Modélisation stochastique — TD1

Brownien, filtrations, espérance conditionnelle, martingales

(CM1) Feuille d'exercices

Objectifs.
— Calculer des lois gaussiennes conjointes et des espérances conditionnelles.
— Exploiter les incréments indépendants du brownien via la filtration naturelle.
— Identifier des martingales (tests rapides) et relier à l'idée "pas de biais prédictible".

Conventions. $(W_t)_{t\geq 0}$ est un brownien standard, et $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$ (complétée si besoin).

A. Calculs gaussiens et conditionnement

Exercice 1 (Gaussienne conjointe : covariance et corrélation)**.** Soient $0 \leq s < t$. Rappeler la loi de (W_s, W_t) (vecteur gaussien) et calculer :

$$\mathbb{E}[W_s],\ \mathbb{E}[W_t],\ \mathrm{Var}(W_s),\ \mathrm{Var}(W_t),\ \mathrm{Cov}(W_s, W_t).$$

En déduire la matrice de covariance et la corrélation $\rho = \mathrm{Corr}(W_s, W_t)$.

Exercice 2 (Conditionnement gaussien : régression linéaire)**.** Soient $0 \leq s < t$. Calculer explicitement :

$$\mathbb{E}[W_t \mid W_s], \qquad \mathrm{Var}(W_t \mid W_s).$$

(*Indication :* formule de régression linéaire pour les vecteurs gaussiens.)

Exercice 3 (Conditionnement par la filtration naturelle)**.** Montrer que, pour $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s, \qquad \mathbb{E}[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s] = 0.$$

Interpréter en une phrase.

Exercice 4 (Bridge brownien : loi conditionnelle)**.** Soient $0 < s < t$. Déterminer la loi conditionnelle de W_s sachant W_t :

$$W_s \,|\, W_t \sim \mathcal{N}(\,\cdot\,,\,\cdot\,).$$

(*Bonus :* donner une représentation $W_s = \frac{s}{t} W_t +$ (bruit indépendant).)

B. Martingales : tests rapides et exemples

Exercice 5 (Test martingale : W_t et $W_t^2 - t$)**.** Montrer que $(W_t)_{t\geq 0}$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_t)$. Montrer ensuite que

$$M_t := W_t^2 - t$$

est une martingale. (*Indication :* développer $(W_t)^2 = (W_s + (W_t - W_s))^2$ et conditionner par $\mathcal{F}_s$.)

Exercice 6 (Martingale exponentielle)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et

$$M_t := \exp\Big(\theta W_t - \tfrac{1}{2}\theta^2 t\Big).$$

Montrer que (M_t) est une martingale. (*Indication :* indépendance de $W_t - W_s$ et $\mathcal{F}_s$, et MGF d'une normale.)

Exercice 7 (Vrai/Faux (justifier en une ligne))**.** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier brièvement.

(a) $(W_t^3)_{t\geq 0}$ est une martingale.

(b) $(|W_t|)_{t\geq 0}$ est une martingale.

(c) Si X est $\mathcal{F}_s$-mesurable et Y indépendant de $\mathcal{F}_s$, alors $\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{F}_s] = X\mathbb{E}[Y]$.

(d) Pour $s < t$, $\mathbb{E}[W_s W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s^2$.

C. Mini-motivation finance (log-retours)

Exercice 8 (Log-retours discrets : moyenne et variance)**.** On modélise un log-prix discret X_n par

$$X_{n+1} - X_n = \mu\,\Delta t + \sigma\,\Delta W_n, \qquad \Delta W_n \sim \mathcal{N}(0, \Delta t) \text{ i.i.d.}$$

Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathrm{Var}(X_n)$ en fonction de n, Δt, μ, σ et X_0. Interpréter le rôle de μ et σ.

Exercice 9 (Pas de biais prédictible : critère de martingale)**.** Soit (M_t) un processus adapté intégrable. Rappeler la définition d'une martingale. Montrer que si $\mathbb{E}[M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s] = 0$ pour tout $s < t$, alors (M_t) est une martingale. Donner une interprétation “finance” en une phrase (pas d'arbitrage/biais prédictible).

Conseil. Dans les exercices de conditionnement, identifier la partie $\mathcal{F}_s$-mesurable et la partie indépendante (incrément $W_t - W_s$).