Modélisation stochastique
CM3 : Variation quadratique et covariation
Le sens de $(dW)^2 = dt$ (pont vers la formule d'Itô)

Antonio Falcó

École Centrale de Nantes

5 février 2026

2026-02-05

CM3 – Variation quadratique

Objectif (1h).

- Définir la variation quadratique via sommes sur partitions.
- Montrer : $\langle W \rangle_t = t$ (ou au moins l'admettre avec une preuve guidée).
- Introduire la covariation : $\langle X, Y \rangle$ et l'identité $\langle X + Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle + 2\langle X, Y \rangle$.
- Donner les règles différentielles heuristiques : $(dW)^2 = dt$, $dt\, dW = 0$, $(dt)^2 = 0$.

Au tableau : Message clé

"Le brownien a variation totale infinie, mais une variation quadratique finie : $\langle W \rangle_t = t$.
C'est exactement la source du terme $\frac{1}{2} f''$ dans Itô."

Au tableau : Timing

10' définitions + intuition; 20' $\langle W \rangle = t$; 15' covariation; 10' règles; 5' teaser CM4.

Plan (1h)

1. Pourquoi la variation quadratique ?
2. Définition via partitions : $[X]_t$ et $\langle X \rangle_t$
3. Cas brownien : $\langle W \rangle_t = t$
4. Covariation : $\langle X, Y \rangle_t$
5. Règles de calcul : $(dW)^2 = dt$ et consorts
6. Teaser : comment cela produit la formule d'Itô

Plan (1h)

1. Pourquoi la variation quadratique ?
2. Définition via partitions : $[X]_t$ et $\langle X\rangle_t$
3. Cas brownien : $\langle W\rangle_t = t$
4. Covariation : $\langle X, Y\rangle_t$
5. Règles de calcul : $(dW)^2 = dt$ et consorts
6. Teaser : comment cela produit la formule d'Itô

Au tableau : À dire (30 secondes)

CM2 : $\int H\,dW$ est une martingale, et $\mathbb{E}[(\int_0^t H\,dW)^2] = \mathbb{E}\int_0^t H^2\,ds$.

CM3 : le "carré" de dW produit du dt : $(dW)^2 = dt$.

CM4 : Taylor + $(dW)^2 = dt \Rightarrow$ formule d'Itô.

Pourquoi introduire la variation quadratique ?

Constat (CM1)

Le brownien a variation totale infinie $\Rightarrow$ pas de dérivée, pas de Riemann–Stieltjes en général.

Mais on observe un phénomène stabilisé

Si on découpe $[0, t]$ en petits pas, la somme des *carrés* des incréments se stabilise :

$$\sum (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \approx t.$$

Rôle

C'est la quantité qui remplace "$\int (\dot{W})^2$" et gouverne le calcul différentiel stochastique.

Pourquoi introduire la variation quadratique ?

Constat (CM1)

Le brownien a variation totale infinie ⇒ pas de dérivée, pas de Riemann–Stieltjes en général.

Mais on observe un phénomène stabilisé

Si on découpe $[0, t]$ en petits pas, la somme des *carrés* des incréments se stabilise :

$$\sum (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \ \approx \ t.$$

Rôle

C'est la quantité qui remplace "$\int (\dot{W})^2$" et gouverne le calcul différentiel stochastique.

Au tableau : À écrire (intuition rapide)

$\Delta W \sim \sqrt{\Delta t} \Rightarrow (\Delta W)^2 \sim \Delta t$.
$\sum (\Delta W)^2 \sim \sum \Delta t = t$.

Au tableau : Commentaire

Cette heuristique suffit pour faire accepter $(dW)^2 = dt$ avant la preuve.

Sommes sur partitions : $[X]_t$

Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu. Pour une partition $\pi = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = t\}$, on pose

$$Q_\pi(X;t) := \sum_{k=0}^{n-1} \left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right)^2.$$

Variation quadratique (définition)

On dit que X admet une variation quadratique sur $[0,t]$ si, lorsque le pas $\|\pi\| \to 0$,

$$Q_\pi(X;t) \longrightarrow [X]_t \quad \text{(en probabilité, ou p.s. selon le cadre).}$$

Sommes sur partitions : $[X]_t$

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus continu. Pour une partition $\pi = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = t\}$, on pose

$$Q_\pi(X;t) := \sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2.$$

Variation quadratique (définition)

On dit que X admet une variation quadratique sur $[0,t]$ si, lorsque le pas $\|\pi\| \to 0$,

$$Q_\pi(X;t) \longrightarrow [X]_t \quad \text{(en probabilité, ou p.s. selon le cadre).}$$

Au tableau : À écrire (définition en une ligne)

$$Q_\pi(X;t) = \sum_k (\Delta X_k)^2, \qquad [X]_t = \lim_{\|\pi\| \to 0} Q_\pi(X;t).$$

Au tableau : À dire

`Préciser : la notion de limite dépend du cadre (p.s., en probabilité). Pour le brownien, on peut obtenir p.s. le long de partitions dyadiques.`

Notation $\langle X \rangle_t$ (cas martingale)

Convention (cours classique)

Pour une martingale continue M, on note souvent $\langle M \rangle_t$ sa *variation quadratique prévisible* (ici, vous pouvez l'identifier à $[M]_t$ au niveau intuition).

- Pour l'intégrale d'Itô $M_t = \int_0^t H_s \, dW_s$, on annoncera :

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, ds.$$

- Et pour le brownien : $\langle W \rangle_t = t$.

Notation $\langle X\rangle_t$ (cas martingale)

Convention (cours classique)

Pour une martingale continue M, on note souvent $\langle M\rangle_t$ sa *variation quadratique prévisible* (ici, vous pouvez l'identifier à $[M]_t$ au niveau intuition).

- Pour l'intégrale d'Itô $M_t = \int_0^t H_s\, dW_s$, on annoncera :

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t H_s^2\, ds.$$

- Et pour le brownien : $\langle W\rangle_t = t$.

Au tableau : À écrire (annonce utile CM4)

$M_t = \int_0^t H_s\, dW_s \Rightarrow \langle M\rangle_t = \int_0^t H_s^2\, ds$.
En particulier $\langle W\rangle_t = t$.

Au tableau : Commentaire

Même si vous ne développez pas la théorie Doob-Meyer, cette identité sera utilisée comme règle.

Théorème : $\langle W \rangle_t = t$

Résultat

Pour un mouvement brownien standard $(W_t)_{t \geq 0}$,

$$[W]_t = \langle W \rangle_t = t.$$

- C'est le fait le plus important de CM3.
- Interprétation : "le carré du bruit est du temps".

Théorème : $\langle W \rangle_t = t$

Résultat

Pour un mouvement brownien standard $(W_t)_{t\geq 0}$,

$$[W]_t = \langle W \rangle_t = t.$$

- C'est le fait le plus important de CM3.
- Interprétation : "le carré du bruit est du temps".

Au tableau : À écrire (énoncé)

$$\sum_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \xrightarrow{\|\pi\|\to 0} t.$$

Au tableau : Stratégie de preuve (à annoncer)

1) Prendre partitions uniformes/dyadiques.
2) Calculer l'espérance : $\mathbb{E}[Q_\pi] = t$.
3) Calculer la variance : $\mathrm{Var}(Q_\pi) \to 0$.
4) Conclure : convergence en L^2 donc en probabilité.

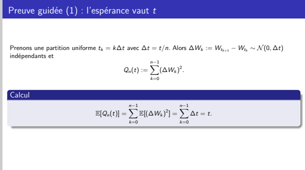
Preuve guidée (1) : l'espérance vaut t

Prenons une partition uniforme $t_k = k\Delta t$ avec $\Delta t = t/n$. Alors $\Delta W_k := W_{t_{k+1}} - W_{t_k} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ indépendants et

$$Q_n(t) := \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta W_k)^2.$$

Calcul

$$\mathbb{E}[Q_n(t)] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[(\Delta W_k)^2] = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t = t.$$



Au tableau : À écrire (très court)

$\Delta W_k \sim \mathcal{N}(0, \Delta t) \Rightarrow \mathbb{E}[(\Delta W_k)^2] = \Delta t\,.$
$\mathbb{E}[Q_n] = \sum \Delta t = t\,.$

Au tableau : À dire

`Ici on utilise seulement : variance d'une gaussienne centrée.`

Preuve guidée (2) : la variance tend vers 0

Comme les ΔW_k sont indépendants,

$$\mathrm{Var}(Q_n(t)) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}\left((\Delta W_k)^2\right).$$

Pour $Z \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$

On sait $\mathbb{E}[Z^4] = 3(\Delta t)^2$, donc

$$\mathrm{Var}(Z^2) = \mathbb{E}[Z^4] - \mathbb{E}[Z^2]^2 = 3(\Delta t)^2 - (\Delta t)^2 = 2(\Delta t)^2.$$

Ainsi

$$\mathrm{Var}(Q_n(t)) = n \cdot 2(\Delta t)^2 = 2\,\frac{t^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Preuve guidée (2) : la variance tend vers 0

Comme les ΔW_k sont indépendants,

$$\mathrm{Var}(Q_n(t)) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}\left((\Delta W_k)^2\right).$$

Pour $Z \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$

On sait $\mathbb{E}[Z^4] = 3(\Delta t)^2$, donc

$$\mathrm{Var}(Z^2) = \mathbb{E}[Z^4] - \mathbb{E}[Z^2]^2 = 3(\Delta t)^2 - (\Delta t)^2 = 2(\Delta t)^2.$$

Ainsi

$$\mathrm{Var}(Q_n(t)) = n \cdot 2(\Delta t)^2 = 2\,\frac{t^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Au tableau : À écrire (avec le moment 4)

$Z = \sqrt{\Delta t}\, G, \quad G \sim \mathcal{N}(0,1)$.
$\mathbb{E}[G^4] = 3 \Rightarrow \mathbb{E}[Z^4] = (\Delta t)^2 \mathbb{E}[G^4] = 3(\Delta t)^2$.
$\mathrm{Var}(Z^2) = 3(\Delta t)^2 - (\Delta t)^2 = 2(\Delta t)^2$.
$\mathrm{Var}(Q_n) = n \cdot 2(\Delta t)^2 = 2t^2/n \to 0$.

Au tableau : Commentaire

La preuve passe par convergence en L^2 : $\mathbb{E}[(Q_n - t)^2] = \mathrm{Var}(Q_n) \to 0$.

Conclusion : convergence en L^2 puis en probabilité

On a montré :

$$\mathbb{E}[Q_n(t)] = t, \qquad \mathrm{Var}(Q_n(t)) \to 0.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[(Q_n(t) - t)^2\right] = \mathrm{Var}(Q_n(t)) \to 0,$$

c'est-à-dire $Q_n(t) \to t$ en L^2, donc en probabilité.

Lecture

$$\sum (\Delta W)^2 \to t \quad \Longleftrightarrow \quad (dW)^2 = dt.$$

Conclusion : convergence en L^2 puis en probabilité

On a montré :

$$\mathbb{E}[Q_n(t)] = t, \qquad \mathrm{Var}(Q_n(t)) \to 0.$$

Donc

$$\mathbb{E}\big[(Q_n(t) - t)^2\big] = \mathrm{Var}(Q_n(t)) \to 0,$$

c'est-à-dire $Q_n(t) \to t$ en L^2, donc en probabilité.

Lecture

$$\sum (\Delta W)^2 \to t \quad \Longleftrightarrow \quad (dW)^2 = dt.$$

Au tableau : À écrire (phrase de transition)

Convergence en $L^2 \Rightarrow (dW)^2 = dt$ comme règle de calcul.

Au tableau : Mini-pédagogie

Insister : on n'a pas dit que W est dérivable.

On dit que le *carré des incréments* est de l'ordre de Δt et s'additionne en t.

Covariation : définition

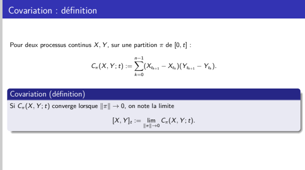
Pour deux processus continus X, Y, sur une partition π de $[0, t]$:

$$C_\pi(X, Y; t) := \sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})(Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k}).$$

Covariation (définition)

Si $C_\pi(X, Y; t)$ converge lorsque $\|\pi\| \to 0$, on note la limite

$$[X, Y]_t := \lim_{\|\pi\| \to 0} C_\pi(X, Y; t).$$



Covariation : définition

Pour deux processus continus X, Y, sur une partition π de $[0, t]$:

$$C_\pi(X, Y; t) := \sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})(Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k}).$$

Covariation (définition)

Si $C_\pi(X, Y; t)$ converge lorsque $\|\pi\| \to 0$, on note la limite

$$[X, Y]_t := \lim_{\|\pi\| \to 0} C_\pi(X, Y; t).$$

Au tableau : À écrire

$$[X, Y]_t = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_k \Delta X_k \, \Delta Y_k, \qquad [X]_t = [X, X]_t.$$

Au tableau : Commentaire

`C'est le "terme croisé" qui apparaît dans l'intégration par parties stochastique (CM5).`

Identité utile : polarisation

Polarisation (processus continus)

Si X, Y admettent une covariation (p.ex. processus d'Itô continus), alors

$$[X, Y]_t = \frac{1}{2}\Big([X+Y]_t - [X]_t - [Y]_t\Big) = \frac{1}{4}\Big([X+Y]_t - [X-Y]_t\Big).$$

Cas brownien

Pour deux browniens W et $\widetilde{W}$ indépendants,

$$[W, \widetilde{W}]_t = 0, \qquad [W]_t = t, \ [\widetilde{W}]_t = t.$$

Identité utile : polarisation

Polarisation (processus continus)

Si X, Y admettent une covariation (p.ex. processus d'Itô continus), alors

$$[X,Y]_t = \frac{1}{2}\Big([X+Y]_t - [X]_t - [Y]_t\Big) = \frac{1}{4}\Big([X+Y]_t - [X-Y]_t\Big).$$

Cas brownien

Pour deux browniens W et $\widetilde{W}$ indépendants,

$$[W,\widetilde{W}]_t = 0, \qquad [W]_t = t,\ [\widetilde{W}]_t = t.$$

Au tableau : À écrire (polarisation)

$(\Delta(X+Y))^2 = (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + 2\Delta X \Delta Y$.

Sommer et passer à la limite $\Rightarrow$ $[X+Y] = [X] + [Y] + 2[X,Y]$.

Au tableau : À dire

Cette identité est le bon moyen de définir [X,Y] si besoin, à partir de variations quadratiques.

Lien avec les intégrales d'Itô

Fait (à utiliser ensuite)

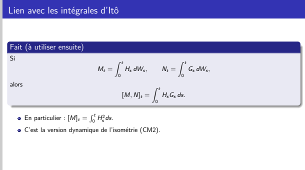
Si

$$M_t = \int_0^t H_s \, dW_s, \qquad N_t = \int_0^t G_s \, dW_s,$$

alors

$$[M, N]_t = \int_0^t H_s G_s \, ds.$$

- En particulier : $[M]_t = \int_0^t H_s^2 ds$.
- C'est la version dynamique de l'isométrie (CM2).



Au tableau : À écrire (à annoncer sans preuve complète si court)

$M = \int H\, dW, \;\; N = \int G\, dW \;\; \Rightarrow \;\; [M, N]_t = \int_0^t HG\, ds.$

Au tableau : Commentaire

On peut démontrer sur simples : $\Delta M_i = X_i \Delta W_i$, $\Delta N_i = Y_i \Delta W_i \Rightarrow \sum \Delta M_i \Delta N_i \approx \sum X_i Y_i \Delta t_i$.

Règles de calcul (heuristiques) : le dictionnaire

Règles

Sur un incrément infinitésimal :

$$(dW_t)^2 = dt, \qquad dt\, dW_t = 0, \qquad (dt)^2 = 0.$$

- Ce sont des **règles de calcul** issues des limites sur partitions.
- Elles seront justifiées par la formule d'Itô (CM4) et les variations quadratiques.

Ne pas confondre

W n'est pas dérivable ; on ne dit pas que $(\dot{W})^2 = 1$. On dit : *au niveau des sommes de carrés d'incréments*, la limite est t.

Règles de calcul (heuristiques) : le dictionnaire

Règles

Sur un incrément infinitésimal :

$$(dW_t)^2 = dt, \qquad dt\, dW_t = 0, \qquad (dt)^2 = 0.$$

- Ce sont des **règles de calcul** issues des limites sur partitions.
- Elles seront justifiées par la formule d'Itô (CM4) et les variations quadratiques.

Ne pas confondre

W n'est pas dérivable ; on ne dit pas que $(\dot{W})^2 = 1$. On dit : *au niveau des sommes de carrés d'incréments*, la limite est t.

Au tableau : À écrire (avec la heuristique $\Delta W \sim \sqrt{\Delta t}$)

$\Delta W \approx \sqrt{\Delta t} \Rightarrow (\Delta W)^2 \approx \Delta t$.
$\Delta t\, \Delta W \approx \Delta t^{3/2} \to 0, \quad (\Delta t)^2 \to 0$.

Au tableau : Commentaire pédagogique

`Très utile pour que les étudiants "acceptent" le calcul Itô avant les preuves.`

Mini-exemple : pourquoi apparaît un terme en dt ?

Considérons un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$f(W_{t+\Delta t}) - f(W_t) \approx f'(W_t)\Delta W + \frac{1}{2} f''(W_t)(\Delta W)^2.$$

En sommant et passant à la limite :

$$\sum f'(W_{t_k})\Delta W_k \to \int_0^t f'(W_s)\, dW_s, \quad \sum \frac{1}{2} f''(W_{t_k})(\Delta W_k)^2 \to \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\, ds.$$

Teaser

C'est exactement la structure de la **formule d'Itô** (CM4).

Mini-exemple : pourquoi apparaît un terme en *dt* ?

Considérons un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$f(W_{t+\Delta t}) - f(W_t) \approx f'(W_t)\Delta W + \frac{1}{2}f''(W_t)(\Delta W)^2.$$

En sommant et passant à la limite :

$$\sum f'(W_{t_k})\Delta W_k \to \int_0^t f'(W_s)\,dW_s, \quad \sum \frac{1}{2}f''(W_{t_k})(\Delta W_k)^2 \to \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\,ds.$$

Teaser

C'est exactement la structure de la **formule d'Itô** (CM4).

Au tableau : À écrire (3 lignes, très efficace)

`Taylor :` $\Delta f \approx f'\Delta W + \frac{1}{2}f''(\Delta W)^2$.
`Somme :` $\sum f'\Delta W \to \int f'\,dW, \quad \sum \frac{1}{2}f''(\Delta W)^2 \to \frac{1}{2}\int f''\,dt$.
`Donc :` $df = f'(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)\,dt$.

Au tableau : Commentaire

`C'est le moment où ils voient enfin d'où vient le fameux` $\frac{1}{2}f''$.

Synthèse CM3

- Variation quadratique : $[X]_t = \lim \sum (\Delta X)^2$.
- Brownien : $[W]_t = t$.
- Covariation : $[X, Y]_t = \lim \sum \Delta X \, \Delta Y$.
- Règles : $(dW)^2 = dt$, $dt\, dW = 0$, $(dt)^2 = 0$.

Prochain CM (CM4)

Formule d'Itô pour $f(W_t)$ et $f(t, W_t)$ + exemples (finance : GBM, log-retours).

Synthèse CM3

- Variation quadratique : $[X]_t = \lim \sum (\Delta X)^2$.
- Brownien : $[W]_t = t$.
- Covariation : $[X, Y]_t = \lim \sum \Delta X \, \Delta Y$.
- Règles : $(dW)^2 = dt$, $dt \, dW = 0$, $(dt)^2 = 0$.

Prochain CM (CM4)

Formule d'Itô pour $f(W_t)$ et $f(t, W_t)$ + exemples (finance : GBM, log-retours).

Au tableau : Question de sortie

Pourquoi $\sum (\Delta W)^2$ converge mais $\sum |\Delta W|$ diverge ?

Réponse : $|\Delta W| \sim \sqrt{\Delta t} \Rightarrow \sum |\Delta W| \sim n\sqrt{t/n} = \sqrt{nt} \to \infty$,

tandis que $\sum (\Delta W)^2 \sim \sum \Delta t = t$.

Exercices (courts) à donner / TP

1. Heuristique : expliquer pourquoi $\sum_k |\Delta W_k|$ diverge quand $\|\pi\| \to 0$.
2. Sur partition uniforme : calculer $\mathbb{E}[Q_n(t)]$ et $\mathrm{Var}(Q_n(t))$ pour $Q_n(t) = \sum(\Delta W_k)^2$.
3. (Polarisation) Déduire $[X, Y]$ à partir de $[X + Y]$, $[X]$, $[Y]$.
4. (Bonus) Si W et $\widetilde{W}$ sont indépendants, justifier que $[W, \widetilde{W}]_t = 0$.

1. Heuristique : expliquer pourquoi $\sum_k |\Delta W_k|$ diverge quand $\|\pi\| \to 0$.
2. Sur partition uniforme : calculer $\mathbb{E}[Q_n(t)]$ et $\mathrm{Var}(Q_n(t))$ pour $Q_n(t) = \sum(\Delta W_k)^2$.
3. (Polarisation) Déduire $[X, Y]$ à partir de $[X+Y]$, $[X]$, $[Y]$.
4. (Bonus) Si W et $\widetilde{W}$ sont indépendants, justifier que $[W, \widetilde{W}]_t = 0$.

Au tableau : Corrigé express

(1) $|\Delta W| \sim \sqrt{\Delta t} \Rightarrow \sum |\Delta W| \sim n\sqrt{t/n} = \sqrt{nt} \to \infty$.

(2) $\mathbb{E}[Q_n] = t$, $\mathrm{Var}(Q_n) = 2t^2/n$.

(3) $[X, Y] = \frac{1}{2}([X+Y] - [X] - [Y])$.

(4) Polarisation + indépendance : incréments orthogonaux $\Rightarrow$ croisé nul.