

# Modélisation stochastique CM1 : Mouvement brownien, filtration, espérance conditionnelle, martingales

(Motivation pour l'intégrale d'Itô)

Antonio Falcó

École Centrale de Nantes

1<sup>er</sup> février 2026

# Plan (2h)

- ① Objectifs et fil conducteur (finance & phénomènes aléatoires)
- ② Mouvement brownien : définition et propriétés clés
- ③ Filtration et information :  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$
- ④ Espérance conditionnelle : règles et calculs gaussiens
- ⑤ Martingales : définition, exemples, tests rapides
- ⑥ **Pourquoi un nouvel intégral ?** (variation infinie  $\Rightarrow$  Itô)
- ⑦ Mini-exemples motivation finance (log-retours, exponentielle)
- ⑧ Pourquoi un point de vue fonctionnel ?

- Installer le **socle probabiliste** nécessaire à l'intégrale stochastique :  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , espérance conditionnelle, martingales.
- Comprendre le mouvement brownien comme **modèle canonique du bruit**.
- Donner des **exemples motivants (finance)** qui reviendront toute la partie (GBM, log-retours).
- Préparer la question centrale : **comment définir**  $\int_0^t H_s dW_s$  ?

# Fil conducteur : un modèle minimal

## Idée

Un phénomène dépendant du temps est modélisé par

$$X_t = X_0 + (\text{tendance}) + (\text{fluctuations aléatoires}).$$

## Prototype (préfiguration)

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t.$$

- Aujourd'hui :  $W_t$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , martingales,  $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ .
- Prochain CM : définition rigoureuse de  $\int H dW$  et ses propriétés.

## Définition

Un processus  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un **mouvement brownien standard** si :

- ①  $W_0 = 0$  p.s.
- ②  $W$  a des **incrémentes indépendants** : pour  $0 \leq t_0 < \dots < t_n$ , les  $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$  sont indépendants.
- ③  $W$  a des **incrémentes stationnaires** :  $W_{t+h} - W_t \sim \mathcal{N}(0, h)$ .
- ④  $t \mapsto W_t$  est **continu** p.s.

# Conséquences immédiates

- Pour tout  $t \geq 0$  :  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ , donc  $\mathbb{E}[W_t] = 0$  et  $\text{Var}(W_t) = t$ .
- Pour  $0 \leq s \leq t$  :

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = s, \quad \mathbb{E}[W_t W_s] = s.$$

- **Auto-similarité** :  $(W_{ct})_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (\sqrt{c} W_t)_{t \geq 0}$ .

## Message

Le brownien est **le bruit** à la fois “simple” (gaussien) et “rugueux” (variation infinie).

- Les trajectoires sont continues mais presque sûrement **nulle part dérivables**.
- La variation totale sur  $[0, T]$  est **infinie** p.s.

### Conséquence (motivation)

L'intégrale de Riemann–Stieltjes  $\int_0^T H_s dW_s$  n'existe pas “en général”. Il faut une nouvelle notion : **intégrale d'Itô**.

## Exercice flash (en classe)

### Question

Soit  $0 \leq s \leq t$ . Calculer :

$$\mathbb{E}[W_t \mid W_s], \quad \text{Var}(W_t \mid W_s).$$

- Idée :  $(W_s, W_t)$  est gaussien centré  $\Rightarrow$  conditionnelle gaussienne.
- Résultat attendu :  $\mathbb{E}[W_t \mid W_s] = W_s$  et  $\text{Var}(W_t \mid W_s) = t - s$ .



## CM1 – Brownien &amp; Martingales

## └ Mouvement brownien

## └ Exercice flash (en classe)

**À écrire au tableau (3 lignes)**

$$W_t = W_s + \Delta W, \quad \Delta W := W_t - W_s \perp\!\!\!\perp W_s, \quad \Delta W \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

$$\mathbb{E}[W_t \mid W_s] = W_s + \mathbb{E}[\Delta W \mid W_s] = W_s.$$

$$\text{Var}(W_t \mid W_s) = \text{Var}(\Delta W) = t - s.$$

**Commentaire**

Interprétation : connaître  $W_s$  fixe le passé ; le futur reste un bruit gaussien indépendant de variance  $t - s$ .

## Question

Soit  $0 \leq s \leq t$ . Calculer :

$$\mathbb{E}[W_t \mid W_s], \quad \text{Var}(W_t \mid W_s).$$

♦ Idée :  $(W_s, W_t)$  est gaussien centré  $\Rightarrow$  conditionnelle gaussienne.

♦ Résultat attendu :  $\mathbb{E}[W_t \mid W_s] = W_s$  et  $\text{Var}(W_t \mid W_s) = t - s$ .

# Filtration : formaliser l'information

## Définition

Une **filtration**  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est une famille croissante de tribus :

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \text{si } s \leq t,$$

où  $\mathcal{F}_t$  représente l'information disponible à l'instant  $t$ .

## Filtration naturelle du brownien

$$\mathcal{F}_t^W := \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$$

souvent complétée et rendue continue à droite.

# Adaptation et prévisibilité (intuitions)

## Processus adapté

$X_t$  est  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté si  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour tout  $t$ .

## Intuition

- $\mathcal{F}_t$  = “ce que je sais à  $t$ ”.
- $X_t$  adapté = “je peux observer  $X_t$  à  $t$ ”.
- Pour intégrer contre  $dW_t$ , l'intégrande devra être **prévisible** (proche de “ne pas regarder le futur”).

## Définition

Pour  $X \in L^1(\Omega)$  et une tribu  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ , l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$  est la variable  $\mathcal{G}$ -mesurable telle que

$$\int_A \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

- $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] =$  meilleure approximation  $L^2$  de  $X$  par une variable  $\mathcal{G}$ -mesurable (si  $X \in L^2$ ).
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$ .

# Règles de calcul indispensables

- **Linéarité** :  $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$ .
- **Prise dehors** : si  $Y$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable et  $XY \in L^1$ ,

$$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}] = Y \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}].$$

- **Tour** : si  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ ,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}].$$

- **Indépendance** : si  $X$  indépendant de  $\mathcal{G}$ , alors  $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ .

## Point clé

Ces règles suffisent à vérifier la plupart des martingales “à la main”.

# Conditionnement gaussien (outil ultra-pratique)

## Fait

Si  $(U, V)$  est gaussien centré, alors

$$\mathbb{E}[U \mid V] = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\text{Var}(V)} V \quad \text{Var}(U \mid V) = \text{Var}(U) - \frac{\text{Cov}(U, V)^2}{\text{Var}(V)}.$$

## Application au brownien

Pour  $0 \leq s \leq t$ ,

$$\mathbb{E}[W_t \mid W_s] = W_s \quad \text{Var}(W_t \mid W_s) = t - s.$$

## Définition

Un processus adapté  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une **martingale** (par rapport à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ) si :

- ①  $M_t \in L^1$  pour tout  $t$ ,
- ②  $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$  pour tout  $0 \leq s \leq t$ .

- “*fair game*” : la meilleure prédiction du futur, sachant le présent, est le présent.
- Supermartingale / sous-martingale : remplacer = par  $\leq$  /  $\geq$ .

## (1) Le brownien est une martingale

Pour  $0 \leq s \leq t$ ,

$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s.$$

## (2) Martingale “quadratique” (à annoncer)

$$M_t := W_t^2 - t \quad \text{est une martingale.}$$

- Le point (2) sera **démontré via Itô** plus tard (ou via calculs gaussiens).
- Ces martingales génèrent des identités de moments.



## Test rapide : incréments indépendants

### Proposition (outil)

Si  $X_t = X_s + (X_t - X_s)$  avec  $(X_t - X_s)$  indépendant de  $\mathcal{F}_s$  et de moyenne nulle, alors

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s.$$

### Brownien

$W_t - W_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$  et  $\mathbb{E}[W_t - W_s] = 0 \Rightarrow$  martingale.

# Martingales exponentielles (motivation finance)

## Candidat

Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$M_t(\theta) := \exp\left(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right).$$

- $M_t(\theta)$  est une martingale (preuve via mgf gaussienne ou Itô plus tard).
- Interprétation : “**exponentielle stochastique**”.

## Lien finance (préfiguration)

Le modèle lognormal s'écrit souvent  $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$ .

# Pourquoi l'intégration classique échoue ?

## Observation

Les trajectoires browniennes ont variation totale infinie  $\Rightarrow$  la limite de sommes de Riemann  $\sum H_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$  est instable (dépend des choix).

## Ce qu'on veut

Une notion d'intégrale

$$\int_0^t H_s dW_s$$

qui :

- respecte l'adaptation ( $H_s$  ne regarde pas le futur),
- soit bien définie en  $L^2$ ,
- donne une martingale (sous hypothèses naturelles),
- fournisse un calcul différentiel cohérent (formule d'Itô).

# Mini-exemple finance : log-retours

## Retour simple vs log-retour

$$R_t := \frac{S_t - S_0}{S_0} \quad \ell_t := \ln \frac{S_t}{S_0}.$$

- Empiriquement, les **log-retours** sont plus “stables” (additifs dans le temps).
- Modèle typique :  $\ell_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$ .
- Donc  $S_t$  est lognormal et  $S_t > 0$  automatiquement.

## Annonce

Pour passer de  $\ell_t$  à  $S_t$ , on aura besoin de la **formule d'Itô**.

# Mini-exemple physique : bruit additif

## Signal bruité (idée)

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(s) ds + \sigma W_t.$$

- Ici, la partie aléatoire est  $\sigma W_t$  : fluctuations cumulées.
- Différence cruciale : la dérivée  $dW_t/dt$  n'existe pas  $\Rightarrow$  on ne peut pas écrire " $\sigma \dot{W}_t$ " comme bruit classique.

## Préfiguration EDS

$$dX_t = a(t) dt + \sigma dW_t.$$

# Synthèse : ce qu'il faut retenir

- $W_t$  : gaussien, incréments indépendants/stationnaires, trajectoires continues mais rugueuses.
- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  : formalise l'information au cours du temps.
- $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$  : outil central (tour, prise dehors, indépendance).
- Martingale :  $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ .
- Motivation : variation infinie  $\Rightarrow$  intégrale classique insuffisante.

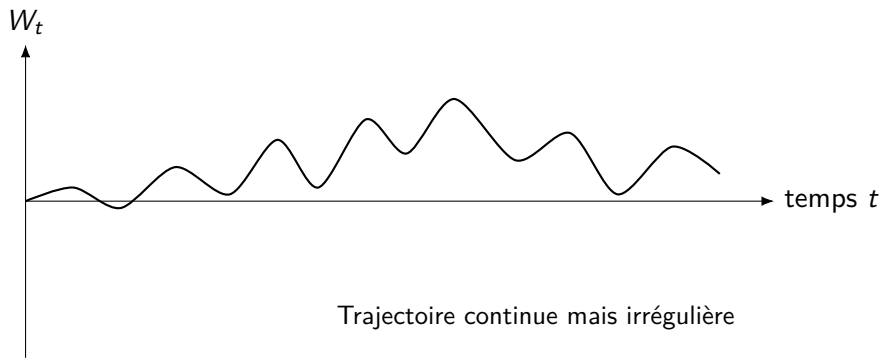
## Prochain CM (CM2)

Construction de l'intégrale d'Itô, isométrie, propriété de martingale, calculs de base.

## Exercices (à proposer / TP1)

- ➊ Pour  $0 \leq s \leq t$ , calculer  $\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s]$  et  $\mathbb{E}[W_t^2 \mid \mathcal{F}_s]$ .
- ➋ Montrer que  $W_t$  est une martingale ; montrer que  $W_t^2 - t$  est une martingale (indice : calcul conditionnel gaussien).
- ➌ Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , vérifier que  $\mathbb{E}[\exp(\theta W_t)] = \exp(\frac{1}{2}\theta^2 t)$ .
- ➍ (Bonus) Montrer que  $M_t(\theta) = \exp(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$  est une martingale.

## Annexe : figure intuitive





# Pourquoi un point de vue fonctionnel ?

Sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , les variables aléatoires sont des *fonctions*  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Le calcul stochastique s'appuie constamment sur :

- des **normes** ( $L^p$ ) pour contrôler l'intégrabilité et la convergence ;
- des **projections** en  $L^2$  (espérance conditionnelle) ;
- des **complétudes** (Banach/Hilbert) pour passer à la limite (densité, extension).

## Message clé

Les espaces  $L^p(\Omega)$  fournissent la grammaire analytique qui rend les objets stochastiques *bien posés* (et qui permet de faire des preuves par approximation).

## CM1 – Brownien &amp; Martingales

└ Point de vue fonctionnel : espaces de Banach/Hilbert sur un espace probabilisé

└ Pourquoi un point de vue fonctionnel ?

## Pourquoi un point de vue fonctionnel ?

Sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , les variables aléatoires sont des fonctions  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Le calcul stochastique s'appuie constamment sur :

- des **normes** ( $L^p$ ) pour contrôler l'intégrabilité et la convergence;
- des **projections** en  $L^2$  (espérance conditionnelle);
- des **complétudes** (Banach/Hilbert) pour passer à la limite (densité, extension).

## Message clé

Les espaces  $L^p(\Omega)$  fournissent la grammaire analytique qui rend les objets stochastiques bien posés (et qui permet de faire des preuves par approximation).

Idée à dire : on ne fait pas de calcul stochastique “sans” normes. Tout repose sur convergence et continuité. Annonce : en CM2, l'isométrie d'Itô est exactement une identité dans un Hilbert ( $L^2$ ).

## Espaces $L^p(\Omega)$ : définitions

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Pour  $p \in [1, \infty)$ , on définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : \mathbb{E}[|X|^p] < \infty \right\}, \quad \|X\|_p := (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}.$$

Et

$$L^\infty(\Omega) = \{X : \|X\|_\infty < \infty\}, \quad \|X\|_\infty := \inf\{C : |X| \leq C \text{ } \mathbb{P}\text{-p.s.}\}.$$

### Fait structurel

Pour  $p \geq 1$ ,  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  est un **espace de Banach**.

## CM1 – Brownien &amp; Martingales

└ Point de vue fonctionnel : espaces de Banach/Hilbert sur un espace probabilisé

└ Espaces  $L^p(\Omega)$  : définitions

À dire : on identifie les variables égales p.s. (classes d'équivalence). Insister : la complétude est cruciale pour faire des limites (Cauchy  $\Rightarrow$  converge).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Pour  $p \in [1, \infty)$ , on définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : \mathbb{E}[|X|^p] < \infty \right\}, \quad \|X\|_p := (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}.$$

Et

$$L^\infty(\Omega) = \{ X : \|X\|_\infty < \infty \}, \quad \|X\|_\infty := \inf\{ C : |X| \leq C \text{ p.p.s.} \}.$$

**Fait structurel**

Pour  $p \geq 1$ ,  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  est un espace de Banach.

# Inégalités pivot : Hölder, Minkowski, Jensen

## Hölder

Si  $p, q \in (1, \infty)$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

## Minkowski (triangle en $L^p$ )

Pour  $p \geq 1$ ,

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

## Jensen (convexité)

Si  $\varphi$  est convexe et  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ , alors

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

## CM1 – Brownien &amp; Martingales

└ Point de vue fonctionnel : espaces de Banach/Hilbert sur un espace probabilisé

└ Inégalités pivot : Hölder, Minkowski, Jensen

À dire : ces trois inégalités sont les “moteurs” : contrôle des moments, convergence dominée, et passage à la limite dans les preuves (y compris pour Itô).

## Inégalités pivot : Hölder, Minkowski, Jensen

## Hölder

Si  $p, q \in (1, \infty)$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \|X\|_p \|Y\|_q$$

Minkowski (triangle en  $L^p$ )

Pour  $p \geq 1$ ,

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$$

## Jensen (convexité)

Si  $\varphi$  est convexe et  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ , alors

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$$

## $L^2(\Omega)$ : un Hilbert (structure géométrique)

Le cas  $p = 2$  est spécial : on a un produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle_2 := \mathbb{E}[XY], \quad \|X\|_2^2 = \langle X, X \rangle_2.$$

### Fait structurel

$(L^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  est un **espace de Hilbert**.

- Cauchy–Schwarz :  $|\mathbb{E}[XY]| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$ .
- Orthogonalité :  $\langle X, Y \rangle_2 = 0 \Rightarrow$  “décorrélation” (pas indépendance).
- Projection orthogonale : outil central pour  $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{G}]$ .

## CM1 – Brownien &amp; Martingales

└ Point de vue fonctionnel : espaces de Banach/Hilbert sur un espace probabilisé

└  $L^2(\Omega)$  : un Hilbert (structure géométrique)

Point pédagogique : distinguer indépendance vs orthogonalité. En finance, “zero mean noise” se formalise souvent par orthogonalité (martingale increments).

Le cas  $p=2$  est spécial : on a un produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle_2 := \mathbb{E}[XY], \quad \|X\|_2^2 = \langle X, X \rangle_2.$$

## Fait structurel

$(L^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  est un espace de Hilbert.

- Cauchy-Schwarz :  $|\mathbb{E}[XY]| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$ .
- Orthogonalité :  $\langle X, Y \rangle_2 = 0 \Rightarrow$  “décorrélation” (pas indépendance).
- Projection orthogonale : outil central pour  $\mathbb{R}_+^d \mid \mathcal{G}$ .



# Espérance conditionnelle comme projection en $L^2$

Soit  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  une sous-tribu. On définit  $L^2(\mathcal{G})$  comme le sous-espace des variables  $\mathcal{G}$ -mesurables dans  $L^2(\Omega)$ .

## Caractérisation (cas $L^2$ )

Pour  $X \in L^2(\Omega)$ , la variable  $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$  est l'unique élément de  $L^2(\mathcal{G})$  tel que

$$\langle X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}], Y \rangle_2 = 0 \quad \forall Y \in L^2(\mathcal{G}).$$

- Interprétation : meilleure approximation de  $X$  par une variable *observable* via  $\mathcal{G}$ .
- Cas gaussien : régression linéaire = projection orthogonale.

## CM1 – Brownien &amp; Martingales

└ Point de vue fonctionnel : espaces de Banach/Hilbert sur un espace probabilisé

└ Espérance conditionnelle comme projection en  $L^2$

À dire : c'est exactement la géométrie du Hilbert. On la réutilise partout (martingales, filtrations).

Lien TD1 :  $\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s = \text{projection sur l'information passée.}$

Soit  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  une sous-tribu. On définit  $L^2(\mathcal{G})$  comme le sous-espace des variables  $\mathcal{G}$ -mesurables dans  $L^2(\Omega)$ .

Caractérisation (cas  $L^2$ )

Pour  $X \in L^2(\Omega)$ , la variable  $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$  est l'unique élément de  $L^2(\mathcal{G})$  tel que

$$\langle X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}], Y \rangle_2 = 0 \quad \forall Y \in L^2(\mathcal{G}).$$

- ♦ Interprétation : meilleure approximation de  $X$  par une variable observable via  $\mathcal{G}$ .
- ♦ Cas gaussien : régression linéaire = projection orthogonale.

# Espaces sur $\Omega \times [0, T]$ : intégrabilité en temps

Pour les processus  $H = (H_t)_{t \in [0, T]}$ , on utilise des espaces sur le produit  $(\Omega \times [0, T], \mathbb{P} \otimes dt)$ .

## Normes usuelles

$$\|H\|_{L^2(\Omega \times [0, T])}^2 := \mathbb{E} \int_0^T |H_t|^2 dt, \quad \|H\|_{L^1(\Omega \times [0, T])} := \mathbb{E} \int_0^T |H_t| dt.$$

## Lien direct avec Itô (annonce CM2)

L'intégrale d'Itô est d'abord définie sur des intégrandes simples *prévisibles*, puis étendue par continuité sur l'espace naturel

$$\mathcal{H}_T^2 = \left\{ H \text{ prévisible} : \mathbb{E} \int_0^T H_t^2 dt < \infty \right\},$$

qui est un Hilbert pour le produit scalaire  $\langle H, K \rangle = \mathbb{E} \int_0^T H_t K_t dt$ .

## CM1 – Brownien &amp; Martingales

└ Point de vue fonctionnel : espaces de Banach/Hilbert sur un espace probabilisé

└ Espaces sur  $\Omega \times [0, T]$  : intégrabilité en temps

À dire : on voit apparaître la même structure Hilbert qu'en  $L^2(\Omega)$  mais avec intégration en temps.  
C'est exactement la porte d'entrée de l'isométrie d'Itô.

Pour les processus  $H = (H_t)_{t \in [0, T]}$ , on utilise des espaces sur le produit  $(\Omega \times [0, T], \mathbb{P} \otimes dt)$ .

## Normes usuelles

$$\|H\|_{L^2(\Omega, \mathbb{P}, T)}^2 := \mathbb{E} \int_0^T |H_t|^2 dt, \quad \|H\|_{L^1(\Omega, \mathbb{P}, T)} := \mathbb{E} \int_0^T |H_t| dt.$$

## Lien direct avec Itô (annonce CM2)

L'intégrale d'Itô est d'abord définie sur des intégrandes simples prévisibles, puis étendue par continuité sur l'espace naturel

$$\mathcal{H}_T^2 = \left\{ H \text{ prévisible} : \mathbb{E} \int_0^T H_t^2 dt < \infty \right\},$$

qui est un Hilbert pour le produit scalaire  $\langle H, K \rangle = \mathbb{E} \int_0^T H_t K_t dt$ .

# Intégrabilité locale : $L^1_{\text{loc}}$ et $L^2_{\text{loc}}$

Certaines dynamiques naturelles ne sont pas globalement intégrables sur  $[0, T]$  mais le sont sur tout intervalle borné.

## Définition (temps continu)

On dit qu'un processus mesurable  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  est dans  $L^p_{\text{loc}}$  (en temps) si, pour tout  $T > 0$ ,

$$\mathbb{E} \int_0^T |H_t|^p dt < \infty.$$

On note alors  $H \in L^p_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ .

- $L^2_{\text{loc}}$  est la condition “minimale” typique pour définir des intégrales stochastiques *jusqu'à un horizon fini arbitraire*.
- En pratique : on travaille souvent *localement* puis on fixe  $T$  (horizon) pour des résultats précis.

## CM1 – Brownien &amp; Martingales

└ Point de vue fonctionnel : espaces de Banach/Hilbert sur un espace probabilisé

└ Intégrabilité locale :  $L^1_{\text{loc}}$  et  $L^2_{\text{loc}}$

À dire : cela prépare l'idée des local martingales plus tard (même si on ne développe pas). Message : les conditions d'intégrabilité se gèrent sur tout horizon fini.

Certaines dynamiques naturelles ne sont pas globalement intégrables sur  $[0, T]$  mais le sont sur tout intervalle borné.

## Définition (temps continu)

On dit qu'un processus mesurable  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  est dans  $L^2_{\text{loc}}$  (en temps) si, pour tout  $T > 0$ ,

$$\mathbb{E} \int_0^T |H_t|^2 dt < \infty.$$

On note alors  $H \in L^2_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ .

- $L^2_{\text{loc}}$  est la condition "minimale" typique pour définir des intégrales stochastiques jusqu'à un horizon fini arbitraire
- En pratique : on travaille souvent localement puis on fixe  $T$  (horizon) pour des résultats précis.

# Résumé : ce que vous devez retenir pour la suite

## Checklist fonctionnelle (CM1 $\rightarrow$ CM2)

- $L^p(\Omega)$  est un Banach : convergence et estimations de moments se font via  $\|\cdot\|_p$ .
- $L^2(\Omega)$  est un Hilbert : géométrie, orthogonalité, projections.
- $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{G}]$  est une projection en  $L^2$  (et une contraction en  $L^p$ ).
- Pour les processus : norme  $\mathbb{E} \int_0^T (\cdot)^2 dt \Rightarrow$  espace naturel de l'intégrale d'Itô.

## Pont vers CM2

L'isométrie d'Itô est une identité de norme dans un Hilbert :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T H_t dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \int_0^T H_t^2 dt.$$

## CM1 – Brownien &amp; Martingales

└ Point de vue fonctionnel : espaces de Banach/Hilbert sur un espace probabilisé

└ Résumé : ce que vous devez retenir pour la suite

À dire : “c’est pour ça qu’on fait du  $L^2$ ” — c’est le bon espace pour Itô.

## Checklist fonctionnelle (CM1 → CM2)

- $L^p(\Omega)$  est un Banach : convergence et estimations de moments se font via  $\|\cdot\|_p$ .
- $L^2(\Omega)$  est un Hilbert : géométrie, orthogonalité, projections.
- $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{G}]$  est une projection en  $L^2$  (et une contraction en  $L^p$ ).
- Pour les processus : norme  $\mathbb{E} \int_0^T (\cdot)^2 dt \Rightarrow$  espace naturel de l'intégrale d'Itô.

## Pont vers CM2

L'isométrie d'Itô est une identité de norme dans un Hilbert :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T H_t dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \int_0^T H_t^2 dt.$$