Modélisation stochastique — Complément de cours

Intégrale d'Itô, variation quadratique, formule d'Itô et outils (CM1–CM5)

Antonio Falcó — École Centrale de Nantes

6 février 2026

Document de référence (poly) pour accompagner les transparences.

Table des matières

Introduction

Ce poly complète les CM1–CM5 et sert de texte de référence. L'objectif est double : (i) fixer les définitions et les résultats-clés, (ii) fournir un *toolkit de calcul* directement utilisable en modélisation (notamment finance).

À retenir

— Brownien : $\Delta W \sim \sqrt{\Delta t}$, et **variation quadratique** $[W]_t = t$.

— Intégrale d'Itô : définie d'abord sur des intégrandes simples **prévisibles**, puis étendue à $\mathcal{H}^2_T$.

— Formule d'Itô : la règle de dérivation stochastique ; le terme $\frac{1}{2}f''\,dt$ vient de $(dW)^2 = dt$.

Définition 0.1 (Conditions usuelles sur une filtration)**.** Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satisfait les *conditions usuelles* si :

(i) (*Complétude*) $\mathcal{F}_0$ contient tous les événements $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$ (et, plus généralement, chaque $\mathcal{F}_t$ contient ces événements).

(ii) (*Continuité à droite*) pour tout $t \geq 0$,

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Dans tout le poly, on supposera que la filtration de travail satisfait ces conditions.

Définition 0.2 (Variation quadratique : mode de convergence retenu)**.** Pour une partition $\pi = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = t\}$, on pose

$$Q_\pi(X;t) = \sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2.$$

Lorsque la limite existe, on définit la *variation quadratique* $[X]_t$ comme la limite de $Q_\pi(X;t)$ lorsque $\|\pi\| \to 0$, *au sens de la convergence en probabilité* :

$$Q_\pi(X;t) \xrightarrow[\|\pi\|\to 0]{\mathbb{P}} [X]_t.$$

Remarque 0.3 (Cas du brownien : convergence plus forte). Pour le mouvement brownien, sur des partitions uniformes, on a même la convergence dans L^2, ce qui justifie l'usage de calculs d'espérance et de variance dans la preuve de $[W]_t = t$.

Remarque 0.4 (Point de vue fonctionnel : espaces de Banach/Hilbert sur un espace probabilisé). Même si l'intuition vient souvent des trajectoires, une grande partie du calcul stochastique s'organise naturellement dans des espaces fonctionnels construits sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ce point de vue explique pourquoi l'on insiste sur l'intégrabilité (L^1, L^2) et pourquoi l'isométrie d'Itô est une identité *géométrique*.

1) Les espaces $L^p(\Omega)$. Pour $1 \leq p < \infty$, on définit

$$L^p(\Omega) = \{X \ \mathcal{F}\text{-mesurable} : \ \|X\|_p := \left(\mathbb{E}[|X|^p]\right)^{1/p} < \infty\}.$$

Pour $p = \infty$, $\|X\|_\infty$ est l'essentiel supremum. Ces espaces sont des *espaces de Banach* (complets pour la norme $\|\cdot\|_p$). Ils fournissent un langage uniforme pour exprimer :

— l'existence d'espérances (L^1), de variances (L^2), et des moments plus élevés (L^p) ;

— des contrôles quantitatifs via des inégalités (Cauchy–Schwarz, Hölder, Jensen, etc.) ;

— des notions de convergence : convergence en norme $L^p \Rightarrow$ convergence en probabilité (sous conditions usuelles).

2) $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Le cas $p = 2$ est particulièrement important :

$$\langle X, Y\rangle_{L^2} := \mathbb{E}[XY], \qquad \|X\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Avec ce produit scalaire, $L^2(\Omega)$ est un *espace de Hilbert*. La géométrie de Hilbert (projection orthogonale, Pythagore) apparaît directement en probabilité :

— **Espérance conditionnelle comme projection.** Pour une sous-tribu $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ est la projection orthogonale de X sur le sous-espace fermé $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

— **Orthogonalité et martingales.** Les incréments brownien sur des intervalles disjoints sont orthogonaux dans L^2 (variance additive), et cette orthogonalité sous-tend l'isométrie d'Itô.

3) Espaces d'intégrandes : $\mathcal{H}_T^2$ comme Hilbert. L'espace des intégrandes stochastiques s'écrit

$$\mathcal{H}_T^2 = \left\{H \text{ prévisible : } \mathbb{E}\int_0^T H_s^2\, ds < \infty\right\}, \qquad \langle H, K\rangle_{\mathcal{H}_T^2} := \mathbb{E}\int_0^T H_s K_s\, ds.$$

C'est un espace de Hilbert. L'intégrale d'Itô est alors une application linéaire

$$I : \ \mathcal{H}_T^2 \to L^2(\Omega), \qquad I(H) = \int_0^T H_s\, dW_s,$$

et l'**isométrie d'Itô** affirme précisément que I préserve les normes :

$$\|I(H)\|_{L^2} = \|H\|_{\mathcal{H}_T^2}.$$

Autrement dit, $\int H\, dW$ n'est pas seulement une définition technique : c'est une *construction canonique* d'une famille de martingales L^2 à partir d'un espace de Hilbert d'intégrandes.

4) Pourquoi ce point de vue est utile dans le poly. Dans les CM2–CM3, ce cadre permet :

— de définir l'intégrale par *densité* (approximation par processus simples) ;

— de contrôler les erreurs de discrétisation en norme L^2 ;

— de comprendre les identités d'énergie/variance comme des identités de norme.

Dans les applications (finance), il explique aussi pourquoi beaucoup de résultats “propres” sont énoncés en L^2 (moments, variances, martingales exponentielles) : le cadre hilbertien donne un calcul stable et robuste.

Intégrabilité locale : L^1_{loc} et L^2_{loc}

Dans la pratique (modélisation, finance), on manipule souvent des coefficients (a_t), (b_t) qui ne sont pas forcément intégrables sur tout $[0,\infty)$, mais qui le sont sur tout horizon fini. C'est exactement l'objet des espaces d'intégrabilité *locale*.

Définition 0.5 ($L^p_{\text{loc}}([0,\infty))$)**.** Soit $p \in \{1,2\}$. Une fonction mesurable $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{\text{loc}}([0,\infty))$ si, pour tout $T > 0$,

$$\int_0^T |f(t)|^p \, dt < \infty.$$

Autrement dit, $f \in L^p([0,T])$ pour tout horizon fini T.

Remarque 0.6 (Interprétation)*.* — $f \in L^1_{\text{loc}}$ signifie : *intégrable sur tout intervalle borné.* C'est la condition minimale pour que l'intégrale déterministe $\int_0^t f(s)\,ds$ soit bien définie pour tout $t < \infty$.

— $f \in L^2_{\text{loc}}$ signifie : *carré-intégrable sur tout intervalle borné.* C'est plus fort ; en particulier $L^2_{\text{loc}} \subset L^1_{\text{loc}}$ sur tout intervalle borné (par Cauchy–Schwarz).

Proposition 0.7 (Lien entre L^2_{loc} et L^1_{loc})**.** *Si $f \in L^2_{\text{loc}}([0,\infty))$, alors $f \in L^1_{\text{loc}}([0,\infty))$. Plus précisément, pour tout $T > 0$,*

$$\int_0^T |f(t)|\,dt \le \sqrt{T} \left(\int_0^T |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Démonstration. C'est l'inégalité de Cauchy–Schwarz sur $[0,T]$:

$$\int_0^T |f| = \int_0^T |f| \cdot 1 \le \left(\int_0^T |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^T 1^2 \right)^{1/2} = \sqrt{T} \left(\int_0^T |f|^2 \right)^{1/2}.$$

□

Remarque 0.8 (Pourquoi ces notions apparaissent en calcul stochastique ?)*.* Dans un processus d'Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s \, ds + \int_0^t b_s \, dW_s,$$

on demande typiquement :

— $a \in L^1_{\text{loc}}$ (au moins) pour que la partie de variation finie $\int_0^t a_s ds$ soit définie ;

— $b \in L^2_{\text{loc}}$ (souvent sous forme $\mathbb{E} \int_0^T b_s^2 ds < \infty$) pour que l'intégrale d'Itô soit bien définie sur tout horizon fini.

Ce sont donc des hypothèses *naturelles* : on ne veut pas imposer une intégrabilité globale sur $[0,\infty)$, mais seulement une intégrabilité sur les temps pertinents pour le modèle.

Exemple 0.9 (Exemples rapides)**.** — $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $(0,\infty)$: $f \in L^1_{\text{loc}}$ mais $f \notin L^2_{\text{loc}}$ au voisinage de 0 (car $\int_0^\varepsilon t^{-1}\,dt = +\infty$).

— $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ près de 0 :

$$f \in L^1_{\text{loc}} \iff \alpha < 1, \qquad f \in L^2_{\text{loc}} \iff \alpha < \tfrac{1}{2}.$$

Table des notations

Notation	Signification
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace probabilisé (univers aléatoire, tribu, probabilité).
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	Filtration : information disponible au cours du temps ; $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$.
Conditions usuelles	Filtration complétée et continue à droite : $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$.
$\mathcal{F}_t^W$	Filtration naturelle du brownien : $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$ (souvent complétée).
X adapté	X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t (pas d'anticipation).
$\mathbb{E}[\cdot]$, $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{G}]$	Espérance ; espérance conditionnelle sachant la tribu $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.
$L^p(\Omega)$	$\{X : \ \|X\|_p = (\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p} < \infty\}$ (Banach) ; $L^2(\Omega)$ est Hilbert avec $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}[XY]$.
$L^1_{\text{loc}}([0,\infty))$	$\int_0^T \|f(t)\|\,dt < \infty$ pour tout $T > 0$ (intégrable sur tout horizon fini).
$L^2_{\text{loc}}([0,\infty))$	$\int_0^T \|f(t)\|^2\,dt < \infty$ pour tout $T > 0$ (carré-intégrable localement).
$\mathbb{P}(A \mid B)$	Probabilité conditionnelle.
$\mathbf{1}_A$	Fonction indicatrice de l'événement A (vaut 1 sur A, 0 sinon).
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	Loi normale de moyenne m et variance σ^2.
$W = (W_t)_{t\geq 0}$	Mouvement brownien standard : $W_0 = 0$, incréments gaussiens indépendants, trajectoires continues.
ΔW	Incrément brownien $W_{t+\Delta t} - W_t$ (ordre $\sqrt{\Delta t}$).
$\displaystyle\int_0^t H_s\,dW_s$	Intégrale stochastique d'Itô (définie d'abord pour H simple prévisible).
$\mathcal{H}_T^2$	Espace des intégrandes admissibles : $\mathcal{H}_T^2 = \{H$ prévisible : $\mathbb{E}\int_0^T H_s^2\,ds < \infty\}$ (Hilbert).
M martingale	Processus adapté tel que $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ pour $s \leq t$ (et $M_t \in L^1$).
$[X]_t$	Variation quadratique : limite de $\sum(\Delta X)^2$ (dans ce poly : en probabilité).
$[X,Y]_t$	Covariation : limite de $\sum(\Delta X)(\Delta Y)$; $[W]_t = t$.
$dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t$	Processus d'Itô : drift a_t et diffusion b_t.
$dX_t\,dY_t = b_t\beta_t\,dt$	Règle produit au second ordre si $dY_t = c_t\,dt + \beta_t\,dW_t$.
$(dt)^2,\ dt\,dW_t,\ (dW_t)^2$	Règles : $(dt)^2 = 0$, $dt\,dW_t = 0$, $(dW_t)^2 = dt$.
$f \in C^{1,2}$	Fonction $f(t,x)$: C^1 en t, C^2 en x (pour Itô général).
$\mathcal{E}_t(\theta)$	Exponentielle stochastique : $\exp(\int_0^t \theta_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\,ds)$.
GBM (S_t)	Mouvement brownien géométrique : $dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$ (finance).

1 Rappels : filtrations, brownien, intégrabilité (CM1)

Carte mentale (CM1)

À retenir

Idée centrale. En temps continu, *information* + *bruit* ⇒ nouveaux objets (martingales, intégrale d'Itô).

— **Entrées** : filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ (information), brownien W (bruit), intégrabilité L^1/L^2.

— **Outils** : espérance conditionnelle $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$, propriété d'incréments indépendants, calculs gaussiens.

— **Sorties** : martingales (absence de drift prédictible), premier contact avec $\int H\,dW$ comme objet à définir.

— **Pont vers CM2** : le brownien a variation infinie ⇒ l'intégrale classique échoue ⇒ on construit l'intégrale d'Itô via des intégrandes *prévisibles*.

1.1 Objectifs et fil conducteur (finance & phénomènes aléatoires)

Ce chapitre fixe la *grammaire* du calcul stochastique : information disponible au cours du temps (filtration), bruit modèle (mouvement brownien), et outils probabilistes de base (espérance conditionnelle, martingales). L'objectif est d'arriver naturellement à la question centrale :

Comment intégrer un signal aléatoire en temps continu lorsque les trajectoires sont trop irrégulières pour l'intégration classique ?

À retenir

Fil conducteur. En modélisation (physique/finance), on décrit une dynamique par

$$\text{variation déterministe} + \text{bruit}, \qquad dX_t \approx a_t\,dt + b_t\,dW_t.$$

Le **brownien** est le modèle canonique du "bruit cumulatif" ; la **filtration** encode l'information disponible ; la **martingale** formalise l'absence d'arbitrage / de biais prédictible.

1.2 Mouvement brownien : définition et propriétés clés

Définition 1.1 (Mouvement brownien standard)**.** Un *mouvement brownien standard* $(W_t)_{t\geq 0}$ est un processus réel défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que :

(i) $W_0 = 0$ p.s.

(ii) (*Incréments indépendants*) Pour $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$, les variables $W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

(iii) (*Incréments stationnaires gaussiens*) Pour $0 \leq s < t$,

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s).$$

(iv) (*Continuité*) $t \mapsto W_t(\omega)$ est continue pour p.s. ω.

Proposition 1.2 (Conséquences immédiates)**.** *Pour tout* $0 \leq s \leq t$ *:*

$$\mathbb{E}[W_t] = 0, \qquad \mathrm{Var}(W_t) = t, \qquad \mathrm{Cov}(W_s, W_t) = s.$$

En particulier, (W_t) *est centré, et*

$$W_t = W_s + (W_t - W_s), \qquad W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s \text{ (si } \mathcal{F}_s \text{ contient l'info jusqu'à } s\text{)}.$$

Preuve (esquisse). On a $W_t = W_0 + (W_t - W_0)$ et $W_t - W_0 \sim \mathcal{N}(0,t)$, donc $\mathbb{E}[W_t] = 0$, $\mathrm{Var}(W_t) = t$. Pour la covariance, écrire $W_t = W_s + (W_t - W_s)$, puis utiliser l'indépendance de $W_t - W_s$ et W_s. □

À retenir

Règle d'échelle. Pour Δt petit, l'incrément brownien vérifie typiquement

$$\Delta W \sim \sqrt{\Delta t}, \quad \text{donc} \quad (\Delta W)^2 \sim \Delta t.$$

C'est la racine de $(dW)^2 = dt$ et du terme correctif dans la formule d'Itô.

1.3 Filtration et information : $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

Définition 1.3 (Filtration, adaptation, progressivité)**.** Une *filtration* est une famille croissante de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$:

$$s \leq t \;\Rightarrow\; \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t,$$

où $\mathcal{F}_t$ représente l'information disponible à la date t.

Un processus (X_t) est :

— *adapté* si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t ;

— *prévisible* si, intuitivement, X_t est connu "juste avant" t (concept clé pour l'intégrale d'Itô) ;

— *progressif* si $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable pour la tribu progressive (utile pour une théorie générale, mais on gardera surtout l'intuition).

Remarque 1.4 (Filtration naturelle et hypothèses usuelles)*.* La filtration *naturelle* du brownien est

$$\mathcal{F}_t^W := \sigma(W_s :\; 0 \leq s \leq t),$$

souvent complétée et rendue continue à droite (*conditions usuelles*). Dans ce cours, retenir : $\mathcal{F}_t$ **= tout ce qu'on a observé jusqu'à** t.

Exemple 1.5 (Processus adapté vs non-adapté)**.** — W_t est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}^W$.

— W_T (avec $T > t$) n'est pas $\mathcal{F}_t$-mesurable : c'est une information du futur.

— Un "signal de trading" utilisable à t doit être *$\mathcal{F}_t$-mesurable* (pas d'anticipation).

1.4 Espérance conditionnelle : règles et calculs gaussiens

Définition 1.6 (Espérance conditionnelle)**.** Soit $X \in L^1(\Omega)$. L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ (où $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$) est la variable aléatoire

— $\mathcal{G}$-mesurable,

— telle que $\int_A \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\, d\mathbb{P} = \int_A X\, d\mathbb{P}$ pour tout $A \in \mathcal{G}$.

Proposition 1.7 (Règles de base)**.** *Soient $X, Y \in L^1$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$:*

(a) Linéarité : $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$.

(b) Prise en facteur : si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et $XY \in L^1$,

$$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}] = Y\,\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}].$$

(c) Tour : si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}]$.

(d) Indépendance : si X est indépendant de $\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

Proposition 1.8 (Calcul gaussien clé pour le brownien)**.** *Pour $0 \leq s \leq t$,*

$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s, \qquad \mathbb{E}[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s] = 0, \qquad \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = t - s.$$

Preuve (rapide). Écrire $W_t = W_s + (W_t - W_s)$ et utiliser l'indépendance de $W_t - W_s$ par rapport à $\mathcal{F}_s$ et sa loi $\mathcal{N}(0, t-s)$. □

À retenir

Lecture. L'identité $\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s$ est l'ADN du fait que le brownien est une martingale.

1.5 Définition : variance conditionnelle

Définition 1.9 (Variance conditionnelle)**.** Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, ¶)$ et soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu. On définit la *variance conditionnelle* de X sachant $\mathcal{G}$ par

$$\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G}) := \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])^2 \mid \mathcal{G}\big].$$

C'est une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable, appartenant à L^1, et vérifiant $\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G}) \geq 0$ p.s.

À retenir

À retenir.

— $\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G})$ n'est *pas* un nombre en général : c'est une **v.a.** (mesurable par rapport à $\mathcal{G}$).

— Elle mesure la dispersion résiduelle de X *après* avoir retiré la partie expliquée par $\mathcal{G}$, c.-à-d. $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$.

Remarque 1.10 (Formule équivalente). On a l'identité (p.s.)

$$\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}] - \left(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\right)^2.$$

Démonstration. Développer $(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])^2 = X^2 - 2X\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + (\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])^2$ puis conditionner sachant $\mathcal{G}$ en utilisant que $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ est $\mathcal{G}$-mesurable :

$$\mathbb{E}[X\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}].$$

Remarque 1.11 (Cas $\mathcal{G} = \sigma(Y)$). Si $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, on écrit souvent

$$\mathrm{Var}(X \mid Y) := \mathrm{Var}\left(X \mid \sigma(Y)\right) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X \mid Y])^2 \mid Y\big].$$

Dans ce cas, $\mathrm{Var}(X \mid Y)$ est une fonction (mesurable) de Y.

À retenir

Interprétation L^2 (projection et erreur quadratique). Soit $X \in L^2$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu. Alors

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \quad \text{est la projection orthogonale de } X \text{ sur } L^2(\mathcal{G}) := \{Z \in L^2 :\ Z \text{ est } \mathcal{G}\text{-mesurable}\}.$$

En particulier, pour toute variable $Z \in L^2(\mathcal{G})$,

$$\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])^2\big] \ \le\ \mathbb{E}\big[(X - Z)^2\big],$$

c'est-à-dire que $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ est la **meilleure approximation** de X par une variable $\mathcal{G}$-mesurable au sens de l'erreur quadratique moyenne.
De plus, la variance conditionnelle représente l'**erreur quadratique résiduelle** :

$$\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])^2 \mid \mathcal{G}\big], \qquad \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G})] = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])^2\big].$$

Remarque 1.12 (Orthogonalité caractéristique). En posant $R := X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$, on a

$$\mathbb{E}[\,R\,Z\,] = 0 \qquad \text{pour tout } Z \in L^2(\mathcal{G}).$$

Autrement dit, le résidu R est orthogonal à tout ce qui est mesurable par rapport à $\mathcal{G}$.

1.6 Propriétés gaussiennes : espérance et variance conditionnelles

On se place ici dans le **cadre gaussien conjoint** : on suppose que (X, Y) est un vecteur *conjointement gaussien*. Cette hypothèse est essentielle : elle garantit que la loi conditionnelle reste gaussienne et que l'espérance conditionnelle est *affine*.

On note

$$m_X = \mathbb{E}[X], \qquad m_Y = \mathbb{E}[Y], \qquad \sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X), \qquad \sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y) > 0, \qquad \sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X, Y).$$

À retenir

À retenir (message central). Si (X, Y) est conjointement gaussien, alors

$X \mid (Y = y)$ est gaussienne, $\mathbb{E}[X \mid Y]$ est affine en Y, $\mathrm{Var}(X \mid Y)$ ne dépend pas de Y.

Formules explicites (dimension 1)

Proposition 1.13 (Conditionnement gaussien)**.** *Si* (X, Y) *est conjointement gaussien et* $\mathrm{Var}(Y) > 0$*, alors, pour tout* $y \in \mathbb{R}$*,*

$$X \mid (Y = y) \;\sim\; \mathcal{N}\left(m_X + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}(y - m_Y),\; \sigma_X^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_Y^2}\right).$$

En particulier,

$$\boxed{\mathbb{E}[X \mid Y] = m_X + \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)}(Y - m_Y)}, \qquad \boxed{\mathrm{Var}(X \mid Y) = \mathrm{Var}(X) - \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)^2}{\mathrm{Var}(Y)}}.$$

Recette de calcul

Recette de calcul (cas gaussien).

1. Calculer $m_X, m_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_{XY}$.
2. Poser $\beta = \sigma_{XY}/\sigma_Y^2$.
3. Alors $\mathbb{E}[X \mid Y] = m_X + \beta(Y - m_Y)$ et $\mathrm{Var}(X \mid Y) = \sigma_X^2 - \beta^2\sigma_Y^2$.

Lecture L^2 : projection et décomposition orthogonale

Proposition 1.14 (Décomposition « partie expliquée + résidu »)**.** *Posons*

$$Z := X - \mathbb{E}[X \mid Y].$$

Alors $\mathbb{E}[Z \mid Y] = 0$ *et* Z *est orthogonal à toute fonction de* Y *dans* L^2 *(en particulier* $\mathrm{Cov}(Z, Y) = 0$*). Dans le cadre gaussien conjoint, on a même*

$$Z \;\perp\; Y.$$

À retenir

À retenir. On peut écrire

$$X = \underbrace{\mathbb{E}[X \mid Y]}_{\text{meilleure approximation (MCO) par une fct de } Y} + \underbrace{Z}_{\text{résidu}},$$

et (cas gaussien conjoint) le résidu Z est *indépendant* de Y.

Variance totale

Théorème 1.15 (Formule de la variance totale)**.** *Si* $X \in L^2$ *et* $Y \in L^2$*, alors*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X \mid Y]).$$

Démonstration. On note $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ pour alléger les écritures. Par définition,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big].$$

On décompose

$$X - \mathbb{E}[X] = \underbrace{X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]}_{=:A} + \underbrace{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X]}_{=:B}.$$

En développant le carré,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[A^2] + \mathbb{E}[B^2] + 2\,\mathbb{E}[AB].$$

Or

$$\mathbb{E}[A^2] = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])^2\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])^2 \mid \mathcal{G}\big]\big] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G})] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X \mid Y)].$$

De même,

$$\mathbb{E}[B^2] = \mathbb{E}\big[(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X])^2\big] = \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) = \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X \mid Y]).$$

Il reste à montrer que le terme croisé est nul. Comme B est $\mathcal{G}$-mesurable, on a

$$\mathbb{E}[AB] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[AB \mid \mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}\big[B\,\mathbb{E}[A \mid \mathcal{G}]\big].$$

Mais

$$\mathbb{E}[A \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}\big[X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{G}\big] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = 0,$$

donc $\mathbb{E}[AB] = 0$. En réunissant les termes, on obtient

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X \mid Y]),$$

ce qui conclut. □

Remarque 1.16 (Spécialisation gaussienne). Dans le cas conjointement gaussien, $\mathrm{Var}(X \mid Y)$ est une constante, et

$$\mathbb{E}[\mathrm{Var}(X \mid Y)] = \sigma_X^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_Y^2}, \qquad \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X \mid Y]) = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_Y^2}.$$

Exemple-clé : brownien

Exemple 1.17 (Conditionnement brownien)**.** Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un brownien standard et $0 \leq s \leq t$. Alors (W_t, W_s) est gaussien centré et

$$\mathrm{Var}(W_s) = s, \qquad \mathrm{Var}(W_t) = t, \qquad \mathrm{Cov}(W_t, W_s) = s.$$

Donc

$$\mathbb{E}[W_t \mid W_s] = W_s, \qquad \mathrm{Var}(W_t \mid W_s) = t - s.$$

Remarque 1.18 (Attention : « marginalement gaussien » ne suffit pas). Si X et Y sont seulement *marginalement* gaussiens, sans gaussianité jointe, alors $\mathbb{E}[X \mid Y]$ n'est pas forcément affine et $\mathrm{Var}(X \mid Y)$ peut dépendre de Y. Les formules de la Proposition 1.13 caractérisent le cas **conjointement gaussien**.

1.7 Martingales : définition, exemples, tests rapides

Définition 1.19 (Martingale)**.** Un processus adapté (M_t) est une *martingale* (par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) si :

(i) $M_t \in L^1$ pour tout t ;

(ii) pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s \quad \text{p.s.}$$

Exemple 1.20 (Exemples fondamentaux)**.** — (W_t) est une martingale.

— $(W_t^2 - t)$ est une martingale (se prouve via Itô en CM4 ; on peut l'annoncer ici).

— Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $M_t(\theta) = \exp(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$ est une martingale (annoncée ici, démontrée via Itô en CM4/CM5).

Proposition 1.21 (Test rapide : drift nul (intuition))**.** *Si un processus s'écrit formellement*

$$dX_t = (drift)\, dt + (bruit)\, dW_t,$$

alors candidat martingale $\Leftrightarrow$ *drift nul (à intégrabilité près). Dans le cours, on utilisera systématiquement ce test après application d'Itô.*

1.8 Pourquoi un nouvel intégral ? Variation infinie ⇒ Itô

À retenir

Le problème : pour des trajectoires très irrégulières (comme celles du brownien), l'intégrale de Riemann–Stieltjes $\int H\, dW$ n'existe pas en général, car la *variation totale* de W sur $[0, T]$ est infinie (p.s.).

Remarque 1.22 (Heuristique très efficace). Sur un pas Δt, on a $\Delta W \sim \sqrt{\Delta t}$. Alors la somme des variations absolues sur une partition uniforme de taille n :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta W_k| \;\approx\; n\sqrt{T/n} = \sqrt{nT} \;\longrightarrow\; \infty.$$

Donc W n'a pas variation finie : l'intégration classique "$\int H\, d$(variation finie)" ne s'applique pas.

Recette de calcul

Idée d'Itô : définir d'abord $\int H\, dW$ pour des intégrandes *simples et prévisibles*

$$H_t = \sum_i X_i\, \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (X_i\ \mathcal{F}_{t_i}\text{-mesurable}),$$

puis étendre par limite en L^2 grâce à l'*isométrie d'Itô.*

1.9 Mini-exemples motivation finance (log-retours, exponentielle)

Focus finance

Log-retours. En finance, on modélise souvent un prix strictement positif S_t. Les *log-retours* $\ln(S_t/S_s)$ sont additifs dans le temps et plus proches d'une dynamique gaussienne. Le modèle GBM (mouvement brownien géométrique) s'écrit

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t,$$

et conduit à une loi lognormale pour S_t.

Focus finance

Exponentielle brownienne. Le processus

$$M_t(\theta) = \exp\left(\theta W_t - \tfrac{1}{2}\theta^2 t\right)$$

est une martingale. Interprétation : un changement d'échelle exponentiel du bruit est "compensé" par $-\frac{1}{2}\theta^2 t$. Ce mécanisme réapparaît partout (densités, changements de mesure, pricing).

Exercices

1. Montrer que $\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s$ pour $s \le t$.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(W_s, W_t)$ et en déduire $\mathbb{E}[W_s W_t]$.
3. (Heuristique) Expliquer pourquoi $\sum_k |\Delta W_k|$ diverge lorsque le pas $\to 0$.
4. Vérifier que $\mathbb{E}[e^{\lambda W_t}] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

2 Intégrale stochastique d'Itô (CM2)

Carte mentale (CM2)

À retenir

Idée centrale. Construire $\int H\,dW$ de façon rigoureuse (pas d'anticipation) et obtenir une martingale.

— **Entrées** : brownien W, filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$, intégrandes *prévisibles* H.

— **Construction** : définir $\int_0^T H\,dW$ d'abord pour H *simple prévisible* (somme $\sum X_i \Delta W_i$).

— **Outil clé** : **isométrie d'Itô**

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T H\,dW\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^T H^2\,ds\Big],$$

qui donne une extension par densité à $\mathcal{H}^2_T$.

— **Sorties** : (i) $\int_0^t H\,dW$ est une **martingale** centrée ; (ii) contrôle L^2.

— **Pont vers CM3** : comprendre l'ordre 2 : $\big[\int H\,dW\big]_t = \int_0^t H^2 ds$, et en particulier $[W]_t = t$.

2.1 Pourquoi l'intégrale d'Itô ? (intuition)

L'objectif est de donner un sens rigoureux à des expressions du type

$$\int_0^T H_s\,dW_s,$$

où (W_t) est un brownien et H un processus *adapté* (information disponible au temps s). L'idée fondatrice est :

— commencer par des intégrandes *simples* et *prévisibles* (constantes par morceaux, décidées "avant" l'incrément),

— utiliser une identité de type "énergie" (*isométrie d'Itô*) pour étendre par limite en L^2.

À retenir

Message. L'intégrale d'Itô est conçue pour préserver la variance :

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^T H_s\,dW_s\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\,ds\right] \quad (\text{si } \mathbb{E}[\int_0^T H_s^2 ds] < \infty).$$

2.2 Processus simples prévisibles

Définition 2.1 (Processus simple prévisible)**.** Sur une partition $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$, un *processus simple prévisible* est un processus

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i\,\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \qquad \text{où } X_i \text{ est } \mathcal{F}_{t_i}\text{-mesurable.}$$

Remarque 2.2 (Pourquoi "prévisible" ?)**.** Sur l'intervalle $(t_i, t_{i+1}]$, la valeur H_t est fixée par X_i, qui dépend uniquement de l'information disponible à l'instant t_i (avant l'incrément $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$). C'est la formalisation du principe *pas d'anticipation*.

2.3 Définition de l'intégrale sur les simples

Définition 2.3 (Intégrale d'Itô pour un processus simple)**.** Pour H simple prévisible, on définit

$$\int_0^T H_s\,dW_s := \sum_{i=0}^{n-1} X_i\,(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Proposition 2.4 (Propriétés élémentaires)**.** *Soit H simple prévisible. Alors :*

*(a) (*Linéarité*)* $\int_0^T (aH + bK)\,dW = a\int_0^T H\,dW + b\int_0^T K\,dW$.

*(b) (*Centrage*)* $\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s\,dW_s\right] = 0$.

Preuve (centrage). Écrire l'intégrale comme somme $\sum_i X_i \Delta W_i$. Comme X_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et $\Delta W_i := W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_i}$ avec $\mathbb{E}[\Delta W_i] = 0$, on obtient $\mathbb{E}[X_i \Delta W_i] = \mathbb{E}(\mathbb{E}[X_i \Delta W_i \mid \mathcal{F}_{t_i}]) = \mathbb{E}(X_i \mathbb{E}[\Delta W_i]) = 0$. ☐

2.4 Isométrie d'Itô et extension à $\mathcal{H}_T^2$

Définition 2.5 (Espace $\mathcal{H}_T^2$)**.** On note

$$\mathcal{H}_T^2 := \left\{ H \text{ prévisible} : \ \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\,ds\right] < \infty \right\}.$$

Théorème 2.6 (Isométrie d'Itô (cas simple))**.** *Pour H simple prévisible,*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s\,dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\,ds\right].$$

Preuve (détaillée, sur les simples). Écrivons $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ et $H = \sum_i X_i \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}$. Alors

$$\int_0^T H_s\,dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \Delta W_i,$$

d'où
$$\left(\int_0^T H_s\,dW_s\right)^2 = \sum_i X_i^2(\Delta W_i)^2 + 2\sum_{i<j} X_iX_j\,\Delta W_i\,\Delta W_j.$$
En prenant l'espérance :
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s\,dW_s\right)^2\right] = \sum_i \mathbb{E}\Big[X_i^2(\Delta W_i)^2\Big] + 2\sum_{i<j}\mathbb{E}[X_iX_j\,\Delta W_i\,\Delta W_j].$$

(i) Termes croisés : pour $i<j$, ΔW_j est indépendant de $\mathcal{F}_{t_j}$ et en particulier de $X_iX_j\Delta W_i$ (qui est $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable). Donc
$$\mathbb{E}[X_iX_j\,\Delta W_i\,\Delta W_j] = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}[X_iX_j\,\Delta W_i\,\Delta W_j \mid \mathcal{F}_{t_j}]\Big) = \mathbb{E}(X_iX_j\,\Delta W_i\,\mathbb{E}[\Delta W_j]) = 0.$$

(ii) Termes diagonaux : comme X_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1}-t_i)$ indépendant de $\mathcal{F}_{t_i}$,
$$\mathbb{E}[X_i^2(\Delta W_i)^2] = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}[X_i^2(\Delta W_i)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}]\Big) = \mathbb{E}(X_i^2\,\mathbb{E}[(\Delta W_i)^2]) = \mathbb{E}(X_i^2\,(t_{i+1}-t_i)).$$

En sommant :
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s\,dW_s\right)^2\right] = \sum_i \mathbb{E}(X_i^2\,(t_{i+1}-t_i)) = \mathbb{E}\left[\sum_i X_i^2\,(t_{i+1}-t_i)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\,ds\right].$$

□

Proposition 2.7 (Covariance (cas simple))**.** *Si H, K sont simples prévisibles, alors*
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s\,dW_s\right)\left(\int_0^T K_s\,dW_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_sK_s\,ds\right].$$

Idée. Appliquer l'isométrie à $H+K$ et utiliser la polarisation : $\langle I(H), I(K)\rangle = \frac{1}{4}(\|I(H+K)\|^2 - \|I(H-K)\|^2)$. □

Remarque 2.8 (Extension à $\mathcal{H}_T^2$). L'application $I:\ H \mapsto \int_0^T H\,dW$ est une isométrie de l'espace des simples (dense) vers $L^2(\Omega)$. Par densité, on définit pour tout $H \in \mathcal{H}_T^2$:
$$\int_0^T H_s\,dW_s := \lim_{n\to\infty}\int_0^T H_s^{(n)}\,dW_s \quad \text{dans } L^2,$$
où $(H^{(n)})$ est une suite de simples telle que $\mathbb{E}\int_0^T (H_s^{(n)} - H_s)^2 ds \to 0$.

À retenir

$$\left\|\int_0^T H\,dW\right\|_{L^2} = \|H\|_{\mathcal{H}_T^2}, \qquad \text{(c'est l'identité énergétique du calcul d'Itô).}$$

Recette de calcul

Recette (vérifier que l'intégrale existe). Pour pouvoir écrire $\int_0^T H\,dW$, il suffit (dans ce cours) de vérifier
$$\mathbb{E}\int_0^T H_s^2\,ds < \infty.$$

Exercices

1. Soit $H_s = \mathbf{1}_{[0,t]}(s)$. Calculer $\int_0^T H_s\,dW_s$ et sa variance.
2. Soit $H_s = W_s\,\mathbf{1}_{[0,t]}(s)$. Montrer que $H \in \mathcal{H}_T^2$ et calculer $\mathbb{E}[(\int_0^t W_s\,dW_s)^2]$ via l'isométrie.
3. (Covariance) Vérifier la formule $\mathbb{E}[\int H\,dW \int K\,dW] = \mathbb{E}[\int HK\,ds]$ sur des simples.

2.5 Martingale associée à l'intégrale d'Itô (CM2)

L'intégrale d'Itô ne fournit pas seulement une nouvelle notion d'intégration : elle produit une classe canonique de *martingales continues*. Cette propriété est fondamentale en modélisation (finance : "prix actualisé = martingale" sous une mesure adéquate ; physique : "bruit sans drift").

Théorème 2.9 (Martingale de l'intégrale d'Itô)**.** *Soit $H \in \mathcal{H}_T^2$ prévisible. Pour $t \in [0,T]$, définissons*

$$M_t := \int_0^t H_s\,dW_s.$$

Alors $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) et

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s \quad \textit{pour tout } 0 \leq s \leq t \leq T.$$

De plus, $M_t \in L^2$ et

$$\mathbb{E}[M_t] = 0, \qquad \mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\,ds\right].$$

Preuve (étape 1 : cas des processus simples). Supposons d'abord H simple prévisible sur une partition $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$:

$$H_s = \sum_{i=0}^{n-1} X_i\,\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(s), \qquad X_i\ \mathcal{F}_{t_i}\text{-mesurable.}$$

Fixons $0 \leq s \leq t \leq T$, et notons k tel que $s \in [t_k, t_{k+1})$ (le cas $s = T$ est trivial).

Par définition,

$$M_t = \sum_{i:t_{i+1}\leq t} X_i\,(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + X_k\,(W_t - W_{t_k}) \quad (\text{si } t \in (t_k, t_{k+1}]).$$

De même,

$$M_s = \sum_{i:t_{i+1}\leq s} X_i\,(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + X_k\,(W_s - W_{t_k}).$$

En soustrayant,

$$M_t - M_s = X_k\,(W_t - W_s) + \sum_{i:t_i\geq s,\,t_{i+1}\leq t} X_i\,(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Chaque terme de droite est de la forme $Y \cdot \Delta W$ où Y est $\mathcal{F}_{\text{début}}$-mesurable, et où l'incrément brownien correspondant est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$ et centré. Donc, en conditionnant par $\mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}[M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s.$$

Ainsi, (M_t) est une martingale dans le cas simple. □

Preuve (étape 2 : passage au cas général $H \in \mathcal{H}_T^2$). Soit $H \in \mathcal{H}_T^2$. Il existe une suite de processus simples prévisibles $(H^{(n)})$ telle que

$$\mathbb{E}\int_0^T (H_s^{(n)} - H_s)^2\,ds \longrightarrow 0.$$

Posons $M_t^{(n)} = \int_0^t H_s^{(n)}\, dW_s$ et $M_t = \int_0^t H_s\, dW_s$. Par l'isométrie d'Itô, pour tout $t \le T$,

$$\mathbb{E}\big[(M_t^{(n)} - M_t)^2\big] = \mathbb{E}\int_0^t (H_s^{(n)} - H_s)^2\, ds \le \mathbb{E}\int_0^T (H_s^{(n)} - H_s)^2\, ds \to 0,$$

donc $M_t^{(n)} \to M_t$ dans L^2.

Or, pour chaque n, $(M_t^{(n)})$ est une martingale (étape 1), donc

$$\mathbb{E}[M_t^{(n)} \mid \mathcal{F}_s] = M_s^{(n)}.$$

En passant à la limite dans L^2 (la projection conditionnelle est une contraction dans L^2), on obtient

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s.$$

Enfin, $\mathbb{E}[M_t] = 0$ et $\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}\int_0^t H_s^2 ds$ suivent de l'isométrie. $\square$

Remarque 2.10 (Test rapide). Si un processus admet une écriture de type

$$X_t = X_0 + \int_0^t \underbrace{\alpha_s}_{\text{drift}}\, ds + \int_0^t \underbrace{\beta_s}_{\text{bruit}}\, dW_s,$$

alors $X_t - \int_0^t \alpha_s ds$ est une martingale (sous hypothèses d'intégrabilité). Ce principe sera systématiquement utilisé après application de la formule d'Itô (CM4).

À retenir

À retenir. Toute intégrale d'Itô $\displaystyle\int_0^t H_s\, dW_s$ est une martingale centrée. Son "énergie" est donnée par

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s\, dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\, ds\right].$$

Exercices

1. Montrer que $M_t = \int_0^t W_s\, dW_s$ est une martingale et calculer $\mathbb{E}[M_t^2]$ via l'isométrie.
2. Soit $H_s = \mathbf{1}_{(a,b]}(s)$ avec $0 \le a < b \le T$. Identifier $M_t = \int_0^t H_s\, dW_s$ et vérifier directement la propriété de martingale.
3. (Bonus) Pour $H \in \mathcal{H}_T^2$, montrer que $t \mapsto M_t$ est continu en probabilité (indice : $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E}\int_s^t H_u^2 du$).

3 Variation quadratique et covariation (CM3)

Carte mentale (CM3)

À retenir

Idée centrale. Le brownien est continu mais *non dérivable* : au second ordre, $(dW)^2$ *vaut* dt.

— **Entrées** : partitions, sommes $\sum(\Delta X)^2$, intégrales d'Itô (CM2).

— **Concepts** : variation quadratique $[X]_t$ et covariation $[X, Y]_t$.

— **Résultats clés** :
$$[W]_t = t, \qquad \Big[\int_0^\cdot H\,dW\Big]_t = \int_0^t H_s^2\,ds.$$

— **Règles opératoires** :
$$(dW_t)^2 = dt, \quad dt\,dW_t = 0, \quad (dt)^2 = 0.$$

— **Pont vers CM4** : ces règles rendent possible la dérivation de $f(W_t)$: la formule d'Itô est un Taylor où $(dW)^2$ produit un terme en dt.

Ce chapitre formalise la différence essentielle entre calcul déterministe et calcul stochastique : le brownien a des trajectoires continues mais *très irrégulières*. La bonne notion de “variation au second ordre” est la *variation quadratique*, qui sera la source du terme correctif dans la formule d'Itô.

À retenir

Heuristique centrale. Sur un pas Δt, $\Delta W \sim \sqrt{\Delta t}$ donc
$$(\Delta W)^2 \sim \Delta t \quad \Rightarrow \quad \sum(\Delta W)^2 \text{ a une limite finie (égale à } t).$$
En revanche $\sum|\Delta W|$ diverge : le brownien n'a pas variation finie.

3.1 Définition par partitions

Définition 3.1 (Quadratic variation le long d'une partition)**.** Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus réel. Pour une partition $\pi = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = t\}$, on pose
$$Q_\pi(X;t) = \sum_{k=0}^{n-1}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2.$$
Si, lorsque $\|\pi\| \to 0$ (où $\|\pi\| = \max_k(t_{k+1} - t_k)$), la quantité $Q_\pi(X;t)$ converge en probabilité (ou dans L^2) vers une limite $[X]_t$, on appelle $[X]_t$ la *variation quadratique* de X sur $[0,t]$.

Remarque 3.2 (Sur la notion de convergence)*.* Dans ce cours, on retiendra surtout :

— pour le brownien, la convergence est vraie en L^2 sur des partitions uniformes ;

— pour les processus d'Itô, la variation quadratique existe et se calcule explicitement (CM5).

Exemple 3.3 (Processus de variation finie)**.** Si $A_t = \int_0^t a_s\,ds$ avec $a \in L^1_{\mathrm{loc}}$, alors $[A]_t = 0$. En effet, par Cauchy–Schwarz,
$$\sum_k (A_{t_{k+1}} - A_{t_k})^2 = \sum_k \Big(\int_{t_k}^{t_{k+1}} a_s\,ds\Big)^2 \leq \sum_k (t_{k+1} - t_k)\int_{t_k}^{t_{k+1}} a_s^2\,ds \leq \|\pi\|\int_0^t a_s^2\,ds,$$
qui tend vers 0 lorsque $\|\pi\| \to 0$ si $a \in L^2_{\mathrm{loc}}$ (cas typique).

3.2 Cas brownien : $[W]_t = t$

Théorème 3.4 (Variation quadratique du brownien)**.** *Pour un brownien standard (W_t) et tout $t \geq 0$,*
$$[W]_t = t.$$

Preuve (partition uniforme, convergence en L^2). Fixons $t > 0$ et considérons la partition uniforme $\pi_n = \{t_k = k\frac{t}{n}\}_{k=0}^{n}$. Notons $\Delta W_k := W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$; alors $\Delta W_k \sim \mathcal{N}(0, t/n)$ et les ΔW_k sont indépendants.

(1) Espérance. On a $\mathbb{E}[(\Delta W_k)^2] = t/n$, donc

$$\mathbb{E}[Q_{\pi_n}(W;t)] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[(\Delta W_k)^2] = n \cdot \frac{t}{n} = t.$$

(2) Variance. Comme les ΔW_k sont indépendants,

$$\mathrm{Var}\left(Q_{\pi_n}(W;t)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}\left((\Delta W_k)^2\right).$$

Si $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors $\mathbb{E}[Z^4] = 3\sigma^4$ et

$$\mathrm{Var}(Z^2) = \mathbb{E}[Z^4] - \mathbb{E}[Z^2]^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4.$$

Ici $\sigma^2 = t/n$, donc $\mathrm{Var}((\Delta W_k)^2) = 2(t/n)^2$, et

$$\mathrm{Var}\left(Q_{\pi_n}(W;t)\right) = n \cdot 2\left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{2t^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(3) Conclusion. On a donc $Q_{\pi_n}(W;t) \to t$ dans L^2, donc en probabilité. C'est précisément $[W]_t = t$. □

Remarque 3.5 (Conséquence : irrégularité)*.* Cette identité implique que le brownien a variation totale infinie sur tout intervalle non trivial, mais une variation quadratique finie et déterministe. C'est *exactement* ce qui rend possible le calcul d'Itô.

Recette de calcul

$$(dW_t)^2 = dt, \qquad dt\, dW_t = 0, \qquad (dt)^2 = 0.$$

Remarque 3.6 (Comment lire ces “règles” ?)*.* Elles résument la situation suivante : dans un développement au second ordre, les termes de taille $(\Delta W)^2$ contribuent (car $(\Delta W)^2 \sim \Delta t$), tandis que $\Delta t\, \Delta W$ et $(\Delta t)^2$ sont négligeables devant Δt.

3.3 Covariation

Définition 3.7 (Covariation)**.** Pour deux processus réels X, Y, si la limite (en probabilité) existe, on définit la *covariation* par

$$[X,Y]_t = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_k (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})(Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k}).$$

Proposition 3.8 (Identités de base)**.** *Lorsque les limites existent :*

(a) Symétrie : $[X,Y]_t = [Y,X]_t$.

(b) Bilinéarité : $[aX + bY, Z]_t = a[X,Z]_t + b[Y,Z]_t$.

(c) Relation avec la variation quadratique :

$$[X+Y]_t = [X]_t + [Y]_t + 2[X,Y]_t.$$

(d) Si A est de variation finie, alors $[A]_t = 0$ et $[A,X]_t = 0$.

Preuve (esquisse). Les points (a)-(c) sont des identités algébriques au niveau des sommes sur partitions. Pour (d), utiliser l'estimation $Q_\pi(A;t) \le \|\pi\|$ (énergie) comme dans l'exemple précédent, et Cauchy–Schwarz pour les termes croisés. $\square$

Exemple 3.9 (Covariation de deux browniens corrélés)**.** Si (W_t) et (B_t) sont deux browniens tels que $\mathrm{Cov}(W_t, B_t) = \rho t$, alors

$$[W, B]_t = \rho t.$$

(Ce point est surtout utile en dimension d ; on le reprendra si on aborde des browniens multidimensionnels.)

Exercices

1. (QV) Refaire la preuve de $[W]_t = t$ en calculant directement $\mathbb{E}[(Q_{\pi_n}(W;t) - t)^2]$.
2. Montrer que si $A_t = \int_0^t a_s \, ds$ avec $a \in L^2([0,T])$, alors $[A]_t = 0$.
3. (Covariation) En utilisant $[X+Y] = [X] + [Y] + 2[X,Y]$, exprimer $[X,Y]$ en fonction de $[X]$, $[Y]$ et $[X+Y]$.
4. (Bonus) Si $X_t = W_t + t$, calculer $[X]_t$ et $[X,W]_t$.

3.4 Variation quadratique d'une intégrale d'Itô : $\left[\int H\,dW\right]_t = \int H^2\,ds$

Cette sous-section établit le lien fondamental entre l'intégrale d'Itô (CM2) et la variation quadratique (CM3). C'est *la* formule qui justifie la règle $(dX_t)^2 = b_t^2\,dt$ dès que $dX_t = b_t\,dW_t + \cdots$.

Théorème 3.10 (QV de l'intégrale d'Itô)**.** *Soit $H \in \mathcal{H}_T^2$ et définissons*

$$M_t := \int_0^t H_s \, dW_s, \qquad t \in [0,T].$$

Alors la variation quadratique de M existe et

$$[M]_t = \int_0^t H_s^2 \, ds.$$

Preuve (étape 1 : H simple prévisible). Supposons H simple sur la partition $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$:

$$H_s = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \, \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(s), \qquad X_i \ \mathcal{F}_{t_i}\text{-mesurable.}$$

Alors, sur chaque intervalle $(t_i, t_{i+1}]$,

$$M_{t_{i+1}} - M_{t_i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s \, dW_s = X_i \,(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = X_i \, \Delta W_i.$$

Donc pour la partition π elle-même,

$$Q_\pi(M;T) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} X_i^2 (\Delta W_i)^2.$$

On veut montrer que ceci converge vers $\int_0^T H_s^2 \, ds = \sum_i X_i^2 (t_{i+1} - t_i)$. Considérons la différence

$$Q_\pi(M;T) - \int_0^T H_s^2 \, ds = \sum_{i=0}^{n-1} X_i^2 \big((\Delta W_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)\big).$$

Les variables $(\Delta W_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)$ sont centrées et indépendantes conditionnellement aux $\mathcal{F}_{t_i}$. On calcule sa variance :

$$\mathbb{E}\Big[\Big(Q_\pi(M;T) - \int_0^T H_s^2\, ds\Big)^2\Big] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\Big[X_i^4 \text{ Var}\left((\Delta W_i)^2\right)\Big],$$

car les termes croisés s'annulent par indépendance des incréments.

Or, si $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t_i)$, alors $\text{Var}((\Delta W_i)^2) = 2(\Delta t_i)^2$ (comme dans la preuve de $[W]_t = t$). Donc

$$\mathbb{E}\Big[\Big(Q_\pi(M;T) - \int_0^T H_s^2\, ds\Big)^2\Big] = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_i^4]\,(t_{i+1} - t_i)^2.$$

Si l'on raffine la partition, le terme de droite tend vers 0 dès que H est borné ou, plus généralement, par un argument de troncature/densité (standard). On obtient donc la convergence en L^2 :

$$Q_\pi(M;T) \longrightarrow \int_0^T H_s^2\, ds.$$

Cela donne bien $[M]_T = \int_0^T H_s^2\, ds$ pour H simple. □

Preuve (étape 2 : $H \in \mathcal{H}_T^2$). Soit $H \in \mathcal{H}_T^2$. Il existe une suite de simples $(H^{(n)})$ telle que

$$\mathbb{E} \int_0^T (H_s^{(n)} - H_s)^2\, ds \to 0.$$

Posons $M_t^{(n)} = \int_0^t H_s^{(n)}\, dW_s$ et $M_t = \int_0^t H_s\, dW_s$. Par l'isométrie d'Itô,

$$\mathbb{E}\big[(M_t^{(n)} - M_t)^2\big] = \mathbb{E} \int_0^t (H_s^{(n)} - H_s)^2\, ds \to 0 \quad \text{pour tout } t.$$

On sait (étape 1) que $[M^{(n)}]_t = \int_0^t (H_s^{(n)})^2\, ds$. Comme $(H^{(n)})^2 \to H^2$ dans $L^1(\Omega \times [0,T])$ (par Cauchy–Schwarz), on obtient $\int_0^t (H^{(n)})^2 ds \to \int_0^t H^2 ds$ dans L^1. Le passage à la limite (argument standard de stabilité) donne alors

$$[M]_t = \int_0^t H_s^2\, ds.$$

□

Remarque 3.11 (Conséquence différentielle : $(dM_t)^2 = H_t^2\, dt$). Écrire $M_t = \int_0^t H_s\, dW_s$ implique

$$dM_t = H_t\, dW_t, \qquad (dM_t)^2 = H_t^2\, dt,$$

au sens de la variation quadratique. Cette règle est la base du calcul d'Itô en CM4/CM5.

Recette de calcul

À retenir (forme opératoire). Si $dX_t = a_t\, dt + b_t\, dW_t$, alors

$$[X]_t = \int_0^t b_s^2\, ds \quad \Longleftrightarrow \quad (dX_t)^2 = b_t^2\, dt.$$

(Ce point sera re-démontré proprement dans CM5 pour les processus d'Itô.)

Exercices

1. Pour $H_s = \mathbf{1}_{[0,t]}(s)$, vérifier que $M_u = \int_0^u H_s\, dW_s = W_{u \wedge t}$ et en déduire $[M]_u = u \wedge t$.
2. Soit $M_t = \int_0^t W_s\, dW_s$. En utilisant la formule $[M]_t = \int_0^t W_s^2 ds$, donner une interprétation

de l'ordre de grandeur de M_t.

3. (Bonus) Si H est déterministe dans $L^2([0,T])$, calculer la loi de $\int_0^T H_s\,dW_s$.

4 Formule d'Itô et applications (CM4)

Carte mentale (CM4)

À retenir

Idée centrale. Changement de variable stochastique :

$$df = f_t\,dt + f_x\,dX + \tfrac{1}{2}f_{xx}(dX)^2, \qquad (dX)^2 = b^2 dt.$$

- **Entrées** : règles de CM3, intégrale d'Itô (CM2), processus d'Itô $dX = a\,dt + b\,dW$.
- **Résultats** :
  - Itô (brownien) : $d(f(W_t)) = f'(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)\,dt$.
  - Itô (général) : $df(t,X_t) = (f_t + af_x + \frac{1}{2}b^2 f_{xx})dt + (bf_x)dW$.
- **Usage** : **test martingale** = annuler le drift (terme en dt) ; construction de martingales et lien PDE (équation de la chaleur).
- **Application finance** : GBM $\Rightarrow$ log-retours gaussiens, S_t lognormal, correction de drift $-\frac{1}{2}\sigma^2$.
- **Pont vers CM5** : pour manipuler des modèles (portefeuilles, actualisation, EDS), il faut le *toolkit* : produit, exponentielle stochastique, résolution d'EDS linéaires.

4.1 Itô pour $f(W_t)$

La formule d'Itô est la règle de changement de variable adaptée au brownien. Elle ressemble à Taylor au second ordre, mais avec une différence cruciale : *le terme quadratique ne s'annule pas* car $[W]_t = t$.

À retenir

Heuristique (Taylor + variation quadratique). Sur un petit pas Δt,

$$\Delta f \approx f'(W)\,\Delta W + \frac{1}{2}f''(W)\,(\Delta W)^2.$$

Or $(\Delta W)^2 \approx \Delta t$, donc le terme $\frac{1}{2}f''(W)\,dt$ survit au passage à la limite.

Théorème 4.1 (Formule d'Itô, cas brownien). *Si $f \in C^2(\mathbb{R})$, alors pour tout $t \geq 0$,*

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\,ds.$$

Remarque 4.2 (Lecture et rôle du terme correctif). — Le terme $\int_0^t f'(W_s)\,dW_s$ est une martingale centrée (CM2).

— Le terme $\frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\,ds$ est un drift déterministe (au sens dt), entièrement dû à l'irrégularité du brownien.

Preuve (schéma détaillé, version "manuelle"). Fixons une partition $\pi = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = t\}$ et notons $\Delta W_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$. Par Taylor avec reste (forme de Lagrange), pour chaque k :

$$f(W_{t_{k+1}}) = f(W_{t_k}) + f'(W_{t_k})\Delta W_k + \frac{1}{2} f''(W_{t_k})(\Delta W_k)^2 + R_k,$$

où $R_k = \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_k)(\Delta W_k)^3$ si $f \in C^3$ (sinon on utilise une version mollifiée). En sommant,

$$f(W_t) - f(W_0) = \sum_k f'(W_{t_k})\Delta W_k + \frac{1}{2} \sum_k f''(W_{t_k})(\Delta W_k)^2 + \sum_k R_k.$$

Lorsque $\|\pi\| \to 0$:

— la première somme converge vers $\int_0^t f'(W_s)\, dW_s$ (définition Itô : somme de Riemann stochastique) ;

— la deuxième somme converge vers $\int_0^t f''(W_s)\, ds$ car $\sum_k (\Delta W_k)^2 \to t$ (QV) et $f''(W_{t_k})$ varie peu sur chaque intervalle ;

— le reste $\sum_k R_k \to 0$: typiquement, $|\Delta W_k|^3$ est d'ordre $(\Delta t_k)^{3/2}$, et sa somme est négligeable devant $\sum \Delta t_k$.

On obtient la formule d'Itô. □

Exemple 4.3 (Exemple : $f(x) = x^2$)**.** Avec $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$,

$$W_t^2 = W_0^2 + 2 \int_0^t W_s\, dW_s + \int_0^t 1\, ds,$$

donc

$$W_t^2 - t = 2 \int_0^t W_s\, dW_s \quad \Rightarrow \quad W_t^2 - t \text{ est une martingale.}$$

Exemple 4.4 (Exemple : exponentielle martingale)**.** Prenons $f(x) = e^{\theta x}$:

$$de^{\theta W_t} = \theta e^{\theta W_t}\, dW_t + \frac{1}{2}\theta^2 e^{\theta W_t}\, dt.$$

En posant $M_t(\theta) = \exp(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$, un calcul direct donne

$$dM_t(\theta) = \theta M_t(\theta)\, dW_t,$$

donc $M(\theta)$ est une martingale.

Recette de calcul

Recette (cas brownien). Pour $f \in C^2$:

$$d(f(W_t)) = f'(W_t)\, dW_t + \tfrac{1}{2} f''(W_t)\, dt.$$

4.2 Processus d'Itô et Itô général

Définition 4.5 (Processus d'Itô)**.** Un *processus d'Itô* (X_t) est un processus adapté s'écrivant

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s\, ds + \int_0^t b_s\, dW_s,$$

où a est intégrable (au moins dans L^1_{loc}) et $b \in \mathcal{H}^2_T$ sur tout horizon T. On note formellement :

$$dX_t = a_t\, dt + b_t\, dW_t.$$

Remarque 4.6 (Différentielle stochastique : règles)*.* Si $dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t$, alors au second ordre :

$$(dt)^2 = 0, \qquad dt\,dW_t = 0, \qquad (dW_t)^2 = dt, \qquad \Rightarrow \qquad (dX_t)^2 = b_t^2\,dt.$$

Théorème 4.7 (Itô, forme générale)**.** *Soit X un processus d'Itô $dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t$ et $f \in C^{1,2}$. Alors*

$$df(t, X_t) = \Big(f_t + a_t f_x + \tfrac{1}{2} b_t^2 f_{xx}\Big)(t, X_t)\,dt + (b_t f_x)(t, X_t)\,dW_t.$$

Preuve (idée via Taylor en deux variables). Sur un petit pas, écrire

$$\Delta f \approx f_t\,\Delta t + f_x\,\Delta X + \frac{1}{2} f_{xx} (\Delta X)^2,$$

où $\Delta X = a\,\Delta t + b\,\Delta W$. En développant $(\Delta X)^2$:

$$(\Delta X)^2 = a^2 (\Delta t)^2 + 2ab\,\Delta t\,\Delta W + b^2 (\Delta W)^2 \approx b^2\,\Delta t,$$

car $(\Delta W)^2 \approx \Delta t$ et les autres termes sont négligeables. En sommant et en passant à la limite, on obtient la formule. □

À retenir

Test martingale (outil). Après application d'Itô, un processus est une martingale si le coefficient de dt (le drift) est nul (et sous hypothèses d'intégrabilité raisonnables).

Recette de calcul

Recette (processus d'Itô).

1. Identifier a_t et b_t dans $dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t$.
2. Calculer f_t, f_x, f_{xx}.
3. Appliquer : $df = (f_t + a f_x + \frac{1}{2} b^2 f_{xx})dt + (b f_x)dW$.
4. Lire : drift = terme en dt, martingale ⇔ drift nul.

4.3 Applications rapides (CM4) : martingales et PDE

Construire des martingales par annulation du drift

Une méthode très fréquente consiste à choisir f pour tuer le terme en dt. Par exemple, pour $f(t, x)$, si l'on veut que $M_t = f(t, W_t)$ soit une martingale, il faut (formellement) :

$$f_t(t, x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, x) = 0,$$

c'est l'*équation de la chaleur*. Ainsi, les solutions de la chaleur évaluées en (t, W_t) donnent des martingales.

Exemple 4.8 (Exemple concret)**.** Prenons $f(t, x) = e^{-\frac{1}{2}\theta^2 t} \cos(\theta x)$. Alors $f_t = -\frac{1}{2}\theta^2 f$ et $f_{xx} = -\theta^2 f$, donc $f_t + \frac{1}{2} f_{xx} = 0$. Par Itô, $f(t, W_t)$ est une martingale.

4.4 Application finance : mouvement brownien géométrique (GBM)

Focus finance

Modèle GBM.

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t, \qquad S_0 > 0.$$

Log-retours et correction de drift

En appliquant Itô à $f(x) = \ln x$: $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$, on obtient

$$d(\ln S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)(dS_t)^2.$$

Or $(dS_t)^2 = (\sigma S_t)^2 (dW_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 \, dt$, donc

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma \, dW_t.$$

Focus finance

Solution explicite et loi.

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t, \qquad S_t = S_0 \exp\Big((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\Big).$$

Donc $\ln S_t$ est gaussien et S_t est lognormal.

Moments (très utile en finance)

Comme $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, $\mathbb{E}[e^{\lambda W_t}] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}$, donc

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}, \qquad \operatorname{Var}(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1),$$

et plus généralement, pour $p \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[S_t^p] = S_0^p \exp\Big(p(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \tfrac{1}{2}p^2\sigma^2 t\Big).$$

Focus finance

Lien martingale exponentielle. On réécrit

$$S_t = S_0 e^{\mu t} \exp\Big(\sigma W_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t\Big).$$

Comme $M_t = \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ est une martingale, le processus $e^{-\mu t} S_t = S_0 M_t$ est une martingale. Ceci préfigure l'idée risque-neutre (Black–Scholes) : "prix actualisé = martingale".

Exercices

1. (Martingale) Montrer que $W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2$ est une martingale (indice : Itô sur $f(x) = x^4$).
2. (PDE) Trouver une fonction $f(t,x)$ non triviale telle que $f(t, W_t)$ soit une martingale.
3. (GBM) Retrouver $d(\ln S_t)$ et la loi lognormale de S_t.
4. (Moments) Calculer $\mathbb{E}[S_t^p]$ et en déduire $\mathbb{E}[\ln S_t]$ et $\operatorname{Var}(\ln S_t)$.

Tableau de calcul Itô : formules prêtes à l'emploi

Cette mini-section rassemble les transformations les plus fréquentes. On suppose que

$$dX_t = a_t \, dt + b_t \, dW_t \quad \text{(processus d'Itô)}.$$

Alors la formule générale donne, pour $f \in C^{1,2}$,

$$df(t, X_t) = (f_t + a_t f_x + \tfrac{1}{2} b_t^2 f_{xx})\, dt + (b_t f_x)\, dW_t.$$

À retenir

Règles différentielles (à mémoriser).

$$(dt)^2 = 0, \qquad dt\, dW_t = 0, \qquad (dW_t)^2 = dt, \qquad \Rightarrow \qquad (dX_t)^2 = b_t^2\, dt.$$

1) Puissance : $f(x) = x^n$

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$d(X_t^n) = nX_t^{n-1}\, dX_t + \frac{1}{2}n(n-1)X_t^{n-2}\,(dX_t)^2,$$

donc en remplaçant $(dX_t)^2 = b_t^2\, dt$:

$$d(X_t^n) = nX_t^{n-1}(a_t\, dt + b_t\, dW_t) + \frac{1}{2}n(n-1)X_t^{n-2}b_t^2\, dt.$$

2) Logarithme : $f(x) = \ln x$ (pour $X_t > 0$)

$$d(\ln X_t) = \frac{1}{X_t}\, dX_t - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}\,(dX_t)^2 = \Big(\frac{a_t}{X_t} - \frac{1}{2}\frac{b_t^2}{X_t^2}\Big)\, dt + \frac{b_t}{X_t}\, dW_t.$$

Cas multiplicatif $dX_t = \alpha_t X_t\, dt + \beta_t X_t\, dW_t$:

$$d(\ln X_t) = \big(\alpha_t - \tfrac{1}{2}\beta_t^2\big)\, dt + \beta_t\, dW_t.$$

3) Exponentielle : $f(x) = e^x$

$$d(e^{X_t}) = e^{X_t}\, dX_t + \frac{1}{2}e^{X_t}(dX_t)^2 = e^{X_t}\Big(a_t + \tfrac{1}{2}b_t^2\Big)\, dt + e^{X_t}b_t\, dW_t.$$

4) Exponentielle stochastique (cas modèle)

Si $Z_t = \int_0^t \theta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds$, alors

$$d(e^{Z_t}) = e^{Z_t}\, dZ_t + \frac{1}{2}e^{Z_t}(dZ_t)^2 = \theta_t e^{Z_t}\, dW_t,$$

c'est-à-dire $d\mathcal{E}_t(\theta) = \theta_t \mathcal{E}_t(\theta)\, dW_t$.

5) Produit : $f(x, y) = xy$ (rappel)

Si X, Y sont des processus d'Itô continus,

$$d(X_tY_t) = X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + d[X,Y]_t, \quad \text{avec} \quad d[X,Y]_t = b_t d_t\, dt$$

lorsque $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$ et $dY_t = c_t dt + d_t dW_t$.

6) Inverse et quotient (utile en finance)

Si $X_t > 0$, pour $f(x) = x^{-1}$, $f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$:

$$d(X_t^{-1}) = -X_t^{-2}\, dX_t + \frac{1}{2}\cdot 2X_t^{-3}(dX_t)^2 = \Big(-\frac{a_t}{X_t^2} + \frac{b_t^2}{X_t^3}\Big)\, dt - \frac{b_t}{X_t^2}\, dW_t.$$

Pour un quotient $\frac{Y_t}{X_t}$ (avec $X_t > 0$), écrire $Y_tX_t^{-1}$ et appliquer la formule produit.

Recette de calcul

Astuce pratique : pour les fonctions rationnelles, faire *inverse + produit* est souvent plus simple que calculer toutes les dérivées d'un quotient.

7) Cas GBM (résumé en 3 lignes)

Si $dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$:

$$d(\ln S_t) = \Big(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\Big)\,dt + \sigma\,dW_t, \qquad S_t = S_0 \exp\Big((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\Big).$$

Exercices

1. Pour $dX_t = aX_t\,dt + bX_t\,dW_t$, vérifier la formule de $d(\ln X_t)$ et en déduire X_t explicitement.
2. Calculer $d\Big(\frac{1}{S_t}\Big)$ pour un GBM et identifier drift et volatilité.
3. Soit $X_t = W_t + t$. Calculer $d(e^{X_t})$ et donner $\mathbb{E}[e^{X_t}]$.

5 Toolkit : produit, exponentielle stochastique, EDS (CM5)

Carte mentale (CM5)

À retenir

Idée centrale. Transformer et résoudre des dynamiques : produits, normalisations exponentielles, facteurs intégrants (analogue ODE).

- **Entrées** : processus d'Itô $dX = a\,dt + b\,dW$, variation quadratique/covariation (CM3), formule d'Itô (CM4).
- **Outils clés** :
  - Covariation : $dX\,dY = bd\,dt$, donc $[X,Y]_t = \int_0^t b_s d_s\,ds$.
  - Produit : $d(XY) = X\,dY + Y\,dX + d[X,Y]$.
  - Exponentielle stochastique : $d\mathcal{E} = \theta\mathcal{E}\,dW$ (martingale positive).
- **Applications** :
  - Actualisation : $d(e^{-rt}S_t) = e^{-rt}\,dS_t - re^{-rt}S_t\,dt$ (pas de covariation).
  - EDS linéaires : log (multiplicative) ou facteur intégrant (affine).
  - Finance : préfigure mesure risque-neutre (prix actualisé martingale).
- **Sortie globale** : un ensemble de règles de calcul pour passer de modèles à des lois, des martingales, et des solutions explicites.

Ce chapitre regroupe les identités *à fort rendement* : elles permettent de calculer vite et proprement (produits, changements de variable, résolutions d'EDS linéaires) et sont omniprésentes en finance.

À retenir

Plan du toolkit.

1. Covariation : identifier rapidement les termes d'ordre dt issus des produits de bruits.
2. Produit (intégration par parties) : la règle $d(XY) = X\,dY + Y\,dX + d[X,Y]$.
3. Exponentielle stochastique : construire des martingales positives et normaliser des EDS.

4. EDS linéaires : résoudre par log ou facteur intégrant (analogue ODE + terme de covariation).

5.1 Covariation pour processus d'Itô

Proposition 5.1 (Covariation explicite)**.** *Si*

$$dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t, \qquad dY_t = c_t\,dt + \beta_t\,dW_t,$$

alors la covariation existe et

$$[X,Y]_t = \int_0^t b_s\beta_s\,ds, \qquad [X]_t = \int_0^t b_s^2\,ds, \qquad [Y]_t = \int_0^t \beta_s^2\,ds.$$

En notation différentielle :

$$d[X,Y]_t = b_t\beta_t\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad dX_t\,dY_t = b_t\beta_t\,dt.$$

Preuve (idée claire). Écrire $X = A + M$ et $Y = C + N$ où $A_t = \int_0^t a_s ds$, $C_t = \int_0^t c_s ds$ sont de variation finie et $M_t = \int_0^t b_s dW_s$, $N_t = \int_0^t \beta_s dW_s$ sont des intégrales d'Itô. Alors $[A,\cdot] = [C,\cdot] = 0$, donc

$$[X,Y]_t = [M,N]_t.$$

Or, par la formule de covariation des intégrales d'Itô (CM3),

$$[M,N]_t = \int_0^t b_s\beta_s\,ds.$$

□

Remarque 5.2 (Règle de calcul (à utiliser sans hésiter)). Si un terme contient $dt\,dW$ ou $(dt)^2$, on le jette ; si un terme contient $(dW)^2$, on le remplace par dt. C'est exactement le contenu de $dX\,dY = bd\,dt$.

Exercices

1. Si $X_t = W_t + t$ et $Y_t = 2W_t - t$, calculer $[X]_t$, $[Y]_t$, $[X,Y]_t$.
2. Si $M_t = \int_0^t H_s\,dW_s$, retrouver $[M]_t = \int_0^t H_s^2 ds$.

5.2 Produit (intégration par parties)

Théorème 5.3 (Formule produit / intégration par parties stochastique)**.** *Pour des processus d'Itô continus X, Y,*

$$d(X_tY_t) = X_t\,dY_t + Y_t\,dX_t + d[X,Y]_t.$$

En intégrant entre 0 *et t :*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + [X,Y]_t.$$

Preuve (via Itô 2D ou via règle $dX\,dY$). Considérer $f(x,y) = xy$. Alors $df = y\,dX + x\,dY + dX\,dY$. Or $dX\,dY = d[X,Y]$, ce qui donne la formule. □

Remarque 5.4 (Cas important : facteur déterministe). Si A_t est de variation finie (par exemple $A_t = e^{-rt}$), alors $d[A,X]_t = 0$ et la formule produit redevient

$$d(AX) = A\,dX + X\,dA.$$

Focus finance

Application flash (actualisation). Si $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ et $B_t = e^{rt}$, alors $\widetilde{S}_t := S_t/B_t = e^{-rt} S_t$ vérifie

$$d\widetilde{S}_t = (\mu - r)\widetilde{S}_t\, dt + \sigma \widetilde{S}_t\, dW_t,$$

car $d[e^{-rt}, S]_t = 0$ (variation finie $\times$ Itô).

Exercices

1. Prendre $X_t = W_t$ et $Y_t = tW_t$. Calculer $d(X_t Y_t)$ et $[X, Y]_t$.
2. Retrouver $d(S_t e^{-rt})$ pour un GBM.

5.3 Exponentielle stochastique

Définition 5.5 (Exponentielle stochastique)**.** Pour $\theta \in \mathcal{H}^2_T$, on définit

$$\mathcal{E}_t(\theta) = \exp\Big(\int_0^t \theta_s\, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2\, ds \Big).$$

Proposition 5.6 (EDS satisfaite, martingale)**.** *On a*

$$d\mathcal{E}_t(\theta) = \theta_t\, \mathcal{E}_t(\theta)\, dW_t, \qquad \mathcal{E}_0(\theta) = 1.$$

En particulier, $(\mathcal{E}_t(\theta))_{t \le T}$ est une martingale positive, donc

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}_t(\theta)] = 1.$$

Preuve (Itô sur l'exponentielle). Posons

$$Z_t = \int_0^t \theta_s\, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2\, ds.$$

Alors $dZ_t = \theta_t\, dW_t - \frac{1}{2}\theta_t^2\, dt$ et $(dZ_t)^2 = \theta_t^2\, dt$. Avec $f(z) = e^z$,

$$d(e^{Z_t}) = e^{Z_t}\, dZ_t + \frac{1}{2} e^{Z_t} (dZ_t)^2 = e^{Z_t} \Big(\theta_t\, dW_t - \frac{1}{2}\theta_t^2\, dt \Big) + \frac{1}{2} e^{Z_t} \theta_t^2\, dt = \theta_t e^{Z_t}\, dW_t.$$

Donc $d\mathcal{E}_t(\theta) = \theta_t \mathcal{E}_t(\theta)\, dW_t$. □

Remarque 5.7 (Pourquoi le $-\frac{1}{2}\int \theta^2$?). Il est exactement choisi pour annuler le terme correctif de la formule d'Itô. C'est la version générale du "drift correction" déjà vu avec $\ln S_t$.

Recette de calcul

Recette : pour montrer qu'un candidat M_t est une martingale, cherchez une écriture $dM_t = \phi_t\, dW_t$ (pas de terme en dt). L'exponentielle stochastique est construite pour cela.

Exercices

1. Vérifier que $M_t = \exp(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$ est le cas particulier $\theta_s \equiv \theta$.
2. Si $\theta \in L^2([0, T])$ est déterministe, calculer la loi de $\int_0^T \theta_s dW_s$ et en déduire $\mathbb{E}[\mathcal{E}_T(\theta)]$.

5.4 EDS linéaires : résolution par log ou facteur intégrant

1) EDS multiplicative (type GBM généralisé)

Proposition 5.8 (Solution explicite)**.** *Considérons*

$$dX_t = \alpha_t X_t \, dt + \beta_t X_t \, dW_t, \qquad X_0 > 0.$$

Alors

$$X_t = X_0 \exp\Big(\int_0^t (\alpha_s - \tfrac{1}{2}\beta_s^2) \, ds + \int_0^t \beta_s \, dW_s \Big).$$

Preuve (via $Y_t = \ln X_t$). Posons $Y_t = \ln X_t$. Par Itô (CM4) :

$$dY_t = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2} \frac{1}{X_t^2} (dX_t)^2.$$

Or $dX_t = \alpha_t X_t dt + \beta_t X_t dW_t$ et $(dX_t)^2 = \beta_t^2 X_t^2 dt$, donc

$$dY_t = (\alpha_t - \tfrac{1}{2}\beta_t^2) \, dt + \beta_t \, dW_t.$$

En intégrant et en exponentiant, on obtient la formule. □

Recette de calcul

Recette log. Si l'EDS est multiplicative (X facteur commun), essayer $Y = \ln X$: cela transforme l'EDS en une EDS additive.

2) EDS affine : variation des constantes

Considérons maintenant une EDS affine :

$$dX_t = (\alpha_t X_t + \gamma_t) \, dt + (\beta_t X_t + \delta_t) \, dW_t.$$

La méthode standard est le *facteur intégrant*.

Proposition 5.9 (Facteur intégrant)**.** *Soit U_t solution de*

$$dU_t = -\alpha_t U_t \, dt - \beta_t U_t \, dW_t, \qquad U_0 = 1.$$

Alors $U_t X_t$ vérifie une EDS sans terme en X_t :

$$d(U_t X_t) = U_t \gamma_t \, dt + U_t \delta_t \, dW_t.$$

Preuve (produit + covariation). Par formule produit :

$$d(UX) = U \, dX + X \, dU + d[U, X].$$

On remplace $dX = (\alpha X + \gamma)dt + (\beta X + \delta)dW$ et $dU = -\alpha U dt - \beta U dW$. Le terme de covariation vaut

$$d[U, X] = (\text{coeff. de } dW \text{ dans } dU) \cdot (\text{coeff. de } dW \text{ dans } dX) \, dt = (-\beta U) \cdot (\beta X + \delta) \, dt.$$

En regroupant :

- Les termes en $X \, dt$: $U(\alpha X)dt + X(-\alpha U)dt = 0$.
- Les termes en $X \, dW$: $U(\beta X)dW + X(-\beta U)dW = 0$.
- Les termes en $X \, dt$ provenant de la covariation : $U\beta^2 X dt + (-\beta U)(\beta X)dt = 0$ (ils s'annulent exactement).

Il reste
$$d(UX) = U\gamma\, dt + U\delta\, dW.$$

$\square$

Remarque 5.10 (Forme intégrale). En intégrant :

$$U_t X_t = X_0 + \int_0^t U_s\gamma_s\, ds + \int_0^t U_s\delta_s\, dW_s, \qquad X_t = \frac{1}{U_t}\left(X_0 + \int_0^t U_s\gamma_s\, ds + \int_0^t U_s\delta_s\, dW_s\right).$$

Exercices

1. Résoudre $dX_t = aX_t\, dt + bX_t\, dW_t$ et comparer au GBM.
2. Résoudre $dX_t = (aX_t + c)\, dt + bX_t\, dW_t$ par facteur intégrant.
3. (Finance) Pour $B_t = e^{rt}$, vérifier que S_t/B_t satisfait $d\widetilde{S}_t = (\mu - r)\widetilde{S}_t dt + \sigma\widetilde{S}_t dW_t$.

À retenir

À retenir.

— Covariation : $dX\, dY = bd\, dt$.

— Produit : $d(XY) = X\, dY + Y\, dX + d[X, Y]$.

— Exponentielle stochastique : $d\mathcal{E} = \theta\mathcal{E}\, dW$ (martingale positive).

— EDS linéaires : log (multiplicative) ou facteur intégrant + produit (affine).

Annexe : feuille de formules

À retenir

— $(dW)^2 = dt$, $dt\, dW = 0$, $(dt)^2 = 0$.

— $dX = a\, dt + b\, dW \Rightarrow (dX)^2 = b^2\, dt$.

— $dX = a\, dt + b\, dW$, $dY = c\, dt + d\, dW \Rightarrow dX\, dY = bd\, dt$.

— Produit : $d(XY) = X\, dY + Y\, dX + d[X, Y]$.

— Itô : $df(t, X) = (f_t + af_x + \frac{1}{2}b^2 f_{xx})dt + (bf_x)dW$.

Exercices

Exercices

1. (QV) Montrer sur partition uniforme que $\mathrm{Var}(\sum(\Delta W)^2) \to 0$.
2. (Itô) Calculer $d(W_t^3)$ et construire une martingale à partir de W_t^3.
3. (GBM) Calculer $\mathbb{E}[S_t^p]$ pour $p \in \mathbb{R}$.
4. (Produit) Retrouver $d(S_t e^{-rt})$ pour un GBM.
5. (EDS) Résoudre $dX = (aX + c)\, dt + (bX + d)\, dW$ via facteur intégrant.