1[$ y continuas en $[0, 1]$ podemos escribir

$$\int_0^1 u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx.$$

Recordemos que

$$[u(x)v(x)]_0^1 = u(1)v(1) - u(0)v(0).$$

Si suponemos que al menos una de las dos funciones se anula en los extremos del intervalo $[0, 1]$ obtendremos que

$$\int_0^1 u(x)v'(x)dx = - \int_0^1 u'(x)v(x)dx.$$

- Consideremos el problema general

$$-u''(x) - \pi^2 u(x) = f(x) \text{ para } x \in]0, 1[\quad (8)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (9)$$

- Supongamos que el problema (8)-(9) posee una solución de clase $\mathcal{C}^2([0, L])$.
- Multiplicamos (8) por $\sin(\pi x)$:

$$-\sin(\pi x) u''(x) - \pi^2 \sin(\pi x) u(x) = \sin(\pi x) f(x),$$

- e integramos entre 0 y 1 :

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \sin(\pi x) u''(x) dx - \pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) u(x) dx \\ = \int_0^1 \sin(\pi x) f(x) dx. \end{aligned}$$

■ Integramos por partes la integral

$$\int_0^1 \sin(\pi x) u''(x) dx = [\sin(\pi x) u'(x)]_0^1 - \pi \int_0^1 \cos(\pi x) u'(x) dx$$

■ y repetimos el proceso

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(\pi x) u''(x) dx &= [\sin(\pi x) u'(x)]_0^1 - \pi \int_0^1 \cos(\pi x) u'(x) dx \\ &= [\sin(\pi x) u'(x)]_0^1 - \pi [\cos(\pi x) u(x)]_0^1 \\ &\quad - \pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) u(x) dx \\ &= 0 - 0 - \pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) u(x) dx, \end{aligned}$$

luego se cumple que

$$-\int_0^1 \sin(\pi x) u''(x) dx - \pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) u(x) dx = 0.$$

■ De la igualdad

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \sin(\pi x) u''(x) dx - \pi^2 \int_0^1 \sin(\pi x) u(x) dx &= 0 \\ &= \int_0^1 \sin(\pi x) f(x) dx. \end{aligned}$$

- Obtenemos finalmente que si existe una solución $u \in \mathcal{C}^2([0, L])$ para el problema (8)-(9) entonces f ha de cumplir

$$\int_0^1 \sin(\pi x) f(x) dx = 0 \tag{10}$$

- En particular, si f cumple que $\int_0^1 \sin(\pi x) f(x) dx \neq 0$, como es el caso $f = 1$, entonces no existe solución en el espacio vectorial $\mathcal{C}^2([0, L])$ al problema (8)-(9).

- Si nos preguntamos acerca de la unicidad de soluciones, basta considerar el caso $f = 0$.
- Si consideramos

$$u(x) = \mu \sin(\pi x)$$

entonces $u(0) = u(1) = 0$ y

$$u''(x) = -\pi^2 \mu \sin(\pi x).$$

- Luego se cumple que

$$-u''(x) - \pi^2 u(x) = 0$$

para todo $\mu \in \mathbb{R}$. Existe entonces todo un sub-espacio de dimension uno de soluciones en $\mathcal{C}^2([0, L])$:

$$\text{span}\{\sin(\pi x)\} = \{\mu \sin(\pi x) : \mu \in \mathbb{R}\}.$$

En consecuencia, no tenemos unicidad en la solución.

Consideremos (4)-(5) y estudiemos la existencia y unicidad de soluciones a este problema.

Teorema

Si $c(x)$ es una función continua no negativa, entonces el problema (4)-(5) tiene como máximo una solución en el espacio vectorial $C^2([0, L])$.

Demostración

Consideremos que el problema (4) tuviese dos soluciones u_1 y u_2 en $C^2([0, L])$. Entonces, $u_1(0) = u_2(0)$, $u_1(L) = u_2(L)$ y

$$-u_1''(x) + c(x) u_1(x) = f(x)$$

$$-u_2''(x) + c(x) u_2(x) = f(x)$$

Entonces construyamos $w = u_1 - u_2$ que resuelve es siguiente problema homogéneo a valores frontera:

$$-w''(x) + c(x) w(x) = 0 \tag{11}$$

$$w(0) = w(L) = 0 \tag{12}$$

Multiplicando (11) por w e integrando entre 0 y L obtenemos

$$-\int_0^L w''(x) w(x) dx + \int_0^L c(x) w^2(x) dx = 0$$

Demostración

Integrando por partes el primer término:

$$\begin{aligned}\int_0^L w''(x)w(x)dx &= [w'(x)w(x)]_0^L - \int_0^L w'(x)w'(x)dx \\ &= 0 - \int_0^L w'(x)w'(x)dx,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}- \int_0^L w''(x)w(x)dx + \int_0^L c(x) w^2(x)dx &= 0 \\ &= \int_0^L [(w'(x))^2 + c(x) w^2(x)]dx\end{aligned}$$

como las dos integrales son cantidades no negativas, la única posibilidad es que $w = u_1 - u_2 = 0$, lo que nos permite concluir que si $c \geq 0$ y existe solución esta tiene que ser única.

Teorema

Si $c(x)$ es una función continua no negativa, entonces el problema (4)-(5) tiene una y solo una solución en el espacio vectorial $C^2(]0, L[)$.

Demostración

Vamos emplear el método siguiente. Conocemos, empleando el Teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias, que el problema siguiente tiene, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, una y solo una solución en el espacio vectorial $\mathcal{C}^2([0, L])$:

$$-u''(x) + c(x) u(x) = f(x) \quad (13)$$

$$u(0) = A \text{ and } u'(0) = \lambda. \quad (14)$$

Denotemos por $u_\lambda(x)$ dicha solución. Buscaremos en la función de \mathbb{R} and $\mathcal{C}^2([0, L])$ dada por

$$\lambda \mapsto u_\lambda,$$

el valor λ^* para el que se cumpla que $u_{\lambda^*}(L) = B$. Esta función $u_{\lambda^*}(x)$, en el caso de que exista, será la solución de nuestro problema.

Demostración

Para ver si esto es cierto en primer lugar construiremos la función

$$S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad S(\lambda) := u_\lambda(L).$$

Observemos que la función S es afín, es decir cumple

$$S(\lambda) = \lambda S(1) + (1 - \lambda)S(0) \tag{15}$$

Para demostrar (15) basta observar para $S(0) = u_0(L)$ se cumple

$$\begin{aligned} -u_0''(x) + c(x) u_0(x) &= f(x) \\ u_0(0) &= A \text{ and } u_0'(0) = 0, \end{aligned}$$

para $S(1) = u_1(L)$ se tiene

$$\begin{aligned} -u_1''(x) + c(x) u_1(x) &= f(x) \\ u_1(0) &= A \text{ and } u_1'(0) = 1. \end{aligned}$$

Entonces, $\lambda u_1(0) + (1 - \lambda)u_0(0) = A$ y $\lambda u_1'(0) + (1 - \lambda)u_0'(0) = \lambda$.

Demostración

Además, la función $\lambda u_1(x) + (1 - \lambda)u_0(x)$ satisface de la ecuación diferencial ordinaria (22). En consecuencia, por la unicidad de las soluciones de dicha ecuación diferencial ordinaria se cumple que

$$u_\lambda(x) = \lambda u_1(x) + (1 - \lambda)u_0(x)$$

para todo $0 < x < L$. Observemos que

$$S(\lambda) = \lambda S(1) + (1 - \lambda)S(0) = \lambda(S(1) - S(0)) + S(0)$$

Si $S(1) - S(0) \neq 0$ entonces S es una función biyectiva, de forma que si $(S(1) - S(0)) > 0$ es creciente y en caso contrario decreciente. En consecuencia, dado $B \in \mathbb{R}$ existirá un único valor $\lambda^* \in \mathbb{R}$ de forma que $S(\lambda^*) = u_{\lambda^*}(L) = B$.

Nota

Recordemos que la existencia y unicidad de soluciones falla en el caso particular $L = 1$ y $c = -\pi^2 < 0$.

Nota

Los problemas del tipo (6)-(7) poseen una importante propiedad conocida como *principio del máximo*. Como veremos a continuación la demostración de dicha propiedad en dimensión uno es fácil e instructiva.

Teorema (Principio del máximo)

Supongamos que $c \geq 0$ y que el problema (6)-(7) tiene una solución u en el espacio vectorial $C^2([0, L])$. Si $f(x) \geq 0$, para $0 < x < L$, $A \geq 0$ y $B \geq 0$, entonces $u \geq 0$.

Demostración

Procedamos por reducción al absurdo asumiendo la existencia de una valor $0 < x_0 < L$ para el que se cumple que $u(x_0) < 0$. Como $u(0) = A \geq 0$ y $u(L) = B \geq 0$ y la función es continua, tiene que existir un pequeño intervalo abierto (α, β) que contiene a x_0 de forma que se cumple

$$u(x) < 0 \text{ para todo } \alpha < x < \beta.$$

Podemos asumir que $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ empleando el teorema de los valores intermedios. Como la función u cumple que

$$u''(x) = c(x)u(x) - f(x)$$

luego $u''(x) < 0$ para $\alpha < x < \beta$, es decir u es una función cóncava en $]\alpha, \beta[$. Entonces, sea λ^* tal que $x_0 = \lambda^*\beta + (1 - \lambda^*)\alpha$, tenemos

$$u(x_0) = u(\lambda^*\beta + (1 - \lambda^*)\alpha) \geq \lambda^*u(\beta) + (1 - \lambda^*)u(\alpha) = 0,$$

que contradice la hipótesis de partida.

Objetivo metodológico

Buscar un marco teórico adecuado para aproximar las soluciones de problemas a valores frontera:

$$-u''(x) + c(x) u(x) = f(x) \quad (16)$$

$$u(0) = A \text{ and } u'(0) = B. \quad (17)$$

- Las soluciones de (22) son funciones $u : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$,
- Podemos escribir (22) de la forma siguiente

$$-\frac{d^2}{dx^2} u(x) + c(x) u(x) = f(x) \quad (18)$$

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + c(x) \right) u(x) = f(x). \quad (19)$$

- Observemos que (25) se puede escribir como

$$A u(x) = f(x)$$

donde

$$A := \left(-\frac{d^2}{dx^2} + c(x) \right).$$

- A cumple que si u, v son funciones entonces $u + v$ es también una función y

$$A(u(x) + v(x)) = A u(x) + A v(x),$$

además si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un escalar λu es una función y

$$A(\lambda u(x)) = \lambda(A u(x)).$$

Discusión

- El conjunto de funciones $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ que denotaremos por $\mathbb{R}^{[0,L]}$ tiene una estructura de espacio vectorial tomando como cuerpo de escalares los números reales \mathbb{R} al igual que los vectores del espacio vectorial

$$\mathbb{R}^d = \left\{ \mathbf{u} : \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \text{ donde } u_i \in \mathbb{R} \text{ para } 1 \leq i \leq d \right\}$$

- Podemos considerar

$$A : \Omega \subset \mathbb{R}^{[0,L]} \rightarrow \mathbb{R}^{[0,L]},$$

donde Ω es un conjunto de funciones adecuado, como una aplicación lineal.

Discusión

- Aplicación lineal quiere decir que cumple

$$A(u(x) + v(x)) = A u(x) + A v(x)$$

y

$$A(\lambda u(x)) = \lambda (A u(x))$$

las mismas propiedades que la multiplicación de una matriz por un vector.

- En consecuencia, resolver (22) es equivalente a encontrar $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^{[0,L]}$ de forma que

$$A u(x) = f(x).$$

- El equivalente en \mathbb{R}^d es dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ y un vector $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^d$ encontrar un vector \mathbf{u} de forma que

$$A \mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Estrategia a seguir

- Consideremos una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ y un vector } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Si queremos encontrar $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ de forma que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Podemos proceder del modo siguiente:

- Elegimos dos vectores ortogonales

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ donde } \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

esto nos asegura que son linealmente independientes.

- La solución que buscamos se escribe con respecto esta base como

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Entonces, observemos que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \left(u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \\ & u_1 \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -a_{11} + a_{12} \\ -a_{21} + a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y necesitamos aislar u_1 y u_2 para poder obtener un valor concreto de \mathbf{u} .

- Empleando que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de \mathbb{R}^2 , conocemos que \mathbf{u} será la solución de $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ si y solo si cumple

$$\begin{aligned} \left\langle A\mathbf{u}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \mathbf{f}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle A\mathbf{u}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \mathbf{f}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

- En consecuencia, para implementar esta metodología solo necesitamos una estructura lineal y un producto escalar asociado a la estructura lineal (esto nos permite definir la noción de perpendicularidad).

En la práctica tendremos que encontrar u_1, u_2 de forma que:

$$u_1 \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

y

$$\begin{aligned} \left\langle u_1 \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -a_{11} + a_{12} \\ -a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ = \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

que es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Es decir, encontrar u_1, u_2 de forma que:

$$u_1 \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + u_2 \left\langle \begin{pmatrix} -a_{11} + a_{12} \\ -a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = f_1 + f_2$$

y

$$u_1 \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + u_2 \left\langle \begin{pmatrix} -a_{11} + a_{12} \\ -a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -f_1 + f_2$$

- El objetivo de los resultados teóricos que veremos a lo largo de este tema es el de **definir espacios vectoriales a partir de funciones derivables que tengan buenas propiedades para resolver Ecuaciones en Derivadas Parciales y que a su vez nos permitan diseñar algoritmos para aproximar con una cierta precisión las soluciones de las mismas.**
- Necesitamos espacios de funciones que se *parezcan* a \mathbb{R}^d .
- \mathbb{R}^d tiene una estructura lineal: Tiene definida una suma: $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ y una multiplicación por escalares $\lambda \mathbf{x}$ con $\lambda \in \mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
- Las funciones derivables también tienen esa estructura, la suma de funciones derivables es una función derivable y si multiplico una función derivable por un escalar, el resultado sigue siendo una función derivable.

- \mathbb{R}^d tiene definida una norma (distancia) que se puede representar por un producto escalar:

$$\|\mathbf{x}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

donde el producto escalar se define como

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_d y_d.$$

- ¿Podemos definir un producto escalar similar para funciones derivables?

- La existencia de este producto escalar nos permitiría realizar operaciones geométricas interesantes y útiles:
 - Si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ entonces conocemos que $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, en particular ambos vectores son linealmente independientes.
 - $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.
 - **Teorema de Pitágoras.** Si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ entonces se cumple $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.
 - $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$.
 - Dado un subespacio $U = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^d$ con $k \leq d$ donde los vectores de la base son ortogonales dos a dos, se cumple que la proyección ortogonal de un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ sobre U es igual a

$$P_U(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle} \mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle} \mathbf{u}_2 + \dots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_k \rangle}{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle} \mathbf{u}_k$$

que es la mejor aproximación de \mathbf{u} por vectores que están en el sub-espacio U :

$$\min_{\mathbf{w} \in U} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{u} - P_U(\mathbf{u})\|.$$

Definición (Espacio pre-Hilbert)

Si en un espacio vectorial V podemos definir un producto escalar, es decir una aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

de forma que

- 1 $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle,$
- 2 $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle,$
- 3 $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle,$
- 4 $\langle u, u \rangle \geq 0$ y $\langle u, u \rangle = 0$ si y solo si $u = 0$.

Si completamos este espacio V añadiendo los límites de todas las sucesiones de Cauchy obtenemos un espacio vectorial mayor que denotaremos por H , y que por tanto contiene a V . Además tiene definido un producto escalar como extensión del original:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde $\langle u, v \rangle_H := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v_n \rangle_V$.

Definición (Norma hilbertiana)

Si H es un espacio de Hilbert, entonces H es un espacio vectorial sobre un cuerpo de escalares \mathbb{R} o \mathbb{C} y donde hay definida una distancia al origen o norma:

$$\|u\|_H = \sqrt{\langle u, u \rangle_H}$$

que tiene propiedades similares a la norma euclídea de \mathbb{R}^d .

En general, un espacio vectorial \mathcal{X} dotado de una norma $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ es un espacio de Hilbert si toda sucesión de Cauchy en \mathcal{X} es convergente y existe un producto escalar en \mathcal{X} , denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$ de forma que $\|x\|_{\mathcal{X}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{X}}}$ se cumple para todo $x \in \mathcal{X}$.

Consideremos el conjunto de funciones

$$\mathbb{R}^{[0,L]} := \{v | v : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

- El conjunto $\mathbb{R}^{[0,L]}$ es un espacio vectorial. Dadas dos funciones en $u, v \in \mathbb{R}^{[0,L]}$ podemos definir

$$\langle u, v \rangle := \int_0^L u(x)v(x)dx$$

siempre que dicha integral exista.

- A priori parece difícil determinar que tipo de funciones nos van a permitir definir un producto de este tipo. Por ejemplo, si la función $u \geq 0$ está acotada ($u \leq C$) y $v(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow L$ entonces la integral no está definida.

Observación

Si definimos el producto escalar para funciones de $u, v \in \mathbb{R}^{[0,L]}$ como

$$\langle u, v \rangle := \int_0^L u(x)v(x)dx,$$

entonces

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\int_0^L u(x)^2 dx} \geq 0.$$

Se tiene que cumplir entonces que $\int_0^L u(x)^2 dx < \infty$ y que si $\|u\| = 0$, es decir,

$$\int_0^L u(x)^2 = 0$$

entonces $u = 0$.

Problema metodológico

- Consideremos para $L = 1$ las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } x \neq 1/2, 1/3, 1/4, \\ 0 & \text{si } x = 1/2, 1/3, 1/4, \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } x \neq 3/4, 5/8 \\ 0 & \text{si } x = 3/4, 5/8. \end{cases}$$

En sentido estricto $f(x) \neq g(x)$, ahora bien si dibujamos ambas funciones estas son indistinguibles en el sentido siguiente:

Conocemos que $1/4 < 1/3 < 1/2 < 5/8 < 3/4$ entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx &= \int_0^{1/4} (f - g)^2 dx + \int_{1/4}^{1/3} (f - g)^2 dx \\ &+ \int_{1/3}^{1/2} (f - g)^2 dx + \int_{1/2}^{5/8} (f - g)^2 dx + \int_{5/8}^{3/4} (f - g)^2 dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Definición

Dadas dos funciones $u, v \in \mathbb{R}^{[0,L]}$ diremos que $u = v$ si y solo si

$$\int_0^L (u(x) - v(x))^2 dx = 0.$$

En consecuencia, **no vamos a poder distinguir funciones que solo difieren sobre un conjunto numerable de puntos sobre su dominio de definición.**

Definición (Funciones de cuadrado integrable)

Diremos que una función $u \in \mathbb{R}^{[0,L]}$ es de cuadrado integrable, si cumple

$$\int_0^L u(x)^2 dx < \infty.$$

Denotaremos por $L^2([0, L]) \subset \mathbb{R}^{[0,L]}$ el conjunto de funciones de cuadrado integrable.

De forma evidente si $u \in L^2([0, L])$ entonces $\lambda u \in L^2([0, L])$ para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, en particular la función constante $0 \in L^2([0, L])$.

Consideremos dos funciones $u, v \in L^2([0, L])$ para ver que $u + v \in L^2([0, L])$ procedemos del modo siguiente. Consideremos los conjuntos

$$A = \{x \in [0, L] : |u(x)| \geq |v(x)|\}$$

y

$$B = \{x \in [0, L] : |u(x)| < |v(x)|\},$$

donde $[0, L] = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Obtenemos entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^L (u(x) + v(x))^2 dx &= \int_A (u(x) + v(x))^2 dx + \int_B (u(x) + v(x))^2 dx \\ &\leq \int_A (2u(x))^2 dx + \int_B (2v(x))^2 dx \\ &\leq 4 \int_0^L u(x)^2 dx + 4 \int_0^L v(x)^2 dx < \infty, \end{aligned}$$

ya que $\int_0^L u(x)^2 dx < \infty$ y $\int_0^L v(x)^2 dx < \infty$.

Teorema (Desigualdad de Hölder)

Sean $u, v \in L^2([0, L])$, entonces $u \cdot v$ es integrable, es decir,

$$\int_0^L |u(x)v(x)| dx < \infty,$$

y

$$\int_0^L |u(x)v(x)| dx \leq \sqrt{\int_0^L u(x)^2 dx} \sqrt{\int_0^L v(x)^2 dx}$$

Definición (Función integrable)

Una función $u \in \mathbb{R}^{[0, L]}$ se dice integrable si

$$\int_0^L |u(x)| dx < \infty.$$

El conjunto de funciones integrables de $\mathbb{R}^{[0, L]}$ se denota por $L^1([0, L])$.

Teorema

Sea $u \in L^1([0, L])$, entonces se cumple

$$\left| \int_0^L u(x) dx \right| \leq \int_0^L |u(x)| dx$$

Corolario

Sean $u, v \in L^2([0, L])$, entonces como $u \cdot v \in L^1([0, L])$ se cumple

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L u(x)v(x) dx \right| &\leq \int_0^L |u(x)v(x)| dx \\ &\leq \sqrt{\int_0^L u(x)^2 dx} \sqrt{\int_0^L v(x)^2 dx}, \end{aligned}$$

es decir, $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

Resumen

- $L^2([0, L])$ es un espacio vectorial contenido en $\mathbb{R}^{[0, L]}$.
- La aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2([0, L]) \times L^2([0, L]) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle u, v \rangle := \int_0^L u(x)v(x)dx$$

está bien definida y es bilineal.

- La función $\| \cdot \| : L^2([0, L]) \longrightarrow [0, \infty[$ definida por

$$\|u\| := \sqrt{\int_0^L u(x)^2 dx} = \sqrt{\langle u, u \rangle},$$

es una norma (distancia) en $L^2([0, L])$ que tiene como producto escalar asociado la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Aproximación de funciones en $L^2([0, L])$

Como $(L^2([0, L]), \|\cdot\|)$ es un espacio con distancia. Podemos definir la aproximación de una función $u \in L^2([0, L])$ mediante una sucesión $\{u_n : n = 0, 1, 2, \dots\} \subset L^2([0, L])$ de funciones de cuadrado integrable de la forma siguiente.

Definición (Límite de una sucesión)

Sea $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ una sucesión de funciones en $L^2([0, L])$. Entonces $u \in L^2([0, L])$ es el límite de la sucesión $\{u_n\}$ si al considerar la sucesión de números reales

$$x_n := \|u_n - u\| = \sqrt{\int_0^L (u_n(x) - u(x))^2 dx}$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Aproximación por sub-espacios

- Se considera para cada $n = 1, 2, \dots$ un sub-espacio U_n de $L^2([0, L])$ de dimensión n ,

$$U_n := \text{span} \{w_1, \dots, w_n\}$$

generado por una clase de funciones w_n sencillas y linealmente independientes.

- Dada $u \in L^2([0, L])$ se construye $u_n \in U_n$ de forma que

$$\|u - u_n\| = x_n \leq \|u - w\| \text{ para todo } w \in U_n$$

Si tomamos $U_n \subset U_{n+1}$ entonces $x_n \geq x_{n+1}$. En consecuencia si se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, dada una precisión fijada $\varepsilon > 0$ existirá $n_0 = n_0(\varepsilon)$ de forma que

$$x_{n_0} = \|u - u_{n_0}\| < \varepsilon.$$

Podemos decir que u_{n_0} aproxima u con un error cuadrático no superior a ε .

Ejemplo de construcción de una base de funciones

Para cada n consideremos la siguiente partición del intervalo $[0, L]$

$$x_0 := 0 < x_1 := L/n < \cdots < x_{n-1} := (n-1)L/n < x_n := L$$

en general, $x_k := k(L/n)$ para $k = 0, 1, \dots, n$. Entonces, definimos para cada $k = 0, 1, \dots, n-1$ la función

$$w_k^{(n)}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & \text{si } x \notin [x_k, x_{k+1}] \end{cases}$$

Estas funciones cumplen que

$$\langle w_i^{(n)}(x), w_j^{(n)}(x) \rangle = \begin{cases} (x_i - x_{i-1}) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

En consecuencia $\{w_0^{(n)}(x), w_1^{(n)}(x), \dots, w_{n-1}^{(n)}(x)\}$ es una base ortogonal de $L^2([0, L])$ y generan un sub-espacio de dimensión n .

Si tomamos $L = 5$ y $n = 5$ entonces

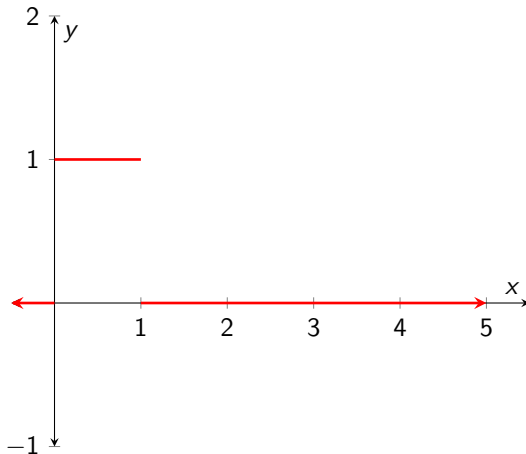
$$x_0 = 0 < x_1 := 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3 < x_4 = 4 < x_5 = 5.$$

y el conjunto de funciones

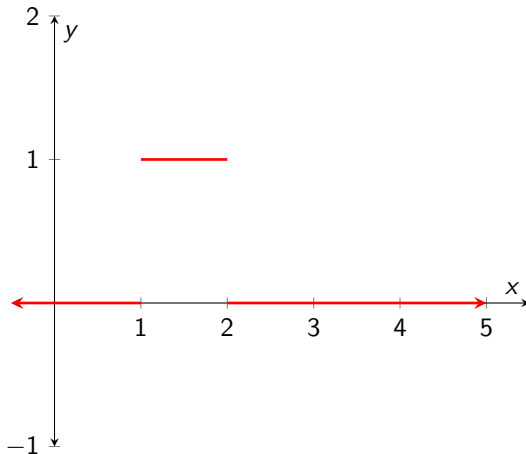
$$\{w_0^{(5)}(x), w_1^{(5)}(x), \dots, w_4^{(5)}(x)\}$$

es el siguiente:

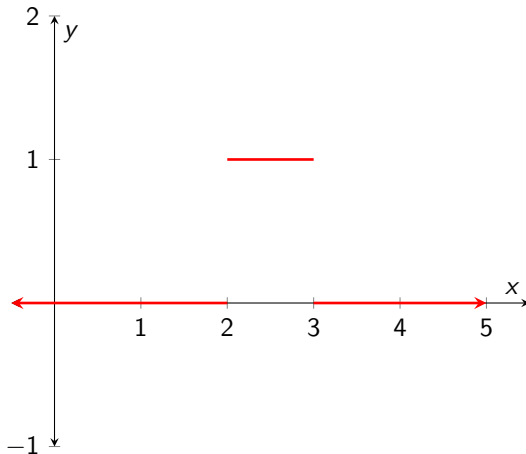
La función $w_0^{(5)}$



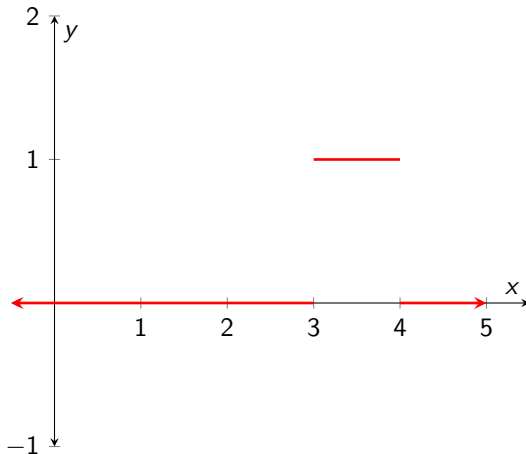
La función $w_1^{(5)}$



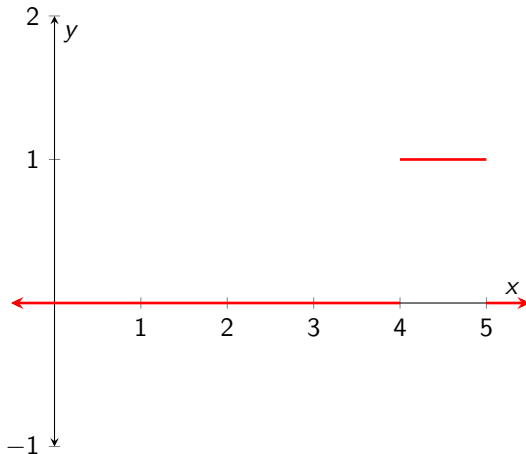
La función $w_2^{(5)}$



La función $w_3^{(5)}$



La función $w_4^{(5)}$



Si consideramos ahora la función $u(x) = x$ definida sobre $[0, 5]$. Si la queremos aproximar mediante la base

$$\{w_0^{(5)}(x), w_1^{(5)}(x), \dots, w_4^{(5)}(x)\}$$

del sub-espacio que denotaremos por U_5 , la aproximación \hat{u} de u se calculará empleando la proyección ortogonal sobre el sub-espacio generado por la base:

$$\hat{u}(x) := P_{U_5}(u) = \sum_{k=0}^4 \frac{\langle u, w_k^{(5)} \rangle}{\langle w_k^{(5)}, w_k^{(5)} \rangle} w_k^{(5)}(x) = \sum_{k=0}^4 \langle u, w_k^{(5)} \rangle w_k^{(5)}(x),$$

recordemos que $\langle w_k^{(5)}, w_k^{(5)} \rangle = (x_k - x_{k-1}) = 1$. Tenemos pues que calcular unicamente

$$\langle u, w_k^{(5)} \rangle = \int_0^5 x w_k^{(5)}(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} x dx = \frac{x_k^2 - x_{k-1}^2}{2}.$$

Al conocer

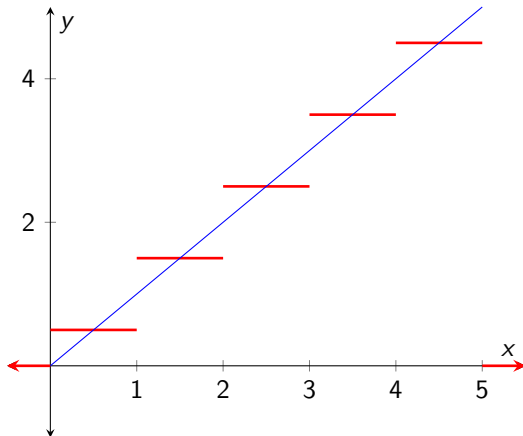
$$x_0 = 0 < x_1 := 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3 < x_4 = 4 < x_5 = 5.$$

podemos entonces concluir

$$\begin{aligned}\hat{u}(x) &= \sum_{k=0}^4 \left(\frac{x_k^2 - x_{k-1}^2}{2} \right) w_k^{(5)}(x) \\ &= \frac{1}{2} w_0^{(5)}(x) + \frac{3}{2} w_1^{(5)}(x) + \frac{5}{2} w_2^{(5)}(x) + \frac{7}{2} w_3^{(5)}(x) + \frac{9}{2} w_4^{(5)}(x),\end{aligned}$$

una función cuya gráfica es fácil de representar.

La función $\hat{u}(x)$ y $u(x) = x$



Objetivo

A continuación veremos que las funciones constantes a trozos permiten aproximar cualquier función de cuadrado integrable. Para ello demostraremos que dada cualquier función de cuadrado integrable u y cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función constante a trozos \hat{u} de forma que

$$\|u - \hat{u}\| < \varepsilon.$$

A estas funciones constantes a trozos se las conoce como **funciones simples**. En estadística se les llama **histogramas**.

Consideremos las funciones de $\mathbb{R}^{[0,L]}$ que son constantes a trozos.

- Dado un subconjunto $A \subset [0, L]$ definimos la función indicatriz o característica del conjunto A como

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

- χ_A es como una variable aleatoria binomial o como un sensor que toma el valor uno si observamos un individuo en A y cero en caso contrario.

Definición (Función simple)

Llamaremos a $u \in \mathbb{R}^{[0,L]}$ función simple si existe una partición del intervalo $[0, L]$:

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = L$$

y

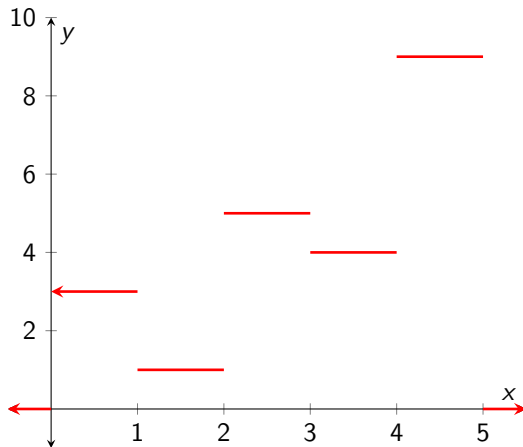
$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

de forma que:

$$u(x) = a_1 \chi_{[x_0, x_1]}(x) + a_2 \chi_{[x_1, x_2]}(x) + \cdots + a_n \chi_{[x_{n-1}, x_n]}(x)$$

Al conjunto de todas las funciones de este tipo las denotaremos por $\text{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]})$.

Un ejemplo de función simple en $\mathbb{R}^{[0,5]}$



■ Demostremos que $\text{Simplex}(\mathbb{R}^{[0,L]}) \subset L_2([0, L])$:

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \langle u, u \rangle = \int_0^L u^2(x) dx \\&= \int_0^L (a_1 \chi_{[x_0, x_1]}(x) + a_2 \chi_{[x_1, x_2]}(x) + \cdots + a_n \chi_{[x_{n-1}, x_n]}(x))^2 dx \\&= \int_0^L (a_1^2 \chi_{[x_0, x_1]}(x) + a_2^2 \chi_{[x_1, x_2]}(x) + \cdots + a_n^2 \chi_{[x_{n-1}, x_n]}(x)) dx \\&= a_1^2(x_1 - x_0) + a_2^2(x_2 - x_1) + \cdots + a_n^2(x_n - x_{n-1}),\end{aligned}$$

donde empleamos que

$$\chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x) \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x) = \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x),$$

y

$$\chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x) \chi_{[x_j, x_{j+1}]}(x) = 0 \text{ para } i \neq j.$$

- Las funciones simples $\text{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]})$ forman un sub-espacio vectorial de las funciones de cuadrado integrable. En consecuencia, el producto escalar

$$\langle u, v \rangle = \int_0^L u(x)v(x)dx$$

está bien definido y que podemos considerar definido sobre este mismo conjunto:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \text{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]}) \times \text{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

- En consecuencia, $(\text{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]}), \|\cdot\|)$ es un espacio normado con la norma

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Propiedad

Veremos ahora que una función simple $\mathcal{X}_{[a,b]}(x)$ definida en un intervalo cerrado $0 < a < b < L$, a pesar de no ser continua ni diferenciable puede ser aproximada por función u de clase $C^\infty([0, L])$ (esto quiere decir que se puede derivar infinitas veces como la función e^x) de forma que

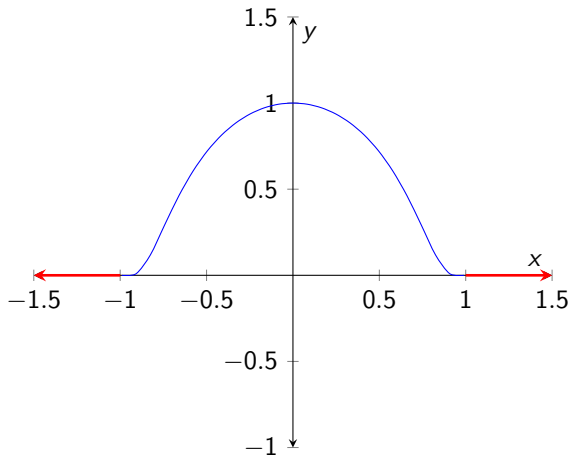
$$\|u - \mathcal{X}_{[a,b]}\| < \varepsilon.$$

Esta construcción se puede llevar a cabo mediante funciones del tipo siguiente

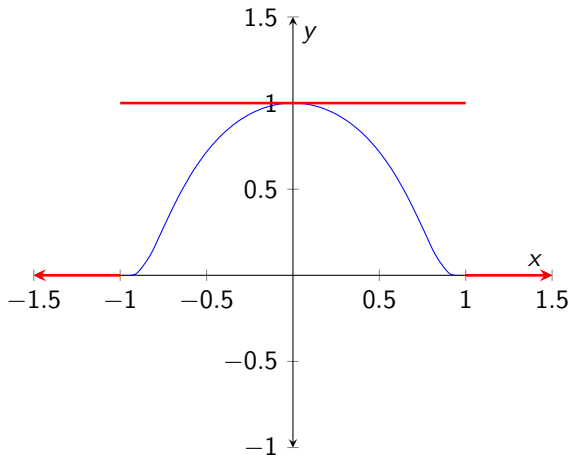
$$\Phi(x) = \begin{cases} \exp\left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Observemos que $\Phi(x) \geq 0$ si y solo si $|x| \leq 1$. Decimos entonces que el soporte de la función es el intervalo compacto $[-1, 1]$.

Las función $\Phi(x)$



Las funciones $\Phi(x)$ y $\chi_{[-1,1]}$



La gráfica anterior nos permite ver como podemos “pegar” una función constante con una función de la la clase C^∞ de manera sencilla. Supongamos que tenemos la siguiente partición

$$0 < a < b < c < d < L$$

y queremos construir una función que tome el valor constante 1 en $[b, c]$ y que sea de clase C^∞ . Entonces consideramos las funciones

$$\exp\left(1 - \frac{(b-a)^2}{(b-a)^2 - (b-x)^2}\right) \text{ si } x \in]a, b[$$

y

$$\exp\left(1 - \frac{(c-d)^2}{(c-d)^2 - (c-x)^2}\right) \text{ si } x \in]c, d[$$

que toman sus valores máximos igual a 1 en $x = b$ y $x = c$ respectivamente.

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, a] \\ \exp\left(1 - \frac{(b-a)^2}{(b-a)^2 - (b-x)^2}\right) & \text{si } x \in]a, b[\\ 1 & \text{si } x \in [b, c] \\ \exp\left(1 - \frac{(c-d)^2}{(c-d)^2 - (c-x)^2}\right) & \text{si } x \in]c, d[\\ 0 & \text{si } x \in [d, L]. \end{cases}$$

Φ es una función de clase C^∞ que aproxima a la función simple $\chi_{[b,c]}$. Además, el error se puede calcular explícitamente:

$$\begin{aligned} \|\chi_{[b,c]} - \Phi\|^2 &= \int_a^b \Phi(x)^2 dx + \int_c^d \Phi(x)^2 dx \\ &\leq (b-a) + (d-c), \end{aligned}$$

lo que permite dar una cota superior del mismo.

Propiedad

Dada una función simple $\mathcal{X}_{[b,c]} \in \text{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]})$ y un error fijado ε , tomamos una cantidad cualquiera $0 < \delta < \varepsilon$ y construimos $\Phi_\delta \in C^\infty([0, L])$ con soporte en $[a, d]$ con

$$a := b - \delta^2/2$$

y

$$d := c + \delta^2/2.$$

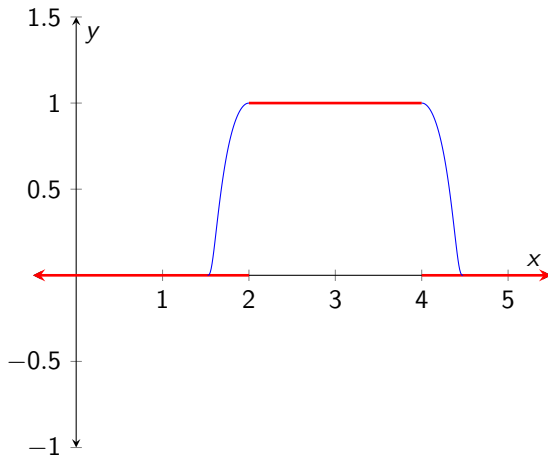
Entonces,

$$\|\mathcal{X}_{[b,c]} - \Phi_\delta\|^2 \leq (b - a) + (d - c) = \delta^2,$$

es decir

$$\|\mathcal{X}_{[b,c]} - \Phi_\delta\| \leq \delta < \varepsilon.$$

La función $\chi_{[3,4]}$ y su aproximación Φ_δ con $\delta = 1$



Definición (Funciones con soporte compacto)

Las combinaciones lineales de funciones $\Phi \in C^\infty([0, L])$ que se anulan fuera de un intervalo cerrado $I \subset [0, L]$ forman un espacio vectorial. Son las denominadas funciones infinitamente derivables con soporte compacto, el soporte de una función $u \in \mathbb{R}^{[0, L]}$ se define como

$$\text{supp } u := \sup\{K \subset [0, L] : u(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in K\}.$$

A esta familia de funciones se la denota por $\mathcal{C}_0^\infty([0, L])$ o bien por $\mathcal{D}([0, L])$ y se les conoce por el nombre de **funciones test**. De forma evidente,

$$\mathcal{C}_0^\infty([0, L]) \subset L^2([0, L]),$$

es decir toda función test es una función de cuadrado integrable.

Resumen

- Las funciones de cuadrado integrables $L^2([0, L])$ son el equivalente a los vectores de \mathbb{R}^d , tienen una distancia dada por un producto escalar.
- Contiene como sub-espacio vectorial a las funciones simples $\text{Simples}(\mathbb{R}^{[0, L]})$. Estas funciones son fáciles de manejar con respecto a la norma, sin embargo no son derivables.
- Contiene como sub-espacio vectorial a las funciones infinitamente derivables con soporte compacto $C_0^\infty([0, L])$. Estas funciones son de manejo más complicado con respecto a la norma, sin embargo son derivables tantas veces como queramos.
- Podemos aproximar las funciones $\text{Simples}(\mathbb{R}^{[0, L]})$ mediante funciones de clase $C_0^\infty([0, L])$ y viceversa.
- Cualquier función de cuadrado integrable $L^2([0, L])$ se puede aproximar por una función o bien de $\text{Simples}(\mathbb{R}^{[0, L]})$ o bien de $C_0^\infty([0, L])$.

Conocemos que hay funciones en $L^2([0, L])$ que no se pueden derivar, vamos a definir una nueva derivada conocida por derivada débil. Si la función es derivable, entonces dicha derivada coincidirá con la derivada tradicional. Si $u, v \in C_0^\infty([0, L])$ podemos asumir que o bien $u(0) = u(L)$ o bien $v(0) = v(L) = 0$, entonces la integral por partes no permite calcular

$$\begin{aligned}\int_0^L u(x)v'(x)dx &= u(L)v(L) - u(0)v(0) - \int_0^L u'(x)v(x)dx \\ &= - \int_0^L u'(x)v(x)dx.\end{aligned}$$

En consecuencia podemos afirmar dado $u \in C_0^\infty([0, L])$ que su derivada es la única función $u' \in C_0^\infty([0, L])$ que cumple la igualdad

$$\langle u, v' \rangle = -\langle u', v \rangle \quad (20)$$

para toda $v \in C_0^\infty([0, L])$ tal que $v(0) = v(L) = 0$.

Dualidad

El espacio de funciones $v \in C_0^\infty([0, L])$ tal que $v(0) = v(L) = 0$ es un sub-espacio vectorial propio de $C_0^\infty([0, L])$ que vamos a denotar por $C_{00}^\infty([0, L])$. El espacio dual, que se denota por $C_{00}^\infty([0, L])'$ está formado por las aplicaciones lineales,

$$T : C_{00}^\infty([0, L]) \longrightarrow \mathbb{R},$$

es decir, cumple $T(u + v) = T(u) + T(v)$ y $T(\lambda u) = \lambda T(u)$. Se define entonces el corchete de dualidad como una especie de producto escalar:

$$[\cdot, \cdot] : C_{00}^\infty([0, L])' \times C_{00}^\infty([0, L]) \longrightarrow \mathbb{R} \quad [T, v] := T(v),$$

que devuelve el resultado de evaluar un vector del espacio dual con un vector del espacio primal. Representa físicamente a una lagrangiana.

Definición (Derivada débil)

Sea $u \in L^2([0, L])$ diremos que u es derivable en sentido débil si existe un elemento $T \in C_{00}^\infty([0, L])'$ de forma que

$$\langle u, v' \rangle = -[T, v] \quad (21)$$

se cumple para todo $v \in C_0^\infty([0, L])$ tal que $v(0) = v(L) = 0$. Se dice entonces que T es la derivada débil de u y se denota $u' := T$. Si $T = f := u' \in \mathbb{R}^{[0, T]}$ (se dice entonces que T es una distribución regular) entonces (21) es equivalente a

$$\int_0^L u(x)v'(x)dx = -[f, v] = -\langle f, v \rangle = -\int_0^L u'(x)v(x)dx.$$

para toda $v \in C_{00}^\infty([0, L])$.

Todas las distribuciones que emplearemos a lo largo del curso serán distribuciones regulares.

Definición ($H^1([0, L])$)

Dada una función $u \in L^2([0, L])$ diremos que $u \in H^1([0, L])$ si existe $u' \in \mathbb{R}^{[0, T]}$ localmente integrable (es decir, tiene derivada débil y es una distribución regular) de forma que se cumple

$$\int_0^L u(x)v'(x)dx = -\langle u', v \rangle = -\int_0^L u'(x)v(x)dx.$$

para toda $v \in C_{00}^\infty([0, L])$ y además $u' \in L^2([0, L])$.

Definición ($H_0^1([0, L])$)

Dada una función $u \in H^1([0, L])$ diremos que $u \in H_0^1([0, L])$ $u(0) = u(L) = 0$. Claramente, $H_0^1([0, L])$ es un sub-espacio vectorial de $H^1([0, L])$.

Definición ($H^k([0, L])$)

Dada una función $u \in L^2([0, L])$ diremos que $u \in H^k([0, L])$ si existe $u', u'', \dots, u^{(k)} \in \mathbb{R}^{[0, T]}$ (es decir, tiene derivadas débiles hasta orden k y son distribuciones regulares) de forma que se cumple

$$\int_0^L u^{(n-1)}(x) v'(x) dx = -\langle u^{(n)}, v \rangle = -\int_0^L u^{(n)}(x) v(x) dx.$$

para toda $v \in C_{00}^\infty([0, L])$ y además $u^{(n)} \in L^2([0, L])$ para $n = 1, \dots, k$.

Definición (Norma en $H^k([0, L])$)

Si $u \in H^k([0, L])$ se puede definir una norma

$$\|u\|_{H^k([0, L])} := \|u\| + \|u'\| + \dots + \|u^{(k)}\|.$$

A estos espacios se les conoce con el nombre de **espacios de Sobolev**.

Ejemplo

Consideremos la función siguiente

$$u : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

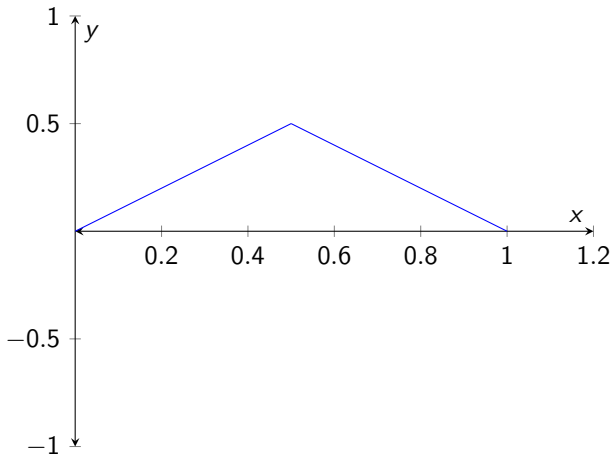
$$u(x) := \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq L/2, \\ L - x & \text{si } L/2 \leq x \leq L, \end{cases}$$

es decir, $u(x) = x \chi_{]0, L/2[}(x) + (L - x) \chi_{]L/2, L[}(x)$ ya que podemos representarla sin tener en cuenta los valores en los extremos de los intervalos. La derivada débil es:

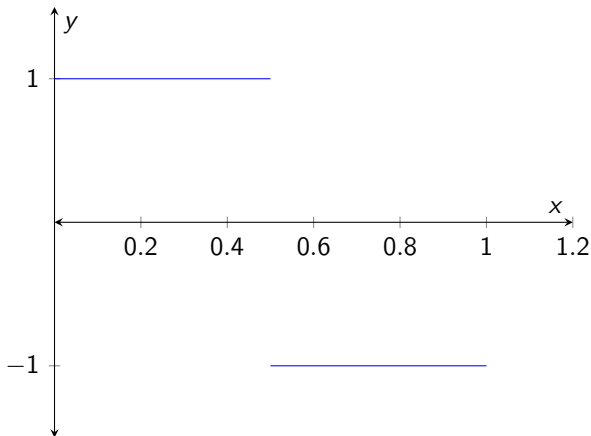
$$u'(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < L/2, \\ -1 & \text{si } L/2 < x < L, \end{cases}$$

es decir $u'(x) = 1 \chi_{]0, L/2[}(x) + (-1) \chi_{]L/2, L[}(x)$. **Recordemos que identificamos funciones que toman los mismos valores excepto en una cantidad finita o numerable de puntos.**

Ejemplo de $u(x)$ con $L = 1$



Ejemplo de $u'(x)$ con $L = 1$



Objetivo metodológico

Diseñar un método constructivo para aproximar las soluciones de problemas a valores frontera:

$$-u''(x) + c(x) u(x) = f(x) \quad (22)$$

$$u(0) = A \text{ and } u(L) = B. \quad (23)$$

- Las soluciones de (22) son funciones $u : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$,
- Podemos escribir (22) de la forma siguiente

$$-\frac{d^2}{dx^2} u(x) + c(x) u(x) = f(x) \quad (24)$$

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + c(x) \right) u(x) = f(x). \quad (25)$$

- Consideramos una partición del intervalo

$$0 = x_0 \leq x_1 = L/d \leq \cdots \leq x_i = i(L/N) \leq \cdots \leq x_d = L.$$

- Construimos las funciones siguientes:

$$w_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$w_1(x) = \begin{cases} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$w_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

■ De forma general:

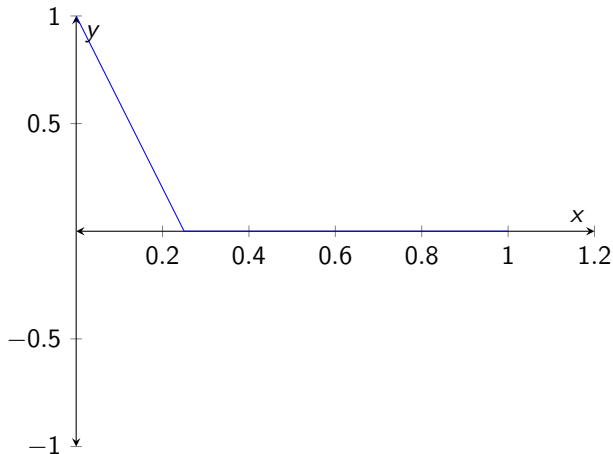
$$w_0(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{array} \right\}$$
$$w_i(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{en el resto} \end{array} \right\}$$

para $1 \leq i \leq d-1$ y

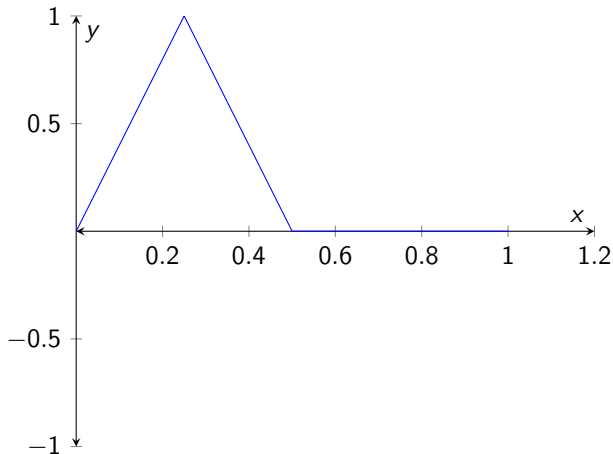
$$w_d(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x - x_{d-1}}{x_d - x_{d-1}} & \text{si } x_{d-1} \leq x \leq x_d \\ 0 & \text{en el resto} \end{array} \right\}$$

Construimos un conjunto de $d+1$ -funciones linealmente independientes que coinciden con la imagen de la aplicación lineal $\mathcal{I}_{d+1} : \mathbb{R}^{d+1} \longrightarrow H_0^1([0, L])$, $\mathcal{I}_{d+1}(\mathbf{e}_i) = w_{i-1}$ para $1 \leq i \leq d+1$.

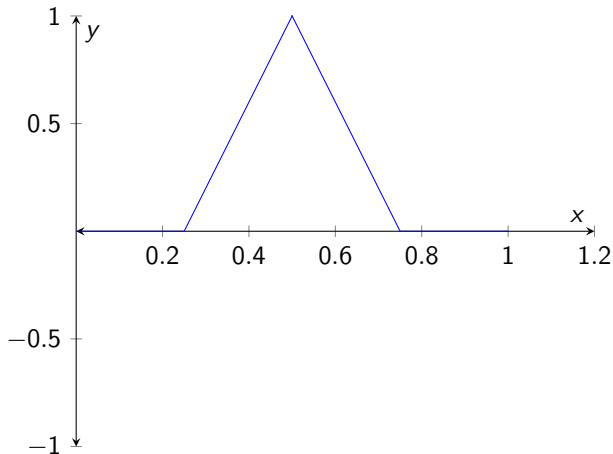
Ejemplo de w_0 con $d = 4$



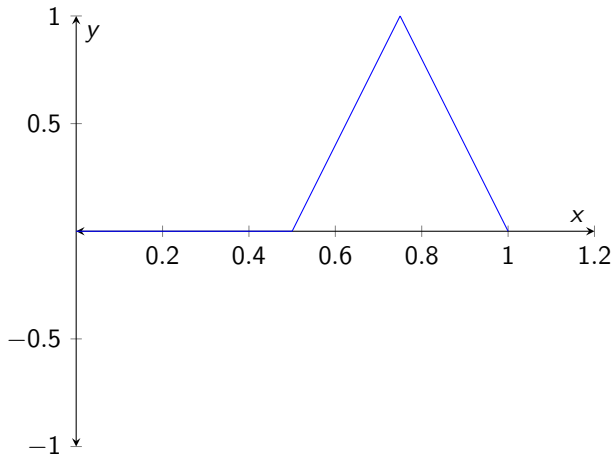
Ejemplo de w_1 con $d = 4$



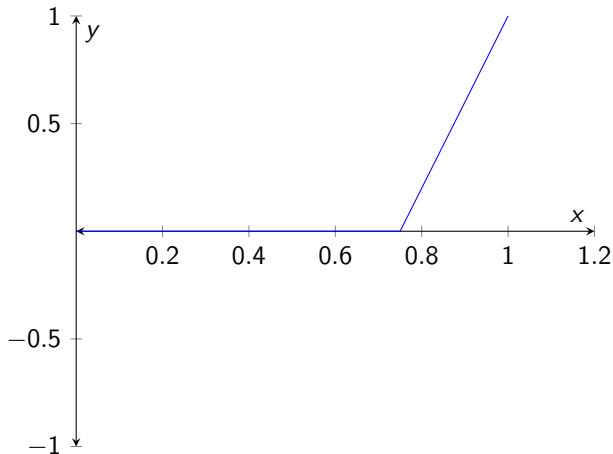
Ejemplo de w_2 con $d = 4$



Ejemplo de w_3 con $d = 4$



Ejemplo de w_4 con $d = 4$



Estrategia

- Conocemos que $\{w_0, w_1, \dots, w_d\}$ es una base de un subespacio lineal $W \subset H^1([0, L])$ de dimensión $d + 1$. Entonces,

$$H_0^1([0, L]) = W \oplus U,$$

es decir la solución u del problema (22)–(23) se puede escribir de forma única como

$$u = \hat{u} + (u - \hat{u})$$

donde $\hat{u} \in W$ y $(u - \hat{u}) \in U$. Siendo \hat{u} y $(u - \hat{u})$ dos funciones linealmente independientes. Además, conocemos que

$$\hat{u} = \sum_{i=0}^d \hat{u}_i w_i$$

se escribirá como una combinación lineal de elementos de la base de W (base de elementos finitos).

Estrategia

- Además, como $w_k(x_k) = 1$ para $0 \leq k \leq d$ se tiene que

$$\hat{u}(x_k) = \sum_{i=0}^d \hat{u}_i w_i(x_k) = \hat{u}_k.$$

Como \hat{u} es una función que tiene que interpolar los puntos de u sobre el conjunto de nodos $\{x_0, x_1, \dots, x_d\}$ asumiremos que

$$\hat{u}_k \approx u(x_k) \text{ para } 0 \leq k \leq d.$$

En consecuencia, para construir la función interpoladora necesitamos obtener los valores del vector

$$\hat{\mathbf{u}} := (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_d) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Estrategia

- Conocemos que $u(0) = u(x_0) = A$ y que $u(L) = u(x_d) = B$, en consecuencia tenemos que

$$\hat{\mathbf{u}} := (A, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{d-1}, B) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

- Con lo que el objetivo se reduce a encontrar un vector, que también denotaremos del mismo modo,

$$\hat{\mathbf{u}} := (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1},$$

y que corresponde a los valores de u sobre los nodos “interiores”, es decir, los nodos que se encuentran en el interior del dominio $[0, L]$, que en este caso corresponde al intervalo abierto $(0, L)$.

- ¿Cómo podemos encontrar $\hat{u} \in W \subset H^1([0, L])$ o lo que es equivalente encontrar el vector $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{d-1}$?
- Consideremos que podemos escribir

$$u = \hat{u} + (u - \hat{u}) = \sum_{i=0}^d \hat{u}_i w_i + (u - \hat{u}),$$

de forma que, el residuo $r := (u - \hat{u})$, es ortogonal a la aproximación, esto es,

$$\langle w_i, (u - \hat{u}) \rangle = 0 \text{ para } 0 \leq i \leq d.$$

- Tenemos ahora dos elecciones para el producto escalar,

$$\langle u, v \rangle_{L^2([0, L])} = \int_0^L u(x) v(x) dx,$$

y

$$\langle u, v \rangle_{H^1([0, L])} = \langle u, v \rangle_{L^2([0, L])} + \langle u', v' \rangle_{L^2([0, L])},$$

■ Observemos que

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle_{H^1([0,L])} &= \langle u, v \rangle_{L^2([0,L])} + \langle u', v' \rangle_{L^2([0,L])} \\ &= \langle u, v \rangle_{L^2([0,L])} + \int_0^L u'(x) v'(x) dx \\ &= \langle u, v \rangle_{L^2([0,L])} + [u'(x) v(x)]_0^L - \int_0^L u''(x) v(x) dx\end{aligned}$$

si consideramos que $v \in C_{00}^\infty([0, L])$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle_{H^1([0,L])} &= \langle u, v \rangle_{L^2([0,L])} - \int_0^L u''(x) v(x) dx \\ &= \langle u, v \rangle_{L^2([0,L])} - \langle u'', v \rangle_{L^2([0,L])} \\ &= \langle u - u'', v \rangle_{L^2([0,L])} \\ &= \langle -u'' + u, v \rangle_{L^2([0,L])}\end{aligned}$$

para $v \in C_{00}^\infty([0, L])$ y la derivada u'' está considerada en el sentido de las distribuciones (o derivada generalizada).

- Si consideramos que la solución aproximada que buscamos en $H^k([0, L])$ cumple que $u'' = 0$ en el sentido de las distribuciones entonces $u' = \text{constante}$ salvo en un conjunto numerable de puntos del intervalo $[0, L]$.
- En consecuencia, si u es una función lineal a trozos, $u' = \text{constante}$ y $u'' = 0$ (en el sentido de las distribuciones) y por tanto

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle_{H^1([0, L])} &= \langle -u'' + u, v \rangle_{L^2([0, L])} \\ &= \langle u, v \rangle_{L^2([0, L])},\end{aligned}$$

se cumplirá para todo $v \in C_{00}^\infty([0, L])$.

- Consideremos que u cumple (22)-(23), entonces

$$\langle -u'' + c u, v \rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, v \rangle_{L^2([0,L])}, \quad (26)$$

se cumple para toda función $v \in L^2([0, L])$.

- Podemos escribir la anterior expresión como

$$\langle -u'', v \rangle_{L^2([0,L])} + \langle c u, v \rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, v \rangle_{L^2([0,L])},$$

y empleando integración por partes obtenemos que

$$\langle -u'', v \rangle_{L^2([0,L])} = \langle u', v' \rangle_{L^2([0,L])}$$

se cumple para todo $v \in H_0^1([0, L])$.

- Podemos concluir que se cumplirá

$$\langle u', v' \rangle_{L^2([0,L])} + \langle c u, v \rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, v \rangle_{L^2([0,L])},$$

para todo $v \in H_0^1([0, L])$.

- Consideremos, que $u = v$ en (26), entonces

$$\langle -u'', u \rangle_{L^2([0,L])} + \langle c u, u \rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, u \rangle_{L^2([0,L])},$$

- Si $c(x) \geq 0$ entonces se cumple que

$$\begin{aligned}\langle c u, u \rangle_{L^2([0,L])} &= \int_0^L c(x) u(x)^2 dx \\ &= \int_0^L \sqrt{c(x)} u(x) \sqrt{c(x)} u(x) dx \\ &= \langle \sqrt{c} u, \sqrt{c} u \rangle_{L^2([0,L])} = \|\sqrt{c} u\|_{L^2([0,L])}^2\end{aligned}$$

- Consideremos, que $u = v$ en (26), entonces

$$\langle -u'', u \rangle_{L^2([0,L])} + \langle c u, u \rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, u \rangle_{L^2([0,L])}, \quad (27)$$

- Por otro lado, empleando integración por partes y que $u \in H_0^1([0, L])$ obtenemos:

$$\langle -u'', u \rangle_{L^2([0,L])} = \langle u', u' \rangle_{L^2([0,L])} = \|u'\|_{L^2[0,L]}^2$$

- En consecuencia, si $c(x) \geq 0$ entonces podemos escribir (27) como

$$\|u'\|_{L^2[0,L]}^2 + \|\sqrt{c} u\|_{L^2([0,L])}^2 - \langle f, u \rangle_{L^2([0,L])} = 0. \quad (28)$$

Definición

Si $c(x) \geq 0$ en una función de forma que $\sqrt{c(x)} \in L^2([0, L])$, definamos sobre $H^1([0, L])$ o sobre $H_0^1([0, L])$ la norma

$$\|u\|_{H_c^1([0, L])}^2 := \|u'\|_{L^2[0, L]}^2 + \|\sqrt{c} u\|_{L^2([0, L])}^2$$

que deviene del producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H_c^1([0, L])} = \langle u', v' \rangle_{L^2([0, L])} + \langle \sqrt{c} u, \sqrt{c} v \rangle_{L^2([0, L])}$$

La derivada de funciones definidas sobre un espacio de Hilbert

Consideremos una función

$$f : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida sobre un espacio de Hilbert H y que es derivable en un punto $u \in H$. Entonces, la derivada de Frèchet de f en u que se denota por $f'(u)$ es una función lineal:

$$f'(u) : H \longrightarrow \mathbb{R},$$

es decir, cumple que

- 1 $f'(u)(v + w) = f'(u)(v) + f'(u)(w)$ para todo $v, w \in H$,
- 2 $f'(u)(\alpha v) = \alpha f'(u)(v)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in H$.

Ejemplo 1

Consideremos para una función $v \in H^1([0, L])$ fijada la función

$$f : H^1([0, L]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por $f(u) = \langle u, v \rangle_{H^1([0, L])}$. Entonces

$$f(u + \delta u) - f(u) = \langle u + \delta u, v \rangle_{H^1([0, L])} - \langle u, v \rangle_{H^1([0, L])} = \langle \delta u, v \rangle_{H^1([0, L])}.$$

Esto lo podemos escribir como

$$\delta f(u) \delta u = f(u + \delta u) - f(u) = \langle \delta u, v \rangle_{H^1([0, L])},$$

es decir, la derivada $f'(u)(\cdot) = \langle \cdot, v \rangle_{H^1([0, L])}$ es una función lineal de $H^1([0, L])$ en \mathbb{R} .

Ejemplo 2

Consideremos la función cuadrática

$$g : H^1([0, L]) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por $g(u) = \langle u, u \rangle_{H^1([0, L])} = \|u\|_{H^1([0, L])}^2$. Entonces

$$\begin{aligned} g(u + \delta u) - g(u) &= \langle u + \delta u, u + \delta u \rangle_{H^1([0, L])} - \langle u, u \rangle_{H^1([0, L])} \\ &= 2\langle \delta u, u \rangle_{H^1([0, L])} + \|\delta u\|_{H^1([0, L])}^2. \end{aligned}$$

Recordemos que para funciones en $H = \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$\delta g(u) \delta u = g(u + \delta u) - g(u) = g'(u) \delta u + o(|\delta u|^2),$$

si la comparamos con la anterior expresión llegaremos a la conclusión que

$$g'(u) \delta u = 2\langle \delta u, u \rangle_{H^1([0, L])} = 2f(u), \text{ con } f(u) := \langle \delta u, u \rangle_{H^1([0, L])},$$

es decir, $g'(u) \delta u = 2\langle \delta u, u \rangle_{H^1([0, L])} = 2f(u)$.

Observación

- Del Ejemplo 2 deducimos que Si $g(u) = \|u\|_{H^1([0,L])}^2$ entonces $g'(u)\delta u = 2\langle \delta u, u \rangle_{H^1([0,L])} = 2f(u)$.
- Entonces, podemos escribir

$$f(u) = \frac{1}{2}g'(u)\delta u := \langle \delta u, u \rangle_{H^1([0,L])}.$$

- Podemos relacionar entonces la derivada de f con la derivada de $g'(u)$:

$$f'(\delta v)\delta v = \frac{1}{2}g''(u)\delta u \delta v = \langle \delta u, \delta v \rangle_{H^1([0,L])}.$$

- Podemos entonces concluir que la derivada segunda de g (la norma al cuadrado) es lo que se conoce como una forma bilineal.

$$g''(u)(v, w) = 2\langle v, w \rangle_{H^1([0,L])}.$$

La derivada de la norma al cuadrado

Consideremos el funcional

$$\mathcal{E} : H_c^1([0, L]) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{H_c^1([0, L])}^2.$$

Recordemos que la derivada del funcional es una forma lineal:

$$\mathcal{E}'(u) : H_c^1([0, L]) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}'(u)\delta u = \langle u, \delta u \rangle_{H_c^1([0, L])}.$$

La derivada segunda entonces es una forma bilineal:

$$\mathcal{E}''(u) : H_c^1([0, L]) \times H_c^1([0, L]) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

En nuestro caso

$$\mathcal{E}''(u)(v, w) = \langle v, w \rangle_{H_c^1([0, L])},$$

es una forma bilineal definida positiva:

$$\mathcal{E}''(u)(v, v) = \langle v, v \rangle_{H_c^1([0, L])} = \|v\|_{H_c^1([0, L])}^2 \geq 0.$$

Si consideramos el funcional

$$J : H_c^1([0, L]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{H_c^1([0, L])}^2 - \langle f, u \rangle_{L^2([0, L])} = \mathcal{E}(u) - \langle f, u \rangle_{L^2([0, L])}.$$

es derivable, su primera derivada es

$$J'(u)\delta u = \mathcal{E}'(u)\delta u - \langle f, \delta u \rangle_{L^2([0, L])}$$

y su segunda derivada

$$J''(u)\delta u \delta v = \mathcal{E}''(u)\delta u \delta v - \langle f, \delta v \rangle_{L^2([0, L])},$$

es una forma cuadrática definida positiva, lo que implica que la función J es convexa.

Teorema (Existencia y unicidad de soluciones débiles)

Sean $c \in L^2([0, L])$ de forma que $c(x) \geq 0$. Entonces para cada $f \in L^2([0, L])$ existe una única función $u^* \in H_0^1([0, L])$ se cumple que

$$J(u^*) = \min_{u \in H_0^1([0, L])} J(u).$$

Además, si u^* es la solución de (22) con condiciones frontera de Dirichlet, entonces $u^* = u^*$, y donde se cumple la condición de optimalidad primer orden siguiente:

$$J'(u^*)\delta v = 0, \quad (29)$$

para todo δv en un conjunto denso de $H_0^1([0, L])$, es decir,

$$\langle (u^*)', (\delta v)' \rangle_{L^2([0, L])} + \langle c u^*, \delta v \rangle_{L^2([0, L])} = \langle f, \delta v \rangle_{L^2([0, L])}, \quad (30)$$

para todo v en un conjunto denso de $H_0^1([0, L])$.

Definición (Solución débil)

Diremos que una función $u \in H_0^1([0, L])$ es la solución débil de (22) con condiciones frontera de Dirichlet, es decir $u(0) = u(L) = 0$ si cumple que

$$\langle u', v' \rangle_{L^2([0, L])} + \langle c u, v \rangle_{L^2([0, L])} = \langle f, v \rangle_{L^2([0, L])}, \quad (31)$$

para toda función v en un conjunto denso de $H_0^1([0, L])$ (por ejemplo una base).

El Teorema 6 nos dice que una solución débil es la solución única de un problema de optimización convexo, por ese motivo decimos que es una *solución variacional*.

Consideremos el subespacio

$$U_{d-1} := \text{span}\{w_1, \dots, w_{d-1}\} \subset H_0^1([0, L]),$$

donde omitimos las funciones w_0 y w_d que están en $H^1([0, L])$ pero no en $H_0^1([0, L])$. Conocemos que $\dim U_{d-1} = d - 1$, y en consecuencia

$$H_0^1([0, L]) = U_{d-1} \oplus U_{d-1}^\perp,$$

donde

$$U_{d-1}^\perp := \left\{ z \in H_0^1([0, L]) : \langle z, w_i \rangle_{H_0^1([0,1])} = 0, 1 \leq i \leq d-1 \right\}.$$

Una solución débil u se escribe entonces como

$$u = \sum_{i=1}^{d-1} \hat{u}_i w_i + r \text{ de forma que } \left\langle \sum_{i=1}^{d-1} \hat{u}_i w_i, r \right\rangle_{H_0^1([0,1])} = 0.$$

Escribamos

$$\hat{u} := \sum_{i=1}^{d-1} \hat{u}_i w_i.$$

Entonces, $u = \hat{u} + r$ y se cumplen las siguientes igualdades:

$$\|u\|_{H_0^1([0,1])}^2 = \|\hat{u}\|_{H_0^1([0,1])}^2 + \|r\|_{H_0^1([0,1])}^2, \quad (32)$$

y

$$\langle f, u \rangle_{H_0^1([0,1])} = \langle f, \hat{u} \rangle_{H_0^1([0,1])} + \langle f, r \rangle_{H_0^1([0,1])}, \quad (33)$$

es decir,

$$J(u) = J(\hat{u}) + J(r).$$

En consecuencia, $J(\hat{u})$ es una aproximación de $J(u)$ con un error $J(r)$.
Vamos pues a resolver, el problema variacional discreto siguiente:

$$\min_{(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{d-1})} J \left(\sum_{i=1}^{d-1} \hat{u}_i w_i \right). \quad (34)$$

Empleando el Teorema 6, resolver (34) es equivalente a encontrar $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{d-1})$ de forma que se cumpla

$$\left\langle \sum_{i=1}^{d-1} \hat{u}_i w'_i, w'_k \right\rangle_{L^2([0,L])} + \left\langle c \sum_{i=1}^{d-1} \hat{u}_i w_i, w_k \right\rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, w_k \rangle_{L^2([0,L])} \quad (35)$$

para $1 \leq k \leq d-1$. La expresión (35) es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{d-1} \hat{u}_i \langle w'_i, w'_k \rangle_{L^2([0,L])} + \sum_{i=1}^{d-1} \hat{u}_i \langle c w_i, w_k \rangle_{L^2([0,L])} = \langle f, w_k \rangle_{L^2([0,L])}. \quad (36)$$

- Observemos que podemos calcular explícitamente

$$M_{k,i} := \langle w'_i, w'_k \rangle_{L^2([0,L])} = \int_0^1 w'_i(x) w'_k(x) dx,$$

$$L_{k,i} := \langle c w_i, w_k \rangle_{L^2([0,L])} = \int_0^1 c(x) w_i(x) w_k(x) dx,$$

para $1 \leq i, k \leq d-1$, lo que nos proporciona dos matrices $M, L \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$. Además, obtenemos un vector $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ de componentes:

$$f_i := \langle f, w_i \rangle_{L^2([0,L])} = \int_0^1 f(x) w_i(x) dx,$$

para $1 \leq i \leq d$.

Podemos concluir entonces que (36) es equivalente a resolver, el sistema lineal:

$$M\hat{u} + L\hat{u} = \mathbf{f},$$

es decir,

$$(M + L)\hat{u} = \mathbf{f}. \tag{37}$$

Vamos a calcular, fijado el índice $i \geq 1$:

$$\langle w'_i, w'_k \rangle_{L^2([0,L])} = \int_0^1 w'_i(x) w'_k(x) dx.$$

En primer lugar observemos que

$$]x_{i-1}, x_{i+1}[\cap]x_{k-1}, x_{k+1}[= \emptyset$$

si y solo si se cumple que $i+1 \leq k-1$ o $k+1 \leq i-1$, es decir $i+2 \leq k$ o $k \leq i-2$. Como w_i toma valores cero fuera del intervalo $]x_{i-1}, x_{i+1}[$ y w_k fuera del intervalo $]x_{k-1}, x_{k+1}[$ entonces,

$$M_{k,i} = \langle w'_i, w'_k \rangle_{L^2([0,L])} = 0$$

siempre que $i+2 \leq k$ o $k \leq i-2$. En consecuencia, hay que evaluar

$$M_{k,i} = \langle w'_i, w'_k \rangle_{L^2([0,L])}$$

solo cuando $i-1 \leq k \leq i+1$. Lo mismo ocurre con las entradas $L_{k,i}$ de la matriz L .

Se puede comprobar que

$$w_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i-1} \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Entonces se obtiene,

$$M_{i,i} = \frac{1}{(x_i - x_{i-1})} + \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)},$$
$$M_{i-1,i} = -\frac{1}{(x_i - x_{i-1})} \text{ y } M_{i,i+1} = -\frac{1}{(x_{i+1} - x_i)}$$

En el caso particular, $h := x_i - x_{i-1}$ constante, obtenemos

$$M_{i-1,i} = -\frac{1}{h}, \quad M_{i,i} = \frac{2}{h}, \quad M_{i,i+1} = -\frac{1}{h}.$$

y el resto de componentes son igual a cero.

Si tomamos $c(x) = c > 0$ constante, entonces

$$L_{i,i} = c \langle w_i, w_i \rangle_{L^2([0,L])} = c \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{3},$$

$$L_{i-1,i} = \frac{c}{(x_i - x_{i-1})^2} \left(-\frac{x_i^3 - x_{i-1}^3}{3} + (x_i - x_{i-1}) \frac{x_i^2 + x_{i-1}^2}{2} \right),$$

y

$$L_{i,i+1} = \frac{c}{(x_{i+1} - x_i)^2} \left(-\frac{x_{i+1}^3 - x_i^3}{3} + (x_{i+1} - x_i) \frac{x_{i+1}^2 + x_i^2}{2} \right).$$

En el caso particular $h = x_i - x_{i-1}$ constante, obtenemos,

$$L_{i,i} = \frac{2h}{3}$$

y

$$L_{i-1,i} = L_{i,i+1} = \frac{h}{6}.$$

Podemos concluir, que para este caso que la matriz

$$(M + L) = \begin{pmatrix} \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} \end{pmatrix}$$

es una matriz triadiagonal.

- Vamos a resolver numericamente el problema a valor frontera

$$-u''(x) = f(x) \quad u(0) = u(1) = 0$$

para u término fuente constante, esto es,
 $f(x) = -u''(x) = (2\pi)^2 \sin(2\pi x)$. La solución es en este caso
 $u(x) = \sin(2\pi x)$.

- Construiremos la solución aproximada para obtener una solución aproximada u_h del problema empleando el método de los elementos finitos con una malla uniforme .
- Para ello consideramos una partición del intervalo $[0, 1]$ en $d + 1$ subintervalos de longitud $h = 1/(d + 1)$, esto es, $x_i = ih$ para $i = 0, 1, \dots, d + 1$.
- Consideraremos las funciones test w_i definidas para $i = 0, \dots, d$ de forma que

$$\dim \text{span}\{w_0, w_1, \dots, w_d\} = d + 1.$$

- En primer lugar calcularemos la integral

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} f(x) w_0(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} (2\pi)^2 \sin(2\pi x) \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} dx \\ &= \frac{(2\pi)^2}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} \sin(2\pi x) (x_1 - x) dx\end{aligned}$$

- En general hay que tener en cuenta las integrales del tipo

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) w_i(x) dx$$

que se descomponen en dos integrales

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) w_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (2\pi)^2 \sin(2\pi x) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} dx$$

y

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) w_i(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (2\pi)^2 \sin(2\pi x) \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} dx$$

- Finalmente hay que tener en cuenta la integral

$$\int_{x_{d-1}}^{x_d} f(x) w_d(x) dx = \int_{x_{d-1}}^{x_d} (2\pi)^2 \sin(2\pi x) \frac{x - x_{d-1}}{x_d - x_{d-1}} dx$$

En primer lugar, vamos a importar las librerías necesarias para realizar los cálculos.

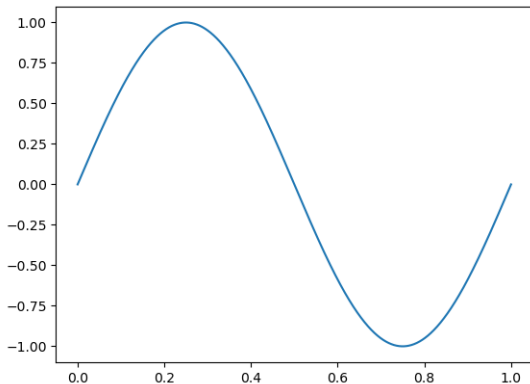
```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import matplotlib.colors as colors
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from scipy.integrate import quad
```

En segundo lugar, vamos a definir la malla.

```
1 d=3000
2 x=np.linspace(0,1,d+2)
3 x[0]=0
4 x[d+1]=1
```

Representamos la gráfica de la función $u(x) = \sin 2\pi x$ solución del problema:

```
1 u=np.sin(2*np.pi*x)
2 plt.plot(x,u)
3 plt.show()
```



Vamos a calcular la solución aproximada u_h que definimos como un vector de dimensión $d + 2$ de la forma $u_h = (u_0, u_1, \dots, u_{d+1})$ que inicializamos a cero. Introducimos el paso espacial $h_i = x_{i+1} - x_i$, que en principio será constante e igual a $h = 1/(d + 1)$.

```
1 uh=np.zeros(d+2)
2 h=np.zeros(d+1)
3 for i in range(d+1):
4     h[i]=x[i+1]-x[i]
```


Vamos a reducir el problema a la solución del sistema lineal

$$M u_h = F$$

para ello definimos la matriz M y el vector F de la forma siguiente:

```
1 M=np.zeros((d+2,d+2))
2 F=np.zeros(d+2)
3 M[0,0]=1
4 M[d+1,d+1]=1
5 M[1,1]=1/h[0]
6 F[1]=(2*np.pi)*(2*np.pi)*quad(lambda t: (np.sin(2*np.pi*t)*(
    x[1]-t))/h[0],x[0],x[1]))[0]
```

En este caso $F[1]$ contiene la aproximación numérica de la integral

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) w_0(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} (2\pi)^2 \sin(2\pi x) \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} dx \\ &= \frac{(2\pi)^2}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} \sin(2\pi x) (x_1 - x) dx \end{aligned}$$

Las integrales de la forma

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) w_i(x) dx$$

empleadas para definir el vector F y el resto de componentes de la matriz M se escriben de la forma siguiente:

```
1 for i in range(1,d):
2     M[i,i] = M[i,i] + 1/h[i]
3     M[i,i+1] = M[i,i+1] - 1/h[i]
4     M[i+1,i] = M[i+1,i] - 1/h[i]
5     M[i+1,i+1] = M[i+1,i+1] + 1/h[i]
6     F[i] = F[i] - (2*np.pi)*(2*np.pi)*(quad(lambda t:(np.sin
    (2*np.pi*t)*(t-x[i+1])),x[i],x[i+1])[0])/h[i]
7     F[i+1] = F[i+1] + (2*np.pi)*(2*np.pi)*(quad(lambda t:(np
    .sin(2*np.pi*t)*(t-x[i])),x[i],x[i+1])[0])/h[i]
```

Finalmente hay que tener en cuenta la integral Finalmente hay que tener en cuenta la integral

$$\int_{x_{d-1}}^{x_d} f(x) w_d(x) dx = \int_{x_{d-1}}^{x_d} (2\pi)^2 \sin(2\pi x) \frac{x - x_{d-1}}{x_d - x_{d-1}} dx$$

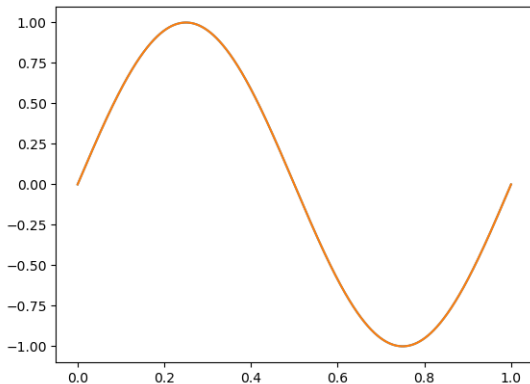
```
1 M[d,d]=M[d,d]+1/h[d]
2 F[d]=F[d] + (2*np.pi)*(2*np.pi)*(quad(lambda t:(np.sin(2*np.pi*t)*(t-x[d-1])),x[d-1],x[d])[0])/h[d]
```

Pasamos entonces a resolver el sistema lineal $M u_h = F$:

```
1 uh=np.linalg.solve(M,F)
```

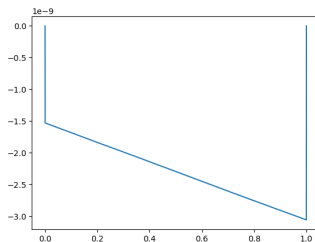
Representamos graficamente la solución aproximada u_h y la solución exacta u en la misma gráfica.

```
1 plt.plot(x,u)
2 plt.plot(x,uh)
3 plt.show()
```



Estudiamos el error de aproximación.

```
1 Error_cuadratico_uh = np.linalg.norm(uh-u)
2 print(Error_cuadratico_uh/d)
3 plt.plot(x,uh-u)
4 plt.show()
```



Error calculado como $\text{error}(i) = (u(x_i) - \hat{u}_i)^2$. El error cuadrático medio: $MCE = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \text{error}(i) = 4.270170468282468e - 11$.