Modélisation stochastique
CM5 : Covariation, intégration par parties, exponentielle stochastique

Toolkit pour EDS (accent finance)

Antonio Falcó

École Centrale de Nantes

12 février 2026

2026-02-12

CM5 – Outils : $\langle\cdot,\cdot\rangle$ & EDS

Modélisation stochastique
CM5 : Covariation, intégration par parties, exponentielle stochastique
Toolkit pour EDS (accent finance)

Antonio Falcó

École Centrale de Nantes

12 février 2026

Objectif (2h). Donner le “toolkit” de calcul sur les processus d’Itô, indispensable en modélisation :

- produit (intégration par parties) avec terme de covariation,
- covariation explicite des intégrales d’Itô,
- exponentielle stochastique et résolutions rapides d’EDS linéaires,
- mini-application finance (pricing intuition : prix actualisé martingale, sans tout Girsanov).

Au tableau : Timing suggéré

`10’ rappel Itô; 25’ covariation + règles; 25’ produit / IBP; 25’ exponentielle stochastique; 20’ EDS linéaires; 15’ mini finance + synthèse.`

Plan (2h)

1. Rappel : processus d'Itô et formule d'Itô
2. Covariation : $[X, Y]$ pour processus d'Itô
3. Règles différentielles : $dX\,dY$ et $(dX)^2$
4. Intégration par parties (produit) : $d(XY)$
5. Exponentielle stochastique $\mathcal{E}(\cdot)$
6. Résolution d'EDS linéaires (variation des constantes)
7. Mini-application finance (GBM, actualisation, martingales)

Plan (2h)

1. Rappel : processus d'Itô et formule d'Itô
2. Covariation : $[X, Y]$ pour processus d'Itô
3. Règles différentielles : $dX\,dY$ et $(dX)^2$
4. Intégration par parties (produit) : $d(XY)$
5. Exponentielle stochastique $\mathcal{E}(\cdot)$
6. Résolution d'EDS linéaires (variation des constantes)
7. Mini-application finance (GBM, actualisation, martingales)

Au tableau : Fil rouge

CM4 : Itô = règle de chaîne.

CM5 : produit + exponentielle = règle de calcul pour résoudre / simplifier des EDS.

Rappel : processus d'Itô

Définition

Un processus d'Itô s'écrit

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s\, ds + \int_0^t b_s\, dW_s \quad \Longleftrightarrow \quad dX_t = a_t\, dt + b_t\, dW_t.$$

Itô (CM4)

Pour $f \in C^{1,2}$,

$$df(t, X_t) = \big(f_t + a\, f_x + \tfrac{1}{2} b^2 f_{xx}\big)(t, X_t)\, dt + \big(b\, f_x\big)(t, X_t)\, dW_t.$$

Rappel : processus d'Itô

Définition

Un processus d'Itô s'écrit

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s\,ds + \int_0^t b_s\,dW_s \quad\Longleftrightarrow\quad dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t.$$

Itô (CM4)

Pour $f \in C^{1,2}$,

$$df(t,X_t) = \left(f_t + a\,f_x + \tfrac{1}{2}b^2 f_{xx}\right)(t,X_t)\,dt + \left(b\,f_x\right)(t,X_t)\,dW_t.$$

Au tableau : À écrire (rappel minimal)

$$dX = a\,dt + b\,dW, \quad df = f_t\,dt + f_x\,dX + \tfrac{1}{2} f_{xx}(dX)^2, \quad (dX)^2 = b^2\,dt.$$

Covariation : résultat clé

Soient

$$dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t, \qquad dY_t = c_t\,dt + d_t\,dW_t.$$

Fait

$$[X,Y]_t = \int_0^t b_s d_s\,ds, \qquad [X]_t = \int_0^t b_s^2\,ds.$$

Notation différentielle (règle)

$$d[X,Y]_t = b_t d_t\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad dX_t\,dY_t = b_t d_t\,dt.$$

Covariation : résultat clé

Soient

$$dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t, \qquad dY_t = c_t\,dt + d_t\,dW_t.$$

Fait

$$[X,Y]_t = \int_0^t b_s d_s\,ds, \qquad [X]_t = \int_0^t b_s^2\,ds.$$

Notation différentielle (règle)

$$d[X,Y]_t = b_t d_t\,dt \iff dX_t\,dY_t = b_t d_t\,dt.$$

Au tableau : À écrire (règle de base)

$$dX = a\,dt + b\,dW, \quad dY = c\,dt + d\,dW \quad \Rightarrow \quad dX\,dY = b\,d\,dt.$$

Au tableau : Commentaire

`C'est la formalisation de : seuls les termes en` dW `"comptent" au second ordre.`

Preuve rapide sur processus simples (option)

Si

$$b_t = \sum_i B_i \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \qquad d_t = \sum_i D_i \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t),$$

alors, sur $(t_i, t_{i+1}]$,

$$\Delta X_i = B_i \, \Delta W_i + \mathcal{O}(\Delta t_i), \qquad \Delta Y_i = D_i \, \Delta W_i + \mathcal{O}(\Delta t_i).$$

Donc

$$\sum_i \Delta X_i \, \Delta Y_i = \sum_i B_i D_i (\Delta W_i)^2 + \text{termes négligeables} \longrightarrow \sum_i B_i D_i \, \Delta t_i = \int_0^t b_s d_s \, ds.$$

Preuve rapide sur processus simples (option)

Si

$$b_t = \sum_i B_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \qquad d_t = \sum_i D_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

alors, sur $(t_i, t_{i+1}]$,

$$\Delta X_i = B_i \, \Delta W_i + \mathcal{O}(\Delta t_i), \qquad \Delta Y_i = D_i \, \Delta W_i + \mathcal{O}(\Delta t_i).$$

Donc

$$\sum_i \Delta X_i \, \Delta Y_i = \sum_i B_i D_i (\Delta W_i)^2 + \text{termes négligeables} \longrightarrow \sum_i B_i D_i \, \Delta t_i = \int_0^t b_s d_s \, ds.$$

Au tableau : À écrire (idée)

$\Delta X \, \Delta Y \approx (b \, \Delta W)(d \, \Delta W) = bd(\Delta W)^2 \rightsquigarrow bd \, \Delta t.$

Au tableau : À dire

Vous pouvez le présenter comme la même logique que CM3 : $(\Delta W)^2 \to \Delta t$.

Produit : formule d'intégration par parties

Soient X, Y des processus d'Itô continus. Alors

Formule

$$d(X_t Y_t) = X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + d[X, Y]_t.$$

- Comparez à la formule classique : $d(XY) = X\, dY + Y\, dX$.
- Le terme supplémentaire est la **covariation**.

Produit : formule d'intégration par parties

Soient X, Y des processus d'Itô continus. Alors

Formule

$$d(X_t Y_t) = X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + d[X, Y]_t.$$

- Comparez à la formule classique : $d(XY) = X\, dY + Y\, dX$.
- Le terme supplémentaire est la **covariation**.

Au tableau : À écrire (très utile au tableau)

$d(XY) = X\, dY + Y\, dX + d[X, Y]$.

Au tableau : Commentaire pédagogique

`Dire : "en stochastique, le terme oublié en calcul classique est précisément` $d[X, Y]$`."`

Démonstration éclair (via $f(x, y) = xy$)

Prenez $f(x, y) = xy$. Alors $f_x = y$, $f_y = x$, $f_{xy} = 1$ et les autres dérivées secondes sont nulles. Avec les règles $dX\, dY = d[X, Y]$, on obtient :

$$d(XY) = Y\, dX + X\, dY + dX\, dY.$$

Or $dX\, dY = d[X, Y]$.

Démonstration éclair (via $f(x, y) = xy$)

Prenez $f(x, y) = xy$. Alors $f_x = y$, $f_y = x$, $f_{xy} = 1$ et les autres dérivées secondes sont nulles. Avec les règles $dX\,dY = d[X, Y]$, on obtient :

$$d(XY) = Y\,dX + X\,dY + dX\,dY.$$

Or $dX\,dY = d[X, Y]$.

Au tableau : À écrire

$f(x, y) = xy \Rightarrow df = y\,dX + x\,dY + dX\,dY.$

Au tableau : Commentaire

Même sans Itô 2D formel, vous pouvez justifier avec la règle : $(dX)(dY) = d[X, Y]$.

Conséquence : formule intégrale

En intégrant entre 0 et t :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \, dY_s + \int_0^t Y_s \, dX_s + [X, Y]_t.$$

Conséquence : formule intégrale

En intégrant entre 0 et t :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \, dY_s + \int_0^t Y_s \, dX_s + [X, Y]_t.$$

Au tableau : À écrire

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X \, dY + \int_0^t Y \, dX + [X, Y]_t.$$

Au tableau : À dire

C'est l'analogue stochastique de l'intégration par parties.

Exponentielle stochastique : définition

Cas le plus courant

Pour un processus adapté $\theta \in \mathcal{H}^2_T$, on définit

$$\mathcal{E}_t(\theta) := \exp\Big(\int_0^t \theta_s \, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 \, ds \Big).$$

Propriété fondamentale

$$d\mathcal{E}_t(\theta) = \theta_t \, \mathcal{E}_t(\theta) \, dW_t, \qquad \mathcal{E}_0(\theta) = 1.$$

Exponentielle stochastique : définition

Cas le plus courant

Pour un processus adapté $\theta \in \mathcal{H}^2_T$, on définit

$$\mathcal{E}_t(\theta) := \exp\Big(\int_0^t \theta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds\Big).$$

Propriété fondamentale

$$d\mathcal{E}_t(\theta) = \theta_t\, \mathcal{E}_t(\theta)\, dW_t, \qquad \mathcal{E}_0(\theta) = 1.$$

Au tableau : À écrire (résultat clé)

$E_t = \exp(\int_0^t \theta\, dW - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2\, dt) \Rightarrow dE_t = \theta_t E_t\, dW_t.$

Au tableau : Commentaire

`Outil standard pour linéariser/normaliser des EDS, et pour Girsanov (mais ici on reste light).`

Preuve : Itô sur l'exponentielle (à faire une fois)

Soit

$$Z_t = \int_0^t \theta_s \, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 \, ds.$$

Alors

$$dZ_t = \theta_t \, dW_t - \frac{1}{2}\theta_t^2 \, dt, \qquad (dZ_t)^2 = \theta_t^2 \, dt.$$

Avec $f(z) = e^z$, Itô donne

$$de^{Z_t} = e^{Z_t} \, dZ_t + \frac{1}{2} e^{Z_t} (dZ_t)^2 = \theta_t e^{Z_t} \, dW_t.$$

Preuve : Itô sur l'exponentielle (à faire une fois)

Soit

$$Z_t = \int_0^t \theta_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \, ds.$$

Alors

$$dZ_t = \theta_t \, dW_t - \frac{1}{2}\theta_t^2 \, dt, \qquad (dZ_t)^2 = \theta_t^2 \, dt.$$

Avec $f(z) = e^z$, Itô donne

$$de^{Z_t} = e^{Z_t} \, dZ_t + \frac{1}{2}e^{Z_t}(dZ_t)^2 = \theta_t e^{Z_t} \, dW_t.$$

Au tableau : À écrire (calcul propre)

$dZ = \theta \, dW - \frac{1}{2}\theta^2 \, dt, \;\; (dZ)^2 = \theta^2 \, dt.$
$d(e^Z) = e^Z dZ + \frac{1}{2}e^Z (dZ)^2 = \theta e^Z \, dW.$

Au tableau : À dire

`Le` $-\frac{1}{2}\theta^2 \, dt$ `est précisément choisi pour annuler le terme correctif.`

Résolution d'une EDS linéaire multiplicative

Problème

Résoudre

$$dX_t = \alpha_t X_t\,dt + \beta_t X_t\,dW_t, \qquad X_0 > 0.$$

Solution (forme exponentielle)

$$X_t = X_0 \exp\Big(\int_0^t (\alpha_s - \tfrac{1}{2}\beta_s^2)\,ds + \int_0^t \beta_s\,dW_s\Big).$$

Résolution d'une EDS linéaire multiplicative

Problème

Résoudre
$$dX_t = \alpha_t X_t\,dt + \beta_t X_t\,dW_t, \qquad X_0 > 0.$$

Solution (forme exponentielle)

$$X_t = X_0 \exp\Big(\int_0^t (\alpha_s - \tfrac{1}{2}\beta_s^2)\,ds + \int_0^t \beta_s\,dW_s \Big).$$

Au tableau : À écrire (idée via log)

Poser $Y_t = \ln X_t$, appliquer Itô :
$dY = \frac{1}{X} dX - \frac{1}{2}\frac{1}{X^2}(dX)^2 = (\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)\,dt + \beta\,dW.$

Au tableau : Commentaire

C'est la généralisation de GBM (CM4).

EDS linéaire additive : variation des constantes

Problème

$$dX_t = (\alpha_t X_t + \gamma_t)\, dt + (\beta_t X_t + \delta_t)\, dW_t, \qquad X_0 = x.$$

Attention (point-clé)

En stochastique, la formule produit contient un terme de covariation :

$$d(U_t X_t) = U_t\, dX_t + X_t\, dU_t + d[U, X]_t, \qquad d[U, X]_t = (\text{coef. } dW \text{ de } U)\,(\text{coef. } dW \text{ de } X)\, dt.$$

Si l'on choisit naïvement $dU_t = -\alpha_t U_t dt - \beta_t U_t dW_t$, il reste un terme $-\beta_t^2 U_t X_t\, dt$ (donc on n'élimine pas complètement les termes en X_t).

Variation des constantes : calcul de $d(U_tX_t)$ (1/4)

Cadre

$$dX_t = (\alpha_t X_t + \gamma_t)\,dt + (\beta_t X_t + \delta_t)\,dW_t, \qquad X_0 = x.$$

On introduit un facteur intégrant de la forme

$$dU_t = a_t U_t\,dt + b_t U_t\,dW_t, \qquad U_0 = 1.$$

Formule produit (Itô)

$$d(U_tX_t) = U_t\,dX_t + X_t\,dU_t + d[U,X]_t.$$

Variation des constantes : calcul de $d(U_t X_t)$ (2/4)

Calcul des deux premiers termes

$$U_t\, dX_t = U_t(\alpha_t X_t + \gamma_t)\, dt + U_t(\beta_t X_t + \delta_t)\, dW_t,$$

$$X_t\, dU_t = X_t(a_t U_t\, dt + b_t U_t\, dW_t) = a_t U_t X_t\, dt + b_t U_t X_t\, dW_t.$$

Rappel

En Itô, il faut ajouter le terme de covariation $d[U, X]_t$.

Variation des constantes : calcul de $d(U_tX_t)$ (3/4)

Terme de covariation $d[U,X]_t$

Les coefficients de dW_t sont :

$$\text{dans } dU_t : \ b_tU_t, \qquad \text{dans } dX_t : \ \beta_tX_t + \delta_t.$$

Donc

$$d[U,X]_t = (b_tU_t)(\beta_tX_t + \delta_t)\,dt = b_t\beta_tU_tX_t\,dt + b_tU_t\delta_t\,dt.$$

Somme et regroupement

$$d(U_tX_t) = U_tX_t(\alpha_t + a_t + b_t\beta_t)\,dt + U_t(\gamma_t + b_t\delta_t)\,dt$$
$$+ U_t\big((\beta_t + b_t)X_t + \delta_t\big)\,dW_t.$$

Variation des constantes : facteur intégrant et simplification (4/4)

Annuler tous les termes en X_t

On impose :

$$\beta_t + b_t = 0 \;\Rightarrow\; b_t = -\beta_t,$$

$$\alpha_t + a_t + b_t\beta_t = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_t + a_t - \beta_t^2 = 0 \;\Rightarrow\; a_t = -\alpha_t + \beta_t^2.$$

Donc

$$\boxed{dU_t = (-\alpha_t + \beta_t^2)U_t\,dt - \beta_t U_t\,dW_t.}$$

Résultat

$$\boxed{d(U_t X_t) = U_t(\gamma_t - \beta_t\delta_t)\,dt + U_t\delta_t\,dW_t.}$$

EDS linéaire additive : variation des constantes (solution explicite)

Intégration et solution explicite

En intégrant de 0 à t :

$$U_t X_t = x + \int_0^t U_s(\gamma_s - \beta_s \delta_s)\, ds + \int_0^t U_s \delta_s \, dW_s,$$

d'où

$$\boxed{X_t = U_t^{-1}\left(x + \int_0^t U_s(\gamma_s - \beta_s \delta_s)\, ds + \int_0^t U_s \delta_s \, dW_s\right).}$$

De plus, U s'écrit sous forme d'exponentielle stochastique :

$$\boxed{U_t = \exp\Big(-\int_0^t \beta_s \, dW_s - \int_0^t \big(\alpha_s - \tfrac{1}{2}\beta_s^2\big)\, ds\Big).}$$

EDS linéaire additive : variation des constantes (solution explicite)

Intégration et solution explicite

En intégrant de 0 à t :

$$U_t X_t = x + \int_0^t U_s(\gamma_s - \beta_s\delta_s)\,ds + \int_0^t U_s\delta_s\,dW_s,$$

d'où

$$\boxed{X_t = U_t^{-1}\left(x + \int_0^t U_s(\gamma_s - \beta_s\delta_s)\,ds + \int_0^t U_s\delta_s\,dW_s\right).}$$

De plus, U s'écrit sous forme d'exponentielle stochastique :

$$\boxed{U_t = \exp\Big(-\int_0^t \beta_s\,dW_s - \int_0^t \big(\alpha_s - \tfrac{1}{2}\beta_s^2\big)\,ds\Big).}$$

Au tableau : À écrire (schéma au tableau)

1) Partir de $d(UX) = U\,dX + X\,dU + d[U,X]$.
2) Poser $dU = aUdt + bUdW \Rightarrow d[U,X] = (bU)(\beta X + \delta)dt$.
3) Choisir $b = -\beta$ et $a = -\alpha + \beta^2$ pour annuler tous les termes en X.
4) Il reste $d(UX) = U(\gamma - \beta\delta)dt + U\delta dW$, puis intégrer/diviser par U.

Au tableau : Commentaire

Même idée qu'en EDO (facteur intégrant), mais il faut compenser le terme $d[U,X]$, ce qui ajoute le β^2 dans le drift de U.

Finance : actualisation et martingale (intuition)

Sous le GBM (CM4) :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t.$$

Définissons $B_t = e^{rt}$ (compte bancaire) et le prix actualisé $\widetilde{S}_t = S_t / B_t$. Alors

$$d\widetilde{S}_t = (\mu - r)\widetilde{S}_t \, dt + \sigma \widetilde{S}_t \, dW_t.$$

Point clé

Sous une mesure "risque-neutre" (idée), le drift devient r et $\widetilde{S}_t$ devient une martingale.

Finance : actualisation et martingale (intuition)

Sous le GBM (CM4) :

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t.$$

Définissons $B_t = e^{rt}$ (compte bancaire) et le prix actualisé $\widetilde{S}_t = S_t/B_t$. Alors

$$d\widetilde{S}_t = (\mu - r)\widetilde{S}_t\,dt + \sigma\widetilde{S}_t\,dW_t.$$

Point clé

Sous une mesure "risque-neutre" (idée), le drift devient r et $\widetilde{S}_t$ devient une martingale.

Au tableau : À écrire (calcul rapide)

$\widetilde{S} = e^{-rt}S, \quad d(e^{-rt}) = -re^{-rt}\,dt.$

Produit : $d\widetilde{S} = e^{-rt}dS + S\,d(e^{-rt}) + d[S, e^{-rt}].$

Comme e^{-rt} est de variation finie, $d[S, e^{-rt}] = 0$.

Donc $d\widetilde{S} = e^{-rt}(\mu S\,dt + \sigma S\,dW) - re^{-rt}S\,dt.$

Au tableau : Commentaire

Cela montre l'utilité directe de la formule produit.

Synthèse CM5 : le toolkit

- Covariation : $dX\,dY = bd\,dt$ si $dX = a\,dt + b\,dW$, $dY = c\,dt + d\,dW$.
- Produit : $d(XY) = X\,dY + Y\,dX + d[X, Y]$.
- Exponentielle stochastique : $\mathcal{E}_t(\theta) = \exp(\int \theta\,dW - \frac{1}{2}\int \theta^2\,dt)$ et $d\mathcal{E} = \theta\mathcal{E}\,dW$.
- Résolution d'EDS linéaires : log / facteur intégrant + produit.

Synthèse CM5 : le toolkit

- Covariation : $dX\,dY = bd\,dt$ si $dX = a\,dt + b\,dW$, $dY = c\,dt + d\,dW$.
- Produit : $d(XY) = X\,dY + Y\,dX + d[X,Y]$.
- Exponentielle stochastique : $\mathcal{E}_t(\theta) = \exp(\int \theta\,dW - \frac{1}{2}\int \theta^2\,dt)$ et $d\mathcal{E} = \theta\mathcal{E}\,dW$.
- Résolution d'EDS linéaires : log / facteur intégrant + produit.

Au tableau : Question de sortie

Pourquoi le produit stochastique a un terme $d[X,Y]$?
Réponse : parce que les termes en dW sont d'ordre $\sqrt{dt}$, donc leurs produits sont d'ordre dt.

Exercices (TP3 / maison)

1. Soit $X_t = W_t$ et $Y_t = tW_t$. Calculer $d(X_t Y_t)$ et $[X, Y]_t$.
2. Montrer que $[W, W]_t = t$ et $[W, t]_t = 0$.
3. (Produit) Pour S_t GBM et $B_t = e^{rt}$, retrouver $d(S_t/B_t)$.
4. (Exponentielle) Vérifier que $\mathcal{E}_t(\theta)$ vérifie $d\mathcal{E} = \theta\mathcal{E}\, dW$.
5. (EDS) Résoudre $dX_t = (aX_t + c)\, dt + (bX_t + d)\, dW_t$ par facteur intégrant.

Exercices (TP3 / maison)

1. Soit $X_t = W_t$ et $Y_t = tW_t$. Calculer $d(X_tY_t)$ et $[X, Y]_t$.
2. Montrer que $[W, W]_t = t$ et $[W, t]_t = 0$.
3. (Produit) Pour S_t GBM et $B_t = e^{rt}$, retrouver $d(S_t/B_t)$.
4. (Exponentielle) Vérifier que $\mathcal{E}_t(\theta)$ vérifie $d\mathcal{E} = \theta\mathcal{E}\,dW$.
5. (EDS) Résoudre $dX_t = (aX_t + c)\,dt + (bX_t + d)\,dW_t$ par facteur intégrant.

Au tableau : Indications express

(1) $d(tW) = t\,dW + W\,dt$, donc $d(W \cdot tW) = \cdots + d[W, tW]$, et $d[W, tW] = t\,dt$.

(2) $[W, t] = 0$ car t est de variation finie.

(5) choisir U tel que $dU = -aU\,dt - bU\,dW$, puis $d(UX) = U(c\,dt + d\,dW)$.