Método de los Elementos Finitos

Clase 1: Fundamentos matemáticos y formulación variacional

Antonio Falcó

Departamento de Matemáticas

Estructura de la clase

Motivación: ¿por qué el Método de los Elementos Finitos?

- Muchos problemas en ingeniería y física se formulan como ecuaciones diferenciales (EDO/EDP) con condiciones de contorno.
- La solución analítica rara vez es accesible en geometrías realistas o con datos complejos.
- El Método de los Elementos Finitos (MEF) proporciona:
  - Un marco sistemático para aproximar soluciones.
  - Capacidad para tratar geometrías complejas y condiciones variadas.
  - Una interpretación energética y variacional muy rica.
- Objetivo de esta clase:
  - Entender el paso de la formulación fuerte a la variacional.
  - Introducir los espacios funcionales adecuados (L^2, H^1).

Problema modelo 1D: ecuación de la cuerda (Poisson 1D)

Consideremos el problema elíptico 1D

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, L), \\ u(0) = 0, \quad u(L) = 0, & \end{cases}$$

donde:

- $u(x)$ representa la deformación vertical de una cuerda elástica.
- $f(x)$ es una fuerza distribuida (carga) a lo largo de la cuerda.
- Las condiciones $u(0) = u(L) = 0$ fijan los extremos.

Preguntas básicas:

- **Existencia y unicidad**: ¿existe una solución y es única?
- **Regularidad**: ¿qué suavidad tiene la solución?
- **Aproximación**: ¿cómo construir un método numérico robusto?

Cuestiones científicas sobre el problema modelo

Preguntas clave

1. ¿En qué espacio funcional tiene sentido el problema?
2. ¿Se puede formular de manera que la energía del sistema aparezca de forma natural?
3. ¿Cómo construir una aproximación numérica basada en esa energía?
4. ¿Cómo evaluar el error de esa aproximación?

- La respuesta pasa por la **formulación variacional** y el uso de **espacios de Sobolev**.
- Antes de discretizar, necesitamos un buen marco funcional continuo.

Espacio $L^2(0, L)$

Definición

El espacio $L^2(0, L)$ está formado por las clases de equivalencia de funciones medibles $v : (0, L) \to \mathbb{R}$ tales que

$$\int_0^L |v(x)|^2 \, dx < \infty.$$

- Dos funciones que difieren sólo en un conjunto de medida nula se identifican.
- Producto escalar:
$$(u, v)_{L^2} = \int_0^L u(x)\, v(x)\, dx.$$
- Norma asociada:
$$\|v\|_{L^2(0,L)} = \left(\int_0^L |v(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$
- $L^2(0, L)$ es un espacio de Hilbert (completo).

Derivadas débiles e idea de Sobolev

- Para problemas elípticos, necesitamos derivadas de u, pero no siempre u es diferenciable en el sentido clásico.
- Introducimos la **derivada débil**: una función $w \in L^2(0, L)$ es la derivada débil de u si

$$\int_0^L u(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_0^L w(x)\,\varphi(x)\,dx$$

  para toda función de prueba suave φ que se anule en los extremos.
- Esta definición generaliza el concepto de derivada a un marco en el que la integración por partes es válida.

Espacio $H^1(0, L)$

Definición

Definimos

$$H^1(0,L) = \left\{ u \in L^2(0,L) \ : \ u' \in L^2(0,L) \text{ (derivada débil)} \right\}.$$

- Producto escalar natural:

$$(u, v)_{H^1} = \int_0^L u(x)\, v(x)\, dx + \int_0^L u'(x)\, v'(x)\, dx.$$

- Norma asociada:

$$\|u\|_{H^1(0,L)} = \left(\int_0^L |u(x)|^2 \, dx + \int_0^L |u'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

- $H^1(0, L)$ también es un espacio de Hilbert.
- Interpretación física: la segunda integral representa energía de deformación (dependiente de u').

Subespacio $H_0^1(0, L)$

Definición

El espacio $H_0^1(0, L)$ es el cierre de $C_c^\infty(0, L)$ (funciones suaves con soporte compacto en $(0, L)$) en la norma de $H^1(0, L)$.

- Intuitivamente: funciones de $H^1(0, L)$ que "se anulan" en los extremos $x = 0$ y $x = L$ en sentido trazas.
- Este espacio es el adecuado para incorporar *condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas*.
- En el problema modelo:

$$u(0) = u(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad u \in H_0^1(0, L).$$

Interpretación energética de $H_0^1(0, L)$

- Para la cuerda elástica fija en los extremos, la energía potencial elástica típica es de la forma

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^L \left| u'(x) \right|^2 \, dx - \int_0^L f(x) \, u(x) \, dx.$$

- La minimización de $E(u)$ sobre $H_0^1(0, L)$ conduce, vía condiciones de optimalidad, a la ecuación elíptica:

$$-u'' = f \quad \text{en } (0, L), \quad u(0) = u(L) = 0.$$

- La formulación variacional no es sólo una herramienta técnica, sino que refleja directamente el principio de mínima energía.

De la forma fuerte a la forma débil

Partimos del problema fuerte:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

Pasos para obtener la formulación variacional:

1. Multiplicamos la ecuación por una función de prueba $v \in H_0^1(0, L)$.
2. Integramos en $(0, L)$:
$$\int_0^L -u''(x)\, v(x)\, dx = \int_0^L f(x)\, v(x)\, dx.$$
3. Aplicamos integración por partes, usando que $v(0) = v(L) = 0$.

Integración por partes

De la identidad

$$\int_0^L -u''(x)\,v(x)\,dx = \int_0^L u'(x)\,v'(x)\,dx - \big[u'(x)\,v(x)\big]_0^L,$$

y dado que $v(0) = v(L) = 0$, obtenemos:

$$\int_0^L -u''(x)\,v(x)\,dx = \int_0^L u'(x)\,v'(x)\,dx.$$

Por tanto, la igualdad

$$\int_0^L -u''(x)\,v(x)\,dx = \int_0^L f(x)\,v(x)\,dx$$

se reescribe como

$$\int_0^L u'(x)\,v'(x)\,dx = \int_0^L f(x)\,v(x)\,dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0, L).$$

Formulación variacional

Forma variacional del problema modelo

Encontrar $u \in H_0^1(0, L)$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0, L),$$

donde

$$a(u, v) = \int_0^L u'(x)\, v'(x)\, dx,$$
$$L(v) = \int_0^L f(x)\, v(x)\, dx.$$

- $a(\cdot, \cdot)$: forma bilineal simétrica y definida positiva.
- $L(\cdot)$: funcional lineal continuo sobre $H_0^1(0, L)$.
- El problema variacional tiene sentido incluso cuando u no es dos veces diferenciable en sentido clásico.

Propiedades de la forma bilineal

Proposición

La forma bilineal

$$a(u, v) = \int_0^L u'(x)\, v'(x)\, dx$$

definida sobre $H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ *verifica:*

1. ***Continuidad***:
$$|a(u, v)| \leq C\, \|u\|_{H^1(0,L)}\, \|v\|_{H^1(0,L)} \quad \forall u, v \in H_0^1(0, L).$$
2. ***Coercividad***:
$$a(u, u) \geq \alpha\, \|u\|^2_{H^1(0,L)} \quad \forall u \in H_0^1(0, L),$$
para alguna constante $\alpha > 0$.

- La coercividad está relacionada con la *desigualdad de Poincaré*.

Teorema de Lax–Milgram

Teorema (Lax–Milgram)

Sea V un espacio de Hilbert real, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva, y $L : V \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo. Entonces:

- *Existe un único $u \in V$ tal que*
$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$
- *Además, se verifica la estimación*
$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V'} ,$$
donde $\alpha > 0$ es la constante de coercividad.

Aplicación al problema modelo

- Tomamos $V = H_0^1(0, L)$,

$$a(u, v) = \int_0^L u'(x)\, v'(x)\, dx, \qquad L(v) = \int_0^L f(x)\, v(x)\, dx.$$

- Bajo la hipótesis $f \in L^2(0, L)$:
  - a es continua y coerciva sobre $H_0^1(0, L)$.
  - L es lineal y continuo.
- Por Lax–Milgram:
  - Existe un único $u \in H_0^1(0, L)$ solución variacional.
  - Se obtiene una cota de estabilidad:

$$\|u\|_{H^1(0,L)} \leq C \, \|f\|_{L^2(0,L)} \, .$$

Definición de solución débil

Definición

Decimos que $u \in H_0^1(0,L)$ es **solución débil** del problema

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{en } (0,L), \\ u = 0 & \text{en } \{0,L\}, \end{cases}$$

si

$$\int_0^L u'(x)\, v'(x)\, dx = \int_0^L f(x)\, v(x)\, dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0,L).$$

- En muchos casos, la solución débil coincide con la solución clásica cuando esta existe.
- El MEF se construirá para aproximar precisamente esta solución débil.

Esquema general del MEF (visión continua)

1. Formular el problema físico como EDO/EDP con condiciones de contorno.
2. Reescribir el problema en forma variacional en un espacio de Hilbert V adecuado.
3. Garantizar existencia y unicidad mediante Lax–Milgram.
4. Sólo entonces: elegir subespacios finitos $V_h \subset V$ y definir el problema discreto.

Idea clave

El MEF es un *método de Galerkin* en espacios de Sobolev.

Transición a la discretización

- En la próxima clase:
  - Introduciremos mallas y elementos finitos en 1D.
  - Definiremos subespacios $V_h \subset H_0^1(0, L)$ mediante funciones de forma polinomiales.
  - Obtendremos el sistema lineal $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ a partir de la formulación variacional.
- La formulación variacional es el puente entre:

$$\textbf{Modelo continuo (EDP)} \longrightarrow \textbf{Sistema algebraico (MEF)}.$$

Resumen de la clase

- Hemos introducido un problema modelo elíptico 1D (ecuación de la cuerda).
- Hemos motivado el uso de espacios de Sobolev H^1 y H_0^1.
- Hemos obtenido la formulación variacional del problema:

$$a(u, v) = L(v).$$

- Hemos visto cómo el Teorema de Lax–Milgram garantiza existencia y unicidad de la solución débil.
- Esta solución débil será el objeto que aproximaremos mediante Elementos Finitos.

¿Preguntas?