Modélisation stochastique
CM5 : Covariation, intégration par parties, exponentielle stochastique

Toolkit pour EDS (accent finance)

Antonio Falcó

École Centrale de Nantes

31 janvier 2026

CM5 – Outils : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ & EDS

Objectif (2h). Donner le “toolkit” de calcul sur les processus d'Itô, indispensable en modélisation :

- produit (intégration par parties) avec terme de covariation,
- covariation explicite des intégrales d'Itô,
- exponentielle stochastique et résolutions rapides d'EDS linéaires,
- mini-application finance (pricing intuition : prix actualisé martingale, sans tout Girsanov).

Au tableau : Timing suggéré

`10' rappel Itô; 25' covariation + règles; 25' produit / IBP; 25' exponentielle stochastique; 20' EDS linéaires; 15' mini finance + synthèse.`

Plan (2h)

1. Rappel : processus d'Itô et formule d'Itô
2. Covariation : $[X, Y]$ pour processus d'Itô
3. Règles différentielles : $dX\,dY$ et $(dX)^2$
4. Intégration par parties (produit) : $d(XY)$
5. Exponentielle stochastique $\mathcal{E}(\cdot)$
6. Résolution d'EDS linéaires (variation des constantes)
7. Mini-application finance (GBM, actualisation, martingales)

Plan (2h)

1. Rappel : processus d'Itô et formule d'Itô
2. Covariation : $[X, Y]$ pour processus d'Itô
3. Règles différentielles : $dX\,dY$ et $(dX)^2$
4. Intégration par parties (produit) : $d(XY)$
5. Exponentielle stochastique $\mathcal{E}(\cdot)$
6. Résolution d'EDS linéaires (variation des constantes)
7. Mini-application finance (GBM, actualisation, martingales)

Au tableau : Fil rouge

`CM4 : Itô = règle de chaîne.`

`CM5 : produit + exponentielle = règle de calcul pour résoudre / simplifier des EDS.`

Rappel : processus d'Itô

Définition

Un processus d'Itô s'écrit

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s \, ds + \int_0^t b_s \, dW_s \quad \Longleftrightarrow \quad dX_t = a_t \, dt + b_t \, dW_t.$$

Itô (CM4)

Pour $f \in C^{1,2}$,

$$df(t, X_t) = \left(f_t + a\, f_x + \tfrac{1}{2} b^2 f_{xx}\right)(t, X_t)\, dt + \left(b\, f_x\right)(t, X_t)\, dW_t.$$

└─Rappel : processus d'Itô

Rappel : processus d'Itô

Définition

Un processus d'Itô s'écrit

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s\,ds + \int_0^t b_s\,dW_s \iff dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t.$$

Itô (CM4)

Pour $f \in C^{1,2}$,

$$df(t,X_t) = \left(f_t + a\,f_x + \tfrac{1}{2}b^2 f_{xx}\right)(t,X_t)\,dt + \left(b\,f_x\right)(t,X_t)\,dW_t.$$

Au tableau : À écrire (rappel minimal)

$$dX = a\,dt + b\,dW, \quad df = f_t\,dt + f_x\,dX + \tfrac{1}{2} f_{xx}(dX)^2, \quad (dX)^2 = b^2\,dt.$$

Covariation : résultat clé

Soient

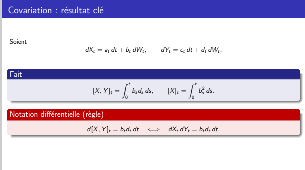
$$dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t, \qquad dY_t = c_t\,dt + d_t\,dW_t.$$

Fait

$$[X, Y]_t = \int_0^t b_s d_s\,ds, \qquad [X]_t = \int_0^t b_s^2\,ds.$$

Notation différentielle (règle)

$$d[X, Y]_t = b_t d_t\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad dX_t\,dY_t = b_t d_t\,dt.$$



Au tableau : À écrire (règle de base)

$$dX = a\,dt + b\,dW, \quad dY = c\,dt + d\,dW \quad \Rightarrow \quad dX\,dY = b\,d\,dt.$$

Au tableau : Commentaire

`C'est la formalisation de : seuls les termes en` dW `"comptent" au second ordre.`

Preuve rapide sur processus simples (option)

Si

$$b_t = \sum_i B_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \qquad d_t = \sum_i D_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

alors, sur $(t_i, t_{i+1}]$,

$$\Delta X_i = B_i\, \Delta W_i + \mathcal{O}(\Delta t_i), \qquad \Delta Y_i = D_i\, \Delta W_i + \mathcal{O}(\Delta t_i).$$

Donc

$$\sum_i \Delta X_i\, \Delta Y_i = \sum_i B_i D_i (\Delta W_i)^2 + \text{termes négligeables} \longrightarrow \sum_i B_i D_i\, \Delta t_i = \int_0^t b_s d_s\, ds.$$

Preuve rapide sur processus simples (option)

Si

$$b_t = \sum_i B_i \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \qquad d_t = \sum_i D_i \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t),$$

alors, sur $(t_i, t_{i+1}]$,

$$\Delta X_i = B_i\,\Delta W_i + \mathcal{O}(\Delta t_i), \qquad \Delta Y_i = D_i\,\Delta W_i + \mathcal{O}(\Delta t_i).$$

Donc

$$\sum_i \Delta X_i\,\Delta Y_i = \sum_i B_i D_i (\Delta W_i)^2 + \text{termes négligeables} \longrightarrow \sum_i B_i D_i\,\Delta t_i = \int_0^t b_s d_s\,ds.$$

Au tableau : À écrire (idée)

$\Delta X\,\Delta Y \approx (b\,\Delta W)(d\,\Delta W) = bd(\Delta W)^2 \rightsquigarrow bd\,\Delta t.$

Au tableau : À dire

Vous pouvez le présenter comme la même logique que CM3 : $(\Delta W)^2 \to \Delta t$.

Produit : formule d'intégration par parties

Soient X, Y des processus d'Itô continus. Alors

Formule

$$d(X_t Y_t) = X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + d[X, Y]_t.$$

- Comparez à la formule classique : $d(XY) = X\, dY + Y\, dX$.
- Le terme supplémentaire est la **covariation**.

Produit : formule d'intégration par parties

Soient X, Y des processus d'Itô continus. Alors

Formule

$$d(X_t Y_t) = X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + d[X, Y]_t.$$

- Comparez à la formule classique : $d(XY) = X\, dY + Y\, dX$.
- Le terme supplémentaire est la **covariation**.

Au tableau : À écrire (très utile au tableau)

$d(XY) = X\, dY + Y\, dX + d[X, Y]$.

Au tableau : Commentaire pédagogique

`Dire : "en stochastique, le terme oublié en calcul classique est précisément` $d[X, Y]$`."`

Démonstration éclair (via $f(x,y) = xy$)

Prenez $f(x,y) = xy$. Alors $f_x = y$, $f_y = x$, $f_{xy} = 1$ et les autres dérivées secondes sont nulles. Avec les règles $dX\,dY = d[X,Y]$, on obtient :

$$d(XY) = Y\,dX + X\,dY + dX\,dY.$$

Or $dX\,dY = d[X,Y]$.

Démonstration éclair (via $f(x, y) = xy$)

Prenez $f(x, y) = xy$. Alors $f_x = y$, $f_y = x$, $f_{xy} = 1$ et les autres dérivées secondes sont nulles. Avec les règles $dX\,dY = d[X, Y]$, on obtient :

$$d(XY) = Y\,dX + X\,dY + dX\,dY.$$

Or $dX\,dY = d[X, Y]$.

Au tableau : À écrire

$f(x, y) = xy \Rightarrow df = y\,dX + x\,dY + dX\,dY.$

Au tableau : Commentaire

`Même sans Itô 2D formel, vous pouvez justifier avec la règle :` $(dX)(dY) = d[X, Y]$.

Conséquence : formule intégrale

En intégrant entre 0 et t :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \, dY_s + \int_0^t Y_s \, dX_s + [X, Y]_t.$$

Conséquence : formule intégrale

En intégrant entre 0 et t :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + [X,Y]_t.$$

Au tableau : À écrire

$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X\,dY + \int_0^t Y\,dX + [X,Y]_t.$

Au tableau : À dire

`C’est l’analogue stochastique de l’intégration par parties.`

Exponentielle stochastique : définition

Cas le plus courant

Pour un processus adapté $\theta \in \mathcal{H}^2_T$, on définit

$$\mathcal{E}_t(\theta) := \exp\Big(\int_0^t \theta_s \, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 \, ds \Big).$$

Propriété fondamentale

$$d\mathcal{E}_t(\theta) = \theta_t \, \mathcal{E}_t(\theta) \, dW_t, \qquad \mathcal{E}_0(\theta) = 1.$$

Exponentielle stochastique : définition

Cas le plus courant

Pour un processus adapté $\theta \in \mathcal{H}^2_T$, on définit

$$\mathcal{E}_t(\theta) := \exp\Big(\int_0^t \theta_s \, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 \, ds \Big).$$

Propriété fondamentale

$$d\mathcal{E}_t(\theta) = \theta_t \, \mathcal{E}_t(\theta) \, dW_t, \qquad \mathcal{E}_0(\theta) = 1.$$

Au tableau : À écrire (résultat clé)

$E_t = \exp(\int_0^t \theta \, dW - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2 \, dt) \Rightarrow dE_t = \theta_t E_t \, dW_t.$

Au tableau : Commentaire

`Outil standard pour linéariser/normaliser des EDS, et pour Girsanov (mais ici on reste light).`

Preuve : Itô sur l'exponentielle (à faire une fois)

Soit

$$Z_t = \int_0^t \theta_s \, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 \, ds.$$

Alors

$$dZ_t = \theta_t \, dW_t - \frac{1}{2}\theta_t^2 \, dt, \qquad (dZ_t)^2 = \theta_t^2 \, dt.$$

Avec $f(z) = e^z$, Itô donne

$$de^{Z_t} = e^{Z_t} \, dZ_t + \frac{1}{2} e^{Z_t} (dZ_t)^2 = \theta_t e^{Z_t} \, dW_t.$$

Preuve : Itô sur l'exponentielle (à faire une fois)

Soit

$$Z_t = \int_0^t \theta_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \, ds.$$

Alors

$$dZ_t = \theta_t \, dW_t - \frac{1}{2}\theta_t^2 \, dt, \qquad (dZ_t)^2 = \theta_t^2 \, dt.$$

Avec $f(z) = e^z$, Itô donne

$$de^{Z_t} = e^{Z_t} \, dZ_t + \frac{1}{2}e^{Z_t}(dZ_t)^2 = \theta_t e^{Z_t} \, dW_t.$$

Au tableau : À écrire (calcul propre)

$$dZ = \theta \, dW - \tfrac{1}{2}\theta^2 \, dt, \quad (dZ)^2 = \theta^2 \, dt.$$
$$d(e^Z) = e^Z dZ + \tfrac{1}{2}e^Z(dZ)^2 = \theta e^Z \, dW.$$

Au tableau : À dire

Le $-\frac{1}{2}\theta^2 \, dt$ est précisément choisi pour annuler le terme correctif.

Résolution d'une EDS linéaire multiplicative

Problème

Résoudre

$$dX_t = \alpha_t X_t \, dt + \beta_t X_t \, dW_t, \qquad X_0 > 0.$$

Solution (forme exponentielle)

$$X_t = X_0 \exp\Big(\int_0^t (\alpha_s - \tfrac{1}{2}\beta_s^2) \, ds + \int_0^t \beta_s \, dW_s \Big).$$

Résolution d'une EDS linéaire multiplicative

Problème

Résoudre
$$dX_t = \alpha_t X_t\,dt + \beta_t X_t\,dW_t, \qquad X_0 > 0.$$

Solution (forme exponentielle)

$$X_t = X_0 \exp\Big(\int_0^t (\alpha_s - \tfrac{1}{2}\beta_s^2)\,ds + \int_0^t \beta_s\,dW_s\Big).$$

Au tableau : À écrire (idée via log)

Poser $Y_t = \ln X_t$, appliquer Itô :
$dY = \frac{1}{X}dX - \frac{1}{2}\frac{1}{X^2}(dX)^2 = (\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)\,dt + \beta\,dW$.

Au tableau : Commentaire

C'est la généralisation de GBM (CM4).

EDS linéaire additive : variation des constantes

Problème

$$dX_t = \alpha_t X_t \, dt + \beta_t X_t \, dW_t + \gamma_t \, dt + \delta_t \, dW_t.$$

Méthode

Multiplier par un facteur intégrant U_t solution de

$$dU_t = -\alpha_t U_t \, dt - \beta_t U_t \, dW_t,$$

puis appliquer la formule produit à $U_t X_t$.

EDS linéaire additive : variation des constantes

Problème

$$dX_t = \alpha_t X_t\, dt + \beta_t X_t\, dW_t + \gamma_t\, dt + \delta_t\, dW_t.$$

Méthode

Multiplier par un facteur intégrant U_t solution de

$$dU_t = -\alpha_t U_t\, dt - \beta_t U_t\, dW_t,$$

puis appliquer la formule produit à $U_t X_t$.

Au tableau : À écrire (schéma au tableau)

Choisir U tel que $d(UX) = U\,dX + X\,dU + d[U,X]$ élimine les termes en X.
On obtient $d(UX) = U\gamma\,dt + U\delta\,dW$ (après simplification).

Au tableau : Commentaire

Même méthode qu'en ODE : integrating factor, mais avec le terme $d[U,X]$.

Finance : actualisation et martingale (intuition)

Sous le GBM (CM4) :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t.$$

Définissons $B_t = e^{rt}$ (compte bancaire) et le prix actualisé $\widetilde{S}_t = S_t / B_t$. Alors

$$d\widetilde{S}_t = (\mu - r)\widetilde{S}_t \, dt + \sigma \widetilde{S}_t \, dW_t.$$

Point clé

Sous une mesure "risque-neutre" (idée), le drift devient r et $\widetilde{S}_t$ devient une martingale.

Finance : actualisation et martingale (intuition)

Sous le GBM (CM4) :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t.$$

Définissons $B_t = e^{rt}$ (compte bancaire) et le prix actualisé $\widetilde{S}_t = S_t / B_t$. Alors

$$d\widetilde{S}_t = (\mu - r)\widetilde{S}_t \, dt + \sigma \widetilde{S}_t \, dW_t.$$

Point clé

Sous une mesure “risque-neutre” (idée), le drift devient r et $\widetilde{S}_t$ devient une martingale.

Au tableau : À écrire (calcul rapide)

$\widetilde{S} = e^{-rt} S, \quad d(e^{-rt}) = -re^{-rt}\, dt.$

Produit : $d\widetilde{S} = e^{-rt} dS + S\, d(e^{-rt}) + d[S, e^{-rt}].$

Comme e^{-rt} est de variation finie, $d[S, e^{-rt}] = 0$.

Donc $d\widetilde{S} = e^{-rt}(\mu S\, dt + \sigma S\, dW) - re^{-rt} S\, dt.$

Au tableau : Commentaire

Cela montre l’utilité directe de la formule produit.

Synthèse CM5 : le toolkit

- Covariation : $dX\,dY = bd\,dt$ si $dX = a\,dt + b\,dW$, $dY = c\,dt + d\,dW$.
- Produit : $d(XY) = X\,dY + Y\,dX + d[X, Y]$.
- Exponentielle stochastique : $\mathcal{E}_t(\theta) = \exp(\int \theta\,dW - \frac{1}{2}\int \theta^2\,dt)$ et $d\mathcal{E} = \theta\mathcal{E}\,dW$.
- Résolution d'EDS linéaires : log / facteur intégrant + produit.

2026-01-31

- Covariation : $dX\,dY = bd\,dt$ si $dX = a\,dt + b\,dW$, $dY = c\,dt + d\,dW$.
- Produit : $d(XY) = X\,dY + Y\,dX + d[X,Y]$.
- Exponentielle stochastique : $\mathcal{E}_t(\theta) = \exp(\int \theta\,dW - \frac{1}{2}\int \theta^2\,dt)$ et $d\mathcal{E} = \theta\mathcal{E}\,dW$.
- Résolution d'EDS linéaires : log / facteur intégrant + produit.

Au tableau : Question de sortie

Pourquoi le produit stochastique a un terme $d[X,Y]$?
Réponse : parce que les termes en dW sont d'ordre $\sqrt{dt}$, donc leurs produits sont d'ordre dt.

Exercices (TP3 / maison)

1. Soit $X_t = W_t$ et $Y_t = tW_t$. Calculer $d(X_t Y_t)$ et $[X, Y]_t$.
2. Montrer que $[W, W]_t = t$ et $[W, t]_t = 0$.
3. (Produit) Pour S_t GBM et $B_t = e^{rt}$, retrouver $d(S_t/B_t)$.
4. (Exponentielle) Vérifier que $\mathcal{E}_t(\theta)$ vérifie $d\mathcal{E} = \theta\mathcal{E}\, dW$.
5. (EDS) Résoudre $dX_t = (aX_t + c)\, dt + (bX_t + d)\, dW_t$ par facteur intégrant.

Exercices (TP3 / maison)

1. Soit $X_t = W_t$ et $Y_t = tW_t$. Calculer $d(X_t Y_t)$ et $[X, Y]_t$.
2. Montrer que $[W, W]_t = t$ et $[W, t]_t = 0$.
3. (Produit) Pour S_t GBM et $B_t = e^{rt}$, retrouver $d(S_t/B_t)$.
4. (Exponentielle) Vérifier que $\mathcal{E}_t(\theta)$ vérifie $d\mathcal{E} = \theta\mathcal{E}\, dW$.
5. (EDS) Résoudre $dX_t = (aX_t + c)\, dt + (bX_t + d)\, dW_t$ par facteur intégrant.

Au tableau : Indications express

(1) $d(tW) = t\, dW + W\, dt$, donc $d(W \cdot tW) = \cdots + d[W, tW]$, et $d[W, tW] = t\, dt$.

(2) $[W, t] = 0$ car t est de variation finie.

(5) choisir U tel que $dU = -aU\, dt - bU\, dW$, puis $d(UX) = U(c\, dt + d\, dW)$.