Modélisation stochastique CM1 : Mouvement brownien, filtration, espérance conditionnelle, martingales

(Motivation pour l'intégrale d'Itô)

Antonio Falcó

École Centrale de Nantes

1er février 2026

Plan (2h)

1. Objectifs et fil conducteur (finance & phénomènes aléatoires)
2. Mouvement brownien : définition et propriétés clés
3. Filtration et information : $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$
4. Espérance conditionnelle : règles et calculs gaussiens
5. Martingales : définition, exemples, tests rapides
6. **Pourquoi un nouvel intégral ?** (variation infinie $\Rightarrow$ Itô)
7. Mini-exemples motivation finance (log-retours, exponentielle)
8. Pourquoi un point de vue fonctionnel ?

Objectifs de CM1

- Installer le **socle probabiliste** nécessaire à l'intégrale stochastique : $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, espérance conditionnelle, martingales.
- Comprendre le mouvement brownien comme **modèle canonique du bruit**.
- Donner des **exemples motivants (finance)** qui reviendront toute la partie (GBM, log-retours).
- Préparer la question centrale : **comment définir** $\int_0^t H_s\, dW_s$?

Fil conducteur : un modèle minimal

Idée

Un phénomène dépendant du temps est modélisé par

$$X_t = X_0 + (\text{tendance}) + (\text{fluctuations aléatoires}).$$

Prototype (préfiguration)

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + b(t, X_t)\, dW_t.$$

- Aujourd'hui : W_t, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, martingales, $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$.
- Prochain CM : définition rigoureuse de $\int H\, dW$ et ses propriétés.

Définition du mouvement brownien

Définition

Un processus $(W_t)_{t\geq 0}$ est un **mouvement brownien standard** si :

1. $W_0 = 0$ p.s.
2. W a des **incréments indépendants** : pour $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$, les $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ sont indépendants.
3. W a des **incréments stationnaires** : $W_{t+h} - W_t \sim \mathcal{N}(0, h)$.
4. $t \mapsto W_t$ est **continu** p.s.

Conséquences immédiates

- Pour tout $t \geq 0$: $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, donc $\mathbb{E}[W_t] = 0$ et $\mathrm{Var}(W_t) = t$.
- Pour $0 \leq s \leq t$:

$$\mathrm{Cov}(W_s, W_t) = s, \qquad \mathbb{E}[W_t W_s] = s.$$

- **Auto-similarité** : $(W_{ct})_{t\geq 0} \stackrel{d}{=} (\sqrt{c}W_t)_{t\geq 0}$.

Message

Le brownien est **le bruit** à la fois “simple” (gaussien) et “rugueux” (variation infinie).

Rugosité : variation et intuition

- Les trajectoires sont continues mais presque sûrement **nulle part dérivables**.
- La variation totale sur $[0, T]$ est **infinie** p.s.

Conséquence (motivation)

L'intégrale de Riemann–Stieltjes $\int_0^T H_s \, dW_s$ n'existe pas "en général". Il faut une nouvelle notion : **intégrale d'Itô**.

Exercice flash (en classe)

Question

Soit $0 \leq s \leq t$. Calculer :

$$\mathbb{E}[W_t \mid W_s], \qquad \mathrm{Var}(W_t \mid W_s).$$

- Idée : (W_s, W_t) est gaussien centré $\Rightarrow$ conditionnelle gaussienne.
- Résultat attendu : $\mathbb{E}[W_t \mid W_s] = W_s$ et $\mathrm{Var}(W_t \mid W_s) = t - s$.

Filtration : formaliser l'information

Définition

Une **filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une famille croissante de tribus :

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \text{si } s \leq t,$$

où $\mathcal{F}_t$ représente l'information disponible à l'instant t.

Filtration naturelle du brownien

$$\mathcal{F}_t^W := \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$$

souvent complétée et rendue continue à droite.

Adaptation et prévisibilité (intuitions)

Processus adapté

X_t est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.

Intuition

- $\mathcal{F}_t =$ "ce que je sais à t".
- X_t adapté $=$ "je peux observer X_t à t".
- Pour intégrer contre dW_t, l'intégrande devra être **prévisible** (proche de "ne pas regarder le futur").

Espérance conditionnelle : définition

Définition

Pour $X \in L^1(\Omega)$ et une tribu $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ est la variable $\mathcal{G}$-mesurable telle que

$$\int_A \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \, d\mathbb{P} = \int_A X \, d\mathbb{P} \qquad \forall A \in \mathcal{G}.$$

- $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] =$ meilleure approximation L^2 de X par une variable $\mathcal{G}$-mesurable (si $X \in L^2$).
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.

Règles de calcul indispensables

- **Linéarité** : $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$.
- **Prise dehors** : si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et $XY \in L^1$,
$$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}] = Y\,\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}].$$
- **Tour** : si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$,
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}].$$
- **Indépendance** : si X indépendant de $\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

Point clé

Ces règles suffisent à vérifier la plupart des martingales “à la main”.

Conditionnement gaussien (outil ultra-pratique)

Fait

Si (U, V) est gaussien centré, alors

$$\mathbb{E}[U \mid V] = \frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\mathrm{Var}(V)}\, V \qquad \mathrm{Var}(U \mid V) = \mathrm{Var}(U) - \frac{\mathrm{Cov}(U,V)^2}{\mathrm{Var}(V)}.$$

Application au brownien

Pour $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}[W_t \mid W_s] = W_s \qquad \mathrm{Var}(W_t \mid W_s) = t - s.$$

Définition de martingale

Définition

Un processus adapté $(M_t)_{t\geq 0}$ est une **martingale** (par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) si :

1. $M_t \in L^1$ pour tout t,
2. $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

- "*fair game*" : la meilleure prédiction du futur, sachant le présent, est le présent.
- Supermartingale / sous-martingale : remplacer $=$ par $\leq$ / $\geq$.

Exemples fondamentaux

(1) Le brownien est une martingale

Pour $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s.$$

(2) Martingale "quadratique" (à annoncer)

$$M_t := W_t^2 - t \quad \text{est une martingale.}$$

- Le point (2) sera **démontré via Itô** plus tard (ou via calculs gaussiens).
- Ces martingales génèrent des identités de moments.

Test rapide : incréments indépendants

Proposition (outil)

Si $X_t = X_s + (X_t - X_s)$ avec $(X_t - X_s)$ indépendant de $\mathcal{F}_s$ et de moyenne nulle, alors

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s.$$

Brownien

$W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et $\mathbb{E}[W_t - W_s] = 0 \Rightarrow$ martingale.

Martingales exponentielles (motivation finance)

Candidat

Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$M_t(\theta) := \exp\Big(\theta W_t - \tfrac{1}{2}\theta^2 t\Big).$$

- $M_t(\theta)$ est une martingale (preuve via mgf gaussienne ou Itô plus tard).
- Interprétation : "**exponentielle stochastique**".

Lien finance (préfiguration)

Le modèle lognormal s'écrit souvent $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$.

Pourquoi l'intégration classique échoue ?

Observation

Les trajectoires browniennes ont variation totale infinie $\Rightarrow$ la limite de sommes de Riemann $\sum H_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ est instable (dépend des choix).

Ce qu'on veut

Une notion d'intégrale

$$\int_0^t H_s \, dW_s$$

qui :

- respecte l'adaptation (H_s ne regarde pas le futur),
- soit bien définie en L^2,
- donne une martingale (sous hypothèses naturelles),
- fournisse un calcul différentiel cohérent (formule d'Itô).

Mini-exemple finance : log-retours

Retour simple vs log-retour

$$R_t := \frac{S_t - S_0}{S_0} \qquad \ell_t := \ln \frac{S_t}{S_0}.$$

- Empiriquement, les **log-retours** sont plus “stables” (additifs dans le temps).
- Modèle typique : $\ell_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$.
- Donc S_t est lognormal et S_t 0 automatiquement.

Annonce

Pour passer de ℓ_t à S_t, on aura besoin de la **formule d'Itô**.

Mini-exemple physique : bruit additif

Signal bruité (idée)

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(s)\, ds + \sigma W_t.$$

- Ici, la partie aléatoire est σW_t : fluctuations cumulées.
- Différence cruciale : la dérivée $dW_t dt$ n'existe pas $\Rightarrow$ on ne peut pas écrire "$\sigma \dot{W}_t$" comme bruit classique.

Préfiguration EDS

$$dX_t = a(t)\, dt + \sigma\, dW_t.$$

Synthèse : ce qu'il faut retenir

- W_t : gaussien, incréments indépendants/stationnaires, trajectoires continues mais rugueuses.
- $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$: formalise l'information au cours du temps.
- $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$: outil central (tour, prise dehors, indépendance).
- Martingale : $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$.
- Motivation : variation infinie $\Rightarrow$ intégrale classique insuffisante.

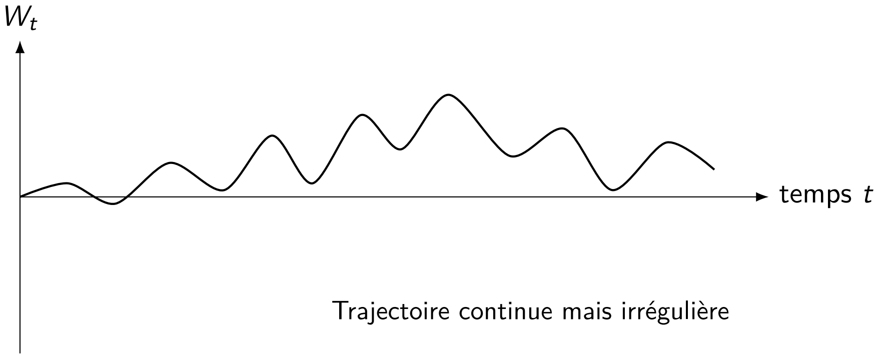
Prochain CM (CM2)

Construction de l'intégrale d'Itô, isométrie, propriété de martingale, calculs de base.

Exercices (à proposer / TP1)

1. Pour $0 \leq s \leq t$, calculer $\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s]$ et $\mathbb{E}[W_t^2 \mid \mathcal{F}_s]$.
2. Montrer que W_t est une martingale ; montrer que $W_t^2 - t$ est une martingale (indice : calcul conditionnel gaussien).
3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, vérifier que $\mathbb{E}[\exp(\theta W_t)] = \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 t\right)$.
4. (Bonus) Montrer que $M_t(\theta) = \exp\left(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$ est une martingale.

Annexe : figure intuitive



Pourquoi un point de vue fonctionnel ?

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, les variables aléatoires sont des *fonctions* $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Le calcul stochastique s'appuie constamment sur :

- des **normes** (L^p) pour contrôler l'intégrabilité et la convergence ;
- des **projections** en L^2 (espérance conditionnelle) ;
- des **complétudes** (Banach/Hilbert) pour passer à la limite (densité, extension).

Message clé

Les espaces $L^p(\Omega)$ fournissent la grammaire analytique qui rend les objets stochastiques *bien posés* (et qui permet de faire des preuves par approximation).

Espaces $L^p(\Omega)$: définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour $p \in [1, \infty)$, on définit

$$L^p(\Omega) = \Big\{X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : \ \mathbb{E}[|X|^p] < \infty\Big\}, \qquad \|X\|_p := \big(\mathbb{E}[|X|^p]\big)^{1/p}.$$

Et

$$L^\infty(\Omega) = \{X : \ \|X\|_\infty < \infty\}, \qquad \|X\|_\infty := \inf\{C : \ |X| \leq C \ \mathbb{P}\text{-p.s.}\}.$$

Fait structurel

Pour $p \geq 1$, $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est un **espace de Banach**.

Inégalités pivot : Hölder, Minkowski, Jensen

Hölder

Si $p, q \in (1, \infty)$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

Minkowski (triangle en L^p)

Pour $p \geq 1$,

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

Jensen (convexité)

Si φ est convexe et $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, alors

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

$L^2(\Omega)$: un Hilbert (structure géométrique)

Le cas $p = 2$ est spécial : on a un produit scalaire

$$\langle X, Y\rangle_2 := \mathbb{E}[XY], \qquad \|X\|_2^2 = \langle X, X\rangle_2.$$

Fait structurel

$(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ est un **espace de Hilbert**.

- Cauchy–Schwarz : $|\mathbb{E}[XY]| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$.
- Orthogonalité : $\langle X, Y\rangle_2 = 0 \Rightarrow$ “décorrélation” (pas indépendance).
- Projection orthogonale : outil central pour $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{G}]$.

Espérance conditionnelle comme projection en L^2

Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu. On définit $L^2(\mathcal{G})$ comme le sous-espace des variables $\mathcal{G}$-mesurables dans $L^2(\Omega)$.

Caractérisation (cas L^2)

Pour $X \in L^2(\Omega)$, la variable $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ est l'unique élément de $L^2(\mathcal{G})$ tel que

$$\left\langle X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}],\, Y \right\rangle_2 = 0 \qquad \forall\, Y \in L^2(\mathcal{G}).$$

- Interprétation : meilleure approximation de X par une variable *observable via* $\mathcal{G}$.
- Cas gaussien : régression linéaire = projection orthogonale.

Espaces sur $\Omega \times [0, T]$: intégrabilité en temps

Pour les processus $H = (H_t)_{t\in[0,T]}$, on utilise des espaces sur le produit $(\Omega \times [0, T], \mathbb{P} \otimes dt)$.

Normes usuelles

$$\|H\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} := \mathbb{E} \int_0^T |H_t|^2\, dt, \qquad \|H\|_{L^1(\Omega\times[0,T])} := \mathbb{E} \int_0^T |H_t|\, dt.$$

Lien direct avec Itô (annonce CM2)

L'intégrale d'Itô est d'abord définie sur des intégrandes simples *prévisibles*, puis étendue par continuité sur l'espace naturel

$$\mathcal{H}^2_T = \left\{ H \text{ prévisible} : \ \mathbb{E} \int_0^T H_t^2\, dt < \infty \right\},$$

qui est un Hilbert pour le produit scalaire $\langle H, K\rangle = \mathbb{E} \int_0^T H_t K_t\, dt$.

Intégrabilité locale : L^1_{loc} et L^2_{loc}

Certaines dynamiques naturelles ne sont pas globalement intégrables sur $[0, T]$ mais le sont sur tout intervalle borné.

Définition (temps continu)

On dit qu'un processus mesurable $H = (H_t)_{t \geq 0}$ est dans L^p_{loc} (en temps) si, pour tout $T > 0$,

$$\mathbb{E} \int_0^T |H_t|^p \, dt < \infty.$$

On note alors $H \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$.

- L^2_{loc} est la condition "minimale" typique pour définir des intégrales stochastiques *jusqu'à un horizon fini arbitraire*.
- En pratique : on travaille souvent *localement* puis on fixe T (horizon) pour des résultats précis.

Résumé : ce que vous devez retenir pour la suite

Checklist fonctionnelle (CM1 $\to$ CM2)

- $L^p(\Omega)$ est un Banach : convergence et estimations de moments se font via $\|\cdot\|_p$.
- $L^2(\Omega)$ est un Hilbert : géométrie, orthogonalité, projections.
- $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{G}]$ est une projection en L^2 (et une contraction en L^p).
- Pour les processus : norme $\mathbb{E}\int_0^T (\cdot)^2 dt \Rightarrow$ espace naturel de l'intégrale d'Itô.

Pont vers CM2

L'isométrie d'Itô est une identité de norme dans un Hilbert :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_t\, dW_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\int_0^T H_t^2\, dt.$$