Modélisation stochastique — TD3

Toolkit (produit, exponentielle) et mini-projet finance (GBM)

Corrigé

Cadre. (W_t) brownien standard. Rappels : $(dW_t)^2 = dt$, $dt\,dW_t = 0$, $(dt)^2 = 0$, et pour des processus d'Itô continus : $d(XY) = X\,dY + Y\,dX + d[X,Y]$.

A. Échauffement : corrélations et intuition

Exercice 1 (Corrélations : du log-prix au prix)**.** On considère $X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t$ puis $S_t = e^{X_t}$.

Solution. **(a)** On a $X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t$, donc

$$\mathrm{Cov}(X_t, W_t) = \mathrm{Cov}(\sigma W_t, W_t) = \sigma\ \mathrm{Var}(W_t) = \sigma t.$$

Comme $\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2 t$ et $\mathrm{Var}(W_t) = t$,

$$\mathrm{Corr}(X_t, W_t) = \frac{\mathrm{Cov}(X_t, W_t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_t)\,\mathrm{Var}(W_t)}} = \frac{\sigma t}{\sqrt{\sigma^2 t \cdot t}} = \frac{\sigma}{|\sigma|}.$$

En pratique on prend $\sigma \geq 0$ (volatilité), donc $\mathrm{Corr}(X_t, W_t) = 1$. *Commentaire :* ici X_t est une fonction affine de W_t, d'où la corrélation dégénérée.

(b) Écrire $S_t = e^{X_t} = e^{X_0+\mu t}\, e^{\sigma W_t}$. D'abord

$$\mathbb{E}[S_t] = e^{X_0+\mu t}\mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] = e^{X_0+\mu t}\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

Ensuite

$$\mathbb{E}[W_t S_t] = e^{X_0+\mu t}\mathbb{E}[W_t e^{\sigma W_t}].$$

Comme $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, on a $\mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}$ et (dérivation de la MGF)

$$\mathbb{E}[W_t e^{\sigma W_t}] = \frac{d}{d\sigma}\mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] = \frac{d}{d\sigma}\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} = \sigma t\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

Donc

$$\mathbb{E}[W_t S_t] = e^{X_0+\mu t}\,\sigma t\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} = \sigma t\,\mathbb{E}[S_t].$$

Comme $\mathbb{E}[W_t] = 0$, on obtient

$$\mathrm{Cov}(S_t, W_t) = \mathbb{E}[W_t S_t] - \mathbb{E}[W_t]\mathbb{E}[S_t] = \sigma t\,\mathbb{E}[S_t].$$

En particulier, le signe de la corrélation $\mathrm{Corr}(S_t, W_t)$ est celui de σ (positif si $\sigma > 0$). $\square$

B. GBM : log, loi, moments

Exercice 2 (GBM : passage au log (Itô))**.** GBM : $dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$, $S_0 > 0$.

Solution. **(a)** Prendre $f(x) = \ln x$, $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$. Par Itô :

$$d(\ln S_t) = f'(S_t)\, dS_t + \frac{1}{2} f''(S_t)\, (dS_t)^2.$$

Or $(dS_t)^2 = (\sigma S_t)^2 (dW_t)^2 = \sigma^2 S_t^2\, dt$. Donc

$$d(\ln S_t) = \frac{1}{S_t}(\mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)(\sigma^2 S_t^2\, dt) = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma\, dW_t.$$

(b) En intégrant :

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t.$$

En exponentiant :

$$S_t = S_0 \exp\Big((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\Big).$$

□

Exercice 3 (Loi lognormale et moments)**.** Déduire loi de $\ln S_t$, puis $\mathbb{E}[S_t]$, $\mathrm{Var}(S_t)$ et $\mathbb{E}[S_t^p]$.

Solution. **(a)** Comme $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$,

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t \sim \mathcal{N}\Big(\ln S_0 + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t,\ \sigma^2 t\Big).$$

Donc S_t est lognormal.

(b) À partir de la forme explicite,

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}\mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} = S_0 e^{\mu t}.$$

De plus,

$$\mathbb{E}[S_t^2] = S_0^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}\mathbb{E}[e^{2\sigma W_t}] = S_0^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{1}{2}(2\sigma)^2 t} = S_0^2 e^{2\mu t + \sigma^2 t}.$$

Donc

$$\mathrm{Var}(S_t) = \mathbb{E}[S_t^2] - \mathbb{E}[S_t]^2 = S_0^2 e^{2\mu t + \sigma^2 t} - S_0^2 e^{2\mu t} = S_0^2 e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1).$$

(c) Pour $p \in \mathbb{R}$,

$$S_t^p = S_0^p \exp\Big(p(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + p\sigma W_t\Big),$$

donc

$$\mathbb{E}[S_t^p] = S_0^p e^{p(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}\mathbb{E}[e^{p\sigma W_t}] = S_0^p e^{p(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{1}{2}p^2\sigma^2 t} = S_0^p \exp\Big(p\mu t + \tfrac{1}{2}p(p-1)\sigma^2 t\Big).$$

□

C. Produit, actualisation, martingale

Exercice 4 (Produit : prix actualisé)**.** $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$.

Solution. **(a)** e^{-rt} est déterministe : $d(e^{-rt}) = -re^{-rt}\,dt$.

(b) Formule produit :

$$d\widetilde{S}_t = d(e^{-rt}S_t) = e^{-rt}\,dS_t + S_t\,d(e^{-rt}) + d[e^{-rt}, S]_t.$$

Comme e^{-rt} est de variation finie (pas de terme en dW), sa variation quadratique est nulle et $d[e^{-rt}, S]_t = 0$. Donc

$$d\widetilde{S}_t = e^{-rt}(\mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t) - re^{-rt}S_t\,dt = (\mu - r)\widetilde{S}_t\,dt + \sigma\widetilde{S}_t\,dW_t.$$

(c) Si l'on remplace μ par r, alors $d\widetilde{S}_t = \sigma\widetilde{S}_t\,dW_t$: le prix actualisé devient une martingale (idée "risque-neutre"). □

Exercice 5 (Martingale exponentielle et drift correction)**.** $M_t = \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$.

Solution. **(a)** C'est la martingale exponentielle standard :

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s \quad (s < t),$$

car $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et $\mathbb{E}[e^{\sigma(W_t - W_s)}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}$.

(b) À partir de la solution explicite du GBM :

$$S_t = S_0\exp\Big((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\Big) = S_0 e^{\mu t}\exp\Big(\sigma W_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t\Big) = S_0 e^{\mu t} M_t.$$

(c) Le terme $-\frac{1}{2}\sigma^2 t$ est la *correction stochastique* due à la variation quadratique : c'est précisément ce qui rend l'exponentielle une martingale (annulation du terme d'ordre dt). □

D. Bonus : EDS linéaire additive

Exercice 6 (EDS linéaire additive : variation des constantes (bonus))**.** $dX_t = (aX_t + c)\,dt + (bX_t + d)\,dW_t$.

Solution. On choisit un facteur intégrant U_t solution de

$$dU_t = -aU_t\,dt - bU_t\,dW_t, \qquad U_0 = 1.$$

(C'est une EDS multiplicative, donc $U_t = \exp((-a - \frac{1}{2}b^2)t - bW_t)$.)

Formule produit :

$$d(U_t X_t) = U_t\,dX_t + X_t\,dU_t + d[U, X]_t.$$

Ici, la partie en dW de X vaut $(bX_t + d)$ et celle de U vaut $(-bU_t)$, donc $d[U, X]_t = (-bU_t)(bX_t + d)\,dt$. En remplaçant :

$$\begin{aligned} d(UX) &= U\big((aX + c)\,dt + (bX + d)\,dW\big) + X\big(-aU\,dt - bU\,dW\big) + (-bU)(bX + d)\,dt \\ &= Uc\,dt + Ud\,dW - bUd\,dt. \end{aligned}$$

Donc

$$d(U_t X_t) = U_t(c - bd)\,dt + U_t d\,dW_t.$$

En intégrant :

$$U_t X_t = X_0 + \int_0^t U_s(c - bd)\,ds + \int_0^t U_s d\,dW_s,$$

et finalement

$$X_t = \frac{1}{U_t}\left(X_0 + \int_0^t U_s(c - bd)\,ds + \int_0^t U_s d\,dW_s\right).$$

Remarque : si $d = 0$ (pas de bruit additif), on récupère une solution exponentielle simple. □