Equations différentielles stochastiques et Théoreme de Girsanov

Antonio Falcó

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Est-ce qu'il existe un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que

$$\begin{aligned} dX_t &= f(X_t)dt + g(X_t)dW_t \\ X_0 &= x. \end{aligned}$$

c'est-à-dir

$$X_t = x + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dW_s.$$

Definition

Une fonction $f\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite (globalement) lipschitzienne s'il existe $K \geq 0$ tel que

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x| \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

Remarque

- Si f est lipschitzienne, alors f est uniformément continue (et donc continue) sur $\mathbb{R}$.
- Si $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ et f' est bornée, alors f est lipschitzienne. En effet :

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(u)du \right| \leq \sup_{u \in \mathbb{R}} |f'(u)||y - x|$$

Theorem

Soit $(W_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un m.b.s. (p.r. à une filtration $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$), $x_0 \in \mathbb{R}$ et f, g lipschitziennes. Alors il existe un unique processus $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ continu et adapté à $(\mathcal{F}_t, t\mathbb{R}_+)$ tel que

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dW_s \text{ p.s. pour tout } t \in \mathbb{R}_+. \quad (1)$$

De plus

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2) < \infty \text{ pour tout } T > 0.$$

Remark

La solution (X_t) de l'équation ci-dessus est également appelée une solution forte *de* (1).

Démonstration (idée principale) :

On définit

$$\mathcal{X}_T := \left\{ X = (X_t, t \in [0, T]) : \begin{array}{c} \text{continue et adapté à } (\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+) \\ \text{tel que } \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2) < \infty \end{array} \right\}$$

Alors $(\mathcal{X}_T, \|\cdot\|_{T,2})$ avec la norme $\|X\|_{T,2}^2 := \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2)$ est une espace de Banach. Alors, pour trouver une solution $X \in \mathcal{X}_T$ de (1) on utilise la méthode classique dite *méthode d'iteration de Picard* i.e on définit une suite de processus $(X^{(n)}) =)(X_t^{(n),t \in [0,t]})) \in \mathcal{X}_T$ de manière récursive :

$$X_0^{(n)} := x_0,\, X_t^{(n)} := x_0 + \int_0^t f(X_s^{(n)})ds + \int_0^t g(X_s^{(n)})dW_s$$

Il se trouve que la suite $(X^{(n)})$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{X}_T$, donc elle converge dans $\mathcal{X}_T$ et on montre que la limite de la suite est solution de (1). De plus on montre que si (X_t) et (Y_t) sont deux solutions de (1), alors $X_t = Y_t$ p.s. pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration (idée principale) :

Pour chaque étape on a recours à l'estimation suivante (qui se démontre en utilisant notamment l'inegalité de Doob et l'isométrie d'Itô) : si on pose

$$\phi(Y)_t = x_0 + \int_0^t f(Y_s)ds + \int_0^t g(Y_s)dW_s$$

alors

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}(\phi(Y)_t - \phi(Z)_t)^2\right) \leq K\mathbb{E}\left(\int_0^T (Y_s - Z_s)^2\right).$$

Proposition

Le processus $X = (X_t)$ solution de l'équation (1) est une processus d'Itô.

Démonstration :

On peut décomposer la solution comme $X_t = M_t + V_t$, où

$$M_t := x_0 + \int_0^t g(X_s)dW_s \text{ et } V_t = \int_0^t f(X_s)ds.$$

Du fait que $X \in \mathcal{X}_T$ et que g est lipschitzienne, l'intégrale stochastique $\int_0^t g(X_s)dW_s$ est bien définie et M_t est une martingale continue de carré intégrable. D'autre part, du fait que $t \mapsto (X_t)$ et f sont des fonctions continues, le processus (V_t) est continûment dérivable, donc continue à variation bornée. Le processus $X = (X_t)$ est donc un processus d'Itô.

On considére le problème suivant. Étant donnés (W_t) un m.b.s., $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ existe-t-il un processus (X_t) qui verifié

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t \text{ et } X_0 = x_0?$$

Pour répondre à cette question on a besoin de la définition suivante.

Definition

Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne en x s'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leq K|y - x| \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } x, y \in \mathbb{R}.$$

Theorem

Si $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues (conjointement en t et x) et lipschitziennes en x, alors il existe un unique processus (X_t) solution de l'équation

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dW_s \text{ p.s., pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

A nouveau, le processus (X_t) est appelé une solution forte de l'équation (2) et c'est un processus d'Itô.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $a, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et bornées. On apelle EDS linéaire a une EDS de la forme

$$\begin{aligned} dX_t &= a(t)X_t dt + \sigma(t)dW_t \\ X_0 &= x. \end{aligned}$$

Soit $X_t^p = e^{\int_0^t a(s)ds} V_t$ une solution particulière. Alors,

$$\begin{aligned} dX_t^p &= d(e^{\int_0^t a(s)ds})V_t + e^{\int_0^t a(s)ds} dV_t + d\langle e^{\int_0^t a(s)ds}, V\rangle_t \\ &= a(t)e^{\int_0^t a(s)ds} dt V_t + e^{\int_0^t a(s)ds} dV_t \\ &= a(t)X_t^p dt + e^{\int_0^t a(s)ds} dV_t. \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$e^{\int_0^t a(s)ds} dV_t = \sigma(t)dW_t \Rightarrow V_t = \int_0^t e^{-\int_0^s a(u)du} \sigma(u)dW_u.$$

et $X_t^p = e^{\int_0^t a(s)ds} \int_0^t e^{-\int_0^s a(u)du} \sigma(u)dW_u$

Soit

$$X_t = e^{\int_0^t a(s)ds}x + X_t^p = e^{\int_0^t a(s)ds}x + e^{\int_0^t a(s)ds}\int_0^t e^{-\int_0^s a(u)du.}\sigma(u)dW_u$$

Alors

$$\begin{aligned} dX_t &= a(t)e^{\int_0^t a(s)ds}xdt + dX_t^p \\ &= a(t)e^{\int_0^t a(s)ds}xdt + a(t)X_t^p + \sigma(t)dW_t \\ &= a(t)X_t dt + \sigma(t)dW_t. \end{aligned}$$

et $X_0 = x$. On peut dire que X_t est la solution forte de la EDS linèaire.

Considerons l'EDS (pont brownien)

$$
\begin{aligned}
dX_t &= -\frac{X_t}{1-t}dt + dW_t \quad 0 < t < 1 \\
X_0 &= 0.
\end{aligned}
$$

Ici la fonction $a(t) = -\frac{1}{1-t}$ n'est pas continue en $t = 1$. Mais l'equation admet tout de même une unique solution forte jusqu'en $t = 1$. Noter que $X_1 = 0$ p.s. et $E[X_t^2] = t(1-t)$. On a

$$
\int_0^t e^{\int_0^s \frac{du}{1-u}} ds = \int_0^t \frac{1}{1-s} ds =
$$

Solution faible

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On considère l'EDS

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dW_t \text{ et } X_0 = x_0 \tag{3}$$

On donne la définition suivante, qui peut paraître étrange au premier abord.

Definition

Une solution faible de l'équation (3) est une processus continu (X_t) tel que les processus (M_t) et (N_t) définis respectivement par

$$M_t = X_t - X_0 - \int_0^t f(X_s)ds \text{ et } N_t = M_t^2 - \int_0^t g(X_s)^2 ds$$

sont des martingales.

Proposition

Supposons f, g continues g bornée et supposons encore que l'équation admette une solution forte (X_t). Alors (X_t) est une solution faible de (3).

Démonstration

Vu que g est bornée, il est clair que

$$M_t = X_t - X_0 - \int_0^t f(X_s)ds = \int_0^t g(X_s)dW_s$$

est une martingale continue de carré integrable. De plus, la variation quadratique de (M_t) est donnée par $\langle M \rangle_t = \int_0^t g(X_s)^2 ds$, donc le processus (N_t) défini par

$$N_t = M_t^2 - \int_0^t g(X_s)^2 ds$$

est également une martingale.

Remark

- *Une EDS peut admettre une solution faible, mais pas de solution forte : il existe donc plus souvent une solution faible qu'une solution forte.*
- *La question de l'unicité de la solution faible est par contre plus délicate : il faut préciser ce qu'on entend par "unique".*

Example

La solution faible de l'EDS

$$dX_t = aX_t dt + \sqrt{X_t} dW_t \text{ et } X_0 = 0$$

et un processus continu (X_t) tel que les processus (M_t) et (N_t) définis par

$$M_t = X_t - \int_0^t aX_s ds \text{ et } N_t = M_t^2 - \int_0^t X_s ds$$

sont des martingales.

Example

La solution faible de l'EDS

$$dX_t = \operatorname{sgn}(X_t)dW_t \text{ et } X_0 = 0,$$

est un processus continu (X_t) tel que

$$M_t = X_t \text{ et } N_t = X_t^2 - \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)^2 ds = X_t^2 - t \text{ sont des martingales.}$$

Par le théorème de Levy, la solution faible de l'équation ci-dessus est donc une m.b.s ! (mais qui n'est pas le m.b.s. (W_t) ; on ne peut pas remplacer X_t par W_t dans l'équation ci-dessus...)

Exercise

Soit X_t solution de l'EDS :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$
$$X_0 = x.$$

Montrer que $Z_t = e^{-\alpha t} X_t$ est un martingale ssi $\alpha = \mu$.

Question

Soit Z_t solution de l'EDS :

$$dZ_t = (\mu - \alpha)Z_t dt + \sigma Z_t dW_t$$
$$Z_0 = x.$$

Si on prend

$$\widetilde{W}_t := \frac{(\mu - \alpha)}{\sigma} t + W_t$$

alors,

$$\sigma d\widetilde{W}_t = (\mu - \alpha)dt + \sigma dW_t$$

et

$$dZ_t = \sigma Z_t d\widetilde{W}_t$$

c'est-à-dire : **si $\widetilde{W}_t$ est un m.b.s alors Z_t est une martingale.**

Definition

Soit $M = (M_t)$ une martingale continue de carré intégrable telle que $M_0 = 0$ et

$$\langle M \rangle_t \leq K\, t$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. On définit la martingale exponentielle Y associée à M par

$$Y_t := \exp\left(M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2} \right) = e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}},\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Remark

Noter que la condition $\langle M \rangle_t \leq K\, t$ n'impose pas forcément que la variation quadratique $\langle M \rangle_t$ soit un processus déterministe.

Proposition

Soit $M = (M_t)$ une martingale continue de carré intégrable telle que $M_0 = 0$ et

$$\langle M \rangle_t \leq K\, t$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Alors le processus $Y_t = \exp\left(M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}\right)$ satisfait l'EDS

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s dM_s \text{ i.e. } dY_t = Y_t dM_t \text{ et } Y_0 = 1$$

et (Y_t) est donc une martingale.

Démonstration (idée principale) :

Remarquer que

$$Y_t = f(\langle M\rangle_t, M_t) \text{ où } f(t,x) = \exp(x - \frac{t}{2})$$

et $\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}f$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f$. En appliquant le Théorème d'Itô (et en passant à dessein sous silence la condition d'integrabilité dans le théorème en question !) on trouve donc :

$$Y_t - Y_0 = \int_0^t -\frac{1}{2} Y_s d\langle M\rangle_s + \int_0^t Y_s dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t Y_s ds = \int_0^t Y_s dM_s.$$

Remark

La condition $\langle M \rangle_t \leq K\, t$, même si elle n'est pas utilisée explicitement ci-dessus, atoute sont importance (elle permet de justifier l'utilisation de la formule d'Itô). Noter qu'il est possible de montrer que le processus (Y_t) est une martingale sous une condition plus faible encore.

Question scientifique

Comme vu précedemment, la solution de l'équation

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t \text{ et } X_0 = x_0,$$

n'est en géneral pas une martingale (sous la probabilité $\mathbb{P}$). La question que l'on pose ici est de savoir s'il existe une autre mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ sous laquelle le processus (X_t) soit une martingale

Mathématiques Financières

L'application en mathématiques financières est la suivante : pour évaluer le prix d'une option sur un actif, on a besoin de la propriété de martingale. Pourtant, le prix d'un actif donné n'est pas en géneral pas une martingale, mais affiche une tendance à la hausse ou à la baisse. C'est pourquoi on désire définir une nourvelle probabilité sous laquelle celui-ci soit une martingale, de manière à pouvoir effectuer des calculs.

1. Soit (M_t) une martingale par rapport $(\mathcal{F}_t)$, continue de carré intégrable telle que $M_0 = 0$ et $\langle M \rangle_t \leq K\,t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. On pose
$$Y_t = e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}}$$
la martingale associe a (M_t).
2. On se place à horizon fini $T > 0$ (ce qui simplifie considérablement les choses) et on définit
$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(1_A\, Y_T\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(1_A\, e^{M_T - \frac{\langle M \rangle_T}{2}}\right), \quad A \in \mathcal{F}$$
3. Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{\mathbb{P}})$ forme un nouvel espace de probabilité. En effet :
   - 3.1 $\widetilde{\mathbb{P}}(A) > 0$ car $Y_T > 0$.
   - 3.2 $\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{M_T - \frac{\langle M \rangle_T}{2}}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{M_0 - \frac{\langle M \rangle_0}{2}}) = 1$ car (Y_t) est une martingale.
   - 3.3 $\widetilde{\mathbb{P}}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} e^{M_T - \frac{\langle M \rangle_T}{2}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mathbb{P}}(A_n)$.
   - 3.4 Noter que $\mathbb{P}(A) = 0$ si et seulement si $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = 0$, on dit que les deux mesures sont équivalentes.

Remark

On montre d'autre part que si X est une v.a. telle que

$$\mathbb{E}(|X\, e^{M_T - \frac{\langle M \rangle_T}{2}}|) < \infty$$

alors

$$\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X\, e^{M_T - \frac{\langle M \rangle_T}{2}})$$

Lemma (A)

Si Z est $\mathcal{F}_t$-mesurable, et telle que $\mathbb{E}(|Z\, e^{M_T - \frac{\langle M \rangle_T}{2}}|) < \infty$ alors $\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(Z) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z\, e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}})$

Démostration :

Du fait que $(Y_t = e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}})$ est une martingale et que Z et $\mathcal{F}_t$-mesurable, on a

$$\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(Z) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z\, e^{M_T - \frac{\langle M \rangle_T}{2}}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z\, e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}})$$

Lemma (B)

Le processus (X_t) est une martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}$ si et seulement si $\left(X_t\, e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}}\right)$ est une martingale sous $\mathbb{P}$.

Démostration :

On montre seulement que si $\left(X_t\, e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}}\right)$ est une martingale sous $\mathbb{P}$ alors (X_t) est une martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}$ (montrer le réciproque comme exercice). Supposons donc que $\left(X_t\, e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}}\right)$ est une martingale i.e.

1. $X_t\, e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $0 \le t \le T$ et $\mathbb{E}\left(\left|X_t\, e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}}\right|\right) < \infty$.
2. $\mathbb{E}\left(Z\, X_t\, e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}}\right) = \mathbb{E}\left(Z\, X_s\, e^{M_s - \frac{\langle M \rangle_s}{2}}\right)$ pour tout Z v.a. $\mathcal{F}_s$-mesurable avec $0 \le s \le t \le T$.

Démostration :

On peut déduit :

(a) Pour tout $0 \leq t \leq T$ la v.a

$$X_t = \frac{X_t \, e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}}}{e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}}}$$

est $\mathcal{F}_t$-mesurable et

$$\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(|X_t|) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(|X_t| e^{M_T - \frac{\langle M \rangle_T}{2}}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(|X_t| e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}}) < \infty.$$

(b) Soit $0 \leq s \leq t \leq T$ et Z une v.a. $\mathcal{F}_s$-mesurable et bornée. Par le Lemme (A) et la condition 2 ci-dessus, on a

$$\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(X_t Z) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_t Z e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_s Z e^{M_s - \frac{\langle M \rangle_s}{2}}) = \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(X_s Z),$$

alors $\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(X_t | \mathcal{F}_t) = X_s$ i.e. (X_t) est une martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}$.

Theorem (Girsanov)

Soit (M_t) une martingale par rapport $(\mathcal{F}_t)$, continue de carré intégrable telle que $M_0 = 0$ et $\langle M \rangle_t \leq K\, t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et soit (Z_t) un martingale continue de carré intégrable sous $\mathbb{P}$. Alors $(Z_t - \langle M, Z \rangle_t)$ est une martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}$.

Démostration (idée principale) :

Posons $A_t := \langle M, Z \rangle_t$. Pour montrer que $(Z_t - A_t)$ est une $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingale, en utilisant le lemme (B) il est suffit de montrer que $((Z_t - A_t)e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}})$ est une $\mathbb{P}$-martingale. Posons $Y_t := e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}}$, par la formule d'intégration par parties, on a

$$
\begin{aligned}
(Z_t - A_t)Y_t - (Z_0 - A_0)Y_0 = & \int_0^t (Z_s - A_s)dY_s + \int_0^t Y_s dZ_s \\
& - \int_0^t Y_s dA_s + \langle Z - A, Y \rangle_t .
\end{aligned}
$$

Démostration (idée principale) :

$$(Z_t - A_t)Y_t - (Z_0 - A_0)Y_0 = \int_0^t (Z_s - A_s)dY_s + \int_0^t Y_s dZ_s - \int_0^t Y_s dA_s + \langle Z - A, Y\rangle_t.$$

Du fait que Y et Z sont des $\mathbb{P}$-martingales les termes $\int_0^t (Z_s - A_s)dY_s$ et $\int_0^t Y_s dZ_s$ sont également des $\mathbb{P}$-martingales. On aura donc montré le résultat si on montre que les deux derniers termes s'annulent i.e.

$$\int_0^t Y_s dA_s = \langle Z - A, Y\rangle_t. \tag{4}$$

Observe que $dY_t = Y_t dM_t$ donc $dM_t = \frac{dY_t}{Y_t}$ $(Y_t > 0)$ et

$$dA_t = d\langle M, Z\rangle_t = \frac{1}{Y_t} d\langle Y, Z\rangle_t$$

Démostration (idée principale) :

Ceci implique que

$$\int_0^t Y_s dA_s = \int_0^t d\langle Y, Z\rangle_s = \langle Y, Z\rangle_t.$$

De l'autre coté on sait que

$$\langle Z - A, Y\rangle_t = \langle Z, Y\rangle_t$$

car A_t est de variation bornée. L'équation (4) est donc bien vérifiée et le théorème démontré.

Question scientifique (A)

Soit W_t un m.b.s. $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, lipschitzienne en x et bornée i.e. $|f(t,x)| \leq K_1$ pour tout (t,x). On considère (X_t) la solution de l'équation

$$dX_t = f(t, X_t)dt + dW_t \text{ et } X_0 = x_0 \tag{5}$$

Sous quelle mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ le processus $(X_t, t \in [0, T])$ est une $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingale.

Soit $M_t = -\int_0^t f(s, X_s)dW_s$ une $\mathbb{P}$-martingale continu de carré intégrable et on vérifié :

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t f(s, X_s)^2 ds \leq K_1^2\, t.$$

Soit

$$Y_t = e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}} = e^{-\int_0^t f(s,X_s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s,X_s)^2 ds}$$

la martingale exponentielle associé à M et la probabilité définie par

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(1_A e^{-\int_0^T f(s,X_s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T f(s,X_s)^2 ds}\right)$$

Proposition

Soit W_t un m.b.s. $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, lipschitzienne en x et bornée i.e. $|f(t,x)| \leq K_1$ pour tout (t,x). On considère (X_t) la solution de l'équation

$$dX_t = f(t, X_t)dt + dW_t \text{ et } X_0 = x_0 \tag{6}$$

Alors

(a) *(X_t) est une $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingale.*

(b) *(X_t) est une m.b.s. sous $\widetilde{\mathbb{P}}$.*

Démostration :

D'après le théorème de Girsanov $W_t - \langle M, W\rangle_t$ est une $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingale. Mais

$$W_t - \langle M, W\rangle_t = W_t + \int_0^t f(s, X_s)ds = X_t - X_0,$$

alors (a) est vérifié.

Démostration :

D'autre par, on a par définition

$$\langle X \rangle_t = \langle W \rangle_t = t$$

car X est un processus d'Itô ou la part martingale est égale à W (remarquer que X est à trajectoires continues).

Question scientifique (B)

Soit W_t un m.b.s. $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctions continues, lipschitzienne en x et bornée i.e. $|f(t,x)| \leq K_1$ et $|g(t,x)| \geq K_2 > 0$ pour tout (t,x). On considère (X_t) la solution de l'équation

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t \text{ et } X_0 = x_0 \tag{7}$$

Sous quelle mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ le processus $(X_t, t \in [0, T])$ est une $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingale.

Soit $M_t = -\int_0^t \frac{f(s,X_s)}{g(s,X_s)} dW_s$ une $\mathbb{P}$-martingale continu de carré intégrable et on vérifié :

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \frac{f(s,X_s)^2}{g(s,X_s)^2} ds \leq \frac{K_1^2}{K_2^2}\, t.$$

Soit

$$Y_t = e^{M_t - \frac{\langle M \rangle_t}{2}} = e^{-\int_0^t \frac{f(s,X_s)}{g(s,X_s)} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{f(s,X_s)^2}{g(s,X_s)^2} ds}$$

la martingale exponentielle associé à M et la probabilité définie par

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(1_A e^{-\int_0^t \frac{f(s,X_s)}{g(s,X_s)} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{f(s,X_s)^2}{g(s,X_s)^2} ds}\right)$$

Proposition

Soit W_t un m.b.s. $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctions continues, lipschitzienne en x et bornée i.e. $|f(t,x)| \leq K_1$ et $|g(t,x)| \geq K_2 > 0$ pour tout (t,x). On considère (X_t) la solution de l'équation

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t \text{ et } X_0 = x_0. \tag{8}$$

Alors,

(a) (X_t) *est une* $\widetilde{\mathbb{P}}$*-martingale.*

(b) $\langle X \rangle_t = \int_0^t g(s, X_s)^2 ds.$

Démostration :

(a) Soit $M_t = -\int_0^t \frac{f(s,X_s)}{g(s,X_s)} dW_s$ et $C_t := \int_0^t g(s,X_s)dW_s$ deux $\mathbb{P}$-martingales, donc

$$C_t - \langle M, C\rangle_t = \int_0^t g(s,X_s)ds + \int_0^t f(s,X_s)ds = X_t - X_0$$

est une $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingale.

(b) Exercice.

Remark

En général, le processus (X_t) n'est donc pas un m.b.s. sous $\widetilde{\mathbb{P}}$. Mais peut-on exhiber un processus qui soit un m.b.s. sous $\widetilde{\mathbb{P}}$?

Proposition (Change de mesure)

Soit (W_t) *un m.b.s.* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonctions continues, lipschitzienne en* x *et bornée i.e.* $|f(t,x)| \leq K_1$ *et* $|g(t,x)| \geq K_2 > 0$ *pour tout* (t,x)*. Alors,*

$$\widetilde{W}_t := W_t - \int_0^t \frac{f(s,X_s)}{g(s,X_s)} ds$$

satisfait

(a) $(\widetilde{W}_t)$ *est une* $\widetilde{\mathbb{P}}$*-martingale avec*

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(1_A e^{-\int_0^t \frac{f(s,X_s)}{g(s,X_s)} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f(s,X_s)^2}{g(s,X_s)^2} ds} \right)$$

(b) $(\widetilde{W}_t)$ *est un m.b.s sous* $\widetilde{\mathbb{P}}$.

Démostration :

(a) Du fait que W_t et $M_t = -\int_0^t \frac{f(s,X_s)}{g(s,X_s)} dW_s$ sont des $\mathbb{P}$-martingales,

$$W_t - \langle M, W \rangle_t = W_t - \int_0^t \frac{f(s,X_s)}{g(s,X_s)} ds = \widetilde{W}_t$$

est une $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingale.

(b) Exercice

Example

Soit Z_t solution de l'EDS :

$$\begin{aligned} dZ_t &= (\mu - \alpha) Z_t dt + \sigma Z_t dW_t \\ Z_0 &= x. \end{aligned}$$

Avec la Proposition (Change de mesure) on a

$$\widetilde{W}_t = \int_0^t \frac{(\mu - \alpha)}{\sigma} ds + W_t = \frac{(\mu - \alpha)}{\sigma} t + W_t$$

est un m.b.s sous $\widetilde{\mathbb{P}}$. Alors,

$$dZ_t = \sigma Z_t d\widetilde{W}_t$$

et Z_t est une martingale par rapport $\widetilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$ ("change of measure").

Theorem (Représentation de Feynman-Kac)

Soit (X_t^x) *une solution de l'EDS :*

$$\begin{aligned} dX_t^x &= \mu(X_t^x)dt + \sigma(X_t^x)dW_t \\ X_0^x &= x \end{aligned}$$

et $u = u(t,x)$ *une solution de l'EDP :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0,x) &= h(x). \end{aligned}$$

Alors on a la représentation

$$u(t,x) = \mathbb{E}[h(X_t^x)].$$

Soit $M_t = u(t_0 - t, X_t^x)$ avec le théorème d'Itô

$$\begin{aligned} dM_t &= -\frac{\partial u}{\partial t}(t_0 - t, X_t^x)dt \\ &+ \frac{\partial u}{\partial x}(t_0 - t, X_t^x)dX_t^x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0 - t, X_t^x)d\langle X^x\rangle_t \\ &= \left(-\frac{\partial u}{\partial t}(t_0 - t, X_t^x) + \mu(X_t^x)\frac{\partial u}{\partial x}(t_0 - t, X_t^x)\right. \\ &\left.+\frac{1}{2}\sigma^2(X_t^x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0 - t, X_t^x)\right) \times dt \\ &+ \sigma(X_t^x)\frac{\partial u}{\partial x}(t_0 - t, X_t^x)dW_t \\ &= \sigma(X_t^x)\frac{\partial u}{\partial x}(t_0 - t, X_t^x)dW_t, \end{aligned}$$

c'est-à-dire M_t est une martingale. Alors $\mathbb{E}[M_{t_0}] = \mathbb{E}[M_0]$ c'est-à-dire

$$\mathbb{E}[M_{t_0}] = \mathbb{E}[u(0, X_{t_0}^x)] = \mathbb{E}[h(X_{t_0}^x)] = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[u(t_0, x)] = u(t_0, x).$$

et on a $\mathbb{E}[h(X_{t_0}^x)] = u(t_0, x)$ pour tout $t_0 > 0$. □