Intégrale stochastique et calcul d'Itô

Antonio Falcó

Integral de Itô

Variation quadratique

Formules d'Itô pour le m.b.s

Formule d'Itô pour $X_t = f(W_t)$

Formule d'Itô pour $X_t = f(t, W_t)$

Processus d'Itô

Formule d'intégration par parties

Soit $(W_t, t \in \mathbb{R}_+)$ à m.b.s. Soit $T > 0$ fixée. Notre but est de construire l'intégrale stochastique

$$\left(\int_0^t H_s dW_s, t \in [0, T] \right)$$

pour un processus (H_t) vérifiant certaines propriétés.

Processus simple prévisible

Un processus simple prévisible (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$) est un processus $(H_t, t \in [0, T])$ tel que

$$H_t = \sum_{i=1}^{n} X_i 1_{]t_{i-1}, t_i]}(t), \quad t \in [0, T]$$

où

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$$

une partition de $[0, T]$ et X_i est une v.a. $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable et bornée pour tout $1 \leq i \leq n$.

On voit donc que sur l'intervalle $]t_{i-1}, t_i]$ la valeur du processus (H_t) est determinée par l'information $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$.

Intégral d'un processus simple prévisible

Soit (H_t) un processus simple prévisible on pose

$$(H \cdot W)_T \equiv \int_0^T H_s dW_s := \sum_{i=1}^n X_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

et l'intégrale est linéaire en H :

$$((aH + bK) \cdot W)_T = a(H \cdot W)_T + b(K \cdot W)_T.$$

Proposition (Isométrie d'Itô)

On a les égalités suivantes :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s dW_s\right) = 0,$$

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right)$$

Démostration :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s dW_s\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_{t_{i-1}})\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i\mathbb{E}((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_{t_{i-1}})\right) \quad = 0$$

où on a utilisé le fait que $\mathbb{E}((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_{t_{i-1}}) = 0$.

Démostration :

Pour l'isométrie on calcule

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(X_i X_j (W_{t_i} - W_{t_{i.1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}))$$

$$= 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n}\mathbb{E}(X_i X_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}))$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2)$$

Démostration :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_i^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_i^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}))\\ &= \mathbb{E}(X_i^2\mathbb{E}((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}))\\ &= \mathbb{E}(X_i^2)(t_i - t_{i-1})\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que

$$\mathbb{E}((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}) = t_i - t_{i-1}.$$

Démostration :

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \mathbb{E}(X_i X_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}))$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_i X_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_{t_{j-1}})) =$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \mathbb{E}(X_i X_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\mathbb{E}((W_{t_j} - W_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_{t_{j-1}})) = 0$$

où on a utilisé le fait que $\mathbb{E}((W_{t_j} - W_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_{t_{j-1}}) = 0$.

Démostration :

En conséquence,

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2)(t_i - t_{i-1})$$
$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 (t_i - t_{i-1})\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right)$$

donc l'isométrie est vérifiée

Remarque

L'isométrie d'Itô dit encore que si H et K sont deux processus simples prévisibles, alors

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s dW_s \int_0^T K_s dW_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s K_s \, ds\right)$$

Remarque

Si $t \in]t_{k-1}, t_k]$, alors

$$(H \cdot W)_t = \sum_{i=1}^{k-1} X_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + X_k (W_t - W_{t_{k-1}}).$$

Soit H un processus simple prévisible, on pose

$$(H \cdot W)_t \equiv \int_0^t H_s dW_s = ((H \cdot 1_{[0,t]}) \cdot W)_T = \sum_{i=1}^{n} X_i (W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}).$$

Alors, on a

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s dW_s\right) = 0,$$

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t H_s dW_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$$

et

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t H_u dW_u \int_0^s K_u dW_u\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge s} H_u K_u \, du\right)$$

Proposition

Le processus $((H \cdot W)_t, t \in [0, T])$ *est une martingale continue de carré intégrable. En consequence,* $(H \cdot W)^2$ *est une sous-martingale.*

Démostration :

La isométrie d'Itô dit que le processus $((H \cdot W)_t, t \in [0,T])$ es de carré intégrable. L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathbb{E}(|(H \cdot W)_t|) \leq \sqrt{\mathbb{E}((H \cdot W)_t^2)} < \infty.$$

De plus, si on suppose que $t \in]t_{k-1}, t_k]$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((H \cdot W)_T | \mathcal{F}_t\right) &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{E}(X_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_t) \\
&+ \mathbb{E}(X_k(W_t - W_{t_{k-1}})|\mathcal{F}_t) \\
&+ \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{E}(X_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_t) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} X_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \\
&+ X_k\mathbb{E}((W_t - W_{t_{k-1}})|\mathcal{F}_t) \\
&+ \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{E}(X_i\mathbb{E}((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_{t_i})|\mathcal{F}_t)
\end{aligned}$$

Démostration :

$$\mathbb{E}\left((H \cdot W)_T | \mathcal{F}_t\right) = \sum_{i=1}^{k-1} X_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + X_k (W_t - W_{t_{k-1}})$$
$$= (H \cdot W)_t.$$

Alors le processus est une martingale, pour $t \geq s$

$$\mathbb{E}\left((H \cdot W)_t | \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}(\mathbb{E}\left((H \cdot W)_T | \mathcal{F}_t\right) | \mathcal{F}_s)$$
$$= \mathbb{E}\left((H \cdot W)_T | \mathcal{F}_s\right) = (H \cdot W)_s.$$

Proposition (Inégalité de Doob)

Si $X = (X_t)$ est une martingale continue,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s \leq T} X_s^2\right) \leq 4\mathbb{E}(X_T^2).$$

On étend maintenant l'intégrale $(H \cdot W)$ par continuité à l'ensemble :

$$\mathcal{H} := \left\{ (H_t, t \in [0,T]) : \begin{array}{c} H \text{ est adapté, continu à gauche,} \\ \text{limité à droite et tel que} \\ \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < \infty \end{array} \right\}$$

Cet ensemble est un espace de Banach muni de la norme définie par

$$\|H\|_{T,1}^2 := \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right)$$

Proposition

Pour tout $H \in \mathcal{H}$, il existe in suite $(H^{(n)})$ de processus simples prévisibles tels que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T (H_s^{(n)} - H_s)^2 ds\right) = 0 = \lim_{n\to\infty} \|H^{(n)} - H\|_{T,1}^2$$

Lemma

Soit $Z \in \mathcal{H}$ bornée et $t \mapsto Z_t(\omega)$ est continue pour chaque $\omega \in \Omega$. Alors, il existe une suite $\{H_t^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ de processus élémentaires telle que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T (Z_s - H_s^{(n)})^2 ds\right] = 0.$$

Démostration : Soit $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ et le processus élémentaire

$$H_t^{(n)}(\omega) := \sum_{i=1}^{n} Z_{t_i}(\omega) 1_{]t_{i-1},t_i]}(t).$$

Comme $t \mapsto Z_t(\omega)$ est continue, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t (Z_s(\omega) - H_s^{(n)}(\omega))^2 ds = 0,$$

pour chaque $\omega \in \Omega$. Le Le théorème de convergence dominée nous donne la preuve. □

Remarque

La condition $t \mapsto Z_t(\omega)$ est continue pour chaque $\omega \in \Omega$ est très forte. C'est plus naturelle

$$\Pr\left(\{\omega : t \mapsto Z_t(\omega) \text{ est continue }\}\right) = 1,$$

c'est-à-dire $t \mapsto Z_t(\omega)$ est continue p.p.

Lemma

Soit $Z \in \mathcal{H}$ bornée. Alors, il existe une suite $\{H_t^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ telle que $t \mapsto H_t^{(n)}(\omega)$ est continue pour chaque $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$, avec

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T (Z_s - H_s^{(n)})^2 ds\right] = 0.$$

Démostration : Si $|Z_t(\omega)| \leq M$ pour tout t et ω. Pour chaque n soit $\psi_n : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ continue telle que

1. $\psi_n(x) = 0$ pour $x \leq -\frac{1}{n}$ et $x \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)dx = 1$.

Soit

$$H_t^{(n)}(\omega) := \int_0^t \psi_n(s-t)Z_s(\omega)ds.$$

Alors, $t \mapsto H_t^{(n)}(\omega)$ est continue pour chaque $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ et $|H_t^{(n)}(\omega)| \leq M$. (Oksendal p.27-28) □

Lemma

Soit $Z \in \mathcal{H}$. Alors, il existe une suite $\{H_t^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ telle que $H_t^{(n)}$ est bornée pour chaque n et

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T (Z_s - H_s^{(n)})^2 ds\right] = 0.$$

Démostration : Soit

$$H_t^{(n)}(\omega) := \begin{cases} -n & \text{si} \quad Z_t(\omega) < -n \\ Z_t(\omega) & \text{si} \quad -n \leq Z_t(\omega) \leq n \\ n & \text{si} \quad Z_t(\omega) > n \end{cases}$$

(Oksendal p.28) $\square$

Démonstration (Proposition) :

Du fait la suite $(H^{(n)})$ converge, c'est également une suite de Cauchy :

$$\lim_{n,m\to\infty}\mathbb{E}\left(\int_0^T (H_s^{(n)}-H_s^{(m)})^2 ds\right)=0$$

Et donc, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}((H^{(n)}\cdot W)_t-(H^{(m)}\cdot W)_t))^2\right)\\
&=\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}((H^{(n)}-H^{(m)})\cdot W)_t^2\right)\\
&\leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T (H_s^{(n)}-H_s^{(m)})^2 ds\right)\to 0.
\end{aligned}$$

La suite de processus $(H^{(n)} \cdot W)$ est donc une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{M}$ défini par

$$\mathcal{M} := \left\{ (M_t, t \in [0,T]) : \begin{array}{c} \text{martingale continue de carré integrable} \\ \text{telle que } M_0 = 0 \end{array} \right\}$$

et muni de la norme

$$\|M\|_{T,2}^2 := \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} M_t^2 \right).$$

Alors, $(H^{(n)} \cdot B)$ converge dans $\mathcal{M}$, il existe un élément $(H \cdot W) \in \mathcal{M}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} ((H^{(n)} \cdot W)_t) - (H \cdot W)_t)^2 \right) = 0.$$

1. Nous avons ainsi défini l'application linéaire et bornée

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad H \mapsto (H \cdot W)$$

2. L'égalité

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} ((H^{(n)} \cdot W)_t) - (H \cdot W)_t)^2\right) = 0$$

implique en particulier que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |(H^{(n)} \cdot W)_t) - (H \cdot W)_t| > \varepsilon\right) = 0$$

donc la suite $(H^{(n)} \cdot W)$ converge uniformément sur $[0, T]$ en probabilité vers $(H \cdot W)$.

Attention

1. La construction de l'intégrale stochastique implique qu'elle n'est définie qu'à un ensemble négligeable près.
2. Plus important : L'intégrale stochastique n'est pas définie trajectoire par trajectoire i.e. "ω par ω" pour un $\omega \in \Omega$ donné, il est impossible de dire ce que vaut $(H \cdot W)_T(\omega)$ si on ne connaît que les trajectoires $t \mapsto H_t(\omega)$ et $t \mapsto W_t(\omega)$; aussi étrage que cela puisse paraître, il faut connaître les processus (H_t) et W_t en entier !

Propriétés de l'intégrale stochastique

1. Linearité : $((\alpha H + \beta K) \cdot W)_t = \alpha (H \cdot W)_t + \beta (K \cdot W)_t$.
2. Espérance nulle et isométrie :
   2.1 $\mathbb{E}((H \cdot W)_t) = 0$,
   2.2 $\mathrm{Cov}((H \cdot W)_t, (K \cdot W)_s) = \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge s} H_u K_u du\right)$
3. $(H \cdot W)$ est une martingale continue de carré intégrable telle que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t \in [0,1]} (H \cdot W)_t^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right)$$

Proposition

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un m.b.s. Pour $t > 0$ on définit

$$\langle W \rangle_t^{(n)} := \sum_{i=1}^{2^n} \left(W_{\frac{it}{2^n}} - W_{\frac{(i-1)t}{2^n}} \right)^2$$

Alors,

$$\lim_{n\to\infty} \langle W \rangle_t^{(n)} = t \text{ } p.s. \text{ },$$

c'est-à-dir

$$\Pr\left(\{\omega : \lim_{n\to\infty} \langle W \rangle_t^{(n)}(\omega) = t\} \right) = 1.$$

Variation quadratique du m.b.s.

On dit que que la variation quadratique du m.b.s. noté $\langle W \rangle_t = t$. Alors on connaît que

$$W_t^2 - \langle W \rangle_t = W_t^2 - t$$

est une martingale.

Theorem (Théorème de décomposition de Doob)

Soit $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ une sous-martingale continue (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$). Alors il existe un unique processus $(A_t, t \in \mathbb{R}_+)$ croissant, continu et adapté à $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$) tel que $A_0 = 0$ et $(X_t - A_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est une martingale.

Définition

Soit (M_t) une martingale continue de carré intégrable. Alors M_t^2 es une sous-martingale et donc aprés le théorème ci-dessus is existe un processus $\langle M \rangle_t$ croissant, continu et adapté à $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$ tel que $\langle M \rangle_0 = 0$ et $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ est une martingale. On appelle $(\langle M \rangle_t)$ **processus de variation quadratique** de (M_t)

Soit $M_t = W_t$ un m.b.s (est une martingale). Alors, pour $t > s \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_t^2|\mathcal{F}_s^W] &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 + 2W_t W_s - W_s^2|\mathcal{F}_s^B] \\ &= (t-s) + 2W_s\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s^B] - \mathbb{E}[W_s^2|\mathcal{F}_s^W] \\ &= (t-s) + W_s^2 \geq W_s^2,\end{aligned}$$

et (W_t^2) est une sous-martingale par rapport $\mathcal{F}_t^W$. On peut deduit aussi que

$$\mathbb{E}[W_t^2 - t|\mathcal{F}_s^W] = W_s^2 - s,$$

c'est-à-dire $W_t^2 - t = W_t^2 - A_t$ est une martingale et pour la décomposition de Doob on a

$$A_t = t = \langle W \rangle_t.$$

Soit M_t est une martingale par rapport $\mathcal{F}_t$. Alors, pour $t > s \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_t^2|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 + 2M_tM_s - M_s^2|\mathcal{F}_s^B\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s\right] + M_s^2 \\
&\geq M_s^2
\end{aligned}$$

c'est-à-dire M_s^2 est une sous–martingale. Avec la décomposition de Doob il existe $A_t = \langle M \rangle_t$ telle que

$$M_t^2 - \langle M \rangle_t \text{ est une martingale.}$$

Observe q'on a montré que pour une martingale M_t on a

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s\right]$$

Soit $M_t = \int_0^t H_s dW_s$ alors pour $t > u \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 | \mathcal{F}_u\right] = \mathbb{E}\left[(M_t - M_u)^2 | \mathcal{F}_u\right] + M_u^2 = \mathbb{E}\left[(M_t - M_u)^2 | \mathcal{F}_u\right] + M_u^2$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\int_u^t H_s dW_s\right)^2 | \mathcal{F}_u\right] + M_u^2.$$

Alors, pour tout $A \in \mathcal{F}_u$ on a

$$\mathbb{E}\left[1_A \left(\int_u^t H_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_u^t 1_A H_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_u^t 1_A H_s^2 ds\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_u^t 1_A H_s^2 ds | \mathcal{F}_u\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[1_A \mathbb{E}\left[\int_u^t H_s^2 ds | \mathcal{F}_u\right]\right]$$

c'est-à-dire $\mathbb{E}\left[\left(\int_u^t H_s dW_s\right)^2 | \mathcal{F}_u\right] = \mathbb{E}\left[\int_u^t H_s^2 ds | \mathcal{F}_u\right] =$
$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds - \int_0^u H_s^2 ds | \mathcal{F}_u\right]$

Nous avons l'egalité

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - \int_0^t H_s^2 ds | \mathcal{F}_u\right] = M_u^2 - \int_0^u H_s^2 ds.$$

En consequence,

$$\left\langle \int H_s dW_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds.$$

et

$$d\left\langle \int H_s dW_s \right\rangle_t = H_t^2 dt$$

Remarque

1. Noter qu'on a toujours par définition :

$$\mathbb{E}(\langle M\rangle_t) = \mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(M_0^2).$$

2. Du fait que le processus $(\langle M\rangle_t)$ est croissant, c'est un processus à variation bornée.
3. Si (M_t) est une martingale continue a variation bornée, alors $M_t = M_0$ pour tout $t > 0$

Proposition

Si (M_t) est une martingale continue de carré intégrable, alors on a :

$$\mathbb{P} - \lim_{n \to \infty} \langle M \rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} \left(M_{\frac{it}{2^n}} - M_{\frac{(i-1)t}{2^n}} \right)^2 = \langle M \rangle_t$$

pour tout $t \geq 0$.

Remarque

1. A priori la convergence n'a lieu qu'en probabilité (alors qu'elle a lieu presque sûrement dans le cas où (M_t) est un m.b.s)
2. Bien que la variation quadratique soit une quantité aléatoire, la proposition ce-dessus illustre le fait qu'elle est une généralisation de la notion de variance pour des processus aléatoires.

Observe que si M_t et N_t sont des martingales par rapport $\mathcal{F}_t$ alors, $M_t + N_t$ et $M_t - N_t$ sont aussi des martingales comme

$$\frac{1}{4}\left((M_t + N_t)^2 - (M_t - N_t)^2\right) = M_t N_t$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t N_t | \mathcal{F}_s] &= \frac{1}{4}\left(\mathbb{E}[(M_t + N_t)^2 | \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[(M_t - N_t)^2 | \mathcal{F}_s]\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((M_s + N_s)^2 - \langle M + N \rangle_s + \mathbb{E}[\langle M + N \rangle_t | \mathcal{F}_s]\right. \\
&\quad \left. -(M_s - N_s)^2 + \langle M - N \rangle_s - \mathbb{E}[\langle M - N \rangle_t | \mathcal{F}_s]\right).
\end{aligned}$$

on a fait servir

$$\mathbb{E}[(M_t \pm N_t)^2 - \langle M \pm N \rangle_t | \mathcal{F}_s] = (M_s \pm N_s)^2 - \langle M \pm N \rangle_s.$$

Alors on a montré :

$$\mathbb{E}\left[\overbrace{\frac{1}{4}\left((M_t+N_t)^2-(M_t-N_t)^2\right)}^{M_tN_t}-\frac{1}{4}\left(\langle M+N\rangle_t-\langle M-N\rangle_t\right)|\mathcal{F}_s\right]=$$

$$\overbrace{\frac{1}{4}\left((M_s+N_s)^2-(M_s-N_s)^2\right)}^{M_sN_s}-\frac{1}{4}\left(\langle M+N\rangle_s-\langle M-N\rangle_s\right)$$

Definition

Soient (M_t) et (N_t) deux martingales continues de carré intégrable. On définit la **covariation quadratique** de (M_t) et (N_t) par

$$\langle M, N\rangle_t := \frac{1}{4}(\langle M+N\rangle_t - \langle M-N\rangle_t)$$

Proposition

Le processus $(M_t N_t - \langle M, N\rangle_t)$ est une martingale.

Proposition

Soient (M_t) et (N_t) deux martingales continues de carré intégrable alors on a :

$$\mathbb{P}-\lim_{n\to\infty}\langle M, N\rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n}\left(M_{\frac{it}{2^n}} - M_{\frac{(i-1)t}{2^n}}\right)\left(N_{\frac{it}{2^n}} - N_{\frac{(i-1)t}{2^n}}\right) = \langle M, N\rangle_t.$$

pour tout $t \geq 0$.

Proposition

Soit (H_t) et (G_t) deux processus adaptées a $\mathcal{F}_t^B$ telles que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right] < \infty \text{ et } \mathbb{E}\left[\int_0^t G_s^2 ds\right] < \infty.$$

Si $M_t = \int_0^t H_s dW_s$ et $N_t = \int_0^t G_s dW_s$ alors,

$$\langle M, N\rangle_t = \int_0^t H_s G_s ds,$$

en particulier on a

$$\left\langle \int H_s dW_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds.$$

Exercise

Montrer que $X_t^x = x + bt + \sigma W_t$ avec $b > 0$ est une sous-martingale continue adapté à $\mathcal{F}_t^B$.

On va montrer que $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s^B] \geq X_s$ pour $t > s \geq 0$. Pour voir ça

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^x|\mathcal{F}_s^B] &= \mathbb{E}[x + bt + \sigma W_t|\mathcal{F}_s^B] \\
&= x + bt + \sigma \mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s^B] \\
&= x + bt + \sigma W_s = x + bs + \sigma W_s + b(t-s) \\
&\geq x + bt + \sigma W_s = X_s.
\end{aligned}$$

Alors, $X_t^x - bt = x + \sigma W_t$ est une martingale adapté à $\mathcal{F}_t^B$. Ici $A_t = bt$ est une fonction croissant, continue (et adapté de manière trivial a $\mathcal{F}_t^B$) et $A_0 = 0$.

Theorem (Formule d'Itô pour $X_t = f(W_t)$)

Soit $(W_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un m.b.s. par rapport $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_)$. On suppose que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t f'(W_s)ds\right) < \infty \text{ pour tout } t > 0.$$

Alors pour tout $t > 0$,

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds \text{ p.s.}$$

qu'on peut écrire

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)d\langle W\rangle_s \text{ p.s.}$$

Example

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un m.b.s. Montrer que

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Soit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ alors $f'(x) = x$ et $f''(x) = 1$. Avec le formule d'Itô on a

$$\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}\underbrace{W_0^2}_{=0} = \int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 1ds = \int_0^t W_s dW_s - \frac{1}{2}t.$$

Soit $f(x) = e^x$ alors avec le formule d'Itô on a

$$e^{W_t} - 1 = \int_0^t e^{W_s} dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{W_s} ds.$$

Note $Z_t := e^{W_t}$ alors, on peut écrire

$$Z_t = 1 + \int_0^t \frac{1}{2} Z_s ds + \int_0^t Z_s dW_s$$

c'est-a-dir le processus Z_t "est la solution de l'EDS"

$$dZ_t = \frac{1}{2} Z_t dt + Z_t dW_t$$
$$Z_0 = 1.$$

Démonstration

$$f(W_t) - f(W_0) = \sum_{i=1}^{2^n} \left(f(W_{t_i^{(n)}}) - f(W_{t_{i-1}^{(n)}}) \right)$$

où $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = t$ est une suite de partitions de $[0, t]$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \max_{1 \le i \le n} |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}| = 0.$$

Par un développement de Taylor classique

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y-x) + \frac{1}{2} f''(x)(y-x)^2 + r(y-x),$$

où $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Donc

$$\begin{aligned} f(W_t) - f(W_0) = \sum_{i=1}^{2^n} \Bigg(& f'(W_{t_{i-1}^{(n)}}) \left(W_{t_i^{(n)}} - W_{t_{i-1}^{(n)}} \right) \\ & + \frac{1}{2} f''(W_{t_{i-1}^{(n)}}) \left(W_{t_i^{(n)}} - W_{t_{i-1}^{(n)}} \right)^2 + r_i^{(n)} \Bigg) \end{aligned}$$

Theorem (Formule d'Itô pour $X_t = f(t, W_t)$)

Soit $(W_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un m.b.s. par rapport $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$ et $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. On suppose que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, W_s)\right)^2 ds\right) < \infty \textit{ pour tout } t > 0.$$

Alors pour tout $t > 0$,

$$f(t, W_t) - f(0, W_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, W_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, W_s)ds \textit{ p.s.}$$

Example

Soit $f(t,x) = S_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma x\right)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) f(t,x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sigma f(t,x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\sigma^2 f(x,t)$$

et la condition de la formule d'Itô est

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\sigma f(s, W_s))^2\, ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma^2 S_s^2 ds\right] < \infty$$

avec $S_t = S_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\right) = f(t, S_t)$.

Après le Théorème 2.5.7 on a

$$
\begin{aligned}
S_t - S_0 &= \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S_s ds \\
&= \int_0^t \left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) S_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S_s \right) ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s \\
&= \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire S_t est la solution de l'EDS :

$$
\begin{aligned}
dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\
S_{t=0} &= S_0.
\end{aligned}
$$

On a besoin de calculer

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma^2 S_s^2 ds\right] = \sigma^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t S_s^2 ds\right] = \sigma^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[S_s^2\right] ds.$$

Comme $\ln S_t \sim N(\mu(t), \sigma(t))$ on connait les moments

$$\mathbb{E}[S_t^k] = \exp\left(k(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + k\frac{\sigma^2}{2}t\right),$$

et

$$\int_0^t \mathbb{E}\left[S_s^2\right] ds = \int_0^t \exp\left(k(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)s + k\frac{\sigma^2}{2}s\right) ds.$$

Exercise

Soit $X_t = \upsilon_0 - \mu \int_0^t X_s \, ds + \sigma W_t$ le processus d'Orstein-Uhlenbeck. Calculez $\mu_2(t) := \mathbb{E}[X_t^2]$.

On connait que X_t est solution de l'EDS :

$$
\begin{aligned}
dX_t &= -\mu X_t dt + \sigma dW_t \\
X_0 &= \upsilon_0
\end{aligned}
$$

parce que

$$X_t = \upsilon_0 - \int_0^t \mu X_s \, ds + \int_0^t \sigma \, dW_s.$$

L'objectif est calculer $\mathbb{E}[X_t^2]$. **Si la formule d'Itô est aussi vrai** dans ce cas, on a

$$X_t^2 - X_0^2 = \int_0^t 2X_s dX_s + \int_0^t \frac{1}{2} 2\, ds = \int_0^t 2X_s(-\mu X_s ds + \sigma dW_s) + t$$

c'est-à-dire

$$X_t^2 - X_0^2 = t - \mu \int_0^t 2X_s^2 ds + \sigma \int_0^t X_s dW_s.$$

Alors,

$$\mathbb{E}[X_t^2] - X_0^2 = t - \mu \int_0^t 2\mathbb{E}[X_s^2] ds$$

et $\mathbb{E}[X_t^2]$ est la solution de l'EDO :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[X_t^2] = 1 - \mu 2\mathbb{E}[X_t^2], \quad E[X_0^2] = X_0^2.$$

Soit $Z_t = g(X_t) = X_t^2$ où

$$X_t = v_0 - \mu \int_0^t X_s ds + \sigma W_t.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} X_t^2 - v_0^2 &= \int_0^t 2X_s dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2d\langle X\rangle_s \\ &= \int_0^t 2X_s\left(-\mu X_s ds + \sigma dW_s\right) + \frac{1}{2}\int_0^t 2\sigma^2 ds \\ &= -\mu \int_0^t 2X_s^2 ds + \int_0^t 2\sigma X_s dW_s + \sigma^2 t, \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}[X_t^2] - v_0^2 = -\mu \int_0^t 2\mathbb{E}[X_s^2] ds + \sigma^2 t.$$

En consequence, $x(t) = \mathbb{E}[X_t^2]$ est la solution de l'EDO :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2\mu x(t) + \sigma^2 \\ x(0) &= v_0^2. \end{aligned}$$

On a

$$x(t) = e^{-2\mu t} v_0^2 + e^{-2\mu t} \int_0^t e^{2\mu s} \sigma^2 ds,$$

c'est-à-dire

$$x(t) = e^{-2\mu t} v_0^2 + \frac{\sigma^2}{2\mu} \left(1 - e^{-2\mu t}\right).$$

Comme $\mathbb{E}[X_t] = e^{-\mu t} v_0$, on a

$$\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}[X_t^2] - (\mathbb{E}[X_t])^2 = \frac{\sigma^2}{2\mu} \left(1 - e^{-2\mu t}\right).$$

Le processus d'Ornstein-Ulhenbeck

$$X_t = \upsilon_0 - \mu \int_0^t X_s ds + \sigma W_t \sim N\left(e^{-\mu t}\upsilon_0, \frac{\sigma^2}{2\mu}\left(1 - e^{-2\mu t}\right)\right).$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{2\mu}.$$

Processus d'Itô (ou semi-martingale continue)

Definition

Un processus d'Itô est un processus (X_t) pouvant se décomposer comme

$$X_t = M_t + V_t$$

où :

- (M_t) est une martingale continue de carré intégrable (p.r. a une filtration $(\mathcal{F}_t)$),
- (V_t) est un processus continu à variation bornée, adapté à $(\mathcal{F}_t)$ et tel que $V_0 = 0$.

Example

D'après le théorème de decomposition de Doob, toute sous-martingale (resp. sur-martingale) continue de carré intégrable est un processus d'Itô (car un processus croissant (resp. décroissant) est de variation bornée).

Example

Soit (X_t) un processus défini par

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t K_s ds$$

où (H_t) est continu, adapté et tel que $\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right) < \infty$ pour tout $t \geq 0$ et (K_t) est continue et adapté. (X_t) est un processus d'Itô.

Example

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant la condition de la formule d'Itô. Alors $f(W_t)$ est un processus d'Itô :

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds$$

où $M_t = f(W_0) + \int_0^t f(W_s) dW_s$ est une martingale continue de carré intégrable et $V_t = \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds$ est un processus continu à variation bornée.

Definition

Pour tout $t \geq 0$, la variation quadratique de processus d'Itô $X_t = M_t + V_t$ es définie par

$$\langle X \rangle_t = \langle M \rangle_t$$

et pour deux processus d'Itô $X_t = M_t + V_t$ et $Y_t = N_t + U_t$ on pose

$$\langle X, Y \rangle_t = \langle M, N \rangle_t$$

1. Si X_t est à variation bornée alors $X_t = M_0 + V_t$ et donc $\langle X \rangle_t = 0$.
2. De même $\langle X, Y \rangle_t = 0$ quelque soit Y (ceci vient de l'inégalité de Cauchy-Schwartz : $\langle X, Y \rangle_t \leq \sqrt{\langle X \rangle_t \langle Y \rangle_t}$).
3. Si (X_t) et (Y_t) sont indépendants (mais pas forcement à variation bornée) $\langle X, Y \rangle_t = 0$.

Intégral stochastique par rapport une semi-martingale

Definition

Soit $X_t = M_t + V_t$ un processus d'Itô et (H_t) un processus continu, adapté à $(\mathcal{F}_t)$ et tel que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 d\langle X\rangle_s\right) \equiv \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s\right) < \infty.$$

On pose

$$(H \cdot X)_t \equiv \int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dV_s$$

La intégrale stochastique par rapport un processus d'Itô est la somme d'une intégrale stochastique "pure" et une intégrale de Riemman-Stieljes.

Theorem (Théorème d'Itô)

Soient (M_t) martingale continue de carré intégrable et (V_t) processus continu à variation bornée et $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ telle que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(V_s, M_s) d\langle M\rangle_s\right)\right) < \infty \text{ pour tout } t > 0.$$

Alors pour tout $t > 0$,

$$f(V_t, M_t) - f(V_0, M_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(V_s, M_s) dV_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(V_s, M_s) dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(V_s, M_s) d\langle M\rangle_s \text{ p.s.}$$

Remarque

Dans le cas particulier où $f(t,x) = g(t+x)$ la formule se récrit :

$$\begin{aligned} g(V_t + M_t) - g(V_0 + M_0) &= \int_0^t g'(V_s + M_s)dV_s \\ &+ \int_0^t g'(V_s + M_s)dM_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t g''(V_s + M_s)d\langle M\rangle_s \text{ p.s.} \end{aligned}$$

En posant $X_t = M_t + V_t$:

$$g(X_t) - g(X_0) = \int_0^t g'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''(X_s)d\langle X\rangle_s \text{ p.s.}$$

ici $dX_s = dM_s + dV_s$.

Proposition (Formule d'intégration par parties)

Soient (X_t) *et* (Y_t) *deux processus d'Itô. Alors pour tout* $t \geq 0$, *on a*

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

qui écrit sous forme différentielle :

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t.$$

Démonstration

En utilisant la formule d'Itô :

$$(X_t + Y_t)^2 - (X_0 + Y_0)^2 = 2\int_0^t (X_s + Y_s)d(X_s + Y_s) + \langle X + Y\rangle_t$$

et

$$(X_t - Y_t)^2 - (X_0 - Y_0)^2 = 2\int_0^t (X_s - Y_s)d(X_s - Y_s) + \langle X - Y\rangle_t$$

En soustrayant les deux égalités ci-dessus, on obtient

$$4(X_t Y_t - X_0 Y_0) = 4\left(\int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s\right) + \langle X+Y\rangle_t - \langle X-Y\rangle_t.$$

Example

Soit $X_t = e^{\sigma W_t}$ et $Y_t = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$. Comme Y_t est de variation bornée, on a $\langle X, Y\rangle_t = 0$. Alors,

$$
\begin{aligned}
X_t Y_t - X_0 Y_0 &= \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s \\
&= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \int_0^t e^{((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)s + \sigma W_s} ds \\
&+ \int_0^t e^{((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)s} \left(\underbrace{\sigma e^{W_s} dW_s + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{W_s} ds}_{\text{formule d'Itô}} \right)
\end{aligned}
$$

Example

Soient $X_t = \int_0^t H_s dW_s$ et $Y_t = \int_0^t K_s dW_s$. On a

$$X_t Y_t = \int_0^t (K_s X_s + H_s Y_s) dW_s + \int_0^t H_s K_s ds.$$