L'intégrale de Wiener

Antonio Falcó

On calcule le revenue pour un compte bancaire B au temps t avec un budget initiale de B_0 euros et une taux d'intéret $0 < r < 1$ en utilisant la formule suivante:

$$B_t = B_0(1 + rt) \approx e^{rt} B_0.$$

c'est-à-dire

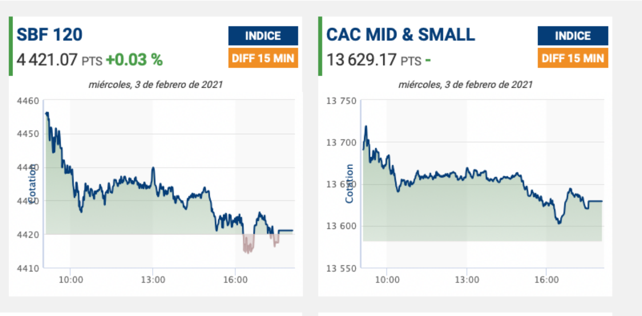
$$\frac{B_t - B_0}{B_0} = rt.$$

Si on utilise une actif financiére (un action du marché) qui a un prix de S_t euros au temps t, on peut définir son revenu au période Δt par la formule

$$\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = r(t)\Delta t.$$

Alors,

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t r(u)du} \text{ ou } dS_t = r(t) S_t dt, \quad S_{t=0} = S_0.$$



$$S_t = S_0 e^{\int_0^t r(s)ds + \int_0^t \text{bruit}_s ds}$$

La question est:

$$dS_t = S_t d\left(\int_0^t r(s)ds + \int_0^t \text{bruit}_s ds\right) dt = S_t(r(t)dt + \text{bruit}_t dt).$$

ou

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_s r(s)ds + \int_0^t S_s \text{bruit}_s ds$$

Question

Est-ce qu'il existe

$$dX_t = d\left(\int_0^t r(s)ds + \int_0^t \text{bruit}_s ds\right) dt$$

ou

$$X_t = X_0 + \int_0^t r(s)ds + \int_0^t \text{bruit}_s ds$$

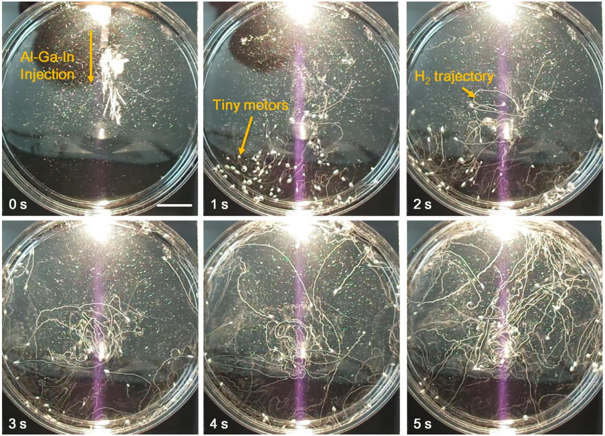
Paradigme utilisée

Tout processus instantanée est équivalent à un processus cumulative:

$$\mu(t) = f(t)dt \Leftrightarrow F(t) = \int_0^t \mu(s)$$

La dérivée (au sens forte) est la fonction inverse de l'intégrale (au sens Riemann/Lebesgue).

On considère une particule avec un trajectoire aléatoire:



Source: B. Yuan, S. Tan, Y. Zhou, J. Liu, "Self-powered macroscopic Brownian motion of spontaneously running liquid metal motors," Sci. Bull. (2015) 60(13):1203-1210

En mécanique classique on utilise l'espace des configurations

$$\mathbb{M} = \{((x,y);(\dot{x},\dot{y})) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}^2\}$$

ici $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. La trajectoire on peut la calculé si on sait

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= g(x,y) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, il existe une trajectoire $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ dérivable pour tout temps $t > 0$.

Question

Comme on peut procédé si la trajectoire est continue et n'as pas de dérivée pour tout temps $t > 0$.

Rare ou habituel?

- De manière un peu plus précise on munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ de la norme de la convergence uniforme:

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

on en fait ainsi un espace vectoriel normé dont on peut montrer qu'il est complet pour cette norme.
- On appelle ensemble maigre d'un espace topologique un ensemble obtenu comme union finie de fermés d'intérieur vide.
- On montre alors que $\mathcal{C}([a,b])$ n'est pas maigre (théorème de Baire) et que l'ensemble des fonctions continues dérivables (sauf peut-être sur ensemble de mesure nul) est un ensemble maigre pour la topologie ci-dessus définie.

Un **processus aléatoire à temps continu** est une famille de v.a. $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$. On peut également le voir comme le choix au hasard d'une fonction:

$$\Omega \equiv \{\omega | \omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) = X_{\cdot}(\omega) : & \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto X_t(\omega) = \omega(t) \end{aligned}$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ un espace de probabilité. Une **filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{A}$. Le tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information dont on dispose à l'instant t.

On dit qu'un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est **adapté à** $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, si pour chaque t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Hypothéses techniques

Dans la suite, les filtrations que l'on considèrera, auront la propriété suivante:

$$\text{Si } A \in \mathcal{A} \text{ et } \Pr(A) = 0 \text{ alors pour tout } t : A \in \mathcal{F}_t.$$

Ceci exprime que $\mathcal{F}_t$ contient tous les ensembles de mesure nulle de $\mathcal{A}$. Le but de cette hypothèse technique est de permettre d'affirmer que si $X = Y$ Pr-p.s. et que Y est $\mathcal{F}_t$-mesurable alors X est aussi $\mathcal{F}_t$-mesurable.

On peut construire une filtration à partir d'un processus (X_t) en posant $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. Cette filtration ne vérifie pas, en général, l'hypothèse précédente. Cependant si on remplace la tribu $\mathcal{F}_t$ par la tribu $\mathcal{F}_t$ engendrée par $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{N}$, l'ensemble des ensembles de probabilité nulle (on dit aussi négligeables) de $\mathcal{A}$, on obtient une filtration vérifiant la condition souhaitée. On appelle cette filtration **la filtration naturelle** du processus (X_t).

Definition

Les v.a. $X_t - X_s$, $t > s \geq 0$, sont appelées des **accroissements** du processus (X_t).

Definition

On dit que le processus X_t à accroissements indépendants si pour tout $0 \leq s < t$ et

$$s = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t_n = t$$

les v.a.

$$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}, \ldots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1} - X_{t_0}$$

sont indépendants.

Processus à accroissements indépendants et stationnnaires

- (Indépendance) X_t à accroissements indépendants. Soit $s \leq t$, la variable $X_t - X_s$ est indépendante de la tribu du passé avant s : $\mathcal{F}_s^X := \sigma(X_u : u \leq s)$. Pour tout n : $0 \leq t_0 \leq t_1 \cdots \leq t_n$ les variables

$$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_0}$$

sont indépendantes.

- (Stationnarité) $X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0$ for all $t > s \geq 0$. Ici

$$\sim \quad \equiv \quad \text{“même loi de probabilité”}$$

Pour de tels processus, donner la loi de $X_t - X_0$, pour tout $t > 0$, ainsi que celle de X_0 suffit à caractériser entièrement le processus.

Un processus (X_t) est appelé un **processus à trajectoires continues** (ou simplement processus continu) si

$$\Pr(\{\omega \in \Omega : t \to X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1.$$

Mouvement brownien standard

Un mouvement brownien standard (abréegé m.b.s.) est un processus aléatoire à temps continu $(W_t, t \in \mathbb{R}_+)$ tel que

1. $W_0 = 0$ p.p.
2. (W_t) est à accroissements indépendants et stationnaires,
3. $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ pour tout $t > s \geq 0$.

De cette définition, il suit que pour $t \geq s \geq 0$,

1. $W_t - W_s \sim W_{t-s} - W_0 \sim N(0, t-s)$ pour tout $t > s \geq 0$,
2. $E[W_t - W_s] = 0$,
3. $E[(W_t - W_s)^2] = t - s$.

Il existe plusieurs manières de construire un mouvement brownien standard.

- Nous ne démontrons pas l'existence du mouvement brownien.
- Nous admetons les résultats suivantes:
  - Les trajectoires du mouvement brownien sont continues.
  - Les trajectoires du mouvement brownien sont p.s. "nulle part différentiables"

Généralisation

- Le processus $X_t = a + W_t$ est un Brownien issu de a.
- On dit que X est un Brownien généralisée ou un mouvement brownien de drift μ si

$$X_t = x + \mu t + \sigma W_t$$

- La variable X_t es une variable gaussienne d'ésperance $x + \mu\, t$ et de variance $\sigma^2\, t$

- Soit Δt donée. Soit

$$X_n := (W_{t+n\Delta t} - W_{t-(n-1)\Delta t}) \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$$

et $X_1, \ldots, X_k$ sont v.a. i.i.d

- Alors, pour simuler W_t $(0 \leq t \leq T)$ on prend $t_j := j\frac{T}{N+1}$, $(0 \leq j \leq N)$. Comme $X_1, \ldots, X_n$ est un échantillon de taille N d'une population

$$X \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$$

et

$$X_j \sim W_{t_j} - W_{t_{j-1}}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

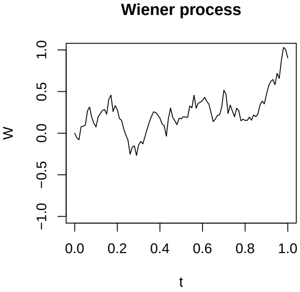
- On utilise

$$W_{t_j} = \sum_{k=1}^{j}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) = \sum_{k=1}^{j} X_k, \quad 1 \leq j \leq N.$$

ou $W_0 = 0$.

Fichier brownian1.R

```
set.seed (123)
N <- 100 # number of end - points of the grid including T
T <- 1 #length of the interval [0 ,T] in time units
Delta <- T / N # time increment
t <- seq(0 ,T , length = N +1)
W <- c (0 , cumsum(sqrt(Delta)*rnorm (N)))
plot(t ,W ,type = "l", main = "Wiener process", ylim = c( -1 ,1))
```



Processus gaussien

Un **processus gaussien** est un processus $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ tel que $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien pour tout $n \geq 1$ et $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$. Ceci revient à dire que

$$c_1 X_{t_1} + \cdots + c_n X_{t_n}$$

est une variable gaussienne pour tout $n \geq 1$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ et $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$.

Pour un vecteur aléatoire (pas forcément gaussien), on définit encore:

- La fonction $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $m(t) = E[X_t]$ et appelée la moyenne du processus.
- La fonction $K : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $K(t,s) = \mathrm{Cov}(X_t, X_s)$ et appelée la covariance du processus.

Proposition

Pour tout processus aléatoire

1. K *est symétrique:* $K(s,t) = K(t,s)$.
2. K *est définie positive:* $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j K(t_i, t_j) \geq 0$ *pour tout* $n \geq 1$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ *et* $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$.

Proposition (Kolmogorov)

Etant donné $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *et* $K : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *symétrique et définie positive, il existe un processus gaussienne* $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ *de moyenne* m *et de covariance* K*. De plus* m *et* K *caractérisent entirèment le processus* (X_t).

Proposition (Deuxième caractérisation du m.b.s.)

Un m.b.s. $(W_t : t \in \mathbb{R}_+)$ *est un processus gaussien avec moyenne* $m(t) = 0$ *et covariance* $K(t,s) = \min(t,s)$.

Démostration: Le caractère gaussien résulte de

$$\sum_{i=0}^{n} c_i W_{t_i} = \sum_{i=0}^{n} b_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

avec $c_i = b_i - b_{i-1}$ pour $0 \leq i \leq n-1$ et $c_n = b_n$. Soit $t \geq s \geq 0$: $m(t) = E[W_t] = 0$ et

$$\begin{aligned} K(s,t) = E[W_s W_t] &= E[(W_t - W_s + W_s)W_s] \\ &= E[(W_t - W_s)(W_s - W_0)] + E[W_s^2] = 0 + s. \end{aligned}$$

$\square$

Scaling

Proposition (Exercise)

Soit (W_t) a m.b.s.

1. $(-W_t)$ *est a m.b.s.*
2. *Pour tout* $c > 0$ $(c^{-1}W_{c^2t})$ *est a m.b.s.*
3. *Pour a fix* T $(W_T - W_{T-t})$ *est a m.b.s.*
4. $(\widehat{W}_t = tW_{1/t})$ $t > 0$ *et* $\widehat{W}_0 = 0$ *est a m.b.s.*

Espérance conditionnelle

- L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est fixé.
- Soit B un évènement, $B \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{P}(\cdot|B)$ est une probabilité sur Ω.
- Soit $B \in \mathcal{F}$ et $\mathbf{1}_B(\omega) = 1$ si $\omega \in B$ et $\mathbf{1}_B(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$. Alors, $\mathbb{P}(B) = E_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_B]$.
- Soit $\mathbb{Q}(A) := \mathbb{P}(A|B)$ alors

$$E_{\mathbb{Q}}(X) = \int_\Omega X d\mathbb{Q} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P},$$

c'est que l'on peut lire

$$E_{\mathbb{Q}}(X)\,\mathbb{P}(B) = E_{\mathbb{Q}}(X)\,E_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_B] = \int_B X d\mathbb{P}.$$

L'espace hilbertienne $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.
- On considère l'ensemble de classe de équivalence des v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F})$

$$X := [X] = \{ Y : Y \text{ v.a. telle que } X = Y \text{ p.s. } \}$$

- On va définir

$$\|X\|_{L^2} = \sqrt{\int_\Omega X^2 \, d\mathbb{P}} = \sqrt{E_{\mathbb{P}}[X^2]}$$

- et alors,

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X : \|X\|_{L^2} < \infty\}$$

  et un espace de Hilbert avec le produit scalaire:

$$\langle X, Y \rangle_{L^2} = E_{\mathbb{P}}[X\,Y] = \int_\Omega X\,Y \, d\mathbb{P}.$$

Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

- Soit X une v.a (classe d'équivalence) définie sur $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.
- L'espérance conditionnelle $E[X|\mathcal{G}]$ de X quand $\mathcal{G}$ est l'unique classe d'équivalence des v.a. de l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
  1. il est $\mathcal{G}$-mesurable,
  2. telle que

$$\int_A E[X|\mathcal{G}]d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} = \int_\Omega X\,\mathbf{1}_A d\mathbb{P},$$

  avec $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$.
- 2. nous dis que si on prend $Z = E[X|\mathcal{G}]$ alors

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z\,W] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X\,W]$$

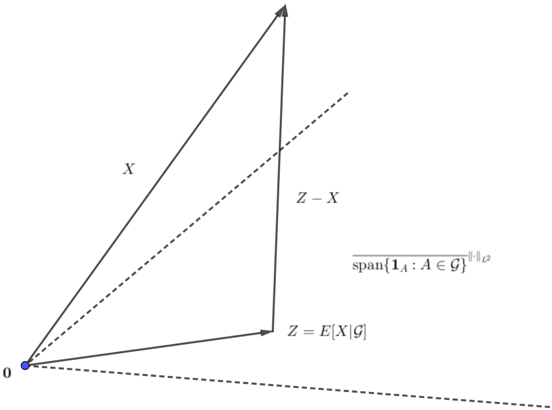
est vérifié pour toute v.a. $W = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{G}$.

- Observe que 2. est aussi équivalent à

$$\langle Z - X, W \rangle_{L^2} = 0$$

pour toute v.a. $W = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{G}$. Alors

$$Z - X \perp \overline{\mathrm{span}\{\mathbf{1}_A : A \in \mathcal{G}\}}^{\|\cdot\|_{L^2}}$$


X
$Z - X$
$\overline{\mathrm{span}\{\mathbf{1}_A : A \in \mathcal{G}\}}^{\|\cdot\|_{L^2}}$
$Z = E[X|\mathcal{G}]$
$\mathbf{0}$

- On considère les ensembles de fonctions test (v.a.) suivantes

$$\{\mathbf{1}_A : A \in \mathcal{G}\} \subset \{\mathbf{1}_B : B \in \mathcal{F}\},$$

où $\|\mathbf{1}_A\|_{L^1} = E[|\mathbf{1}_A|] = E[\mathbf{1}_A] = \mathbb{P}(A)$ alors $\mathbf{1}_A$ est intégrable et $\|\mathbf{1}_A\|_{L^2} = E[\mathbf{1}_A^2] = E[\mathbf{1}_A] = \mathbb{P}(A)$ aussi est de carré intégrable.

- Alors

$$\mathrm{span}\left\{\mathbf{1}_B : B \in \mathcal{F}\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i} : A_i \in \mathcal{F}\right\}$$

est un sous-espace de fonctions (v.a.) et

$$\overline{\mathrm{span}\left\{\mathbf{1}_B : B \in \mathcal{F}\right\}}^{\|\cdot\|_{L^2}} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

- Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i.e.

$$\|X\|_{L^2} = E[X^2]$$

alors

$$E[X|\mathcal{G}] = \arg\min\left\{\|X - Y\|_{L^2} : Y \text{ est } \mathcal{G}\text{-mesurable}\right\}.$$

Espérance conditionnelle comme une projection orthogonal

- Soit

$$V_{\mathcal{G}} := \overline{\mathrm{span}\,\{\mathbf{1}_B : B \in \mathcal{G}\}}^{\|\cdot\|_{L^2}} = L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}).$$

Alors, $V_{\mathcal{G}}$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = V_{\mathcal{G}} \oplus V_{\mathcal{G}}^{\perp}$.

- Il existe $P_{\mathcal{G}} : L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ linéaire et bornée (continue) telle que

$$P_{\mathcal{G}}(X) = Y := E[X|\mathcal{G}] \in V_{\mathcal{G}}.$$

L'application $P_{\mathcal{G}}$ est la projection orthogonal sur $V_{\mathcal{G}}$.

- Comme $P_{\mathcal{G}} \circ P_{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{G}}$, alors

$$E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}].$$

- Comme la tribu trivial $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\} \subset \mathcal{F}$, et

$$\mathrm{span}\,\{\mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\emptyset \equiv 0\} = \mathrm{span}\,\{\mathbf{1}_\Omega\} \cong \mathbb{R},$$

  alors $L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}) \cong \mathbb{R}$ est le sous-espaces des variables aléatoires qui prend une valeur constant avec probabilité 1.
- En conséquence, ce logique que

$$E[X|\mathcal{F}_0] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}) \cong \mathbb{R},$$

  soit un nombre réel.
- Au fait,

$$E[X|\mathcal{F}_0] = \frac{\langle X, \mathbf{1}_\Omega\rangle_{L^2}}{\|\mathbf{1}_\Omega\|_{L^2}}\,\mathbf{1}_\Omega = \frac{\langle X, \mathbf{1}_\Omega\rangle_{L^2}}{\mathbb{P}(\Omega)}\,\mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_\Omega \int_\Omega X(\omega)d\mathbb{P}(\omega),$$

  alors $E[X|\mathcal{F}_0] = \mathbf{1}_\Omega\, E[X] = E[X]$ p.s.

- On peut considéré la norme

$$\|X\|_{L^1} = E[|X|] = \int_\Omega |X(\omega)| d\mathbb{P}(\omega)$$

- Alors, la fermeture des fonctions test

$$\overline{\mathrm{span}\,\{\mathbf{1}_B : B \in \mathcal{F}\}}^{\|\cdot\|_{L^1}} = L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

- L'espace $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de Banach, et en conséquence on n'as pas de produit scalaire (la orthogonalité n'a pas sens. Alors un sous-espace fermé pas nécessairement a de complément, c'est-à-dire, si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, à priori il n'existe pas de sous-espace fermé $Z \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que

$$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) \oplus Z.$$

- Donc pour ce cas, on a besoin d'utiliser le Théorème de Radon-Nikodym pour définir $E[X|\mathcal{G}]$.

Propiétés

1. $E[aX + bY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[Y|\mathcal{G}]$.
2. Soit $X \leq Y$, alors $E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$.
3. $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$.
4. Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $E[X|\mathcal{G}] = X$.
5. Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $E[X\,Y|\mathcal{G}] = Y\,E[X|\mathcal{G}]$.
6. Si X es indépendante de $\mathcal{G}$, alors $E[X|\mathcal{G}] = E_{\mathbb{P}}[X]$.
7. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors $V_{\mathcal{H}} \subset V_{\mathcal{G}}$ alors $\mathcal{P}_{\mathcal{G}} \circ P_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}}$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{H}} \circ P_{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{H}}$ c'est-à-dire

$$E[X|\mathcal{H}] = E[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}].$$

- Exercice: Soit $B \in \mathcal{F}$ un événement et on considère la tribu $\mathcal{G} = \{B, B^c, \Omega, \emptyset\}$. Pour $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ calculez $E[X|\mathcal{G}]$.

Soit $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) = \mathrm{span}\{\mathbf{1}_B, \mathbf{1}_{B^c}, \mathbf{1}_\Omega, \mathbf{1}_\emptyset \equiv 0\}$. Comme $\mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_{B^c}$ alors on a

$$L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) = \mathrm{span}\{\mathbf{1}_B, \mathbf{1}_{B^c}\}$$

et il est un sous-espace de dimension 2. La projection orthogonal sur $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ est

$$\begin{aligned} E[X|\mathcal{G}] = P_{\mathcal{G}}(X) &= \frac{\langle X, \mathbf{1}_B \rangle_{L^2}}{\|\mathbf{1}_B\|_{L^2}^2}\mathbf{1}_B + \frac{\langle X, \mathbf{1}_{B^c} \rangle_{L^2}}{\|\mathbf{1}_{B^c}\|_{L^2}^2}\mathbf{1}_{B^c} \\ &= \frac{E[X\,\mathbf{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}\mathbf{1}_B + \frac{E[X\,\mathbf{1}_{B^c}]}{\mathbb{P}(B^c)}\mathbf{1}_{B^c} \\ &= \frac{E[X\,\mathbf{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}\mathbf{1}_B + \frac{E[X\,\mathbf{1}_{B^c}]}{1-\mathbb{P}(B)}(\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_B) \\ &= \left(\frac{E[X\,\mathbf{1}_B]}{\mathbb{P}(B)} - \frac{E[X\,\mathbf{1}_{B^c}]}{1-\mathbb{P}(B)}\right)\mathbf{1}_B + \frac{E[X\,\mathbf{1}_{B^c}]}{1-\mathbb{P}(B)}\mathbf{1}_\Omega. \end{aligned}$$

- Exercice: Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique. Comme on peut montrer l'égalité

$$E\left[\int_0^T X_t dt \middle| \mathcal{G}\right] = \int_0^T E[X_t|\mathcal{G}]dt?$$

$Z = \int_0^T X_t dt \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour tout $t \geq 0$ et $Z_t := E[X_t|\mathcal{G}]$ est intégrable. On a de montrer que

$$E\left[W\left(\int_0^T X_t dt\right)\right] = E\left[W\left(\int_0^T E[X_t|\mathcal{G}]\right)\right]$$

est vérifié pour toute v.a W $\mathcal{G}$-mesurable.

- Exercice: Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique. Comme on peut montrer l'égalité

$$E\left[\int_0^T X_t dt \middle| \mathcal{G}\right] = \int_0^T E[X_t|\mathcal{G}]dt?$$

Observe,

$$\begin{aligned} E\left[W\left(\int_0^T X_t dt\right)\right] &= E\left[\int_0^T W X_t dt\right] \\ &= \int_\Omega \left(\int_0^T W X_t dt\right) d\mathbb{P} \text{ T. Fubini} \\ &= \int_0^T \left(\int_\Omega W X_t d\mathbb{P}\right) dt \\ &= \int_0^T E[W X_t] dt \end{aligned}$$

et $E[WX_t] = E[E[WX_t|\mathcal{G}]] = E[WE[X_t|\mathcal{G}]]$

- Exercice: Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique. Comme on peut montrer l'égalité

$$E\left[\int_0^T X_t dt \middle| \mathcal{G}\right] = \int_0^T E[X_t|\mathcal{G}]dt?$$

Alors

$$\begin{aligned}
E\left[W\left(\int_0^T X_t dt\right)\right] &= \int_0^T E[WX_t]dt \\
&= \int_0^T E[WE[X_t|\mathcal{G}]]dt \\
&= \int_0^T \left(\int_\Omega WE[X_t|\mathcal{G}]d\mathbb{P}\right) dt
\end{aligned}$$

T. Fubini

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega \left(\int_0^T WE[X_t|\mathcal{G}]dt\right) d\mathbb{P} \\
&= E\left[W\int_0^T E[X_t|\mathcal{G}]dt\right]
\end{aligned}$$

Un processus (X_t) adapté à $(\mathcal{F}_t)$ tel que

1. $E[|X_t|] < \infty$, pour tout $t \geq 0$,
2. $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ p.s. pour tout $t > s \geq 0$.

est appelé une **martingale** (à temps continu). On définit de manière similaire une **sous-martingale**

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$$

et une **sur-martingale** (à temps continu),

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$$

avec les inégalités correspondantes.

On déduit de cette définition que, si (X_t) est une martingale, alors

$$E[X_t] = E[X_0],$$

pour tout t.

Lemme

Soit $X = (X_t)$ adapté à $(\mathcal{F}_t)$. Si X est une martingale alors X^2 est une sous-martingale.

Démonstration:

$$\begin{aligned} E[X_t^2|\mathcal{F}_s] &= E[((X_t - X_s) + X_s)^2|\mathcal{F}_s] \\ &= E[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2E[(X_t - X_s)X_s|\mathcal{F}_s] + E[X_s^2|\mathcal{F}_s] \\ &= E[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2X_s E[(X_t - X_s)|\mathcal{F}_s] + X_s^2 \end{aligned}$$

Comme

$$E[(X_t - X_s)|\mathcal{F}_s] = E[X_t|\mathcal{F}_s] - E[X_s|\mathcal{F}_s] = X_s - X_s = 0,$$

alors

$$E[X_t^2|\mathcal{F}_s] = E[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s] + X_s^2 \geq X_s^2.$$

□

Proposition

Le m.b.s. (W_t) *est une martigale par rapport à sa filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_r : r < t) : t \in \mathbb{R}_+)$.

Démostration: Par l'inégalité de Jensen (avec $\varphi(x) = x^2$) on a

$$E[|W_t|]^2 \leq E[W_t^2],$$

c'est-à-dire

$$E[|W_t|] \leq \sqrt{E[W_t^2]} = \sqrt{t} < \infty,$$

et

$$\begin{aligned} E[W_t|\mathcal{F}_s^W] &= E[(W_t - W_s) + (W_s - W_0)|\mathcal{F}_s^W] \\ &= E[(W_t - W_s)|\mathcal{F}_s^W] + E[W_s|\mathcal{F}_s^W] \\ &\text{on utilise que } W_t - W_s \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_s^W \\ &= E_{\mathbb{P}}[(W_t - W_s)] + W_s \\ &= W_s. \end{aligned}$$

□

Proposition

Le m.b.s. $(W_t^2 - t)$ *est une martigale par rapport à sa filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_r : r < t) : t \in \mathbb{R}_+)$.

Démostration: Comme $E[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s^W] = t - s$ et

$$\begin{aligned} E[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s^W] &= E[W_t^2 + W_s^2 - 2W_tW_s|\mathcal{F}_s^W] \\ &= E[W_t^2|\mathcal{F}_s^W] + W_s^2 - 2W_sE[W_t|\mathcal{F}_s^W] \\ &= E[W_t^2|\mathcal{F}_s^W] - W_s^2. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$t - s = E[W_t^2|\mathcal{F}_s^W] - W_s^2 \Leftrightarrow W_s^2 - s = E[W_t^2 - t|\mathcal{F}_s^W]$$

$\square$

Proposition (Troisiéme caractérisation du m.b.s (Lévy))

Soit (X_t) *un processus a trajectoires continues adapté a une filtration* $\mathcal{F}_t$ *et tel que*

1. (X_t) *est une martingale par rapport à* $\mathcal{F}_t$,
2. $(X_t^2 - t)$ *est une martingale par rapport à* $\mathcal{F}_t$.

Alors (X_t) *est une m.b.s.*

Proposition

Si (W_t) est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard, alors

$$\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right)$$

est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_t$.

Démonstration: La fonction génératrice des moments est

$$M_X(t) = E[\exp(tX)].$$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow M_X(t) = \exp\left(\mu\, t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$. On a

$$E\left[\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right)|\mathcal{F}_s\right] =$$

$$\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t\right) E\left[\exp\left(\sigma(W_t - W_s) + W_s\right)|\mathcal{F}_s\right] =$$

$$\exp\left(\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}t\right) E\left[\exp\left(\sigma(W_t - W_s)\right)|\mathcal{F}_s\right].$$

Démonstration:

$$E\left[\exp\left(\sigma(W_t - W_s)\right)|\mathcal{F}_s\right] = M_{(W_t - W_s)}(\sigma)$$
$$= \exp\left(0\cdot\sigma + \frac{(t-s)\sigma^2}{2}\right)$$
$$= \exp\left(\frac{(t-s)\sigma^2}{2}\right).$$

Alors

$$E\left[\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right)|\mathcal{F}_s\right] =$$
$$\exp\left(\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}t\right) E\left[\exp\left(\sigma(W_t - W_s)\right)|\mathcal{F}_s\right] =$$
$$\exp\left(\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\exp\left(\frac{(t-s)\sigma^2}{2}\right) =$$
$$\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}s + \sigma W_s\right)$$

$\square$

- Un processus $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ et $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t^X) : t \in \mathbb{R}_+)$ sa filtration canonique $(\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_\tau : \tau < t))$.
- On dit que le processus est de Markov si, pour tout n, et toute fonction bornée $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, pour tous

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_n$$

on a

$$E[F(X_{s+t_1}, \ldots, X_{s+t_n})|\mathcal{F}_s^X] = E[F(X_{s+t_1}, \ldots, X_{s+t_n})|X_s] \text{ p.s.}$$

- Ceci implique en particulier que pour toute $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et borné on a

$$E[f(X_t)|\mathcal{F}_s^X] = E[f(X_t)|X_s] \text{ p.s.}$$

- Le processus de Markov est un **processus "sans memoire"**.
- En particulier, si $f(x) = \mathbf{1}_B(x)$ avec $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors

$$\Pr(X_t \in B|\mathcal{F}_s^X) = \Pr(X_t \in B|X_s)$$

Proposition

Le m.b.s. (W_t) est un processus de Markov.

Démostration: En utilisant le fait que $(W_t - W_s)$ et $(W_s - W_0) = W_s$ sont indépedantes on peut montrer:

$$
\begin{aligned}
E[f(W_t)|\mathcal{F}_s^W] &= E[f((W_t - W_s) + W_s|\mathcal{F}_s^W] \\
&\text{comme } W_t - W_s \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_s^W \\
&\text{et } W_s \text{ est } \mathcal{F}_s^W\text{-measurable alors} \\
&E[f((W_t - W_s) + W_s|\mathcal{F}_s^W] \text{ dépend de } W_s \\
&= E[f((W_t - W_s) + W_s)|W_s] \\
&= E[f(W_t)|W_s]
\end{aligned}
$$

$\square$

- Soit $\mathbf{W}_t = [W_t^{(1)} \, W_t^{(2)} \, \cdots \, W_t^{(n)}]^T$ un processus n-dimensionnel (l'exposant ^{T} note la transposition d'un vecteur "ligne").
- On dit que $\mathbf{W}$ est un Brownien multidimensionnel si les processus $(W_t^{(i)} : t \geq 0)$ sont des browniens indépendants.
- C'est un processus à accroissements indépendants.
- Si $\mathbf{W}$ est un Brownien multidimensionnel alors

$$E[\mathbf{W}_t^T \mathbf{W}_s] = \sum_{i=1}^{n} E[W_t^{(i)} W_s^{(i)}] = n \min(s, t).$$

- On dit que les mouvements browniens à valeurs réelles $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ sont corrélés de coefficient de corrélation ρ si $(W_t^{(1)} W_t^{(2)} - \rho \, t : t \geq 0)$ est une martingale.

- On note $L^2(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble de classes d'équivalence des fonctions boréliennes $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de carré intégrable:

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt < \infty.$$

- C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Fonctions (test) en escalier

- Soit $f(t) = \mathbf{1}_{[u,v]}(t)$, on pose

$$\int_0^\infty f(s)dW_s := W_v - W_u.$$

- Soit $f(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1}\mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t)$ pour

$$0 \leq t_0 < t_1 \cdots < t_{n-1} < \infty,$$

  on pose

$$\int_0^\infty f(s)dW_s := \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}).$$

- Alors,

$$I(f) := \int_0^\infty f(s)dW_s \sim \mathcal{N}\left(0, \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_{i-1}^2(t_i - t_{i-1})}\right)$$

- L'intégrale est linéaire: $I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g)$.
- Exercice

$$\mathrm{Var}(I(f))=\|f\|_{L^2}^2.$$

- Exercice

$$E(I(f\,g))=\int_0^\infty f(s)g(s)ds=\langle f,g\rangle_{L^2}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ est le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}_+)$.

- Exercice

$$\mathrm{Var}(I(f+g))=\mathrm{Var}(I(f))+\mathrm{Var}(I(g))+2E(I(f\,g)).$$

Cas général

- On connaît de l'analyse fonctionnelle que, si $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier que converge (dans $L^2(\mathbb{R}_+)$) vers f :

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_0^\infty (f_n(s) - f(s))^2 ds \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

- La suite (f_n) est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}_+)$
- Exercice La suite

$$I(f_n) = \int_0^\infty f_n(s) dW_s$$

de v.a. est de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- Si la limite de la suite $(I(f_n))$ ne dépend que de f, on pose

$$I(f) := \int_0^\infty f(s)dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(s)dW_s = \lim_{n\to\infty} I(f_n).$$

- On dit que $I(f)$ est l'intégrale stochastique (ou intégrale de Wiener) de f par rapport W.
- Le sous-espace fermé $\mathrm{Wiener} := I(L^2(\mathbb{R}_+)) \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ coincide avec l'espace gaussien engendré par le mouvement brownien.
- L'application $I : L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donné par $f \mapsto I(f)$ est linéaire et isométrique.
- L'isométrie implique

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_0^\infty f(s)g(s)ds = E[I(f)I(g)]. \tag{1}$$

- On a
$$L^2(\mathbb{R}_+) = \overline{\mathrm{span}\{\mathbf{1}_{[0,t]} : t \geq 0\}}^{\|\cdot\|_{L^2}}.$$
- et $I(\mathbf{1}_{[0,t]}) = W_t - W_0 = W_t$ pour tout $t \geq 0$.
- En conséquence, le sous-espace fermé

$$I(L^2(\mathbb{R}_+)) = \overline{\mathrm{span}\{I(\mathbf{1}_{[0,t]}) : t \geq 0\}}^{\|\cdot\|_{L^2}} = \overline{\mathrm{span}\{W_t : t \geq 0\}}^{\|\cdot\|_{L^2}}.$$

On calcule le produit scalaire, $\left\langle W_t \,, \int_0^\infty f(s)dW_s \right\rangle_{L^2} =$

$$E\left[W_t \int_0^\infty f(s)dW_s\right] = E\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}(s)dW_s \int_0^\infty f(s)dW_s\right]$$

$$= E[I(\mathbf{1}_{[0,t]})I(f)]$$

l'isométrie implique

$$= \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, f\rangle_{L^2} = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}(s)f(s)ds$$

$$= \int_0^t f(s)ds$$

En conséquence, si pour $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ il existe $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\langle Z, W_t\rangle_{L^2} = E[Z\, W_t] = \int_0^t f(s)ds$$

pour tout t, alors $Z = I(f) = \int_0^\infty f(s)dW_s$.

Processus lié à l'intégrale stochastique

- On dit que $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ si

$$\int_0^T |f(s)|^2 ds < \infty$$

pour tout $T > 0$.

- On a $L^2(\mathbb{R}_+) \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$

Théorème

Soit $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *et* $M_t := \int_0^t f(s)dW_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}(s)f(s)dW_s$.

1. *Le processus* M *est une martingale continue.*
2. $E[M_t] = 0$ *et* $\mathrm{Var}(M_t) = \int_0^t f(s)^2 ds$.
3. *Le processus* M *est un processus gaussien centré de covariance* $\int_0^{\min(s,t)} f(u)^2 du$, *et à accroissements indépendantes.*
4. *Le processus* $(M_t^2 - \int_0^t f(s)^2 ds : t \in \mathbb{R}_+)$ *est une martingale.*
5. *Si* $f, g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *on a*

$$E\left[\int_0^t f(u)dW_u \int_0^s g(u)dW_u\right] = \int_0^{\min(s,t)} f(u)g(u)du$$

Montrer le théorème pour $f(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1}\mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(s)$

Intégration par parties

Théorème

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\int_0^t f(s)dWs = f(t)W_t - \int_0^t f'(s)W_s ds.$$

Démostration: On commence par $(t_0 = 0$ et $t_n = t)$

$$\sum_{j=1}^n f(t_{j-1})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = \sum_{j=1}^n f(t_{j-1})W_{t_j} - \sum_{j=1}^n f(t_{j-1})W_{t_{j-1}}$$

Alors il existe $t_j^* \in [t_{j-1}, t_j]$ tel que

$$f'(t_j^*)(t_j - t_{j-1}) = f(t_j) - f(t_{j-1}) \Rightarrow f(t_{j-1}) = f(t_j) - f'(t_j^*)(t_j - t_{j-1})$$

Démostration:

$$\sum_{j=1}^{n} f(t_{j-1})W_{t_j} - \sum_{j=1}^{n} f(t_{j-1})W_{t_{j-1}} = \sum_{j=1}^{n}(f(t_j) - f'(t_j^*)(t_j - t_{j-1}))W_{t_j} - \sum_{j=1}^{n} f(t_{j-1})W_{t_{j-1}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(f(t_j)W_{t_j} - f(t_{j-1})W_{t_{j-1}}) - \sum_{j=1}^{n} f'(t_j^*)(t_j - t_{j-1}))W_{t_j}$$

$$= f(t_n)W_{t_n} - f(t_0)W_{t_0} - \sum_{j=1}^{n} f'(t_j^*)(t_j - t_{j-1}))W_{t_j}$$

$$= f(t)W_t - \sum_{j=1}^{n} f'(t_j^*)(t_j - t_{j-1}))W_{t_j}$$

$$\sum_{j=1}^{n} f(t_{j-1})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = f(t)W_t - \sum_{j=1}^{n} f'(t_j^*)(t_j - t_{j-1}))W_{t_j}$$

On peut montrer:

$$\sum_{j=1}^{n} f(t_{j-1})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \to \int_0^t f(s)dW_s \sim \mathcal{N}(0, \|f\|_{L^2}^2)$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} f'(t_j^*)(t_j - t_{j-1}))W_{t_j} \to \int_0^t f'(s)W_s ds.$$

Exercices

Trouvez les distributions de probabilité de les processus suivantes:

1. $Z_t := \int_0^t W_s ds.$
2. $Z_t := \int_0^t sW_s ds.$

Formulation différentielle

On peut écrire

$$\int_0^t f(s)dWs = f(t)W_t - \int_0^t f'(s)W_s ds.$$

comme

$$f(t)dW_t = d(f(t)W_t) - f'(t)W_t dt$$

et alors on trouve la formule

$$d(f(t)W_t) = f'(t)W_t dt + f(t)dW_t$$

Le cours de l'action dans le marché

Soit $S_0 > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et (W_t) une m.b.s. Alors, on apelle a

$$S_t := S_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\right)$$

mouvement geométrique brownien. Observe que

$$\ln S_t = \ln S_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t \sim \mathcal{N}\left(\ln S_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t\right)$$

Soit $R_t := \ln S_t$. Alors, $R_t - R_0 = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$ c'est-à-dire

$$\int_0^t dR_s = \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) ds + \int_0^t \sigma dW_s.$$

Le cours de l'action dans le marché

En général on peur écrire pour tout Δt :

$$R_{t+\Delta t} - R_t := \int_t^{t+\Delta t} dR_s = \int_t^{t+\Delta t} (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) ds + \sigma \int_t^{t+\Delta t} dW_s$$

qu'on peut traduire comme que R_t est le processus solution de l'équation différentielle stochastique:

$$dR_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma dW_t \text{ avec } R_0 \text{ donné.}$$

On peut calculer

$$
\begin{aligned}
E[S_t] &= E\left[S_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\right)\right] \\
&= S_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right) E\left[\exp\left(\sigma W_t\right)\right] \\
&= S_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right) M_{W_t}(\sigma) \\
&= S_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right) \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} t\right) \\
&= S_0 \exp\left(\mu t\right).
\end{aligned}
$$

Alors, $m(t) := E[S_t]$ est solution de l'EDO

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} m(t) &= \mu m(t) \\
m(0) &= S_0.
\end{aligned}
$$

Dans l'approche théorique de Langevin, une grosse particule brownienne de masse m, supposée animée à l'instant t d'une vitesse $\mathbf{v}(t)$, est soumise à deux forces bien distinctes:

- une force de frottement fluide du type $\mathbf{f} = -k\,\mathbf{v}$, où k est une constante positive. Dans le cas d'une particule sphérique de rayon a, cette constante s'écrit explicitement : $k = 6\pi\eta$ a (loi de Stokes).
- une force complémentaire, notée $\boldsymbol{\eta}(t)$, qui synthétise la résultante des chocs aléatoires des molécules de fluide environnantes. Langevin écrit à propos de cette force supplémentaire *qu'elle est indifféremment positive et négative, et sa grandeur est telle qu'elle maintient l'agitation de la particule que, sans elle, la résistance visqueuse finirait par arrêter*.

On applique le principe fondamental de la dynamique de Newton, çe qui conduit à l'équation stochastique de Langevin:

$$m\,\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -k\,\mathbf{v}(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$$

On peut écrire le modèle scalaire:

$$dv(t) = -\frac{k}{m} v(t)dt + \frac{1}{m}\eta(t)dt,$$

c'est-à-dire

$$v(t) - v(0) = -\frac{k}{m} \int_0^t v(s)ds \; + \frac{1}{m} \int_0^t \eta(s)ds.$$

Aujourd'hui on considère (W_t) a m.b.s., la vitesse $\dot{X}_t = V_t$ où

$$\begin{aligned} V_t - V_0 &= -\frac{k}{m} \int_0^t V_s \, ds + \frac{1}{m} \; W_t \\ &= -\frac{k}{m} \int_0^t V_s \, ds + \frac{1}{m} \int_0^t dW_s. \end{aligned}$$

Alors on considère la vitesse (V_t) comme un processus donnée par

$$V_t = V_0 - \mu \int_0^t V_s ds + \sigma W_t \tag{2}$$

$$V_0 = \upsilon_0 \text{ donné}. \tag{3}$$

On dit que $(V_t)_{t \geq 0}$ est le processus d'Orstein-Uhlenbeck.

Théorème

Pour le processus d'Orstein-Uhlenbeck on a

$$V_t = e^{-t\mu} V_0 + \sigma \int_0^t e^{-\mu(t-s)} dW_s, \tag{4}$$

c'est-à-dire V_t défini par (4) satisfait (2).

Démostration:

Si on considère que le processus X_t est donné par

$$X_t = e^{-t\mu} V_0 + \sigma \int_0^t e^{-\mu(t-s)} dW_s,$$

le théorème est vérifié si on prouve que

$$\mu \int_0^t X_s ds = V_0 - X_t + \sigma W_t.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties on a,

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-\mu(t-s)} dW_s &= e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} dW_s \\
&= e^{-\mu t} \left[e^{\mu t} W_t - \mu \int_0^t e^{\mu s} W_s ds \right] \\
&= W_t - \mu e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} W_s ds.
\end{aligned}$$

Démostration:

Comme

$$X_t = e^{-t\mu} V_0 + \sigma W_t - \sigma \mu e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} W_s ds,$$

on calcule

$$\begin{aligned}
\int_0^t X_s ds &= V_0 \int_0^t e^{-\mu s} ds + \sigma \int_0^t W_s ds \\
&\quad - \sigma\mu \int_0^t e^{-\mu s} \left(\int_0^s e^{\mu u} W_u du \right) ds \\
&= \frac{1}{\mu} V_0 (1 - e^{-\mu t}) + \sigma \int_0^t W_s ds \\
&\quad - \sigma\mu \int_0^t e^{-\mu s} \left(\int_0^s e^{\mu u} W_u du \right) ds
\end{aligned}$$

Démostration:

Pour calculer l'intégrale

$$\int_0^t e^{-\mu s}\left(\int_0^s e^{\mu u} W_u du\right) ds = \int\int_{R_t} e^{-\mu s} e^{\mu u} W_u duds$$

on la regarde comme une intégrale double dans le domaine

$$R_t := \{(u,s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq s \leq t\}.$$

En utilisant le théorème de Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-\mu s}\left(\int_0^s e^{\mu u} W_u du\right) ds &= \int_0^t e^{\mu u} W_u du \int_u^t e^{-\mu s} ds \\
&= \int_0^t e^{\mu u} W_u du \frac{1}{\mu}(e^{-\mu u} - e^{-\mu t}) \\
&= \frac{1}{\mu}\left(\int_0^t W_u du - \int_0^t e^{-\mu(t-u)} W_u du\right)
\end{aligned}$$

Démostration:

$$\begin{aligned}\int_0^t X_s ds &= \frac{1}{\mu} V_0(1-e^{-\mu t}) + \sigma \int_0^t W_u du \\ &- \mu\sigma \frac{1}{\mu}\left(\int_0^t W_u du - \int_0^t e^{-\mu(t-u)} W_u du\right) \\ &= \frac{1}{\mu} V_0(1-e^{-\mu t}) + \sigma \int_0^t e^{-\mu(t-u)} W_u du\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mu \int_0^t X_s ds &= V_0(1-e^{-\mu t}) + \mu\sigma \int_0^t e^{-\mu(t-u)} W_u du \\ &= V_0 - V_0 e^{-\mu t} + \mu\sigma e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu u} W_u du \\ &= V_0 - X_t + \sigma W_t\end{aligned}$$

où $X_t = V_0 e^{-t\mu} + \sigma W_t - \mu\sigma e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} W_s ds$. □

Si $V_0 = v_0$, a constant, on a

$$V_t = V_0 - \mu \int_0^t V_s\,ds + \sigma\, W_t \sim N(m(t), \mathrm{Var}(t)).$$

et $\mathrm{Var}(t) = E[V_t^2] - m^2(t)$. Observe,

$$m(t) = E[V_t] = E\left[V_0 - \mu \int_0^t V_s\,ds + \sigma\ W_t\right]$$

$$= V_0 - \mu E\left[\int_0^t V_s\,ds\right]$$

$$= V_0 - \mu \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t v(s)ds\, p(s, v(s))\right) dv(s)$$

théorème de Fubini

$$= V_0 - \mu \int_0^t E[V_s]ds = V_0 - \mu \int_0^t m(s)ds,$$

alors

$$\frac{d}{dt}m(t) = -\mu m(t), \quad m(0) = V_0 \Rightarrow m(t) = e^{-\mu t} V_0$$

Comme on peut écrire l'équation intégrale sous la forme différentielle suivante:

$$dV_t = -\mu V_t dt + \sigma dW_t, \quad V_0 = v_0,$$

Si on intègre entre 0 et t :

$$\int_0^t dV_s = \int_0^t -\mu V_s ds + \int_0^t \sigma dW_s$$

$$V_t - V_0 = -\mu \int_0^t V_s ds + \sigma \int_0^t dW_s$$

$$V_t - V_0 = -\mu \int_0^t V_s ds + \sigma W_t$$

Alors, pour calculer $m(t) = E[V_t]$ on peut utiliser la formule d'intégration par parties sous la forme différentielle:

$$\begin{aligned} d(e^{\mu t} V_t) &= \mu e^{\mu t} V_t dt + e^{\mu t} dV_t \\ &= \mu e^{\mu t} V_t dt + e^{\mu t} \left(-\mu V_t dt + \sigma dW_t \right) \\ &= \sigma dW_t \end{aligned}$$

i.e.

$$\int_0^t d(e^{\mu s} V_s) = \int_0^t \sigma dW_s$$
$$e^{\mu t} V_t - V_0 = \sigma W_t$$

et

$$e^{\mu t} V_t = V_0 + \sigma W_t \Rightarrow E[V_t] = e^{-\mu t} V_0$$

Pour calculer $E[V_t^2]$, une question natural est: Si

$$V_t = v_0 - \mu \int_0^t V_s \, ds + \sigma \, W_t$$

$$dV_t = -\mu V_t dt + \sigma dW_t, \quad V_0 = v_0,$$

est-ce qu'on peut calculer pour le processus (V_t^2) la intégrale par parties?

$$dV_t^2 = d(V_t \, V_t) = 2V_t dV_t$$

et alors

$$V_t^2 - V_0^2 = 2\int_0^2 V_s dV_s \Rightarrow E[V_t^2] - V_0^2 = 2E\left[\int_0^2 V_s dV_s\right].$$

On utilise (4):

$$E[V_s\, V_t] =$$

$$E\left[\left(e^{-s\mu}V_0 + \sigma\int_0^s e^{-\mu(s-u)}dW_u\right)\left(e^{-t\mu}V_0 + \sigma\int_0^t e^{-\mu(t-u)}dW_u\right)\right]$$

L'espérance de l'intégrale de Wiener es nulle

$$e^{-\mu s}e^{-\mu t} + \sigma^2 E\left[\left(\int_0^s e^{-\mu(s-u)}dW_u\right)\left(\int_0^t e^{-\mu(t-u)}dW_u\right)\right]$$

on utilise la isometrie de l'intégrale de Wiener

$$e^{-\mu s}e^{-\mu t}V_0^2 + \sigma^2\int_0^{\min(s,t)} e^{-\mu(s-u)}e^{-\mu(t-u)}du$$

$$e^{-\mu s}e^{-\mu t}V_0^2 + \sigma^2 e^{-\mu s}e^{-\mu t}\int_0^{\min(s,t)} e^{2\mu u}du.$$

$$\mathrm{cov}(V_s, V_t) = E[V_s\, V_t] - E[V_s]E[V_t] = E[V_s\, V_t] - e^{-\mu s} e^{-\mu t} V_0^2$$

Alors,

$$\mathrm{cov}(V_s, V_t) = \sigma^2 e^{-\mu s} e^{-\mu t} \int_0^{\min(s,t)} e^{2\mu u} du, \tag{5}$$

et en particulier

$$\mathrm{Var}(V_t) = \mathrm{cov}(V_t, V_t) = \frac{\sigma^2}{2\mu}(1 - e^{-2\mu t}) \tag{6}$$

Proposition

Soit V_0 une v.a. gaussien alors le processus de O-U, V est un processus de Markov gaussien.

Démostration: On utilise (4):

$$V_t = e^{-t\mu} V_0 + \sigma \int_0^t e^{-\mu(t-s)} dW_s,$$

et V_t est la somme de deux v.a. gaussiennes. Soit

$$V_s = e^{-s\mu} V_0 + \sigma \int_0^s e^{-\mu(s-u)} dW_u$$

et

$$V_s e^{(s-t)\mu} = e^{-t\mu} V_0 + \sigma \int_0^s e^{-\mu(t-u)} dW_u.$$

Démostration:

Si $s \leq t$ alors

$$\int_0^t e^{-\mu(t-s)} dW_s = \int_0^s e^{-\mu(t-u)} dW_u + \int_s^t e^{-\mu(t-u)} dW_u$$

et

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-t\mu} V_0 + \sigma \int_0^s e^{-\mu(t-u)} dW_u + \sigma \int_s^t e^{-\mu(t-u)} dW_u \\ &= V_s e^{(s-t)\mu} + \sigma \int_s^t e^{-\mu(t-u)} dW_u \\ &= V_s e^{-(t-s)\mu} + \sigma \int_s^t e^{-\mu(t-u)} dW_u \end{aligned}$$

Démostration:

$=$ ou encore

$$V_{t+s} = V_s e^{-t\mu} + \sigma \int_0^t e^{-\mu(t-u)} d\widehat{W}_u$$

où le processus $(\widehat{W}_t = W_{t+s} - W_s : t \geq s)$ est un m.b.s. indépendant de $\mathcal{F}_s$. En particulier,

$$E[f(V_{t+s})|\mathcal{F}_s] = E[f(V_s e^{-t\mu} + Y)|\mathcal{F}_s] = E[f(V_s e^{-t\mu} + Y)|V_s]$$

qui établit le caractère markovien de V. $\square$

Soit $X = (X_t : t \in \mathbb{R})$ le processus

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$$

ou en forme différentielle

$$dX_t = \mu(X_t)ds + \sigma(t)dW_t, \quad X_0 = x. \tag{7}$$

On dit que X est la solution de la Équation Différentielle Stochastique (7).

- Le revenu de l'action du marché: $\mu(x) = \mu$ et $\sigma(x) = \sigma$.

$$X_t = x + \int_0^t \mu \, ds + \int_0^t \sigma \, dW_s.$$

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu \, dt + \sigma \, dW_t \\ X_0 &= x. \end{aligned}$$

- Le processus OU: $\mu(x) = \mu x$ et $\sigma(x) = \sigma$.

$$X_t = x + \int_0^t \mu\, X_s\, ds + \int_0^t \sigma\, dW_s.$$

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu\, X_t\, dt + \sigma\, dW_t \\ X_0 &= x. \end{aligned}$$

- et pour le processus de le prix de l'actif risqué? $\mu(x) = \mu x$ et $\sigma(x) = \sigma x$.

$$X_t = x + \int_0^t \mu X_s \, ds + \int_0^t \sigma X_s \, dW_s.$$

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t \, dt + \sigma X_s \, dW_t \\ X_0 &= x. \end{aligned}$$

- L'intégrale $\int_0^t \sigma X_s \, dW_s$ n'est pas de Wiener!

- Soit $r = (r_t : t \in \mathbb{R}_+)$ la taux d'intêret dans le marché (par exemple l'EURIBOR).
- r est la solution de l'EDS:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad r_0 = x > 0.$$

- Si $b - r_t = -V_t$ on a le modèle de O-U avec $\mu = a$.
- La forme explicite de la solution est

$$r_t = (r_0 - b)e^{-at} + b + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u \tag{8}$$

- L'égalité

$$r_t = (r_s - b)e^{-a(t-s)} + b + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u, \quad s \leq t.$$

établit le caractèr markovienne de r.

- L'espérance conditionnelle:

$$E[r_t|r_s] = (r_s - b)e^{-a(t-s)} + b$$

et la variance conditionnelle

$$\mathrm{Var}(r_t|r_s) := E[r_t^2|r_s] - E[r_t|r_s]^2 = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)})$$

- Le facteur d'actualisation dans le marché est le processus:

$$\exp(-\int_0^t r_u du) = e^{-\int_0^t r_u du}$$

- En utilisant (2) on peut écrire r_t comme

$$r_t = r_0 + abt - a\int_0^t r_u du + \sigma W_t. \tag{9}$$

Proposition

Le processus $\left(\int_0^t r_u du : t \in \mathbb{R}_+\right)$ *es gaussien de moyenne*

$$bt + (r_0 - b)\frac{1 - e^{-at}}{a}$$

et de variance

$$-\frac{\sigma^2}{2a^3}(1 - e^{-at})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2}\left(t - \frac{1 - e^{-at}}{a}\right).$$

Démonstration: Parmi (9) on a

$$\begin{aligned}\int_0^t r_u du &= \frac{1}{a}\left(-r_t + r_0 + abt + \sigma W_t\right) \text{ avec } (8) \\ &= \frac{1}{a}\Big(-(r_0 - b)e^{-at} - b - \sigma\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u \\ &\quad + r_0 + abt + \sigma W_t\Big)\end{aligned}$$

□