Exercices de Modélisation Stochastique

Feuille 1

On pourra utiliser sans démonstration que

$$E\left[\int_0^t W_u du|\mathcal{F}_s\right] = \int_0^t E\left[W_u|\mathcal{F}_s\right] du.$$

1. Montrer que $E[W_s W_t^2] = E[W_s E[W_t^2|\mathcal{F}_s]]$.
2. Calculer pour tout couple (s,t) les quantités:
   (a) $E[W_t|\mathcal{F}_s]$,
   (b) $E[W_t|W_s]$,
   (c) $E[e^{\lambda W_t}|\mathcal{F}_s]$.
3. Calculer $E\left[\int_0^t W_u du|\mathcal{F}_s\right]$ avec $t > s$ et $E\left[\int_0^t W_u du|W_s\right]$
4. Calculer $E[W_t^2 W_s^2]$.
5. Quelle est la loi de $W_t + W_s$?
6. Soit θ_s une variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_s$-mesurable. Calculer pour tout $t \geq s$, $E[\theta_s(W_t - W_s)]$ et $E[\theta_s(W_t - W_s)^2]$
7. Calculer $E[\mathbf{1}_{W_t \leq a}]$ et $E[W_t \mathbf{1}_{W_t \leq a}]$.
8. Parmi les processus suivants, quels sont ceux qui sont des martingales.
   (a) $M_t = W_t^3 - 3\int_0^t W_s ds$,
   (b) $Z_t = W_t^3 - 3tW_t$,
   (c) $X_t = tW_t - \int_0^t W_s ds$,
   (d) $U_t = \sin(W_t) + \int_0^t \frac{1}{2}\sin(W_s) ds$,
   (e) $Y_t = tW_t - 2\int_0^t W_s ds$.
9. Montrer que le processus $Y_t = \int_0^t W_s ds$ est gaussien. Calculer son espérance et sa covariance.
10. Expliciter la solution de

$$dX_t = -aX_t dt + e^{bt} dW_t.$$

   Calculer $E[X_t]$ et $\mathrm{Var}(X_t)$.