

# Métodos numéricos en Ingeniería: Ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales (Método de los Elementos Finitos)

F. Chinesta y A. Falcó

A entregar el 21 de Enero de 2022

1. Consideremos la función de  $H_0^2([0, 1])$  definida por

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 3x & \text{si } 0 \leq x < 1/3, \\ 2 & \text{si } x = 1/3, \\ 2x + 1 & \text{si } 1/3 < x < 2/3, \\ 2 & \text{si } x = 2/3, \\ \frac{x^2}{2} + 5x & \text{si } 2/3 < x < 1. \end{cases}$$

Sea  $f \in L_2([0, 1])$  la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 3x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/3, \\ 2x + 1 & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ \frac{x^2}{2} + 5x - 1 & \text{si } 2/3 \leq x < 1. \end{cases}$$

Demuestra que  $u$  es solución débil del problema a valor frontera

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \text{ en } 0 < x < 1 \quad (0.1)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (0.2)$$

2. Calcula empleando el método de los elementos finitos una aproximación  $\hat{u} \in \mathbb{R}^{d-2}$  del problema a valor frontera (0.1)-(0.2), con  $d = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500$  y efectúa un análisis del error de aproximación, empleando los valores entre la solución exacta y la solución aproximada.
3. Calcula empleando un método de diferencias finitas (implícito o explícito) una aproximación  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{d-2}$  del problema a valor frontera (0.1)-(0.2), con  $d = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500$  y efectúa un análisis del error de aproximación, empleando los valores entre la solución exacta y la solución aproximada.
4. Compara las soluciones aproximadas  $\hat{u}$  obtenidas en el apartado 2 y las soluciones aproximadas  $\tilde{u}$  obtenidas en el apartado 3.
5. ¿Qué conclusiones podemos extraer de la comparación efectuada en el apartado anterior?