

Modélisation stochastique CM2 : Intégrale stochastique d'Itô

Construction, isométrie, martingale, premiers calculs

Antonio Falcó

École Centrale de Nantes

1^{er} février 2026

Objectif de séance (2h). Construire l'intégrale d'Itô en L^2 . **Stratégie pédagogique.**

- Définir sur *simples prévisibles* (comme Riemann en déterministe).
- Prouver une identité énergétique (isométrie) \Rightarrow extension par continuité.
- Martingale comme corollaire naturel (moyenne conditionnelle nulle des incréments).

Au tableau : Schéma d'ensemble (à dessiner en 30 secondes)

$$\begin{array}{c}
 \text{Simples prévisibles} \xrightarrow{\int \cdot dW} L^2(\Omega) \\
 \text{Isométrie: } \mathbb{E} \left[\left(\int H dW \right)^2 \right] = \mathbb{E} \int H^2 \\
 \Downarrow \text{continuité} \\
 \underline{\mathcal{H}_T^2} \xrightarrow{\int \cdot dW} L^2(\Omega)
 \end{array}$$

Au tableau : Phrase clé

Plan (2h)

- ➊ Objectifs et idée générale (intégrer contre un bruit)
- ➋ Processus simples prévisibles : définition
- ➌ Définition de l'intégrale d'Itô sur les simples
- ➍ Isométrie d'Itô et covariance
- ➎ Extension à L^2 (construction par densité)
- ➏ Propriété de martingale et continuité
- ➐ Exemples de calculs (déterministes, puis adaptés)
- ➑ Pont vers CM3–CM4 (variation quadratique, formule d'Itô)

└ Plan (2h)

- ◆ Objectifs et idée générale (intégrer contre un bruit)
- ◆ Processus simples prévisibles : définition
- ◆ Définition de l'intégrale d'Itô sur les simples
- ◆ Isométrie d'Itô et covariance
- ◆ Extension à L^2 (construction par densité)
- ◆ Propriétés de martingale et continuité
- ◆ Exemples de calculs (déterministes, puis adaptés)
- ◆ Pont vers CM3-CM4 (variation quadratique, formule d'Itô)

Au tableau : À dire (1 minute)

- (1) Définition sur simples
- (2) Isométrie (le cœur)
- (3) Extension à \mathcal{H}^2
- (4) Martingale
- (5) Exemples rapides + teaser Itô

Définition

Partition $0 = t_0 < \dots < t_n = T$, variables X_i \mathcal{F}_{t_i} -**mesurables**, et

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t).$$

- “Je fixe X_i au début de l'intervalle” (pas d'anticipation).
- Analogue stochastique des fonctions en escalier.

CM2 – Intégrale d'Itô

└ Processus simples prévisibles

└ Processus simple prévisible

Définition

Partition $0 = t_0 < \dots < t_n = T$, variables X_i \mathcal{F}_{t_i} -mesurables, et

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

- "le fixe X_i au début de l'intervalle" (pas d'anticipation).
- Analogie stochastique des fonctions en escalier.

Au tableau : À écrire

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad X_i \in L^2, \quad X_i \text{ } \mathcal{F}_{t_i}\text{-mesurable.}$$

Au tableau : Commentaire pédagogique

Interprétation finance : X_i = position entre t_i et t_{i+1} .

Prévisible = décision prise avec l'info disponible à t_i .

Espace naturel

$$\mathcal{H}_T^2 := \{H \text{ prévisible} : \mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds < \infty\}.$$

CM2 – Intégrale d'Itô

└ Processus simples prévisibles

└ Espace des intégrandes

Au tableau : À écrire

$$\|H\|_{\mathcal{H}_T^2}^2 := \mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds.$$

Au tableau : À dire

- 1) X_i est \mathcal{F}_{t_i} -mesurable.
- 2) ΔW_i indépendant du passé et centré.
- 3) Même argument que CM1 : $\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$.

Définition de l'intégrale d'Itô (simples)

Définition

Pour $H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$ et $t \in [0, T]$,

$$\int_0^t H_s dW_s := \sum_{i=0}^{n-1} X_i (W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i}).$$

CM2 – Intégrale d'Itô

└ Définition de l'intégrale sur les simples

└ Définition de l'intégrale d'Itô (simples)

Définition

Pour $H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$ et $t \in [0, T]$,

$$\int_0^t H_s dW_s := \sum_{i=0}^{n-1} X_i (W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i}).$$

Au tableau : À écrire (version sans $n \wedge$ si vous préférez)

$$\text{Pour } t = T : \quad \int_0^T H_s dW_s := \sum_{i=0}^{n-1} X_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

$$\text{Puis pour } t \leq T : \quad \int_0^t := \sum_i X_i (W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i}).$$

Au tableau : Mini-analogie

Déterministe : $\int f dg \approx \sum f(t_i)(g(t_{i+1}) - g(t_i)).$

Stochastique : même forme, mais $f(t_i) = X_i(\omega)$ adapté.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s dW_s\right] = 0.$$

CM2 – Intégrale d'Itô

└ Définition de l'intégrale sur les simples

└ Propriété : moyenne nulle

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s dW_s\right] = 0.$$

Au tableau : À écrire (preuve en 4 lignes)

$$\int_0^t H dW = \sum_i X_i \Delta W_i, \quad \Delta W_i = W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i}.$$

$$\mathbb{E}[X_i \Delta W_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i \Delta W_i \mid \mathcal{F}_{t_i}]] = \mathbb{E}[X_i \mathbb{E}[\Delta W_i \mid \mathcal{F}_{t_i}]] = 0.$$

Au tableau : À dire

- 1) X_i est \mathcal{F}_{t_i} -mesurable.
- 2) ΔW_i indépendant du passé et centré.
- 3) Même argument que CM1 : $\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$.

Théorème

Pour H simple prévisible,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T H_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T H_s^2 ds \right].$$

Théorème

Pour H simple prévisible,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T H_t dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T H_t^2 dt \right].$$

Au tableau : À écrire (plan de preuve)

$$\int_0^T H dW = \sum_i X_i \Delta W_i.$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_i X_i \Delta W_i \right)^2 \right] = \sum_i \mathbb{E}[X_i^2 (\Delta W_i)^2] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i X_j \Delta W_i \Delta W_j].$$

Montrer: termes croisés = 0, $\mathbb{E}[(\Delta W_i)^2] = \Delta t_i$.

Au tableau : Commentaire pédagogique

C'est exactement "variance d'une somme d'incrémentes indépendants", mais avec des coefficients aléatoires adaptés.

Preuve : annulation des termes croisés

$$\mathbb{E}[X_i X_j \Delta W_i \Delta W_j] = 0 \quad (i \neq j).$$

CM2 – Intégrale d'Itô

└ Isométrie d'Itô

└ Preuve : annulation des termes croisés

$$\mathbb{E}[X_i X_j \Delta W_i \Delta W_j] = 0 \quad (i \neq j).$$

Au tableau : À écrire (cas $i < j$)Supposons $i < j$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_i X_j \Delta W_i \Delta W_j] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i X_j \Delta W_i \Delta W_j \mid \mathcal{F}_{t_j}]] \\ &= \mathbb{E}[X_i X_j \Delta W_i \mathbb{E}[\Delta W_j \mid \mathcal{F}_{t_j}]] = 0. \end{aligned}$$

Au tableau : À dire

- 1) X_i est \mathcal{F}_{t_i} -mesurable.
- 2) ΔW_i indépendant du passé et centré.
- 3) Même argument que CM1 : $\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$.

$$\mathbb{E}[X_i^2 (\Delta W_i)^2] = \mathbb{E}[X_i^2] (t_{i+1} - t_i).$$

CM2 – Intégrale d'Itô

└ Isométrie d'Itô

└ Preuve : termes diagonaux

$$\mathbb{E}[X_i^2(\Delta W_i)^2] = \mathbb{E}[X_i^2](t_{i+1} - t_i).$$

Au tableau : À écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_i^2(\Delta W_i)^2] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_i^2(\Delta W_i)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X_i^2 \mathbb{E}[(\Delta W_i)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}]\right].\end{aligned}$$

$$\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t_i) \text{ extindépendant de } \mathcal{F}_{t_i} \Rightarrow \mathbb{E}[(\Delta W_i)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}] = \Delta t_i.$$

Au tableau : Petit commentaire

Réutiliser l'idée CM1 : conditionnelle + indépendance.

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T H dW \right)^2 \right] = \sum_i \mathbb{E}[X_i^2] \Delta t_i = \mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds.$$

CM2 – Intégrale d'Itô

└ Isométrie d'Itô

└ Fin de preuve : identification avec $\mathbb{E} \int H^2$

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T H dW \right)^2 \right] = \sum_i \mathbb{E} [X_i^2 \Delta t_i] = \mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds.$$

Au tableau : À écrire (égalité clé)

$$\int_0^T H_s^2 ds = \sum_i X_i^2 \Delta t_i,$$

$$\mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds = \sum_i \mathbb{E} [X_i^2] \Delta t_i.$$

Au tableau : À dire

- 1) X_i est \mathcal{F}_{t_i} -mesurable.
- 2) ΔW_i indépendant du passé et centré.
- 3) Même argument que CM1 : $\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$.

Covariance : formule et preuve par polarisation

$$\mathbb{E}\left[\left(\int H dW\right)\left(\int G dW\right)\right] = \mathbb{E} \int_0^T HG ds.$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H dW\right)\left(\int_0^T G dW\right)\right] = \mathbb{E}\int_0^T HG ds.$$

Au tableau : À écrire (polarisation)

$$4\langle A, B \rangle = \|A + B\|^2 - \|A - B\|^2 \quad \text{dans un Hilbert.}$$

$$A = \int H dW, \quad B = \int G dW.$$

$$\begin{aligned} 4\mathbb{E}[AB] &= \mathbb{E}\left[\left(\int (H + G) dW\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\int (H - G) dW\right)^2\right]. \\ &= \mathbb{E} \int (H + G)^2 ds - \mathbb{E} \int (H - G)^2 ds = 4\mathbb{E} \int HG ds. \end{aligned}$$

Au tableau : À dire

- 1) X_i est \mathcal{F}_{t_i} -mesurable.
- 2) ΔW_i indépendant du passé et centré.
- 3) Même argument que CM1 : $\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$.

Preuve alternative : isométrie via orthogonalité des incréments (1)

Cadre

Soit H simple prévisible sur la partition $0 = t_0 < \dots < t_n = T$:

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad X_i \mathcal{F}_{t_i}\text{-mesurable.}$$

On note

$$\Delta M_i := \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s dW_s = X_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Preuve alternative : isométrie via orthogonalité des incréments (2)

Idée : orthogonalité en L^2

Pour $i < j$, on a

$$\mathbb{E}[\Delta M_i \Delta M_j] = 0.$$

Donc, par Pythagore dans L^2 ,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta M_i\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(\Delta M_i)^2].$$

CM2 – Intégrale d'Itô

└ Isométrie d'Itô

└ Preuve alternative : isométrie via orthogonalité des incréments
(2)

Idée : orthogonalité en L^2 Pour $i < j$, on a

$$\mathbb{E}[\Delta M_i \Delta M_j] = 0.$$

Donc, par Pythagore dans L^2 ,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_t dW_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta M_i\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(\Delta M_i)^2].$$

Au tableau : À écrire (orthogonalité, 3 lignes)

Pour $i < j$:

$$\mathbb{E}[\Delta M_i \Delta M_j] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\Delta M_i \Delta M_j \mid \mathcal{F}_{t_j}]\right] = \mathbb{E}\left[\Delta M_i \mathbb{E}[\Delta M_j \mid \mathcal{F}_{t_j}]\right] = 0.$$

Car ΔM_i est \mathcal{F}_{t_j} -mesurable, et

$$\mathbb{E}[\Delta M_j \mid \mathcal{F}_{t_j}] = \mathbb{E}[X_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j}] = X_j \mathbb{E}[\Delta W_j \mid \mathcal{F}_{t_j}] = 0.$$

Au tableau : Commentaire pédagogique

Présenter ΔM_i comme "incréments" de la martingale intégrale. Orthogonalité = analogue discret de "increments indépendants" mais en L^2 .

Preuve alternative : calcul des termes diagonaux

Calcul

$$\mathbb{E}[(\Delta M_i)^2] = \mathbb{E}[X_i^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] = \mathbb{E}[X_i^2] (t_{i+1} - t_i).$$

Conclusion (isométrie)

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_i^2] (t_{i+1} - t_i) = \mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds.$$

CM2 – Intégrale d'Itô

└ Isométrie d'Itô

└ Preuve alternative : calcul des termes diagonaux

Calcul

$$\mathbb{E}[(\Delta M_i)^2] = \mathbb{E}[X_i^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] = \mathbb{E}[X_i^2](t_{i+1} - t_i).$$

Conclusion (isométrie)

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_i^2](t_{i+1} - t_i) = \mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds.$$

Au tableau : À écrire (diagonaux)

$$\mathbb{E}[(\Delta M_i)^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i^2(\Delta W_i)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}]] = \mathbb{E}[X_i^2 \mathbb{E}[(\Delta W_i)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}]] = \mathbb{E}[X_i^2] \Delta t_i.$$

Au tableau : À dire

Cette preuve est souvent plus mémorisable : "orthogonalité des incréments" puis Pythagore. Elle prépare directement la notion de variation quadratique (CM3).

Extension : construction par densité + isométrie

Idée

Si H^n simples et $\|H^n - H\|_{\mathcal{H}_T^2} \rightarrow 0$, alors

$$\left\| \int_0^T H^n dW - \int_0^T H dW \right\|_{L^2}^2 = \|H^n - H\|_{\mathcal{H}_T^2}^2.$$

$$\left\| \int_0^T H^n dW - \int_0^T H dW \right\|_{L^2}^2 = \|H^n - H\|_{\mathcal{H}_T^2}^2.$$

Au tableau : À écrire (construction complète en 6 lignes)

- 1) Choisir (H^n) simples tels que $\mathbb{E} \int_0^T (H^n - H)^2 ds \rightarrow 0$.
- 2) $\mathbb{E}[(\int_0^T (H^n - H^m) dW)^2] = \mathbb{E} \int_0^T (H^n - H^m)^2 ds \rightarrow 0$, donc $(\int_0^T H^n dW)$ est de Cauchy dans L^2 .
- 3) Définir $\int_0^T H dW := L^2\text{-}\lim_n \int_0^T H^n dW$.
- 4) Unicité : si $K^n \rightarrow H$, alors $\mathbb{E}[(\int_0^T (H^n - K^n) dW)^2] = \mathbb{E} \int_0^T (H^n - K^n)^2 ds \rightarrow 0$.

Au tableau : Commentaire

C'est exactement la recette "densité + continuité" d'Analyse Fonctionnelle.

Martingale : $M_t = \int_0^t H_s dW_s$

Théorème

Pour $H \in \mathcal{H}_T^2$ prévisible, $(M_t)_{t \leq T}$ est une martingale.

$$\text{└ Martingale : } M_t = \int_0^t H_s dW_s$$

Au tableau : À écrire (preuve pour simples)

Pour $H = \sum_i X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$, on a $M_t = \sum_i X_i (W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i})$.

Soit $s < t$. Montrer $\mathbb{E}[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] = 0$.

$$M_t - M_s = \sum_{i: t_i \geq s} X_i (W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i}).$$

Chaque terme a une conditionnelle nulle (même calcul que moyenne nulle).

Donc $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$.

Au tableau : À dire (passage au général)

Approximer H par H^n simples.

On sait $M_t^n = \int_0^t H^n dW$ est une martingale.

Et $M_t^n \rightarrow M_t$ dans L^2 (donc aussi dans L^1), ce qui permet de passer à la limite dans l'identité conditionnelle.

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)M_s] = 0, \quad \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E} \int_s^t H_u^2 du.$$

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)M_s] = 0, \quad \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E} \int_s^t H_u^2 du.$$

Au tableau : À écrire (2 lignes)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_t - M_s)M_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(M_t - M_s)M_s \mid \mathcal{F}_s]] \\ &= \mathbb{E}[M_s \mathbb{E}[M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s]] = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_s^2] = \mathbb{E} \int_s^t H_u^2 du \quad (\text{par isométrie}).$$

Au tableau : Commentaire

Annonce CM3 : $\langle M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$ (variation quadratique).

Exemple déterministe : $\int_0^T f dW$

$$X = \int_0^T f(s) dW_s, \quad f \in L^2([0, T]).$$

- X est gaussienne centrée.
- $\text{Var}(X) = \int_0^T f(s)^2 ds$.

└ Exemple déterministe : $\int_0^T f dW$

$$X = \int_0^T f(s) dW_s, \quad f \in L^2([0, T]).$$

• X est gaussienne centrée.

• $\text{Var}(X) = \int_0^T f(s)^2 ds$.

Au tableau : À écrire (argument gaussien)

Approcher f par f^n en escalier.

$\int_0^T f^n dW = \sum_i f(t_i) \Delta W_i$ (combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes).

Donc $\int_0^T f^n dW \sim \mathcal{N}(0, \int_0^T (f^n(s))^2 ds)$.

$f^n \rightarrow f$ dans $L^2 \Rightarrow \int_0^T f^n dW \rightarrow \int_0^T f dW$ dans $L^2 \Rightarrow$ convergence en loi.

Donc $\int_0^T f dW$ est gaussienne et $\text{Var} = \int_0^T f(s)^2 ds$.

Au tableau : Commentaire

Pratique TP : on n'a pas besoin de densité de probabilité ; variance suffit.

Exemple adapté : $\int_0^t W_s dW_s$

$$M_t = \int_0^t W_s dW_s, \quad \mathbb{E}[M_t^2] = \frac{t^2}{2}.$$

CM2 – Intégrale d'Itô

└ Exemples

└ Exemple adapté : $\int_0^t W_s dW_s$

$$M_t = \int_0^t W_s dW_s, \quad \mathbb{E}[M_t^2] = \frac{t^2}{2}$$

Au tableau : À écrire (calcul variance)

$$\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E} \int_0^t W_s^2 ds = \int_0^t \mathbb{E}[W_s^2] ds = \int_0^t s ds = t^2/2.$$

Au tableau : À dire

- 1) X_i est \mathcal{F}_{t_i} -mesurable.
- 2) ΔW_i indépendant du passé et centré.
- 3) Même argument que CM1 : $\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$.

- Définition sur simples prévisibles.
- Isométrie + polarisation \Rightarrow covariance.
- Extension à \mathcal{H}_T^2 par densité.
- $M_t = \int_0^t H dW$ est une martingale.

Prochain CM

Variation quadratique, règles $(dW)^2 = dt$, puis formule d'Itô.

- Définition sur simples prévisibles.
- Isométrie + polarisation \Rightarrow covariance.
- Extension à H_T^2 par densité.
- $M_t = \int_0^t H dW$ est une martingale.

Prochain CM

Variation quadratique, règles $(dW)^2 = dt$, puis formule d'Itô.

Au tableau : Question de sortie (30 secondes)

Pourquoi exige-t-on "prévisible" et pas seulement "adapté" dans la définition simple ?

Réponse attendue : pour garantir $\mathbb{E}[\Delta W_i \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$ et annuler les termes croisés (isométrie).