Método de los Elementos Finitos

Clase 2: Elementos finitos en 1D: espacios discretos y ensamblaje

Antonio Falcó

Departamento de Matemáticas

Estructura de la clase

1. Recordatorio: formulación variacional continua
2. Malla y elementos finitos en 1D
3. Funciones de forma y espacio discreto
4. Formulación discreta y sistema lineal
5. Vector de cargas y cuadratura numérica
6. Ejemplo numérico sencillo
7. Cierre de la clase

Problema modelo y formulación variacional (Clase 1)

Consideramos de nuevo el problema modelo:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

Formulación variacional

Encontrar $u \in H_0^1(0, L)$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(0, L),$$

donde

$$a(u, v) = \int_0^L u'(x)v'(x)\, dx, \qquad L(v) = \int_0^L f(x)v(x)\, dx.$$

- La solución débil está bien definida por el teorema de Lax–Milgram.
- Nuestro objetivo ahora: construir una **aproximación discreta** u_h.

Idea básica del Método de Galerkin

- Elegimos un subespacio de dimensión finita $V_h \subset H_0^1(0, L)$.
- Buscamos $u_h \in V_h$ tal que
$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$
- Si $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ es una base de V_h, podemos escribir
$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} U_j \, \varphi_j(x),$$
y el problema se reduce a un sistema lineal:
$$A\mathbf{U} = \mathbf{F}.$$
- El MEF estructura V_h a partir de:
  - Una *malla* del intervalo.
  - *Funciones de forma* locales asociadas a los nodos.

Partición del intervalo $(0, L)$

Definición

Una **malla** (o partición) del intervalo $(0, L)$ es una colección de puntos

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = L,$$

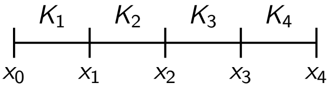
y los subintervalos

$$K_i = (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \ldots, N,$$

se llaman **elementos**.

- Longitud del elemento: $h_i = x_i - x_{i-1}$.
- Tamaño de malla: $h = \max_i h_i$.
- Malla uniforme: $h_i = h$ para todo i.

Representación esquemática de una malla 1D



- Cada subintervalo K_i será un *elemento finito*.
- Las funciones de forma se construirán típicamente de forma local sobre cada elemento y se ensamblarán globalmente.

Espacio de polinomios locales

Definición

Dado un elemento $K_i = (x_{i-1}, x_i)$, definimos el espacio de polinomios de grado ≤ 1 como

$$\mathbb{P}_1(K_i) = \{p : K_i \to \mathbb{R} \text{ polinomio de grado} \leq 1\}.$$

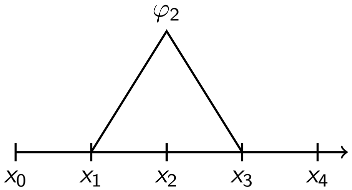
- Una base típica de $\mathbb{P}_1(K_i)$ son los polinomios de Lagrange asociados a los nodos x_{i-1} y x_i.
- En 1D, $\mathbb{P}_1$ corresponde a *elementos lineales* (o *P1*).

Funciones de forma nodales en 1D

- Para una malla con nodos $\{x_j\}_{j=0}^{N}$, definimos $\varphi_j : (0, L) \to \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, N$, tales que:

$$\varphi_j(x_k) = \delta_{jk} \quad \text{(propiedad nodal).}$$

- Para elementos lineales:
  - φ_j es una función continua, lineal en cada elemento.
  - Soporte local: $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset (x_{j-1}, x_{j+1})$.



Definición del espacio discreto V_h

Definición

Definimos el espacio de elementos finitos lineales como

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0([0, L]) \ : \ v_h|_{K_i} \in \mathbb{P}_1(K_i) \ \forall i, \ v_h(0) = v_h(L) = 0 \right\}.$$

- Restricción de Dirichlet homogénea incorporada: $v_h(0) = v_h(L) = 0$.
- Dimensión de V_h: $N - 1$ (nodos interiores).
- Una base de V_h está formada por las funciones nodales $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N-1}$ asociadas a los nodos interiores.

Representación de la solución aproximada

- Buscamos $u_h \in V_h$ de la forma
$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N-1} U_j \, \varphi_j(x),$$
donde los coeficientes U_j son desconocidos.
- El problema variacional discreto es:
$$\text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$
- Imponiendo la condición para $v_h = \varphi_i$, $i = 1, \ldots, N-1$, obtenemos un sistema lineal:
$$\sum_{j=1}^{N-1} a(\varphi_j, \varphi_i) \, U_j = L(\varphi_i), \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

Matriz de rigidez y vector de cargas

- Definimos la **matriz de rigidez** $A \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$:

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^L \varphi_j'(x)\, \varphi_i'(x)\, dx.$$

- Definimos el **vector de cargas** $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N-1}$:

$$F_i = L(\varphi_i) = \int_0^L f(x)\, \varphi_i(x)\, dx.$$

- El problema discreto se escribe como

$$A\mathbf{U} = \mathbf{F},$$

  donde $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_{N-1})^T$.

Construcción local de la matriz de rigidez

- Para un elemento $K_i = (x_{i-1}, x_i)$, con longitud h_i, las funciones de forma locales son φ_{i-1} y φ_i.
- Restricción a K_i:

$$\varphi'_{i-1}(x) = -\frac{1}{h_i}, \quad \varphi'_i(x) = \frac{1}{h_i}.$$

- La matriz elemental $A^{(i)} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene entradas

$$A^{(i)}_{lm} = \int_{K_i} \varphi'_{i-1+l-1}(x)\, \varphi'_{i-1+m-1}(x)\, dx, \quad l, m = 1, 2.$$

- Cálculo:

$$A^{(i)} = \frac{1}{h_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ensamblaje de contribuciones elementales

- La matriz global A se construye sumando las contribuciones de cada elemento en las posiciones correspondientes a sus nodos.
- Para cada elemento K_i:
  - nodos locales $\{x_{i-1}, x_i\}$ corresponden a índices globales $i-1, i$.
  - sumamos $A^{(i)}$ en las posiciones $(i-1, i-1)$, $(i-1, i)$, $(i, i-1)$, (i, i).
- Debido a las condiciones $u(0) = u(L) = 0$, los nodos 0 y N se eliminan del sistema final (son valores conocidos).
- Resultado: matriz tridiagonal simétrica y definida positiva.

Estructura de la matriz global en malla uniforme

Supongamos una malla uniforme con $h = L/N$. Entonces:

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}.$$

- Matriz muy estructurada: banda estrecha (tridiagonal).
- Se puede resolver de forma muy eficiente mediante métodos directos o iterativos.

Vector de cargas elemental

- En el elemento K_i, el vector de cargas elemental $\mathbf{F}^{(i)}$ tiene entradas

$$F_1^{(i)} = \int_{K_i} f(x)\,\varphi_{i-1}(x)\,dx, \quad F_2^{(i)} = \int_{K_i} f(x)\,\varphi_i(x)\,dx.$$

- Para f suave, podemos usar reglas de cuadratura:
  - Regla del trapecio:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\varphi_{i-1}(x)\,dx \approx \frac{h_i}{2} f(x_{i-1}) \cdot 1,$$

    etc.
  - Regla de Gauss de un punto en el centro del elemento.
- El vector global $\mathbf{F}$ se obtiene sumando las contribuciones $\mathbf{F}^{(i)}$ en los nodos correspondientes.

Resumen del procedimiento de ensamblaje

1. Generar la malla: nodos $\{x_j\}_{j=0}^{N}$ y elementos K_i.
2. Inicializar A y $\mathbf{F}$ a cero.
3. Para cada elemento K_i:
    1. Calcular la matriz elemental $A^{(i)}$.
    2. Calcular el vector de cargas elemental $\mathbf{F}^{(i)}$.
    3. Ensamblar en A y $\mathbf{F}$ usando la conectividad de nodos globales.
4. Incorporar condiciones de contorno de Dirichlet:
    - Eliminar filas/columnas asociadas a nodos con valor conocido.
5. Resolver el sistema lineal resultante.

Ejemplo: $-u'' = 1$ en $(0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$

- Problema:
$$\begin{cases} -u''(x) = 1, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$
- Solución exacta:
$$u(x) = \frac{1}{2}x(1-x).$$
- Utilizamos una malla uniforme con N elementos:
$$x_j = jh, \quad h = \frac{1}{N}, \quad j = 0, \dots, N.$$
- Matriz de rigidez:
$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo (cont.)

- Para $f(x) \equiv 1$, el vector de cargas exacto verifica

$$F_i = \int_0^1 \varphi_i(x)\, dx.$$

- En malla uniforme, se puede comprobar que

$$F_1 = F_{N-1} = \frac{h}{2}, \quad F_i = h,\ i = 2, \ldots, N-2.$$

- Resolviendo $A\mathbf{U} = \mathbf{F}$, obtenemos los valores aproximados $u_h(x_i) = U_i$.
- El error $\|u - u_h\|_{H^1}$ decrece como $\mathcal{O}(h)$ y $\|u - u_h\|_{L^2}$ como $\mathcal{O}(h^2)$ (se discutirá en la Clase 4).

Resumen de la Clase 2

- Hemos introducido la noción de **malla** y **elementos** en 1D.
- Hemos definido las **funciones de forma** lineales (elementos P1).
- Hemos construido el **espacio discreto** $V_h \subset H_0^1(0, L)$.
- Hemos obtenido el sistema lineal $A\mathbf{U} = \mathbf{F}$ mediante la formulación variacional discreta.
- Hemos visto cómo ensamblar A y $\mathbf{F}$ a partir de contribuciones elementales.

Próximo paso (Clase 3)

Extender estas ideas a 2D: elementos triangulares, coordenadas baricéntricas, integrales en el elemento de referencia y ensamblaje en mallas bidimensionales.

¿Preguntas?