Exercices de Modélisation Stochastique

Feuille 2

February 1, 2022

1. Soit $Y_t = tW_t$. Calculer dY_t, l'espérance de la v.a. Y_t et la covariance $E[Y_tY_s]$.

2. Soit $X_t := \int_0^t \sin(s)dW_s$.

   (a) Montrer que X_t est définie.

   (b) Montrer que X est un processus gaussien, calculer son espérance et sa covariance.

   (c) Calculer $E[X_t|\mathcal{F}_s]$.

   (d) Montrer que $X_t = \sin(t)W_t - \int_0^t \cos(s)W_s ds$.

3. Montrer que
$$(Y_t := \sin(W_t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(W_s)ds, t \geq 0)$$
est une martingale. Calculer son espérance et sa variance.

4. Soit $Y_t = \int_0^t \tan(s)dW_s$, $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$.

   (a) Montrer que Y_t est définie.

   (b) Montrer que Y est un processus gaussien, calculer son espérance et sa covariance.

   (c) Calculer $E[Y_t|\mathcal{F}_s]$.

   (d) Montrer que $Y_t = \tan(t)W_t - \int_0^t \frac{W_s}{\cos^2(s)}ds$.

5. **Pont Brownien.** On considère l'équation différentielle stochastique
$$\begin{cases} dX_t &= \frac{X_t}{t-1}\,dt + dW_t;\ 0 \leq t < 1 \\ X_0 &= 0 \end{cases}$$
et l'on admet l'existence d'une solution.

   (a) Montrer que
$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dWs}{1-s},\ 0 \leq t < 1.$$

(b) Montrer que X est un processus gaussien, calculer son espérance et sa covariance.

(c) Montrer que $\lim_{t\to 0} X_t = 0$.

6. Ecrire les processus suivants comme des processus d'Itô:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

en précisant leur drift μ_t et le coefficient de diffusion σ_t.

(a) $X_t = W_t^2$.
(b) $X_t = t + e^{W_t}$.
(c) $X_t = W_t^3 - 3tW_t$.
(d) $X_t = 1 + 2t + e^{W_t}$.
(e) $X_t = (W_t + t)e^{-W_t - \frac{1}{2}t}$.
(f) $X_t = e^{t/2}\sin(W_t)$.

7. **Exponentielle.** Soit σ un processus adapté continue de $L^2(\Omega \times \mathbb{R})$ et

$$U_t = \int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds$$

On pose $Y_t := e^{U_t}$ et $Z_t = Y_t^{-1}$.

(a) Expliciter la dynamique de Y, c'est-à-dire exprimer dY_t.
(b) Donner une condition sur σ pour que Y ce soit une martingale.
(c) Calculer $E[Y_t]$ dans ce cas. Expliciter les calcules quand $\sigma = 1$.
(d) Calculer dZ_t.

8. Soit (a, b, c, d) des constantes et

$$Z_t = e^{(a-c^2/2)t+cW_t} \int_0^t \left(z + b\int_0^t e^{-(a-c^2/2)s-cW_s} ds \right)$$

Quelle est l'EDS vérfiée par Z?