Modélisation stochastique — TD2

Intégrale d'Itô : isométrie, lois gaussiennes, martingales (CM2)

Corrigé

Cadre. (W_t) brownien standard, $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle. On utilise l'isométrie d'Itô et les propriétés usuelles des incréments browniens.

A. Isométrie, moments, covariances

Exercice 1 (Isométrie d'Itô : calcul direct)**.** Soit $T > 0$ et $f \in L^2([0,T])$ déterministe. Montrer que $\mathbb{E}[\int_0^T f(s)\,dW_s] = 0$ et $\mathrm{Var}(\int_0^T f(s)\,dW_s) = \int_0^T f(s)^2\,ds$.

Solution. On sait que $\int_0^T f(s)\,dW_s$ est centrée (déjà vrai sur les processus simples, puis par densité). Pour la variance, l'isométrie d'Itô donne :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f(s)\,dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(s)^2\,ds\right] = \int_0^T f(s)^2\,ds,$$

car f est déterministe. Comme la moyenne vaut 0, la variance est la même quantité. □

Exercice 2 (Covariance de deux intégrales)**.** Soient $f, g \in L^2([0,T])$ déterministes. Montrer que

$$\mathrm{Cov}\left(\int_0^T f(s)\,dW_s,\ \int_0^T g(s)\,dW_s\right) = \int_0^T f(s)g(s)\,ds.$$

Solution. Notons $I = \int_0^T f\,dW$ et $J = \int_0^T g\,dW$. Comme I et J sont centrées, $\mathrm{Cov}(I,J) = \mathbb{E}[IJ]$. Sur les intégrandes simples, on vérifie

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f\,dW\right)\left(\int_0^T g\,dW\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(s)g(s)\,ds\right].$$

Par densité (approximation L^2) on étend au cas général. Comme f, g sont déterministes, on obtient $\mathbb{E}\int_0^T fg\,ds = \int_0^T fg\,ds$. □

Exercice 3 (Exemples calculatoires)**.** Calculer moyenne, variance et loi de : (a) $\int_0^T s\,dW_s$; (b) $\int_0^T e^{\lambda s}\,dW_s$; (c) $\int_0^T \cos(\omega s)\,dW_s$.

Solution. Dans les trois cas, l'intégrande est déterministe dans $L^2([0,T])$, donc l'intégrale est gaussienne centrée, de variance $\int_0^T f(s)^2 ds$.

(a) $f(s) = s$: $\mathrm{Var} = \displaystyle\int_0^T s^2 ds = \frac{T^3}{3}$, donc $\int_0^T s\,dW_s \sim \mathcal{N}(0, T^3/3)$.

(b) $f(s) = e^{\lambda s}$:

$$\mathrm{Var} = \int_0^T e^{2\lambda s} ds = \begin{cases} \frac{e^{2\lambda T}-1}{2\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ T, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Donc $\int_0^T e^{\lambda s}\,dW_s \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Var})$.

(c) $f(s) = \cos(\omega s)$:

$$\mathrm{Var} = \int_0^T \cos^2(\omega s)\, ds = \int_0^T \frac{1+\cos(2\omega s)}{2}\, ds = \frac{T}{2} + \frac{\sin(2\omega T)}{4\omega},$$

avec la convention $\frac{\sin(2\omega T)}{4\omega} = 0$ si $\omega = 0$ (limite). Donc $\int_0^T \cos(\omega s)\, dW_s \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Var})$.

$\square$

Exercice 4 (Orthogonalité dans L^2)**.** Soit $0 \le a < b \le c < d$. Montrer que $\mathbb{E}[(\int_a^b f\, dW)(\int_c^d g\, dW)] = 0$.

Solution. Les intégrales portent sur des intervalles disjoints. Sur des intégrandes déterministes, $\int_a^b f\, dW$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les incréments sur $[a,b]$, et $\int_c^d g\, dW$ dépend des incréments sur $[c,d]$. Les incréments browniens sur des intervalles disjoints sont indépendants, et chaque intégrale est centrée, donc le produit a espérance nulle. Une autre manière : utiliser la formule de covariance

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b f\, dW\right)\left(\int_c^d g\, dW\right)\right] = \int_0^T f(s)g(s)\, ds,$$

où l'on prolonge f, g par 0 hors de leurs intervalles ; le produit $f(s)g(s)$ est identiquement nul. $\square$

B. Lois gaussiennes et conditionnement

Exercice 5 (Loi de l'intégrale déterministe)**.** Montrer que si f est déterministe dans $L^2([0,T])$, alors $\int_0^T f\, dW$ est gaussienne.

Solution. On approche f par des fonctions en escalier f_n dans $L^2([0,T])$. Alors $\int_0^T f_n\, dW = \sum_i \alpha_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ est une combinaison linéaire d'incréments gaussiens indépendants, donc est gaussienne centrée. Par isométrie, $\int_0^T f_n\, dW \to \int_0^T f\, dW$ dans L^2, donc en loi. La limite en loi de gaussiennes (avec variances convergentes) est gaussienne, de variance $\int_0^T f^2$. $\square$

Exercice 6 (Couple gaussien et régression)**.** $I = \int_0^T f\, dW$, $J = W_T$. Calculer $\mathrm{Cov}(I,J)$ puis $\mathbb{E}[I \mid W_T]$ et $\mathrm{Var}(I \mid W_T)$.

Solution. $J = \int_0^T 1\, dW_s$. Donc, par la formule de covariance,

$$\mathrm{Cov}(I,J) = \int_0^T f(s) \cdot 1\, ds = \int_0^T f(s)\, ds.$$

De plus $\mathrm{Var}(J) = T$ et $\mathrm{Var}(I) = \int_0^T f(s)^2 ds$. Le vecteur (I,J) est gaussien centré (combinaison linéaire d'incréments), donc

$$\mathbb{E}[I \mid J] = \frac{\mathrm{Cov}(I,J)}{\mathrm{Var}(J)} J = \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(s)\, ds\right) W_T.$$

La variance conditionnelle vaut

$$\mathrm{Var}(I \mid J) = \mathrm{Var}(I) - \frac{\mathrm{Cov}(I,J)^2}{\mathrm{Var}(J)} = \int_0^T f(s)^2 ds - \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(s)\, ds\right)^2.$$

$\square$

Exercice 7 (Projection sur la filtration : arrêt au temps t)**.** Montrer que $\mathbb{E}[\int_0^T f\, dW \mid \mathcal{F}_t] = \int_0^t f\, dW$.

Solution. Décomposer

$$\int_0^T f(s)\,dW_s = \int_0^t f(s)\,dW_s + \int_t^T f(s)\,dW_s.$$

Le premier terme est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Le second terme dépend uniquement des incréments après t, donc est indépendant de $\mathcal{F}_t$ et centré. Ainsi

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T f(s)\,dW_s \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] = 0,$$

d'où le résultat. □

C. Martingales associées à l'intégrale d'Itô

Exercice 8 (Martingale et accroissements)**.** $M_t = \int_0^t H_s\,dW_s$. Montrer que (M_t) est une martingale. Montrer aussi que $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \int_s^t H_u^2 du$ au moins si H est déterministe.

Solution. Par définition de l'intégrale d'Itô, pour $s < t$,

$$M_t = M_s + \int_s^t H_u\,dW_u.$$

Le terme $\int_s^t H_u\,dW_u$ est centré conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ (sur les simples, puis extension), donc $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$: martingale.

Si H est déterministe, alors (isométrie appliquée à l'intégrale sur $[s, t]$)

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t H_u\,dW_u\right)^2\right] = \int_s^t H_u^2\,du.$$

Plus généralement, on a aussi $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\int_s^t H_u^2 du \mid \mathcal{F}_s]$. □

Exercice 9 (Martingale exponentielle)**.** $M_t = \exp(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$. Montrer que c'est une martingale.

Solution. Pour $s < t$, écrire $W_t = W_s + \Delta W$ avec $\Delta W \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ indépendant de $\mathcal{F}_s$:

$$M_t = M_s \exp\Big(\theta \Delta W - \tfrac{1}{2}\theta^2 (t-s)\Big).$$

Donc

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s\,\mathbb{E}\Big[e^{\theta\Delta W - \frac{1}{2}\theta^2(t-s)}\Big] = M_s\,e^{-\frac{1}{2}\theta^2(t-s)}\,\mathbb{E}[e^{\theta\Delta W}] = M_s,$$

car $\mathbb{E}[e^{\theta\Delta W}] = e^{\frac{1}{2}\theta^2(t-s)}$. □

D. Mini-finance (pré-GBM)

Exercice 10 (Log-retours continus)**.** $X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t$. (a) loi de X_t ; (b) $\mathbb{E}[e^{X_t}]$; (c) $\mathbb{E}[S_t]$ avec $S_t = e^{X_t}$.

Solution. (a) $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, donc

$$X_t \sim \mathcal{N}(X_0 + \mu t,\ \sigma^2 t).$$

(b) Écrire $X_t = (X_0 + \mu t) + \sigma W_t$. Alors

$$\mathbb{E}[e^{X_t}] = e^{X_0 + \mu t}\mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] = e^{X_0 + \mu t}\,e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

(c) Comme $S_t = e^{X_t}$, on a

$$\mathbb{E}[S_t] = e^{X_0 + \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

□

Exercice 11 (Corrélations : du log-prix au prix)**.** On considère d'abord le modèle additif

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t,$$

puis le prix exponentiel $S_t = e^{X_t}$ (et, en particulier pour le GBM, $S_t = S_0 \exp\big((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\big)$).

(a) Calculer $\mathrm{Cov}(X_t, W_t)$ et $\mathrm{Corr}(X_t, W_t)$. Commenter.

(b) Calculer $\mathrm{Cov}(S_t, W_t)$ et en déduire le signe de la corrélation $\mathrm{Corr}(S_t, W_t)$ (on pourra utiliser que $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ et $\mathbb{E}[e^{\lambda W_t}] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}$).

Solution. (a) Comme $X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t$, on a

$$\mathrm{Cov}(X_t, W_t) = \mathrm{Cov}(\sigma W_t, W_t) = \sigma \ \mathrm{Var}(W_t) = \sigma t,$$

puis

$$\mathrm{Corr}(X_t, W_t) = \frac{\mathrm{Cov}(X_t, W_t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_t)\,\mathrm{Var}(W_t)}} = \frac{\sigma t}{\sqrt{(\sigma^2 t)\, t}} = \frac{\sigma}{|\sigma|} \quad (= 1 \text{ si } \sigma > 0).$$

(b) On écrit $S_t = e^{X_t} = e^{X_0 + \mu t} e^{\sigma W_t}$. Ainsi

$$\mathbb{E}[S_t] = e^{X_0 + \mu t}\, \mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] = e^{X_0 + \mu t}\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

De plus

$$\mathbb{E}[W_t S_t] = e^{X_0 + \mu t}\, \mathbb{E}[W_t e^{\sigma W_t}].$$

Pour $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, on utilise $\mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}$ et on dérive :

$$\mathbb{E}[W_t e^{\sigma W_t}] = \frac{d}{d\sigma}\mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] = \frac{d}{d\sigma}\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} = \sigma t\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

Donc

$$\mathbb{E}[W_t S_t] = e^{X_0 + \mu t}\, \sigma t\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} = \sigma t\, \mathbb{E}[S_t].$$

Comme $\mathbb{E}[W_t] = 0$, on obtient

$$\mathrm{Cov}(S_t, W_t) = \mathbb{E}[W_t S_t] - \mathbb{E}[W_t]\mathbb{E}[S_t] = \sigma t\, \mathbb{E}[S_t].$$

Ainsi le signe de la corrélation est celui de σ (positif si $\sigma > 0$). □