Modélisation stochastique — TD1

Brownien, filtrations, espérance conditionnelle, martingales

Feuille d'exercices **avec corrigé**

Conventions. $(W_t)_{t\geq 0}$ est un brownien standard, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$.

A. Calculs gaussiens et conditionnement

Exercice 1 (Gaussienne conjointe : covariance et corrélation)**.** Soient $0 \leq s < t$. Rappeler la loi de (W_s, W_t) et calculer $\mathbb{E}[W_s]$, $\mathbb{E}[W_t]$, $\mathrm{Var}(W_s)$, $\mathrm{Var}(W_t)$, $\mathrm{Cov}(W_s, W_t)$. En déduire la matrice de covariance et $\rho = \mathrm{Corr}(W_s, W_t)$.

Solution. Le brownien est centré : $\mathbb{E}[W_s] = \mathbb{E}[W_t] = 0$. De plus $\mathrm{Var}(W_u) = u$. Écrire $W_t = W_s + (W_t - W_s)$, avec $W_t - W_s$ indépendant de W_s et centré, donc

$$\mathrm{Cov}(W_s, W_t) = \mathbb{E}[W_s W_t] = \mathbb{E}[W_s(W_s + (W_t - W_s))] = \mathbb{E}[W_s^2] = s.$$

La matrice de covariance est

$$\Sigma = \begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

La corrélation vaut $\rho = \dfrac{s}{\sqrt{st}} = \sqrt{\dfrac{s}{t}}$. □

Exercice 2 (Conditionnement gaussien : régression linéaire)**.** Soient $0 \leq s < t$. Calculer $\mathbb{E}[W_t \mid W_s]$ et $\mathrm{Var}(W_t \mid W_s)$.

Solution. Pour un vecteur gaussien (X, Y),

$$\mathbb{E}[Y \mid X] = \mathbb{E}[Y] + \frac{\mathrm{Cov}(Y, X)}{\mathrm{Var}(X)}(X - \mathbb{E}[X]).$$

Ici $X = W_s$, $Y = W_t$: $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, $\mathrm{Cov}(W_t, W_s) = s$, $\mathrm{Var}(W_s) = s$, donc

$$\mathbb{E}[W_t \mid W_s] = W_s.$$

De plus

$$\mathrm{Var}(W_t \mid W_s) = \mathrm{Var}(W_t) - \frac{\mathrm{Cov}(W_t, W_s)^2}{\mathrm{Var}(W_s)} = t - \frac{s^2}{s} = t - s.$$

□

Exercice 3 (Conditionnement par la filtration naturelle)**.** Montrer que pour $0 \leq s < t$, $\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s$ et $\mathbb{E}[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s] = 0$.

Solution. Décomposer $W_t = W_s + (W_t - W_s)$. Le terme W_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable. L'incrément $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et centré, donc $\mathbb{E}[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s] = 0$. Ainsi $\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s$. □

Exercice 4 (Bridge brownien : loi conditionnelle)**.** Soient $0 < s < t$. Déterminer la loi de W_s sachant W_t. (Bonus : écrire $W_s = \frac{s}{t} W_t + Z$ avec $Z \perp\!\!\!\perp W_t$.)

Solution. Par régression gaussienne,

$$\mathbb{E}[W_s \mid W_t] = \frac{\operatorname{Cov}(W_s, W_t)}{\operatorname{Var}(W_t)} W_t = \frac{s}{t} W_t.$$

La variance conditionnelle vaut

$$\operatorname{Var}(W_s \mid W_t) = \operatorname{Var}(W_s) - \frac{\operatorname{Cov}(W_s, W_t)^2}{\operatorname{Var}(W_t)} = s - \frac{s^2}{t} = \frac{s(t-s)}{t}.$$

On peut écrire

$$W_s = \frac{s}{t} W_t + Z, \qquad Z \sim \mathcal{N}\Big(0, \frac{s(t-s)}{t}\Big), \quad Z \perp\!\!\!\perp W_t.$$

□

B. Martingales : tests rapides et exemples

Exercice 5 (Test martingale : W_t et $W_t^2 - t$)**.** Montrer que (W_t) est une martingale. Montrer ensuite que $M_t := W_t^2 - t$ est une martingale.

Solution. Pour $s < t$, $W_t = W_s + (W_t - W_s)$ avec incrément indépendant de $\mathcal{F}_s$ et centré : $\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s$. Donc (W_t) est une martingale.

Pour M_t, développer

$$W_t^2 = (W_s + (W_t - W_s))^2 = W_s^2 + 2W_s(W_t - W_s) + (W_t - W_s)^2.$$

Conditionner par $\mathcal{F}_s$:

$$\mathbb{E}[W_t^2 \mid \mathcal{F}_s] = W_s^2 + 2W_s \cdot 0 + \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = W_s^2 + (t-s),$$

car $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Ainsi

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s] = W_s^2 + (t-s) - t = W_s^2 - s = M_s.$$

□

Exercice 6 (Martingale exponentielle)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $M_t = \exp(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$. Montrer que (M_t) est une martingale.

Solution. Écrire $W_t = W_s + \Delta W$ avec $\Delta W := W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ indépendant de $\mathcal{F}_s$:

$$M_t = M_s \exp\Big(\theta \Delta W - \tfrac{1}{2}\theta^2 (t-s)\Big).$$

Donc $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s\, \mathbb{E}[\exp(\theta \Delta W - \frac{1}{2}\theta^2(t-s))] = M_s$, car $\mathbb{E}[e^{\theta \Delta W}] = e^{\frac{1}{2}\theta^2(t-s)}$. □

Exercice 7 (Vrai/Faux (justifier en une ligne))**.** (a) (W_t^3) est une martingale.
(b) $(|W_t|)$ est une martingale.
(c) Si X est $\mathcal{F}_s$-mesurable et Y indépendant de $\mathcal{F}_s$, alors $\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{F}_s] = X\mathbb{E}[Y]$.
(d) Pour $s < t$, $\mathbb{E}[W_s W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s^2$.

Solution. (a) Faux : la martingale correcte est $W_t^3 - 3tW_t$ (sinon un terme en $(t-s)W_s$ apparaît). (b) Faux : $|W_t|$ est un sous-martingale (convexité), pas une martingale. (c) Vrai : $\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{F}_s] = X\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_s] = X\mathbb{E}[Y]$. (d) Vrai : $W_s W_t = W_s^2 + W_s(W_t - W_s)$ et $\mathbb{E}[W_s(W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s] = W_s \cdot 0$. □

C. Mini-motivation finance (log-retours)

Exercice 8 (Log-retours discrets : moyenne et variance)**.** $X_{n+1} - X_n = \mu\,\Delta t + \sigma\,\Delta W_n$, $\Delta W_n \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ i.i.d. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathrm{Var}(X_n)$.

Solution. On a

$$X_n = X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mu\Delta t + \sigma \sum_{k=0}^{n-1} \Delta W_k = X_0 + n\mu\Delta t + \sigma \sum_{k=0}^{n-1} \Delta W_k.$$

Donc $\mathbb{E}[X_n] = X_0 + n\mu\Delta t$. Comme les ΔW_k sont indépendants, centrés, et $\mathrm{Var}(\Delta W_k) = \Delta t$,

$$\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}(\Delta W_k) = \sigma^2 n\Delta t.$$

□

Exercice 9 (Pas de biais prédictible : critère de martingale)**.** Rappeler la définition d'une martingale et montrer que si $\mathbb{E}[M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s] = 0$ pour tout $s < t$, alors (M_t) est une martingale. Donner une interprétation "finance".

Solution. Une martingale (M_t) est adaptée, intégrable, et vérifie $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$. Or $\mathbb{E}[M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s] = 0 \iff \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$. Interprétation : absence de biais prédictible (dans un cadre idéal : pas d'arbitrage). □