

# Modélisation stochastique CM2 : Intégrale stochastique d'Itô

Construction, isométrie, martingale, premiers calculs

Antonio Falcó

École Centrale de Nantes

1<sup>er</sup> février 2026

**Objectif de séance (2h).** Construire l'intégrale d'Itô en  $L^2$ . **Stratégie pédagogique.**

- Définir sur *simples prévisibles* (comme Riemann en déterministe).
- Prouver une identité énergétique (isométrie)  $\Rightarrow$  extension par continuité.
- Martingale comme corollaire naturel (moyenne conditionnelle nulle des incrémentations).

**Au tableau : Schéma d'ensemble (à dessiner en 30 secondes)**

$$\underline{\text{Simples prévisibles}} \xrightarrow{\int \cdot dW} L^2(\Omega)$$

$$\text{Isométrie: } \mathbb{E}\left[\left(\int H dW\right)^2\right] = \mathbb{E} \int H^2$$

$\Downarrow$  continuité

$$\underline{\mathcal{H}_T^2} \xrightarrow{\int \cdot dW} L^2(\Omega)$$

**Au tableau : Phrase clé**

# Plan (2h)

- ① Objectifs et idée générale (intégrer contre un bruit)
- ② Processus simples prévisibles : définition
- ③ Définition de l'intégrale d'Itô sur les simples
- ④ Isométrie d'Itô et covariance
- ⑤ Extension à  $L^2$  (construction par densité)
- ⑥ Propriété de martingale et continuité
- ⑦ Exemples de calculs (déterministes, puis adaptés)
- ⑧ Pont vers CM3–CM4 (variation quadratique, formule d'Itô)

## └ Plan (2h)

## Plan (2h)

- ➊ Objectifs et idée générale (intégrer contre un bruit)
- ➋ Processus simples prévisibles : définition
- ➌ Définition de l'intégrale d'Itô sur les simples
- ➍ Isométrie d'Itô et covariance
- ➎ Extension à  $L^2$  (construction par densité)
- ➏ Propriétés de martingale et continuité
- ➐ Exemples de calculs (dterministes, puis adaptés)
- ➑ Pont vers CM3-CM4 (variation quadratique, formule d'Itô)

## Au tableau : À dire (1 minute)

- (1) Définition sur simples
- (2) Isométrie (le cœur)
- (3) Extension à  
 $\mathcal{H}^2$
- (4) Martingale
- (5) Exemples rapides + teaser Itô

# Processus simple prévisible

## Définition

Partition  $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ , variables  $X_i$   $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurables, et

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t).$$

- “Je fixe  $X_i$  au début de l’intervalle” (pas d’anticipation).
- Analogue stochastique des fonctions en escalier.

## CM2 – Intégrale d'Itô

## └ Processus simples prévisibles

## └ Processus simple prévisible

## Processus simple prévisible

## Définition

Partition  $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ , variables  $X_i$   $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurables, et

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t).$$

- "Je fixe  $X_i$  au début de l'intervalle" (pas d'anticipation).

- Analogie stochastique des fonctions en escalier.

**Au tableau : À écrire**

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad X_i \in L^2, \quad X_i \text{ } \mathcal{F}_{t_i} \text{-mesurable.}$$

**Au tableau : Commentaire pédagogique**

Interprétation finance :  $X_i$  = position entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ .

Prévisible = décision prise avec l'info disponible à  $t_i$ .

# Espace des intégrandes

## Espace naturel

$$\mathcal{H}_T^2 := H \text{ prévisible : } \mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds < \infty.$$

## CM2 – Intégrale d'Itô

## └ Processus simples prévisibles

## └ Espace des intégrandes

## Espace naturel

$$\mathcal{H}_T^2 := H \text{ prévisible : } \mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds < \infty.$$

**Au tableau : À écrire**

$$\|H\|_{\mathcal{H}_T^2}^2 := \mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds.$$

**Au tableau : À dire**

- 1)  $X_i$  est  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable.
- 2)  $\Delta W_i$  indépendant du passé et centré.
- 3) Même argument que CM1 :  $\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$ .

# Définition de l'intégrale d'Itô (simples)

## Définition

Pour  $H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$  et  $t \in [0, T]$ ,

$$\int_0^t H_s dW_s := \sum_{i=0}^{n-1} X_i (W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i}).$$

## CM2 – Intégrale d'Itô

### └ Définition de l'intégrale sur les simples

#### └ Définition de l'intégrale d'Itô (simples)

Définition de l'intégrale d'Itô (simples)

## Définition

Pour  $H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$  et  $t \in [0, T]$ ,

$$\int_0^t H_s dW_s := \sum_{i=0}^{n-1} X_i (W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i}).$$

## Au tableau : À écrire (version sans n $\wedge$ si vous préférez)

Pour  $t = T$  :  $\int_0^T H_s dW_s := \sum_{i=0}^{n-1} X_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$

Puis pour  $t \leq T$  :  $\int_0^t := \sum_i X_i (W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i}).$

## Au tableau : Mini-analogie

Déterministe :  $\int f dg \approx \sum f(t_i)(g(t_{i+1}) - g(t_i)).$

Stochastique : même forme, mais  $f(t_i) = X_i(\omega)$  adapté.

## Propriété : moyenne nulle

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t H_s dW_s \right] = 0.$$

## CM2 – Intégrale d'Itô

## └ Définition de l'intégrale sur les simples

## └ Propriété : moyenne nulle

Propriété : moyenne nulle

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s dW_s\right] = 0.$$

**Au tableau : À écrire (preuve en 4 lignes)**

$$\int_0^t H dW = \sum_i X_i \Delta W_i, \quad \Delta W_i = W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i}.$$

$$\mathbb{E}[X_i \Delta W_i] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_i \Delta W_i \mid \mathcal{F}_{t_i}]\right] = \mathbb{E}\left[X_i \mathbb{E}[\Delta W_i \mid \mathcal{F}_{t_i}]\right] = 0.$$

**Au tableau : À dire**

- 1)  $X_i$  est  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable.
- 2)  $\Delta W_i$  indépendant du passé et centré.
- 3) Même argument que CM1 :  $\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$ .

# Isométrie d'Itô (œur du cours)

## Théorème

Pour  $H$  simple prévisible,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T H_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T H_s^2 ds \right].$$

## CM2 – Intégrale d'Itô

- Isométrie d'Itô

- Isométrie d'Itô (œur du cours)

**Théorème**Pour  $H$  simple prévisible,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T H_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T H_s^2 ds \right].$$

## Au tableau : À écrire (plan de preuve)

$$\int_0^T H dW = \sum_i X_i \Delta W_i.$$

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_i X_i \Delta W_i \right)^2 \right] = \sum_i \mathbb{E}[X_i^2 (\Delta W_i)^2] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i X_j \Delta W_i \Delta W_j].$$

Montrer: termes croisés = 0,       $\mathbb{E}[(\Delta W_i)^2] = \Delta t_i$ .

## Au tableau : Commentaire pédagogique

C'est exactement "variance d'une somme d'incrément indépendants", mais avec des coefficients aléatoires adaptés.

## Preuve : annulation des termes croisés

$$\mathbb{E}[X_i X_j \Delta W_i \Delta W_j] = 0 \quad (i \neq j).$$

## CM2 – Intégrale d'Itô

- └ Isométrie d'Itô

Preuve : annulation des termes croisés

- └ Preuve : annulation des termes croisés

$$\mathbb{E}[X_i X_j \Delta W_i \Delta W_j] = 0 \quad (i \neq j).$$

### Au tableau : À écrire (cas $i < j$ )

Supposons  $i < j$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_i X_j \Delta W_i \Delta W_j] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i X_j \Delta W_i \Delta W_j | \mathcal{F}_{t_j}]] \\ &= \mathbb{E}[X_i X_j \Delta W_i \mathbb{E}[\Delta W_j | \mathcal{F}_{t_j}]] = 0.\end{aligned}$$

### Au tableau : À dire

- 1)  $X_i$  est  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable.
- 2)  $\Delta W_i$  indépendant du passé et centré.
- 3) Même argument que CM1 :  $\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] = 0$ .

## Preuve : termes diagonaux

$$\mathbb{E}[X_i^2(\Delta W_i)^2] = \mathbb{E}[X_i^2](t_{i+1} - t_i).$$

## CM2 – Intégrale d'Itô

### └ Isométrie d'Itô

#### └ Preuve : termes diagonaux

$$\mathbb{E}[X_i^2(\Delta W_i)^2] = \mathbb{E}[X_i^2](t_{i+1} - t_i).$$

## Au tableau : À écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_i^2(\Delta W_i)^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i^2(\Delta W_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}]] \\ &= \mathbb{E}[X_i^2 \mathbb{E}[(\Delta W_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}]].\end{aligned}$$

$$\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t_i) \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_{t_i} \Rightarrow \mathbb{E}[(\Delta W_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}] = \Delta t_i.$$

## Au tableau : Petit commentaire

Réutiliser l'idée CM1 : conditionnelle + indépendance.

## Fin de preuve : identification avec $\mathbb{E} \int H^2$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H dW\right)^2\right] = \sum_i \mathbb{E}[X_i^2] \Delta t_i = \mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds.$$

## CM2 – Intégrale d'Itô

- └ Isométrie d'Itô

└ Fin de preuve : identification avec  $\mathbb{E} \int H^2$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right] = \sum_i \mathbb{E}[X_i^2] \Delta t_i = \mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds.$$

## Au tableau : À écrire (égalité clé)

$$\int_0^T H_s^2 ds = \sum_i X_i^2 \Delta t_i,$$

$$\mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds = \sum_i \mathbb{E}[X_i^2] \Delta t_i.$$

## Au tableau : À dire

- 1)  $X_i$  est  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable.
- 2)  $\Delta W_i$  indépendant du passé et centré.
- 3) Même argument que CM1 :  $\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$ .

## Covariance : formule et preuve par polarisation

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int H dW \right) \left( \int G dW \right) \right] = \mathbb{E} \int_0^T HG ds.$$

## └ Isométrie d'Itô

## └ Covariance : formule et preuve par polarisation

$$\mathbb{E}\left[\left(\int H dW\right)\left(\int G dW\right)\right] = \mathbb{E} \int_0^T HG ds.$$

**Au tableau : À écrire (polarisation)**

$$4\langle A, B \rangle = \|A + B\|^2 - \|A - B\|^2 \quad \text{dans un Hilbert.}$$

$$A = \int H dW, \quad B = \int G dW.$$

$$\begin{aligned} 4\mathbb{E}[AB] &= \mathbb{E}\left[\left(\int (H+G) dW\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\int (H-G) dW\right)^2\right]. \\ &= \mathbb{E} \int (H+G)^2 ds - \mathbb{E} \int (H-G)^2 ds = 4\mathbb{E} \int HG ds. \end{aligned}$$

**Au tableau : À dire**

- 1)  $X_i$  est  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable.
- 2)  $\Delta W_i$  indépendant du passé et centré.
- 3) Même argument que CM1 :  $\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] = 0$ .

# Preuve alternative : isométrie via orthogonalité des incrémentés (1)

## Cadre

Soit  $H$  simple prévisible sur la partition  $0 = t_0 < \dots < t_n = T$  :

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad X_i \text{ } \mathcal{F}_{t_i}\text{-mesurable.}$$

On note

$$\Delta M_i := \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s dW_s = X_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

## Preuve alternative : isométrie via orthogonalité des incrémentés (2)

Idée : orthogonalité en  $L^2$

Pour  $i < j$ , on a

$$\mathbb{E}[\Delta M_i \Delta M_j] = 0.$$

Donc, par Pythagore dans  $L^2$ ,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta M_i\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(\Delta M_i)^2].$$

**CM2 – Intégrale d'Itô**

## └ Isométrie d'Itô

└ Preuve alternative : isométrie via orthogonalité des incrément (2)

**Au tableau : À écrire (orthogonalité, 3 lignes)**

Pour  $i < j$  :

$$\mathbb{E}[\Delta M_i \Delta M_j] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\Delta M_i \Delta M_j | \mathcal{F}_{t_j}]\right] = \mathbb{E}\left[\Delta M_i \mathbb{E}[\Delta M_j | \mathcal{F}_{t_j}]\right] = 0.$$

Car  $\Delta M_i$  est  $\mathcal{F}_{t_j}$ -mesurable, et

$$\mathbb{E}[\Delta M_j | \mathcal{F}_{t_j}] = \mathbb{E}[X_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_j}] = X_j \mathbb{E}[\Delta W_j | \mathcal{F}_{t_j}] = 0.$$

**Au tableau : Commentaire pédagogique**

Présenter  $\Delta M_i$  comme "incrément" de la martingale intégrale. Orthogonalité = analogue discret de "increments indépendants" mais en  $L^2$ .

Idée : orthogonalité en  $L^2$ Pour  $i < j$ , on a

$$\mathbb{E}[\Delta M_i \Delta M_j] = 0.$$

Donc, par Pythagore dans  $L^2$ ,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_t dW_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta M_i\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(\Delta M_i)^2].$$

# Preuve alternative : calcul des termes diagonaux

## Calcul

$$\mathbb{E}[(\Delta M_i)^2] = \mathbb{E}[X_i^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] = \mathbb{E}[X_i^2](t_{i+1} - t_i).$$

## Conclusion (isométrie)

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_i^2](t_{i+1} - t_i) = \mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds.$$

**CM2 – Intégrale d'Itô**└ **Isométrie d'Itô**└ **Preuve alternative : calcul des termes diagonaux**

Preuve alternative : calcul des termes diagonaux

**Calcul**

$$\mathbb{E}[(\Delta M_i)^2] = \mathbb{E}[X_i^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] = \mathbb{E}[X_i^2](t_{i+1} - t_i).$$

**Conclusion (isométrie)**

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_i^2](t_{i+1} - t_i) = \mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds.$$

**Au tableau : À écrire (diagonaux)**

$$\mathbb{E}[(\Delta M_i)^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i^2(\Delta W_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}]] = \mathbb{E}[X_i^2 \mathbb{E}[(\Delta W_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}]] = \mathbb{E}[X_i^2]\Delta t_i.$$

**Au tableau : À dire**

Cette preuve est souvent plus mémorisable : "orthogonalité des incrément" puis Pythagore. Elle prépare directement la notion de variation quadratique (CM3).

## Extension : construction par densité + isométrie

### Idée

Si  $H^n$  simples et  $\|H^n - H\|_{\mathcal{H}_T^2} \rightarrow 0$ , alors

$$\left\| \int_0^T H^n dW - \int_0^T H dW \right\|_{L^2}^2 = \|H^n - H\|_{\mathcal{H}_T^2}^2.$$

## CM2 – Intégrale d'Itô

└ Extension à  $\mathcal{H}_T^2$ 

## └ Extension : construction par densité + isométrie

Idée

Si  $H^n$  simples et  $\|H^n - H\|_{\mathcal{H}^2_T} \rightarrow 0$ , alors

$$\left\| \int_0^T H^n dW - \int_0^T H dW \right\|_{L^2}^2 = \|H^n - H\|_{\mathcal{H}^2_T}^2.$$

**Au tableau : À écrire (construction complète en 6 lignes)**

- 1) Choisir  $(H^n)$  simples tels que  $\mathbb{E} \int_0^T (H^n - H)^2 ds \rightarrow 0$ .
- 2)  $\mathbb{E}[(\int_0^T (H^n - H^m) dW)^2] = \mathbb{E} \int_0^T (H^n - H^m)^2 ds \rightarrow 0$ , donc  $(\int_0^T H^n dW)$  est de Cauchy dans  $L^2$ .
- 3) Définir  $\int_0^T H dW := L^2\text{-}\lim_n \int_0^T H^n dW$ .
- 4) Unicité : si  $K^n \rightarrow H$ , alors  $\mathbb{E}[(\int_0^T (H^n - K^n) dW)^2] = \mathbb{E} \int_0^T (H^n - K^n)^2 ds \rightarrow 0$ .

**Au tableau : Commentaire**

C'est exactement la recette "densité + continuité" d'Analyse Fonctionnelle.

$$\text{Martingale : } M_t = \int_0^t H_s dW_s$$

## Théorème

Pour  $H \in \mathcal{H}_T^2$  prévisible,  $(M_t)_{t \leq T}$  est une martingale.

## CM2 – Intégrale d'Itô

## └ Martingale

$$\text{└ Martingale : } M_t = \int_0^t H_s dW_s$$

Martingale :  $M_t = \int_0^t H_s dW_s$ 

## Théorème

Pour  $H \in \mathcal{H}_T^0$  prévisible,  $(M_t)_{t \leq T}$  est une martingale.**Au tableau : À écrire (preuve pour simples)**

Pour  $H = \sum_i X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$ , on a  $M_t = \sum_i X_i (W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i})$ .

Soit  $s < t$ . Montrer  $\mathbb{E}[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] = 0$ .

$$M_t - M_s = \sum_{i: t_i \geq s} X_i (W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i}).$$

Chaque terme a une conditionnelle nulle (même calcul que moyenne nulle).

Donc  $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ .

**Au tableau : À dire (passage au général)**

Approximer  $H$  par  $H^n$  simples.

On sait  $M_t^n = \int_0^t H^n dW$  est une martingale.

Et  $M_t^n \rightarrow M_t$  dans  $L^2$  (donc aussi dans  $L^1$ ), ce qui permet de passer à la limite dans l'identité conditionnelle.

## Orthogonalité des incréments (préfiguration)

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)M_s] = 0, \quad \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E} \int_s^t H_u^2 du.$$

## CM2 – Intégrale d'Itô

- └ Martingale

- └ Orthogonalité des incrément (préfiguration)

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)M_s] = 0, \quad \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E} \int_s^t H_u^2 du.$$

### Au tableau : À écrire (2 lignes)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_t - M_s)M_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(M_t - M_s)M_s | \mathcal{F}_s]] \\ &= \mathbb{E}[M_s \mathbb{E}[M_t - M_s | \mathcal{F}_s]] = 0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_s^2] = \mathbb{E} \int_s^t H_u^2 du \quad (\text{par isométrie}).$$

### Au tableau : Commentaire

Annonce CM3 :  $\langle M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$  (variation quadratique).

Exemple déterministe :  $\int_0^T f dW$

$$X = \int_0^T f(s) dW_s, \quad f \in L^2([0, T]).$$

- $X$  est gaussienne centrée.
- $\text{Var}(X) = \int_0^T f(s)^2 ds.$

## CM2 – Intégrale d'Itô

### Exemples

Exemple déterministe :  $\int_0^T f \, dW$

Exemple déterministe :  $\int_0^T f \, dW$

$$X = \int_0^T f(s) \, dW_s, \quad f \in L^2([0, T]).$$

- $X$  est gaussienne centrée.
- $\text{Var}(X) = \int_0^T f(s)^2 \, ds$ .

## Au tableau : À écrire (argument gaussien)

Approcher  $f$  par  $f^n$  en escalier.

$\int_0^T f^n \, dW = \sum_i f(t_i) \Delta W_i$  (combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes).

Donc  $\int_0^T f^n \, dW \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^T (f^n(s))^2 \, ds\right)$ .

$f^n \rightarrow f$  dans  $L^2 \Rightarrow \int_0^T f^n \, dW \rightarrow \int_0^T f \, dW$  dans  $L^2 \Rightarrow$  convergence en loi.

Donc  $\int_0^T f \, dW$  est gaussienne et  $\text{Var} = \int_0^T f(s)^2 \, ds$ .

## Au tableau : Commentaire

Pratique TP : on n'a pas besoin de densité de probabilité ; variance suffit.

Exemple adapté :  $\int_0^t W_s dW_s$

$$M_t = \int_0^t W_s dW_s, \quad \mathbb{E}[M_t^2] = \frac{t^2}{2}.$$

**CM2 – Intégrale d'Itô**

## └ Exemples

└ Exemple adapté :  $\int_0^t W_s dW_s$

$$M_t = \int_0^t W_s dW_s, \quad \mathbb{E}[M_t^2] = \frac{t^2}{2}.$$

**Au tableau : À écrire (calcul variance)**

$$\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E} \int_0^t W_s^2 ds = \int_0^t \mathbb{E}[W_s^2] ds = \int_0^t s ds = t^2/2.$$

**Au tableau : À dire**

- 1)  $X_i$  est  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable.
- 2)  $\Delta W_i$  indépendant du passé et centré.
- 3) Même argument que CM1 :  $\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$ .

# Synthèse et transition

- Définition sur simples prévisibles.
- Isométrie + polarisation  $\Rightarrow$  covariance.
- Extension à  $\mathcal{H}_T^2$  par densité.
- $M_t = \int_0^t H dW$  est une martingale.

## Prochain CM

Variation quadratique, règles  $(dW)^2 = dt$ , puis formule d'Itô.

- Définition sur simples prévisibles.
- Isométrie + polarisation  $\Rightarrow$  covariance.
- Extension à  $\mathcal{H}_T^0$  par densité.
- ▼  $M_t = \int_0^t H dW$  est une martingale.

## Prochain CM

Variation quadratique, règles  $(dW)^2 = dt$ , puis formule d'Itô.

## Au tableau : Question de sortie (30 secondes)

Pourquoi exige-t-on "prévisible" et pas seulement "adapté" dans la définition simple ?

Réponse attendue : pour garantir  $\mathbb{E}[\Delta W_i \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$  et annuler les termes croisés (isométrie).