Exercices de Modélisation Stochastique

Feuille 3

February 1, 2022

1. Soit $X_t = e^{\int_0^t a(s)ds}$ et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(s)e^{-\int_0^s a(u)du} dW_s,$$

   où a et b son des fonctions borélieenes inégrables. On pose $Z_t = X_t Y_t$. Montrer que $dZ_t = a(t)Z_t dt + b(t)dW_t$.

2. On admet que le système suivant admet une solution

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t Y_s dW_s \\ Y_t &= y - \int_0^t X_s dW_s. \end{cases}$$

   Montrer que $X_t^2 + Y_t^2 = (x^2 + y^2)e^t$.

3. Soit $Y_t = \int_0^t e^s dW_s$ et $Z_t = \int_0^t Y_s dW_s$.
   (a) Ecrire l'EDS vérifiée par Z_t.
   (b) Calculer $E[Z_t]$, $E[Z_t^2]$ et $E[Z_t Z_s]$.

4. Soit X tel que $dX_t = (a - bX_t)dt + dW_t$
   (a) Montrer que $Z_t = e^{c\int_0^t X_s dW_s - \frac{c^2}{2}\int_0^t X_s^2 ds}$ est une martingale.
   (b) Soit $U_t = X_t^2$. Ecrire dU_t puis la variable U comme une somme d'intégrales.
   (c) Montrer que

$$\int_0^t X_s dW_s = \frac{1}{2}(X_t^2 - X_0^2 - t) - a\int_0^t X_s ds + b\int_0^t X_s^2 ds.$$

5. Soit Z le processus défini par

$$Z_t = \frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{W_t^2}{2(1-t)}}$$

   (a) Montrer que Z est une martingale et que Z_t tends vers 0 quand t tend vers 1.

(b) Calculer $E[Z_t]$.

(c) Écrire Z_t sous la forme

$$Z_t = e^{\int_0^t \Phi(s)dW_S - \frac{1}{2}\int_0^t \Phi^2(s)ds}$$

où $\Phi(s)$ es un processus que l'on précisera.

6. Soit $V = KX$ avec

$$dX_t = X_t(\mu - k - s\ln(X_T))dt + \sigma X_t dW_t,$$
$$dK_t = K_t(r+k)dt.$$

Calculer dV_t et $d\ln(X_t)$.

7. Soit $A_t = \int_0^t e^{W_s+\nu s}ds$ et $dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$. Montrer que le processus $f(t, S_t, A_t)$ est une martingale si f vérifie une équation aux dériveés partielles à coefficients déterministes que l'on précisera.

8. Soit B et W deux browniens corrélés ρ et

$$dr_t = [a(b - r_t) - \lambda\sigma r_t]dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t,$$
$$dV_t = (r_t - \delta)V_t dt + \sigma_V V_t dB_t.$$

On pose $X_t = \sqrt{r_t}$ et $Y_t = \ln(V_t) - \alpha X_t$ avec $\alpha = 2\rho\sigma_V/\sigma$. Calculer dX_t et dY_t.

9. Soit $dS_t = S_t(bdt + \sigma dW_t)$ $S_0 = x$, et $A_t = \frac{1}{t}\int_0^t \ln(S_s)ds$.

(a) Montrer que

$$\ln(S_s) = \ln(S_t) + (b - \sigma^2/2)(s-t) + \sigma(W_s - W_t)$$

pour $s \geq t$.

(b) Montrer que A_t es une variable gaussien.