Resultados teóricos

Francisco Chinesta y Antonio Falcó

Objetivo metodológico

Buscar un marco general para aproximar las soluciones de problemas a valores frontera:

$$-u''(x) + c(x)\, u(x) = f(x) \tag{1}$$
$$u(0) = A \text{ and } u'(0) = B. \tag{2}$$

- Las soluciones de (1) son funciones $u : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$,
- Podemos escribir (1) de la forma siguiente

$$-\frac{d^2}{dx^2}\, u(x) + c(x)\, u(x) = f(x) \tag{3}$$
$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\right)\, u(x) = f(x). \tag{4}$$

- Observemos que (4) se puede escribir como

$$A\,u(x) = f(x)$$

donde

$$A := \left(-\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\right).$$

- A cumple que si u, v son funciones entonces $u + v$ es también una función y

$$A\,(u(x) + v(x)) = A\,u(x) + A\,v(x),$$

además si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un escalar $\lambda\,u$ es una función y

$$A\,(\lambda u(x)) = \lambda\,(A\,u(x)).$$

Discusión

- El conjunto de funciones $u : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ que denotaremos por $\mathbb{R}^{[0,L]}$ tiene una estructura de espacio vectorial tomando como cuerpo de escalares los números reales $\mathbb{R}$ al igual que los vectores del espacion vectorial

$$\mathbb{R}^d = \left\{ \mathbf{u} : \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \text{ donde } u_i \in \mathbb{R} \text{ para } 1 \leq i \leq d \right\}$$

- Podemos considerar

$$A : \Omega \subset \mathbb{R}^{[0,L]} \longrightarrow \mathbb{R}^{[0,L]},$$

donde Ω es un conjunto de funciones adecuado, como una aplicación lineal.

Discusión

- Aplicación lineal quiere decir que cumple

$$A\,(u(x) + v(x)) = A\,u(x) + A\,v(x)$$

y

$$A\,(\lambda\,u(x)) = \lambda\,(A\,u(x))$$

las mismas propiedades que la multiplicación de una matriz por un vector.

- En consecuencia, resolver (1) es equivalente a encontrar $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^{[0,L]}$ de forma que

$$A\,u(x) = f(x).$$

- El equivalente en $\mathbb{R}^d$ es dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ y un vector $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^d$ encontrar un vector $\mathbf{u}$ de forma que

$$A\,\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Estrategia a seguir

- Consideremos una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ y un vector } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Si queremos encontrar $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ de forma que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Podemos proceder del modo siguiente:

- Elegimos dos vectores ortogonales

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ donde } \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

esto nos asegura que son linealmente independientes.

- La solución que buscamos se escribe con respecto esta base como
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Entonces, observemos que
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \left(u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$
$$u_1 \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -a_{11} + a_{12} \\ -a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}$$
y necesitamos aislar u_1 y u_2 para poder obtener un valor concreto de $\mathbf{u}$.

- Empleando que
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
es una base de $\mathbb{R}^2$, conocemos que $\mathbf{u}$ será la solución de de $A\,\mathbf{u} = \mathbf{f}$ si y solo si cumple
$$\left\langle A\,\mathbf{u}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \mathbf{f}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$\left\langle A\,\mathbf{u}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \mathbf{f}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
- En consecuencia, para implementar esta metodología solo necesitamos una estructura lineal y un producto escalar asociado a la estructura lineal (esto nos permite definir la noción de perpendicularidad).

En la práctica tendremos que encontrar u_1, u_2 de forma que:

$$u_1 \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

y

$$\left\langle u_1 \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -a_{11} + a_{12} \\ -a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

que es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Es decir, encontrar u_1, u_2 de forma que:

$$u_1 \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + u_2 \left\langle \begin{pmatrix} -a_{11} + a_{12} \\ -a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = f_1 + f_2$$

y

$$u_1 \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + u_2 \left\langle \begin{pmatrix} -a_{11} + a_{12} \\ -a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -f_1 + f_2$$

- El objetivo de los resultados teóricos que veremos a lo largo de este tema es el de **definir espacios vectoriales a partir de funciones derivables que tengan buenas propiedades para resolver Ecuaciones en Derivadas Parciales y que a su vez nos permitan diseñar algoritmos para aproximar con una cierta precisión las soluciones de las mismas**.
- Necesitamos espacios de funciones que se *parezcan* a $\mathbb{R}^d$.
- $\mathbb{R}^d$ tiene una estructura lineal: Tiene definida una suma: $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ y una multiplicación por escalares $\lambda\mathbf{x}$ con $\lambda \in \mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
- La funciones derivables también tienen esa estructura, la suma de funciones derivables es una función derivable y si multiplico una función derivable por un escalar, el resultado sigue siendo una función derivable.

- $\mathbb{R}^d$ tiene definida una norma (distancia) que se puede representar por un producto escalar:

$$\|\mathbf{x}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

  donde el producto escalar se define como

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_d y_d.$$

- ¿Podemos definir un producto escalar similar para funciones derivables?

- La existencia de este producto escalar nos permitiría realizar operaciones geométricas interesantes y útiles:
  - Si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ entonces conocemos que $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, en particular ambos vectores son linealmente independientes.
  - $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.
  - **Teorema de Pitágoras**. Si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ entonces se cumple $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.
  - $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$.
  - Dado un subspacio $U = \mathrm{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^d$ con $k \leq d$ donde los vectores de la base son ortogonales dos a dos, se cumple que la proyección ortogonal de un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ sobre U es igual a

$$P_U(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_k \rangle}{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle}\mathbf{u}_k$$

    que es la mejor aproximación de $\mathbf{u}$ por vectores que están en el sub-espacio U :

$$\min_{\mathbf{w} \in U} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{u} - P_U(\mathbf{u})\|.$$

Definición (Espacio pre-Hilbert)

Si en un espacio vectorial V podemos definir un producto escalar, es decir una aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

de forma que

1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,
2. $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$,
3. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ y $\langle u, u \rangle = 0$ si y solo si $u = 0$.

Si completamos este espacio V añadiendo los límites de todas las sucesiones de Cauchy obtenemos un espacio vectorial mayor que denotaremos por H, y que por tanto contiene a V. Además tiene definido un producto escalar como extensión del original:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde $\langle u, v \rangle_H := \lim_{n \to \infty} \langle u_n, v_n \rangle_V$.

Definición (Norma hilbertiana)

Si H es un espacio de Hilbert, entonces H es un espacio vectorial sobre un cuerpo de escalares $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y donde hay definida una distancia al origen o norma:

$$\|u\|_H = \sqrt{\langle u, v\rangle_H}$$

que tiene propiedades similares a la norma euclídea de $\mathbb{R}^d$.

En general, un espacio vectorial $\mathcal{X}$ dotado de una norma $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ es un espacio de Hilbert si toda sucesión de Cauchy en $\mathcal{X}$ es convergente y existe un producto escalar en $\mathcal{X}$, denotado por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$ de forma que $\|x\|_{\mathcal{X}} = \sqrt{\langle x, x\rangle_{\mathcal{X}}}$ se cumple para todo $x \in \mathcal{X}$.

Consideremos el conjunto de funciones

$$\mathbb{R}^{[0,L]} := \{v | v : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

- El conjunto $\mathbb{R}^{[0,L]}$ es un espacio vectorial. Dadas dos funciones en $u, v \in \mathbb{R}^{[0,L]}$ podemos definir

$$\langle u, v\rangle := \int_0^L u(x)v(x)dx$$

  siempre que dicha integral exista.
- A priori parece difícil determinar que tipo de funciones nos van a permitir definir un producto de este tipo. Por ejemplo, si la función $u \geq 0$ está acotada $(u \leq C)$ y $v(x) \to \infty$ cuando $x \to L$ entonces la integral no está definida.

Observación

Si definimos el producto escalar para funciones de $u, v \in \mathbb{R}^{[0,L]}$ como

$$\langle u, v \rangle := \int_0^L u(x)v(x)dx,$$

entonces

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\int_0^L u(x)^2 dx} \geq 0.$$

Se tiene que cumplir entonces que $\int_0^L u(x)^2 dx < \infty$ y que si $\|u\| = 0$, es decir,

$$\int_0^L u(x)^2 = 0$$

entonces $u = 0$.

Problema metodológico

- Consideremos para $L = 1$ las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ y } x \neq 1/2, 1/3, 1/4, \\ 0 & \text{si} \quad x = 1/2, 1/3, 1/4, \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ y } x \neq 3/4, 5/8 \\ 0 & \text{si} \quad x = 3/4, 5/8. \end{cases}$$

En sentido estricto $f(x) \neq g(x)$, ahora bien si dibujamos ambas funciones estas son indistinguibles en el sentido siguiente: Conocemos que $1/4 < 1/3 < 1/2 < 5/8 < 3/4$ entonces

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = \int_0^{1/4} (f-g)^2 dx + \int_{1/4}^{1/3} (f-g)^2 dx + \int_{1/3}^{1/2} (f-g)^2 dx + \int_{1/2}^{5/8} (f-g)^2 dx + \int_{5/8}^{3/4} (f-g)^2 dx = 0.$$

Definición

Dadas dos funciones $u, v \in \mathbb{R}^{[0,L]}$ diremos que $u = v$ si y solo si

$$\int_0^L (u(x) - v(x))^2 dx = 0.$$

En consecuencia, **no vamos a poder distinguir funciones que solo difieren sobre un conjunto numerable de puntos sobre su dominio de definición**.

Definición (Funciones de cuadrado integrable)

Diremos que una función $u \in \mathbb{R}^{[0,L]}$ es de cuadrado integrable, si cumple

$$\int_0^L u(x)^2 dx < \infty.$$

Denotaremos por $L^2([0,L]) \subset \mathbb{R}^{[0,L]}$ el conjunto de funciones de cuadrado integrable.

De forma evidente si $u \in L^2([0,L])$ entonces $\lambda\, u \in L^2([0,L])$ para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, en particular la función constante $0 \in L^2([0,L])$.

Consideremos dos funciones $u, v \in L^2([0, L])$ para ver que $u + v \in L^2([0, L])$ procedemos del modo siguiente. Consideremos los conjuntos

$$A = \{x \in [0, L] : |u(x)| \geq |v(x)|\}$$

y

$$B = \{x \in [0, L] : |u(x)| < |v(x)|\},$$

donde $[0, L] = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Obtenemos entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^L (u(x) + v(x))^2 dx &= \int_A (u(x) + v(x))^2 dx + \int_B (u(x) + v(x))^2 dx \\ &\leq \int_A (2u(x))^2 dx + \int_B (2v(x))^2 dx \\ &\leq 4 \int_0^L u(x)^2 dx + 4 \int_0^L v(x)^2 dx < \infty, \end{aligned}$$

ya que $\int_0^L u(x)^2 dx < \infty$ y $\int_0^L v(x)^2 dx < \infty$.

Teorema (Desigualdad de Hölder)

Sean $u, v \in L^2([0, L])$, *entonces* $u \cdot v$ *es integrable, es decir,*

$$\int_0^L |u(x)v(x)|dx < \infty,$$

y

$$\int_0^L |u(x)v(x)|dx \leq \sqrt{\int_0^L u(x)^2 dx}\sqrt{\int_0^L v(x)^2 dx}$$

Definición (Función integrable)

Una función $u \in \mathbb{R}^{[0,L]}$ se dice integrable si

$$\int_0^L |u(x)|dx < \infty.$$

El conjunto de funciones integrables de $\mathbb{R}^{[0,L]}$ se denota por $L^1([0, L])$.

Teorema

Sea $u \in L^1([0,L])$, entonces se cumple

$$\left| \int_0^L u(x)dx \right| \leq \int_0^L |u(x)|dx$$

Corolario

Sean $u, v \in L^2([0,L])$, entonces como $u \cdot v \in L^1([0,L])$ se cumple

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L u(x)v(x)dx \right| &\leq \int_0^L |u(x)v(x)|dx \\ &\leq \sqrt{\int_0^L u(x)^2 dx} \sqrt{\int_0^L v(x)^2 dx}, \end{aligned}$$

es decir, $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$.

Resumen

- $L^2([0,L])$ es un espacio vectorial contenido en $\mathbb{R}^{[0,L]}$.
- La aplicacción $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2([0,L]) \times L^2([0,L]) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle u, v \rangle := \int_0^L u(x)v(x)dx$$

  está bien definida y es bilineal.
- La función $\| \cdot \| : L^2([0,L]) \longrightarrow [0, \infty[$ definida por

$$\|u\| := \sqrt{\int_0^L u(x)^2 dx} = \sqrt{\langle u, u \rangle},$$

  es una norma (distancia) en $L^2([0,L])$ que tiene como producto escalar asociado la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Aproximación de funciones en $L^2([0, L])$

Como $(L^2([0, L]), \|\cdot\|)$ es un espacio con distancia. Podemos definir la aproximación de una función $u \in L^2([0, L])$ mediante una sucesión $\{u_n : n = 0, 1, 2, \ldots\} \subset L^2([0, L])$ de funciones de cuadrado integrable de la forma siguiente.

Definición (Límite de una sucesión)

Sea $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ una sucesión de funciones en $L^2([0, L])$. Entonces $u \in L^2([0, L])$ es el límite de la sucesión $\{u_n\}$ si al considerar la sucesión de números reales

$$x_n := \|u_n - u\| = \sqrt{\int_0^L (u_n(x) - u(x))^2 dx}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Aproximación por sub-espacios

- Se considera para cada $n = 1, 2, \ldots$ un sub-espacio U_n de $L^2([0, L])$ de dimensión n,

$$U_n := \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\}$$

generado por una clase de funciones w_n sencillas y linealmente independientes.

- Dada $u \in L^2([0, L])$ se construye $u_n \in U_n$ de forma que

$$\|u - u_n\| = x_n \leq \|u - w\| \text{ para todo } w \in U_n$$

Si tomamos $U_n \subset U_{n+1}$ entonces $x_n \geq x_{n+1}$. En consecuencia si se cumple que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, dada una precisión fijada $\varepsilon > 0$ existirá $n_0 = n_0(\varepsilon)$ de forma que

$$x_{n_0} = \|u - u_{n_0}\| < \varepsilon.$$

Podemos decir que u_{n_0} aproxima u con un error cuadrático no superior a ε.

Ejemplo de construcción de una base de funciones

Para cada n consideremos la siguiente partición del intervalo $[0, L]$

$$x_0 := 0 < x_1 := L/n < \cdots < x_{n-1} := (n-1)L/n < X_n := L$$

en general, $x_k := k(L/N)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. Entonces, definimos para cada $k = 0, 1, \ldots, n-1$ la función

$$w_k^{(n)}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [x_k, x_{k-1}] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [x_k, x_{k-1}] \end{cases}$$

Estas funciones cumplen que

$$\langle w_i^{(n)}(x), w_j^{(n)}(x) \rangle = \begin{cases} (x_k - x_{k-1}) & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

En consecuencia $\{w_0^{(n)}(x), w_1^{(n)}(x), \ldots, w_{n-1}^{(n)}(x)\}$ es una base ortogonal de $L^2([0, L])$ y generan un sub-espacio de dimensión n.

Si tomamos $L = 5$ y $n = 5$ entonces

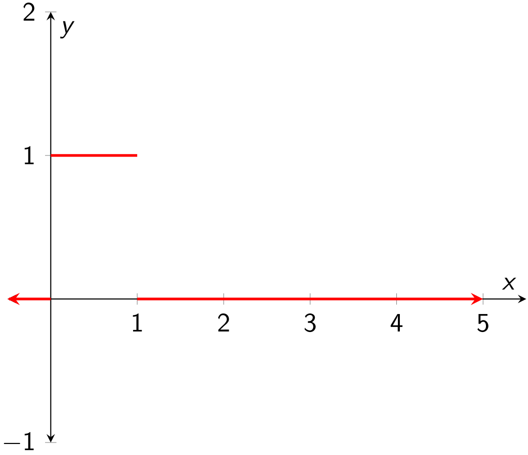
$$x_0 = 0 < x_1 := 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3 < x_4 = 4 < x_5 = 5.$$

y el conjunto de funciones

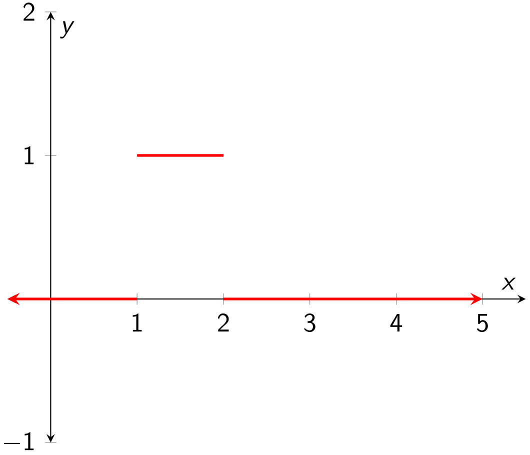
$$\{w_0^{(5)}(x), w_1^{(5)}(x), \ldots, w_4^{(5)}(x)\}$$

es el siguiente:

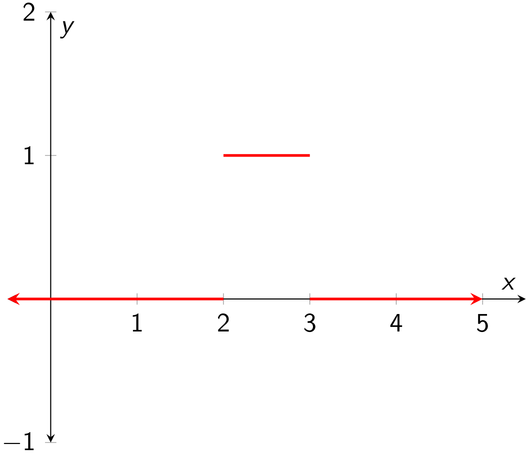
La función $w_0^{(5)}$



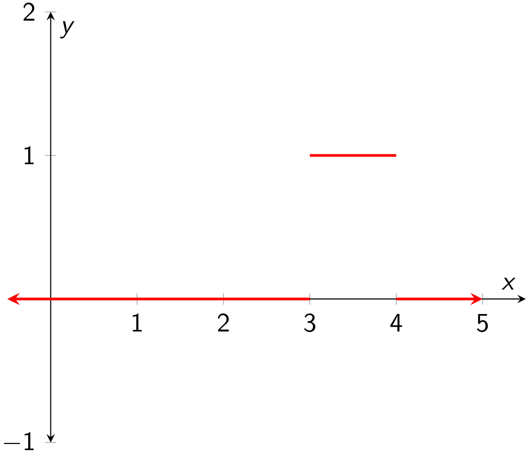
La función $w_1^{(5)}$



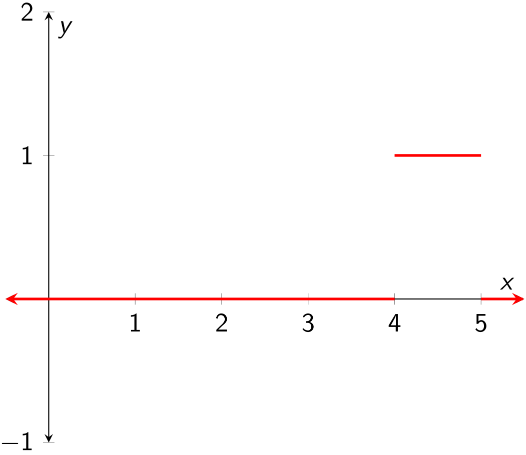
La función $w_2^{(5)}$



La función $w_3^{(5)}$



La función $w_4^{(5)}$



Si consideramos ahora la función $u(x) = x$ definida sobre $[0,5]$. Si la queremos aproximar mediante la base

$$\{w_0^{(5)}(x), w_1^{(5)}(x), \ldots, w_4^{(5)}(x)\}$$

del sub-espacio que denotaremos por U_5, la aproximación $\widehat{u}$ de u se calculará empleando la proyección ortogonal sobre el sub-espacio generado por la base:

$$\widehat{u}(x) := P_{U_5}(u) = \sum_{k=0}^{4} \frac{\langle u, w_k^{(5)}\rangle}{\langle w_k^{(5)}, w_k^{(5)}\rangle} w_k^{(5)}(x) = \sum_{k=0}^{4} \langle u, w_k^{(5)}\rangle \, w_k^{(5)}(x),$$

recordemos que $\langle w_k^{(5)}, w_k^{(5)}\rangle = (x_k - x_{k-1}) = 1$. Tenemos pues que calcular unicamente

$$\langle u, w_k^{(5)}\rangle = \int_0^5 x\, w_k^{(5)}(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} x\, dx = \frac{x_k^2 - x_{k-1}^2}{2}.$$

Al conocer

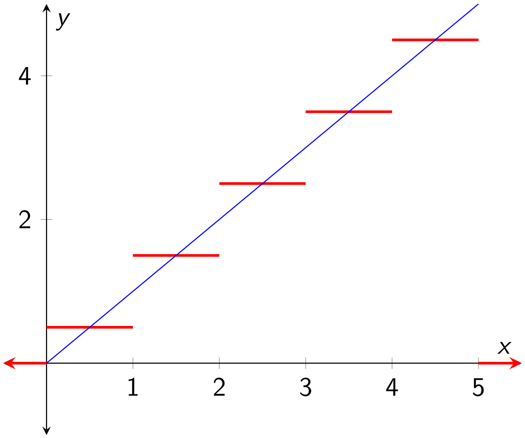
$$x_0 = 0 < x_1 := 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3 < x_4 = 4 < x_5 = 5.$$

podemos entonces concluir

$$\begin{aligned}\widehat{u}(x) &= \sum_{k=0}^{4} \left(\frac{x_k^2 - x_{k-1}^2}{2} \right) w_k^{(5)}(x) \\ &= \frac{1}{2}\, w_0^{(5)}(x) + \frac{3}{2}\, w_1^{(5)}(x) + \frac{5}{2}\, w_2^{(5)}(x) + \frac{7}{2}\, w_3^{(5)}(x) + \frac{9}{2}\, w_4^{(5)}(x),\end{aligned}$$

una función cuya gráfica es fácil de representar.

La función $\hat{u}(x)$ y $u(x) = x$



Objetivo

A continuación veremos que las funciones constantes a trozos permiten aproximar cualquier función de cuadrado integrable. Para ello demostraremos que dada cualquier función de cuadrado integrable u y cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función constante a trozos $\widehat{u}$ de forma que

$$\|u - \widehat{u}\| < \varepsilon.$$

A estas funciones constantes a trozos se las conoce como **funciones simples**. En estadística se les llama **histogramas**.

Consideremos las funciones de $\mathbb{R}^{[0,L]}$ que son constantes a trozos.

- Dado un subconjunto $A \subset [0, L]$ definimos la función indicatríz o característica del conjunto A como

$$\mathcal{X}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

- $\mathcal{X}_A$ es como una variable aleatoria binomial o como un sensor que toma el valor uno si observamos un individuo en A y cero en caso contrario.

Definición (Función simple)

Llamaremos a $u \in \mathbb{R}^{[0,L]}$ función simple si existe una partición del intervalo $[0, L]$:

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = L$$

y

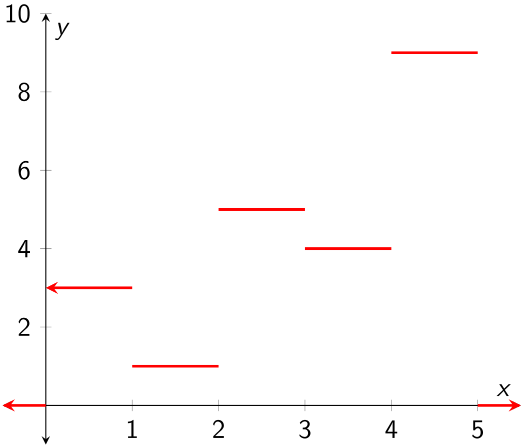
$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

de forma que:

$$u(x) = a_1 \mathcal{X}_{[x_0,x_1]}(x) + a_2 \mathcal{X}_{]x_1,x_2]}(x) + \cdots + a_n \mathcal{X}_{]x_{n-1},x_n]}(x)$$

Al conjunto de todas las funciones de este tipo las denotaremos por $\mathrm{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]})$.

Un ejemplo de función simple en $\mathbb{R}^{[0,5]}$



- Demostremos que $\mathrm{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]}) \subset L_2([0,L])$:

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \int_0^L u^2(x)dx$$

$$= \int_0^L \left(a_1\mathcal{X}_{[x_0,x_1]}(x) + a_2\mathcal{X}_{]x_1,x_2]}(x) + \cdots + a_n\mathcal{X}_{]x_{n-1},x_n]}(x)\right)^2 dx$$

$$= \int_0^L \left(a_1^2\mathcal{X}_{[x_0,x_1]}(x) + a_2^2\mathcal{X}_{]x_1,x_2]}(x) + \cdots + a_n^2\mathcal{X}_{]x_{n-1},x_n]}(x)\right) dx$$

$$= a_1^2(x_1 - x_0) + a_2^2(x_2 - x_1) + \cdots + a_n^2(x_n - x_{n-1}),$$

donde empleamos que

$$\mathcal{X}_{]x_i,x_{i+1}]}(x)\mathcal{X}_{]x_i,x_{i+1}]}(x) = \mathcal{X}_{[x_i,x_{i+1}]}(x),$$

y

$$\mathcal{X}_{]x_i,x_{i+1}]}(x)\mathcal{X}_{]x_j,x_{j+1}]}(x) = 0 \text{ para } i \neq j.$$

- Las funciones simples $\mathrm{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]})$ forman un sub-espacio vectorial de las funciones de cuadrado integrable. En consecuencia, el producto escalar

$$\langle u, v\rangle = \int_0^L u(x)v(x)dx$$

está bien definido y que podemos considerar definido sobre este mismo conjunto:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]}) \times \mathrm{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

- En consecuencia, $(\mathrm{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]}), \|\cdot\|)$ es un espacio normado con la norma

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Propiedad

Veremos ahora que una función simple $\mathcal{X}_{[a,b]}(x)$ definida en un intervalo cerrado $0 < a < b < L$, a pesar de no ser continua ni diferenciable puede ser aproximada por función u de clase $\mathcal{C}^{\infty}([0,L])$ (esto quiere decir que se puede derivar infinitas veces como la función e^x) de forma que

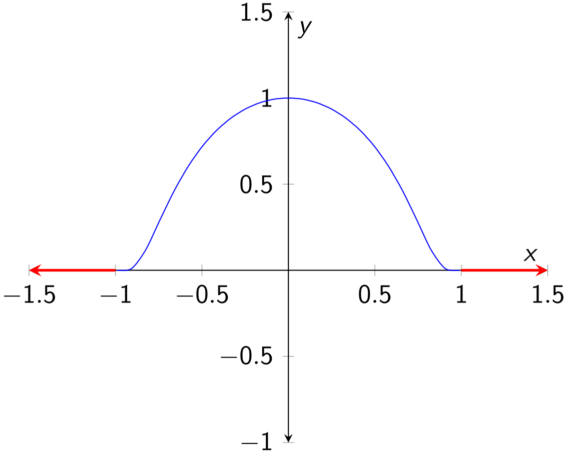
$$\|u - \mathcal{X}_{[a,b]}\| < \varepsilon.$$

Esta construcción se puede llevar a cabo mediante funciones del tipo siguiente

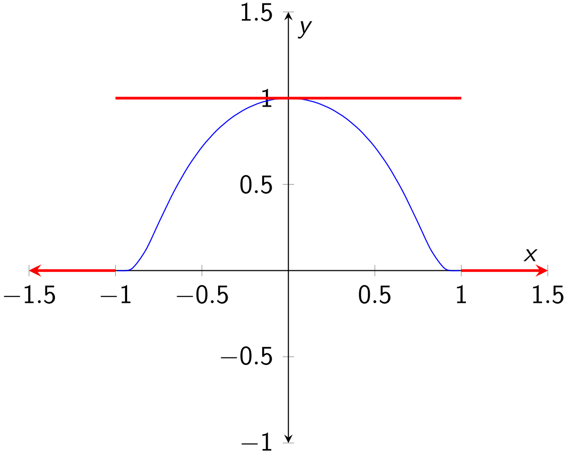
$$\Phi(x) = \begin{cases} exp\left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Observemos que $\Phi(x) \geq 0$ si y solo si $|x| \leq 1$. Decimos entonces que el soporte de la función es el intervalo compacto $[-1, 1]$.

Las función $\Phi(x)$



Las funciones $\Phi(x)$ y $\mathcal{X}_{[-1,1]}$



La gráfica anterior nos permite ver como podemos "pegar" una función constante con una función de la la clase $\mathcal{C}^\infty$ de manera sencilla. Supongamos que tenemos la siguiente partición

$$0 < a < b < c < d < L$$

y queremos construir una función que tome el valor constante 1 en $[b, c]$ y que sea de clase $\mathcal{C}^\infty$. Entonces consideramos las funciones

$$\exp\left(1 - \frac{(b-a)^2}{(b-a)^2 - (b-x)^2}\right) \text{ si } x \in]a, b[$$

y

$$\exp\left(1 - \frac{(c-d)^2}{(c-d)^2 - (c-x)^2}\right) \text{ si } x \in]c, d[$$

que toman sus valores máximos igual a 1 en $x = b$ y $x = c$ respectivamente.

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,a] \\ \exp\left(1 - \frac{(b-a)^2}{(b-a)^2-(b-x)^2}\right) & \text{si} \quad x \in]a,b[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [b,c] \\ \exp\left(1 - \frac{(c-d)^2}{(c-d)^2-(c-x)^2}\right) & \text{si} \quad x \in]c,d[\\ 0 & \text{si } x \in [d,L]. \end{cases}$$

Φ es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ que aproxima a la función simple $\mathcal{X}_{[b,c]}$. Además, el error se puede calcular explícitamente:

$$\|\mathcal{X}_{[b,c]} - \Phi\|^2 = \int_a^b \Phi(x)^2 dx + \int_c^d \Phi(x)^2 dx$$
$$\leq (b-a) + (d-c),$$

lo que permite dar una cota superior del mismo.

Propiedad

Dada una función simple $\mathcal{X}_{[b,c]} \in \mathrm{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]})$ y un error fijado ε, tomamos una cantidad cualquiera $0 < \delta < \varepsilon$ y construimos $\Phi_\delta \in \mathcal{C}^{\infty}([0,L])$ con soporte en $[a,d]$ con

$$a := b - \delta^2/2$$

y

$$d := c + \delta^2/2.$$

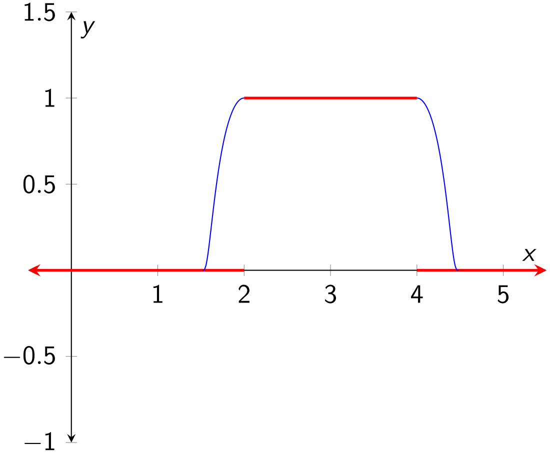
Entonces,

$$\|\mathcal{X}_{[b,c]} - \Phi_\delta\|^2 \leq (b-a) + (d-c) = \delta^2,$$

es decir

$$\|\mathcal{X}_{[b,c]} - \Phi_\delta\| \leq \delta < \varepsilon.$$

La función $\mathcal{X}_{[3,4]}$ y su aproximación Φ_{δ} con $\delta = 1$



Definición (Funciones con soporte compacto)

Las combinaciones lineales de funciones $\Phi \in \mathcal{C}^\infty([0, L])$ que se anulan fuera de un intervalo cerrado $I \subset [0, L]$ forman un espacio vectorial. Son las denominadas funciones infinitamente derivables con soporte compacto, el soporte de una función $u \in \mathbb{R}^{[0,L]}$ se define como

$$\operatorname{supp} u := \sup\{K \subset [0, L] : u(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in K\}.$$

A esta familia de funciones se la denota por $\mathcal{C}_0^\infty([0, L])$ o bien por $\mathcal{D}([0, L])$ y se les conoce por el nombre de **funciones test**. De forma evidente,

$$\mathcal{C}_0^\infty([0, L]) \subset L^2([0, L]),$$

es decir toda función test es una función de cuadrado integrable.

Resumen

- Las funciones de cuadrado integrables $L^2([0, L])$ son el equivalente a los vectores de $\mathbb{R}^d$, tienen una distacia dada por un producto escalar.
- Contiene como sub-espacio vectorial a las funciones simples $\mathrm{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]})$. Esta funciones son fáciles de manejar con respecto a la norma, sin embargo no son derivables.
- Contiene como sub-espacio vectorial a las funciones infinitamente derivables con soporte compacto $\mathcal{C}_0^\infty([0, L])$. Estas funciones son de manejo más complicado con respecto a la norma, sin embargo son derivables tantas veces como queramos.
- Podemos aproximar las funciones $\mathrm{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]})$ mediante funciones de clase $\mathcal{C}_0^\infty([0, L])$ y viceversa.
- Cualquier función de cuadrado integrable $L^2([0, L])$ se puede aproximar por una función o bien de $\mathrm{Simples}(\mathbb{R}^{[0,L]})$ o bien de $\mathcal{C}_0^\infty([0, L])$.

Conocemos que hay funciones en $L^2([0, L])$ que no se pueden derivar, vamos a definir una nueva derivada conocida por derivada débil. Si la función es derivable, entonces dicha derivada coincidirá con la derivada tradicional. Si $u, v \in \mathcal{C}_0^\infty([0, L])$ podemos asumir que o bien $u(0) = u(L)$ o bien $v(0) = v(L) = 0$, entonces la integral por partes no permite calcular

$$\begin{aligned}\int_0^L u(x)v'(x)dx &= u(L)v(L) - u(0)v(0) - \int_0^L u'(x)v(x)dx \\ &= -\int_0^L u'(x)v(x)dx.\end{aligned}$$

En consecuencia podemos afirmar dado $u \in \mathcal{C}_0^\infty([0, L])$ que su derivada es la única función $u' \in \mathcal{C}_0^\infty([0, L])$ que cumple la igualdad

$$\langle u, v' \rangle = -\langle u', v \rangle \tag{5}$$

para toda $v \in \mathcal{C}_0^\infty([0, L])$ tal que $v(0) = v(L) = 0$.

Dualidad

El espacio de funciones $v \in \mathcal{C}_0^\infty([0,L])$ tal que $v(0) = v(L) = 0$ es un sub-espacio vectorial propio de $\mathcal{C}_0^\infty([0,L])$ que vamos a denotar por $\mathcal{C}_{00}^\infty([0,L])$ El espacio dual, que se denota por $\mathcal{C}_{00}^\infty([0,L])'$ está formado por las aplicaciones lineales,

$$T : \mathcal{C}_{00}^\infty([0,L]) \longrightarrow \mathbb{R},$$

es decir, cumple $T(u+v) = T(u) + T(v)$ y $T(\lambda\, u) = \lambda\, T(u)$. Se define entonces el corchete de dualidad como una especie de producto escalar:

$$[\cdot,\cdot] : \mathcal{C}_{00}^\infty([0,L])' \times \mathcal{C}_{00}^\infty([0,L]) \longrightarrow \mathbb{R} \quad [T,v] := T(v),$$

que devuelve el resultado de evaluar un vector del espacio dual con un vector del espacio primal. Representa físicamente a una lagrangiana.

Definición (Derivada débil)

Sea $u \in L^2([0,L])$ diremos que u es derivable en séntido débil si existe un elemento $T \in \mathcal{C}_{00}^{\infty}([0,L])'$ de forma que

$$\langle u, v' \rangle = -[T, v] \tag{6}$$

se cumple para todo $v \in \mathcal{C}_0^{\infty}([0,L])$ tal que $v(0) = v(L) = 0$. Se dice entonces que T es la derivada débil de u y se denota $u' := T$. Si $T = f := u' \in \mathbb{R}^{[0,T]}$ (se dice entonces que T es una distribución regular) entonces (6) es equivalente a

$$\int_0^L u(x)v'(x)dx = -[f, v] = -\langle f, v \rangle = -\int_0^L u'(x)v(x)dx.$$

para toda $v \in \mathcal{C}_{00}^{\infty}([0,L])$.

Todas las distribuciones que emplearemos a lo largo del curso serán distribuciones regulares.

Definición ($H^1([0, L])$)

Dada una función $u \in L^2([0, L])$ diremos que $u \in H^1([0, L])$ si existe $u' \in \mathbb{R}^{[0,T]}$ localmente integrable (es decir, tiene derivada débil y es una distribución regular) de forma que se cumple

$$\int_0^L u(x)v'(x)dx = -\langle u', v\rangle = -\int_0^L u'(x)v(x)dx.$$

para toda $v \in \mathcal{C}^\infty_{00}([0, L])$ y además $u' \in L^2([0, L])$.

Definición ($H^1_0([0, L])$)

Dada una función $u \in H^1([0, L])$ diremos que $u \in H^1_0([0, L])$ $u(0) = u(L) = 0$. Claramente, $H^1_0([0, L])$ es un sub-espacio vectorial de $H^1([0, L])$.

Definición ($H^k([0, L])$)

Dada una función $u \in L^2([0, L])$ diremos que $u \in H^k([0, L])$ si existe $u', u'', \ldots, u^{(k)} \in \mathbb{R}^{[0,T]}$ (es decir, tiene derivadas débiles hasta orden k y son distribuciones regulares) de forma que se cumple

$$\int_0^L u^{(n-1)}(x)v'(x)dx = -\langle u^{(n)}, v\rangle = -\int_0^L u^{(n)}(x)v(x)dx.$$

para toda $v \in \mathcal{C}_{00}^{\infty}([0, L])$ y además $u^{(n)} \in L^2([0, L])$ para $n = 1, \ldots, k$.

Definición (Norma en $H^k([0, L])$)

Si $u \in H^k([0, L])$ se puede definir una norma

$$\|u\|_{H^k([0,L])} := \|u\| + \|u'\| + \cdots + \|u^{(k)}\|.$$

A estos espacios se les conoce con el nombre de **espacios de Sobolev**.

Ejemplo

Consideremos la función siguiente

$$u : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

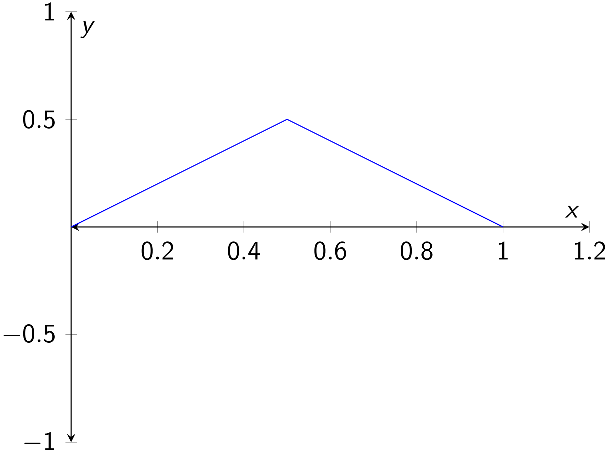
$$u(x) := \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq L/2, \\ L - x & \text{si } L/2 \leq x \leq L, \end{cases}$$

es decir, $u(x) = x\,\mathcal{X}_{]0,L/2[}(x) + (L-x)\,\mathcal{X}_{]L/2,L[}(x)$ ya que podemos representarla sin tener en cuenta los valores en los extremos de los intervalos. La derivada débil es:

$$u'(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < L/2, \\ -1 & \text{si } L/2 < x < L, \end{cases}$$

es decir $u'(x) = 1\,\mathcal{X}_{]0,L/2[}(x) + (-1)\,\mathcal{X}_{]L/2,L[}(x)$. **Recordemos que identificamos funciones que toman los mismos valores excepto en una cantidad finita o numerable de puntos**.

Ejemplo de $u(x)$ con $L = 1$



Ejemplo de $u'(x)$ con $L = 1$