Modélisation stochastique — TD2

Intégrale d'Itô : isométrie, lois gaussiennes, martingales (CM2)

Feuille d'énoncés

Objectifs.
— Utiliser l'isométrie d'Itô pour calculer moments et covariances.
— Reconnaître la loi (gaussienne) de $\int_0^T f(s)\,dW_s$ et calculer des conditionnelles simples.
— Manipuler des intégrales d'Itô comme martingales (tests rapides).
— Relier à des quantités de finance : log-retours, bruit multiplicatif (pré-GBM).

Cadre. $(W_t)_{t\geq 0}$ brownien standard, $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle. On admet les propriétés usuelles de l'intégrale d'Itô et l'isométrie.

A. Isométrie, moments, covariances

Exercice 1 (Isométrie d'Itô : calcul direct)**.** Soit $T > 0$ et $f \in L^2([0,T])$ déterministe. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f(s)\,dW_s\right] = 0, \qquad \mathrm{Var}\left(\int_0^T f(s)\,dW_s\right) = \int_0^T f(s)^2\,ds.$$

Exercice 2 (Covariance de deux intégrales)**.** Soient $f, g \in L^2([0,T])$ déterministes. Montrer que

$$\mathrm{Cov}\left(\int_0^T f(s)\,dW_s,\ \int_0^T g(s)\,dW_s\right) = \int_0^T f(s)g(s)\,ds.$$

(*Indication :* développer $\mathbb{E}[IJ]$ et utiliser la bilinéarité + isométrie.)

Exercice 3 (Exemples calculatoires)**.** Calculer explicitement (moyenne, variance) et identifier la loi :

(a) $\displaystyle\int_0^T s\,dW_s$;

(b) $\displaystyle\int_0^T e^{\lambda s}\,dW_s$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) ;

(c) $\displaystyle\int_0^T \cos(\omega s)\,dW_s$ (avec $\omega \in \mathbb{R}$).

Exercice 4 (Orthogonalité dans L^2)**.** Soit $0 \leq a < b \leq c < d$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b f(s)\,dW_s\right)\left(\int_c^d g(s)\,dW_s\right)\right] = 0$$

pour $f \in L^2([a,b])$, $g \in L^2([c,d])$ déterministes. Interpréter en termes d'"incréments indépendants".

B. Lois gaussiennes et conditionnement

Exercice 5 (Loi de l'intégrale déterministe)**.** Montrer que, si $f \in L^2([0,T])$ est déterministe, alors

$$\int_0^T f(s)\,dW_s \sim \mathcal{N}\left(0,\ \int_0^T f(s)^2\,ds\right).$$

(*Indication :* approximer par processus simples et utiliser stabilité des gaussiennes.)

Exercice 6 (Couple gaussien et régression)**.** Soit $f \in L^2([0,T])$ déterministe et

$$I := \int_0^T f(s)\,dW_s, \qquad J := W_T.$$

Montrer que (I,J) est un vecteur gaussien centré. Calculer $\mathrm{Cov}(I,J)$ puis donner $\mathbb{E}[I \mid W_T]$ et $\mathrm{Var}(I \mid W_T)$. (*Indication :* régression linéaire pour gaussiennes.)

Exercice 7 (Projection sur la filtration : arrêt au temps t)**.** Fixer $0 < t < T$ et $f \in L^2([0,T])$ déterministe. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f(s)\,dW_s \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] = \int_0^t f(s)\,dW_s.$$

(*Indication :* décomposer l'intégrale sur $[0,t]$ et $[t,T]$.)

C. Martingales associées à l'intégrale d'Itô

Exercice 8 (Martingale et accroissements)**.** Soit H prévisible tel que $\mathbb{E}\int_0^T H_s^2\,ds < \infty$ et

$$M_t := \int_0^t H_s\,dW_s.$$

Montrer que $(M_t)_{0\le t\le T}$ est une martingale. Montrer aussi que pour $0 \le s < t \le T$,

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \int_s^t H_u^2\,du \quad \text{(au moins lorsque } H \text{ est déterministe).}$$

Exercice 9 (Martingale exponentielle (niveau CM2))**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et

$$M_t := \exp\Big(\theta W_t - \tfrac{1}{2}\theta^2 t\Big).$$

Montrer que M_t est une martingale. (*On pourra utiliser TD1 ou un raisonnement via incréments gaussiens.*)

D. Mini-finance (pré-GBM)

Exercice 10 (Retour sur log-retours continus (modèle simple))**.** On considère un log-prix X_t défini par

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t.$$

(a) Donner la loi de X_t (moyenne, variance).

(b) Calculer $\mathbb{E}[e^{X_t}]$.

(c) En déduire la moyenne du prix $S_t := e^{X_t}$.

(*Commentaire :* ceci préfigure le GBM traité en CM4.)

Exercice 11 (Corrélations : du log-prix au prix)**.** On considère d'abord le modèle additif

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t,$$

puis le prix exponentiel $S_t = e^{X_t}$ (et, en particulier pour le GBM, $S_t = S_0 \exp\big((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\big)$).

(a) Calculer $\mathrm{Cov}(X_t, W_t)$ et $\mathrm{Corr}(X_t, W_t)$. Commenter.

(b) Calculer $\mathrm{Cov}(S_t, W_t)$ et en déduire le signe de la corrélation $\mathrm{Corr}(S_t, W_t)$ (on pourra utiliser que $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ et $\mathbb{E}[e^{\lambda W_t}] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}$).

Conseil. Pour les conditionnements, repérer la partie $\mathcal{F}_t$-mesurable et la partie indépendante (incréments après t).