Modélisation stochastique — TD3

Toolkit (produit, exponentielle) et mini-projet finance (GBM)

Feuille d'énoncés

Objectifs.
— Manipuler covariation/produit : $d(XY) = X\,dY + Y\,dX + d[X,Y]$.
— Utiliser l'exponentielle stochastique et reconnaître des martingales.
— Traiter un modèle financier complet : GBM $\Rightarrow$ loi lognormale, moments, actualisation.

Cadre. (W_t) brownien standard, $(\mathcal{F}_t)$ filtration naturelle. On admet les règles $(dW_t)^2 = dt$, $dt\,dW_t = 0$, $(dt)^2 = 0$ et la formule produit.

A. Échauffement : corrélations et intuition

Exercice 1 (Corrélations : du log-prix au prix)**.** On considère d'abord le modèle additif

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t,$$

puis le prix exponentiel $S_t = e^{X_t}$ (et, en particulier pour le GBM, $S_t = S_0 \exp\big((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\big)$).

(a) Calculer $\mathrm{Cov}(X_t, W_t)$ et $\mathrm{Corr}(X_t, W_t)$. Commenter.

(b) Calculer $\mathrm{Cov}(S_t, W_t)$ et en déduire le signe de $\mathrm{Corr}(S_t, W_t)$ (on pourra utiliser $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ et $\mathbb{E}[e^{\lambda W_t}] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}$).

B. GBM : log, loi, moments

Exercice 2 (GBM : passage au log (Itô))**.** On suppose que S_t suit le mouvement brownien géométrique (GBM)

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t, \qquad S_0 > 0.$$

(a) Appliquer Itô à $f(x) = \ln x$ et montrer que

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma\,dW_t.$$

(b) En déduire la solution explicite

$$S_t = S_0 \exp\Big(\big(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\big)t + \sigma W_t\Big).$$

Exercice 3 (Loi lognormale et moments)**.** En utilisant l'expression explicite de S_t :

(a) Donner la loi de $\ln S_t$ (moyenne, variance) et conclure que S_t est lognormal.

(b) Calculer $\mathbb{E}[S_t]$ et $\mathrm{Var}(S_t)$.

(c) Plus généralement, calculer $\mathbb{E}[S_t^p]$ pour $p \in \mathbb{R}$.

C. Produit, actualisation, martingale

Exercice 4 (Produit : prix actualisé)**.** Soit $B_t = e^{rt}$ (compte bancaire) et $\widetilde{S}_t = S_t/B_t = e^{-rt}S_t$.

(a) Calculer $d(e^{-rt})$.

(b) En appliquant la formule produit, montrer que

$$d\widetilde{S}_t = (\mu - r)\widetilde{S}_t\,dt + \sigma\widetilde{S}_t\,dW_t.$$

(c) Que se passe-t-il si l'on remplace μ par r ?

(*Indication :* e^{-rt} est de variation finie, donc sa variation quadratique est nulle.)

Exercice 5 (Martingale exponentielle et "drift correction"). On définit

$$M_t := \exp\Big(\sigma W_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t\Big).$$

(a) Montrer que (M_t) est une martingale.

(b) En déduire une écriture de S_t sous la forme

$$S_t = S_0 e^{\mu t} M_t.$$

(c) Interpréter en une phrase le terme $-\frac{1}{2}\sigma^2 t$.

D. Bonus : EDS linéaire par facteur intégrant

Exercice 6 (EDS linéaire additive : variation des constantes (bonus)). Considérer l'EDS

$$dX_t = (aX_t + c)\,dt + (bX_t + d)\,dW_t, \qquad X_0 \in \mathbb{R},$$

où a, b, c, d sont des constantes.

(a) Définir un facteur intégrant U_t (processus explicite) tel que $d(U_t X_t)$ ne contienne plus de terme en X_t.

(b) En déduire une formule explicite pour X_t (au moins sous forme intégrale).

(*Indication :* choisir U_t solution de $dU_t = -aU_t\,dt - bU_t\,dW_t$ et utiliser la formule produit.)

Conseil. Dans les calculs, isoler systématiquement les termes en dt, en dW_t et le terme de covariation $d[X, Y]$.