Modélisation stochastique
CM4 : Formule d'Itô (1D) et applications

De $f(W_t)$ à $f(t, X_t)$, avec exemples finance

Antonio Falcó

École Centrale de Nantes

1er février 2026

Objectif (2h).

- Énoncer et utiliser la formule d'Itô en dimension 1.
- Comprendre d'où vient le terme $\frac{1}{2}f''\,dt$ (CM3 : $(dW)^2 = dt$).
- Passer à la version $f(t, X_t)$ pour un processus d'Itô X_t.
- Faire des exemples finance : GBM, dynamique de $\ln S_t$, lognormalité, identités de martingales.

Au tableau : Timing suggéré

10' rappel CM3 + motivation; 25' Itô pour $f(W_t)$ + preuve (esquisse); 25' exemples (W^2, exp, $\int W\,dW$); 25' Itô pour $f(t, X_t)$; 25' finance (GBM, log); 10' synthèse + exos.

Plan (2h)

1. Rappel : $(dW)^2 = dt$ et rôle de la variation quadratique
2. Formule d'Itô pour $f(W_t)$ (énoncé + preuve-guidée)
3. Exemples canoniques : $W_t^2 - t$, $\int_0^t W_s\, dW_s$, exponentielle
4. Processus d'Itô : $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$
5. Itô pour $f(t, X_t)$ (version complète)
6. Applications finance : GBM, log-retours, solution explicite
7. Exercices / transition vers CM5

Plan (2h)

1. Rappel : $(dW)^2 = dt$ et rôle de la variation quadratique
2. Formule d'Itô pour $f(W_t)$ (énoncé + preuve-guidée)
3. Exemples canoniques : $W_t^2 - t$, $\int_0^t W_s\, dW_s$, exponentielle
4. Processus d'Itô : $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$
5. Itô pour $f(t, X_t)$ (version complète)
6. Applications finance : GBM, log-retours, solution explicite
7. Exercices / transition vers CM5

Au tableau : Fil conducteur

Taylor + $(dW)^2 = dt \Rightarrow$ Itô. Ensuite : Itô devient la "règle de dérivation" pour les EDS.

Rappel : la règle fondamentale

CM3

Pour le brownien,

$$[W]_t = t \quad \Longleftrightarrow \quad (dW_t)^2 = dt.$$

- Heuristique : $\Delta W \sim \sqrt{\Delta t}$ donc $(\Delta W)^2 \sim \Delta t$.
- Conséquence : un développement de Taylor à l'ordre 2 *survit* dans la limite.

Rappel : la règle fondamentale

CM3

Pour le brownien,

$$[W]_t = t \quad \Longleftrightarrow \quad (dW_t)^2 = dt.$$

- Heuristique : $\Delta W \sim \sqrt{\Delta t}$ donc $(\Delta W)^2 \sim \Delta t$.
- Conséquence : un développement de Taylor à l'ordre 2 *survit* dans la limite.

Au tableau : À écrire

$$\Delta f \approx f' \Delta W + \frac{1}{2} f''(\Delta W)^2, \quad (\Delta W)^2 \rightsquigarrow \Delta t.$$

Au tableau : À dire

`C'est exactement le mécanisme qui explique le terme correctif d'Itô.`

Formule d'Itô (cas $f(W_t)$)

Théorème (Itô 1D, cas brownien)

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \geq 0$,

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\,ds.$$

Notation différentielle (heuristique)

$$df(W_t) = f'(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)\,dt.$$

Formule d'Itô (cas $f(W_t)$)

Théorème (Itô 1D, cas brownien)

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \geq 0$,

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\, ds.$$

Notation différentielle (heuristique)

$$df(W_t) = f'(W_t)\, dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t)\, dt.$$

Au tableau : À écrire (formule)

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\, ds.$$

Au tableau : Commentaire

Insister : c'est la "règle de dérivation" en stochastique. Le terme en dt n'existe pas en calcul classique.

Preuve (esquisse) : Taylor + sommes télescopiques

Soit une partition $0 = t_0 < \cdots < t_n = t$.

$$f(W_t) - f(W_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(f(W_{t_{k+1}}) - f(W_{t_k}) \Big).$$

Par Taylor à l'ordre 2 :

$$f(W_{t_{k+1}}) - f(W_{t_k}) = f'(W_{t_k})\Delta W_k + \frac{1}{2} f''(W_{t_k})(\Delta W_k)^2 + r_k,$$

avec $r_k = o((\Delta W_k)^2)$.

Idée de passage à la limite

- $\sum f'(W_{t_k})\Delta W_k \to \int_0^t f'(W_s)\, dW_s$ (définition Itô).
- $\sum \frac{1}{2} f''(W_{t_k})(\Delta W_k)^2 \to \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s)\, ds$ (CM3).
- Le reste $\sum r_k \to 0$.

Preuve (esquisse) : Taylor + sommes télescopiques

Soit une partition $0 = t_0 < \cdots < t_n = t$.

$$f(W_t) - f(W_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(f(W_{t_{k+1}}) - f(W_{t_k}) \Big).$$

Par Taylor à l'ordre 2 :

$$f(W_{t_{k+1}}) - f(W_{t_k}) = f'(W_{t_k})\Delta W_k + \frac{1}{2} f''(W_{t_k})(\Delta W_k)^2 + r_k,$$

avec $r_k = o((\Delta W_k)^2)$.

Idée de passage à la limite

- $\sum f'(W_{t_k})\Delta W_k \to \int_0^t f'(W_s)\,dW_s$ (définition Itô).
- $\sum \frac{1}{2} f''(W_{t_k})(\Delta W_k)^2 \to \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\,ds$ (CM3).
- Le reste $\sum r_k \to 0$.

Au tableau : À écrire (structure de preuve, très synthétique)

$$f(W_t) - f(W_0) = \sum_k \Big(f'(W_{t_k})\Delta W_k + \tfrac{1}{2} f''(W_{t_k})(\Delta W_k)^2 + r_k \Big).$$

$$1) \quad \sum f'\Delta W \to \int f'\,dW \quad \texttt{(Itô, CM2)}.$$

$$2) \quad \sum \tfrac{1}{2} f''(\Delta W)^2 \to \tfrac{1}{2} \int f''\,dt \quad \texttt{(QV, CM3)}.$$

$$3) \quad \sum r_k \to 0 \quad \texttt{car} \;\; r_k = o((\Delta W_k)^2), \;\; \sum (\Delta W_k)^2 \to t.$$

Au tableau : Petit commentaire pédagogique

`Ne pas trop insister sur la rigueur du reste en 2h : donner l'idée et renvoyer à un poly.`

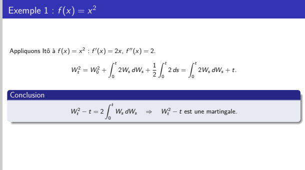
Exemple 1 : $f(x) = x^2$

Appliquons Itô à $f(x) = x^2$: $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$.

$$W_t^2 = W_0^2 + \int_0^t 2W_s\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\, ds = \int_0^t 2W_s\, dW_s + t.$$

Conclusion

$$W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s\, dW_s \quad \Rightarrow \quad W_t^2 - t \text{ est une martingale.}$$



Au tableau : À écrire (résultat clé)

$d(W_t^2) = 2W_t\,dW_t + dt \quad \Rightarrow \quad W_t^2 - t$ martingale.

Au tableau : À dire

C'est une des martingales fondamentales (déjà annoncée en CM1). Et elle donne la formule explicite de $\int W\,dW$ (slide suivante).

Exemple 2 : calcul explicite de $\int_0^t W_s \, dW_s$

De l'identité précédente :

$$W_t^2 - t = 2 \int_0^t W_s \, dW_s.$$

Donc

$$\boxed{\int_0^t W_s \, dW_s = \frac{1}{2}\big(W_t^2 - t\big).}$$

- Vérification : L^2 via isométrie (CM2).
- Utilité : transformer une intégrale stochastique en variable explicite.

Exemple 2 : calcul explicite de $\int_0^t W_s\,dW_s$

De l'identité précédente :

$$W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s\,dW_s.$$

Donc

$$\boxed{\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t).}$$

- Vérification : L^2 via isométrie (CM2).
- Utilité : transformer une intégrale stochastique en variable explicite.

Au tableau : À écrire

$\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t)$.

Au tableau : Commentaire

Ici les étudiants voient l'intérêt concret : Itô "calcule" une intégrale stochastique.

Exemple 3 : exponentielle (martingale exponentielle)

Soit $f(x) = e^{\theta x}$. Alors $f'(x) = \theta e^{\theta x}$, $f''(x) = \theta^2 e^{\theta x}$. Itô donne

$$de^{\theta W_t} = \theta e^{\theta W_t}\, dW_t + \frac{1}{2}\theta^2 e^{\theta W_t}\, dt.$$

Donc, pour

$$M_t(\theta) := \exp\Big(\theta W_t - \tfrac{1}{2}\theta^2 t\Big),$$

on obtient

$$dM_t(\theta) = \theta M_t(\theta)\, dW_t,$$

et donc $M_t(\theta)$ est une martingale.

Exemple 3 : exponentielle (martingale exponentielle)

Soit $f(x) = e^{\theta x}$. Alors $f'(x) = \theta e^{\theta x}$, $f''(x) = \theta^2 e^{\theta x}$. Itô donne

$$de^{\theta W_t} = \theta e^{\theta W_t}\, dW_t + \frac{1}{2}\theta^2 e^{\theta W_t}\, dt.$$

Donc, pour

$$M_t(\theta) := \exp\Big(\theta W_t - \tfrac{1}{2}\theta^2 t\Big),$$

on obtient

$$dM_t(\theta) = \theta M_t(\theta)\, dW_t,$$

et donc $M_t(\theta)$ est une martingale.

Au tableau : À écrire (deux lignes)

$$d(e^{\theta W_t}) = \theta e^{\theta W_t}\, dW_t + \tfrac{1}{2}\theta^2 e^{\theta W_t}\, dt\,.$$

$$\Rightarrow d\left(e^{\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t}\right) = \theta e^{\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t}\, dW_t\,.$$

Au tableau : À dire

`Très utilisé pour les changements de mesure (Girsanov) et en finance (densités, pricing).`

Processus d'Itô (1D)

Définition

On appelle **processus d'Itô** tout processus (X_t) de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s\, ds + \int_0^t b_s\, dW_s,$$

où $a \in L^1_{\text{loc}}$ et $b \in \mathcal{H}^2_{\text{loc}}$ sont adaptés.

Notation différentielle

$$dX_t = a_t\, dt + b_t\, dW_t.$$

Définition

On appelle **processus d'Itô** tout processus (X_t) de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s\,ds + \int_0^t b_s\,dW_s,$$

où $a \in L^1_{\text{loc}}$ et $b \in \mathcal{H}^2_{\text{loc}}$ sont adaptés.

Notation différentielle

$$dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t.$$

Au tableau : À écrire

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s\,ds + \int_0^t b_s\,dW_s \quad \Leftrightarrow \quad dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t.$$

Au tableau : Commentaire

`Le couple (a,b) = dérive/diffusion. C'est le langage standard pour modéliser (physique/finance).`

Formule d'Itô (générale) : $f(t, X_t)$

Théorème (Itô 1D)

Si X_t vérifie $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$ et si $f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \partial_t f(t, X_t)\, dt + \partial_x f(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\, \partial_{xx} f(t, X_t)\, (dX_t)^2 \\ &= \Big(\partial_t f + a_t \partial_x f + \tfrac{1}{2} b_t^2 \partial_{xx} f\Big)(t, X_t)\, dt + \big(b_t \partial_x f\big)(t, X_t)\, dW_t. \end{aligned}$$

Formule d'Itô (générale) : $f(t, X_t)$

Théorème (Itô 1D)

Si X_t vérifie $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$ et si $f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R})$, alors

$$
\begin{aligned}
df(t, X_t) &= \partial_t f(t, X_t)\, dt + \partial_x f(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t, X_t)\,(dX_t)^2 \\
&= \Big(\partial_t f + a_t \partial_x f + \tfrac{1}{2} b_t^2 \partial_{xx} f\Big)(t, X_t)\, dt + \big(b_t \partial_x f\big)(t, X_t)\, dW_t.
\end{aligned}
$$

Au tableau : À écrire (forme finale)

$$df(t, X_t) = \Big(f_t + a_t f_x + \tfrac{1}{2} b_t^2 f_{xx}\Big)(t, X_t)\, dt + \Big(b_t f_x\Big)(t, X_t)\, dW_t.$$

Au tableau : À dire

On peut retenir : "comme la chaîne classique, mais + $\frac{1}{2} b^2 f_{xx}\, dt$".

Pourquoi $(dX_t)^2 = b_t^2\,dt$?

Avec $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$:

$$(dX_t)^2 = (a_t dt + b_t dW_t)^2 = a_t^2 (dt)^2 + 2a_t b_t\, dt\, dW_t + b_t^2 (dW_t)^2.$$

En utilisant les règles (CM3) :

$$(dt)^2 = 0, \quad dt\, dW_t = 0, \quad (dW_t)^2 = dt,$$

on obtient

$$(dX_t)^2 = b_t^2\, dt.$$

Pourquoi $(dX_t)^2 = b_t^2\,dt$?

Avec $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$:

$$(dX_t)^2 = (a_t dt + b_t dW_t)^2 = a_t^2 (dt)^2 + 2 a_t b_t\, dt\, dW_t + b_t^2 (dW_t)^2.$$

En utilisant les règles (CM3) :

$$(dt)^2 = 0, \quad dt\, dW_t = 0, \quad (dW_t)^2 = dt,$$

on obtient

$$(dX_t)^2 = b_t^2\, dt.$$

Au tableau : À écrire (3 lignes)

$$(dX)^2 = (a\,dt + b\,dW)^2 = b^2 (dW)^2 = b^2\,dt\,.$$

Au tableau : Commentaire

`C'est le calcul symbolique qui rend Itô très opérationnel.`

Finance : mouvement brownien géométrique (GBM)

Modèle

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t, \qquad S_0 > 0.$$

Objectif

Trouver la dynamique de $\ln S_t$ et en déduire la solution explicite S_t.

Finance : mouvement brownien géométrique (GBM)

Modèle

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t, \qquad S_0 > 0.$$

Objectif

Trouver la dynamique de $\ln S_t$ et en déduire la solution explicite S_t.

Au tableau : À écrire (setup)

$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW, \quad f(x) = \ln x.$

Au tableau : Commentaire

C'est LE modèle motivant pour les étudiants (prix positifs, log-retours).

Itô sur $\ln S_t$: le terme correctif

Posons $f(x) = \ln x$: $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$. Avec

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t,$$

on obtient

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma\, dW_t.$$

Intégration

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t.$$

Donc

$$\boxed{S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right).}$$

Itô sur $\ln S_t$: le terme correctif

Posons $f(x) = \ln x$: $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$. Avec

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t,$$

on obtient

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma\,dW_t.$$

Intégration

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t.$$

Donc

$$\boxed{S_t = S_0 \exp\Big(\big(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\big)t + \sigma W_t\Big).}$$

Au tableau : À écrire (calcul Itô en 4 lignes)

$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$
$d(\ln S_t) = f'(S_t)\,dS_t + \frac{1}{2} f''(S_t)\,(dS_t)^2.$
$(dS_t)^2 = (\sigma S_t)^2 (dW_t)^2 = \sigma^2 S_t^2\,dt.$
$\Rightarrow \quad d(\ln S_t) = \frac{1}{S_t}(\mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)(\sigma^2 S_t^2\,dt) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma\,dW_t.$

Au tableau : Commentaire pédagogique)

`C'est le moment où ils voient le "drift correction"` $-\frac{1}{2}\sigma^2$.
`Insister : c'est purement stochastique (vient de` $(dW_t)^2 = dt$`).`

Conséquences : lognormalité et moments

Comme $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, on a

$$\ln S_t \sim \mathcal{N}\Big(\ln S_0 + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t,\ \sigma^2 t \Big).$$

Donc S_t est lognormal et

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}, \qquad \mathrm{Var}(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t}\big(e^{\sigma^2 t} - 1\big).$$

Conséquences : lognormalité et moments

Comme $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, on a
$$\ln S_t \sim \mathcal{N}\Big(\ln S_0 + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t,\ \sigma^2 t\Big).$$
Donc S_t est lognormal et
$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}, \qquad \mathrm{Var}(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t}\big(e^{\sigma^2 t} - 1\big).$$

Au tableau : À écrire (moments, à partir de la lognormalité)

Comme $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, on a $\mathbb{E}[e^{\lambda W_t}] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}$.
En particulier, $\mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}$.
$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}\mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] = S_0 e^{\mu t}$.
$\mathbb{E}[S_t^2] = S_0^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}\mathbb{E}[e^{2\sigma W_t}] = S_0^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{2\sigma^2 t} = S_0^2 e^{2\mu t + \sigma^2 t}$.
$\mathrm{Var}(S_t) = \mathbb{E}[S_t^2] - \mathbb{E}[S_t]^2 = S_0^2 e^{2\mu t}\big(e^{\sigma^2 t} - 1\big)$.

Au tableau : Commentaire

Ce calcul est très apprécié : on obtient moyenne/variance explicitement.

Lien avec martingales exponentielles

Pour le GBM :

$$S_t = S_0 e^{\mu t} \exp\left(\sigma W_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$

Or

$$M_t := \exp\left(\sigma W_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

est une martingale (exemple précédent). Donc

$$e^{-\mu t} S_t = S_0\, M_t \quad \text{est une martingale.}$$

Lien avec martingales exponentielles

Pour le GBM :

$$S_t = S_0 e^{\mu t} \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$

Or

$$M_t := \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

est une martingale (exemple précédent). Donc

$$e^{-\mu t} S_t = S_0\, M_t \quad \text{est une martingale.}$$

Au tableau : À écrire (une ligne)

$e^{-\mu t} S_t = S_0 \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ est une martingale.

Au tableau : À dire

Annonce : sous une mesure "risque-neutre", on remplace μ par r et le prix actualisé devient martingale (préfigure Black-Scholes).

Synthèse CM4

- Itô (brownien) : $df(W_t) = f'(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)\,dt$.
- Itô (processus d'Itô) :

$$df(t, X_t) = \left(f_t + af_x + \tfrac{1}{2}b^2 f_{xx}\right)dt + (bf_x)\,dW_t.$$

- Exemples : $W_t^2 - t$ martingale, exponentielle martingale.
- Finance : GBM $\Rightarrow \ln S_t$ gaussien, S_t lognormal, moments explicites.

Synthèse CM4

- Itô (brownien) : $df(W_t) = f'(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)\,dt$.
- Itô (processus d'Itô) :

$$df(t, X_t) = (f_t + af_x + \tfrac{1}{2}b^2 f_{xx})\,dt + (bf_x)\,dW_t.$$

- Exemples : $W_t^2 - t$ martingale, exponentielle martingale.
- Finance : GBM $\Rightarrow \ln S_t$ gaussien, S_t lognormal, moments explicites.

Au tableau : Question de sortie

Dans GBM, pourquoi n'obtient-on pas $d(\ln S_t) = \mu\,dt + \sigma\,dW_t$?
Réponse : à cause du terme $\frac{1}{2}f''(S_t)(dS_t)^2 = -\frac{1}{2}\sigma^2\,dt$.

Exercices (pour TP / maison)

1. Appliquer Itô à $f(x) = x^3$ et en déduire une martingale construite à partir de W_t^3.
2. Montrer que $M_t = \exp(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$ est une martingale (en utilisant Itô).
3. Soit $X_t = \alpha t + \beta W_t$. Calculer $d(e^{X_t})$ et identifier une martingale exponentielle.
4. (Finance) Pour $dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$, calculer la loi de S_t et $\mathbb{E}[S_t^p]$ pour $p \in \mathbb{R}$.
5. (Bonus) Résoudre $dX_t = aX_t\, dt + bX_t\, dW_t$ et comparer avec GBM.

Exercices (pour TP / maison)

1. Appliquer Itô à $f(x) = x^3$ et en déduire une martingale construite à partir de W_t^3.
2. Montrer que $M_t = \exp(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$ est une martingale (en utilisant Itô).
3. Soit $X_t = \alpha t + \beta W_t$. Calculer $d(e^{X_t})$ et identifier une martingale exponentielle.
4. (Finance) Pour $dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$, calculer la loi de S_t et $\mathbb{E}[S_t^p]$ pour $p \in \mathbb{R}$.
5. (Bonus) Résoudre $dX_t = aX_t\, dt + bX_t\, dW_t$ et comparer avec GBM.

Au tableau : Corrigé express (indications)

(1) $f(x) = x^3$: $df = 3W_t^2\, dW_t + 3W_t\, dt \Rightarrow W_t^3 - 3\int_0^t W_s\, ds$ martingale.
(2) Déjà fait : $dM_t = \theta M_t\, dW_t$.
(3) $d(e^{X_t}) = e^{X_t}\left(dX_t + \frac{1}{2}(dX_t)^2\right)$, $(dX_t)^2 = \beta^2\, dt$.
(4) $\ln S_t$ gaussien, $\mathbb{E}[S_t^p] = S_0^p \exp\left(p(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \frac{1}{2}p^2\sigma^2 t\right)$.
(5) Même calcul avec $f = \ln X$.